Análisis de Series de Tiempo

Camilo Enrique Argoty Pulido

Especialización en Inteligencia Artificial

3 de abril de 2025

Introducción a los Modelos ARIMA

Auto-**R**egresive **I**ntegrated **M**oving **A**verage.

Los modelos ARIMA(p,d,q) tienen tres parámetros: p (rezagos de la propia variable), d (orden de diferenciación hasta que se haga estacionaria la serie), y q (rezagos del error de estimación).

1. p es el número de términos autorregresivos.
2. d es el número de diferencias que tomo sobre la serie original.
3. q es el número de términos moving-average

Si la serie necesita ser diferenciada (calcular primeras o segundas diferencias) para hacerla estacionaria se dice que es "integrada" de orden d. Es decir, es I(d). Si la serie temporal que me dan ya es estacionaria, entonces la serie es I(0). Si la tengo que diferenciar una vez para que se haga estacionaria, entonces es I(1), y así sucesivamente.

El objetivo es definir los valores de p, d, q que separen la serie temporal entre una "señal" que nos permita hacer forecasts, y ruido blanco.

Otras extensiones de los modelos ARMA

1. SARIMA: Modelo de media móvil autorregresiva integrada estacional, refleja la característica de variación estacional en series de tiempo.
2. ARFIMA: la F indica que el parámetro d no es entero.
3. ARIMAX: Modelo de media móvil autorregresiva integrada con entradas exógenas.
4. NARMA, WARIMAX,...

Modelos estacionales

Diferenciación estacional

Dada una serie de tiempo X_t y un entero positivo s, se define el operador **diferenciación estacional** Δ_s como:

Diferenciación estacional

Dada una serie de tiempo X_t y un entero positivo s, se define el operador **diferenciación estacional** Δ_s como:

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = (I - L^s)X_t$$

¿Qué es estacionalidad?

Una serie se dice **estacional** si la serie $\Delta_s X_t$ es estacionaria para algún valor de s.

¿Qué es estacionalidad?

Una serie se dice **estacional** si la serie $\Delta_s X_t$ es estacionaria para algún valor de s.

El valor s anteriormente definidio se conoce como **periodo de estacionalidad**.

¿Qué es estacionalidad?

Una serie se dice **estacional** si la serie $\Delta_s X_t$ es estacionaria para algún valor de s.

El valor s anteriormente definidio se conoce como **periodo de estacionalidad**.

No es frecuente hablar de series puramente estacionales. Es más común hablar de componentes estacionales dentro de otros modelos, en particular dentro de los modelos ARIMA.

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

El polinomio $I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$ se lo denomina **polinomio característico autorregresivo** de la serie X_t y se lo suele denotar por $\phi(L)$.

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

El polinomio $I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$ se lo denomina **polinomio característico autorregresivo** de la serie X_t y se lo suele denotar por $\phi(L)$.

Por otro lado, el polinomio

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

El polinomio $I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$ se lo denomina **polinomio característico autorregresivo** de la serie X_t y se lo suele denotar por $\phi(L)$.

Por otro lado, el polinomio $I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

El polinomio $I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$ se lo denomina **polinomio característico autorregresivo** de la serie X_t y se lo suele denotar por $\phi(L)$.

Por otro lado, el polinomio $I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$ se denomina **polinomio característico de media móvil** de la serie X_t y se lo denota por $\theta(L)$.

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

El polinomio $I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$ se lo denomina **polinomio característico autorregresivo** de la serie X_t y se lo suele denotar por $\phi(L)$.

Por otro lado, el polinomio $I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$ se denomina **polinomio característico de media móvil** de la serie X_t y se lo denota por $\theta(L)$.

Así, el modelo ARIMA queda:

Modelos ARIMA con operadores

En un modelo ARIMA(p,d,q) se tiene que:

$$\Delta^d X_t = \varphi_1 \Delta^d X_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta^d X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

En otras palabras,
$(I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)(I - L)^d X_t = (I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$

El polinomio $I - \varphi_1 - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$ se lo denomina **polinomio característico autorregresivo** de la serie X_t y se lo suele denotar por $\phi(L)$.

Por otro lado, el polinomio $I + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$ se denomina **polinomio característico de media móvil** de la serie X_t y se lo denota por $\theta(L)$.

Así, el modelo ARIMA queda:

$$\phi(L)(I - L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Modelos SARIMA

Siguiendo la misma línea, un modelo SARIMA(p,d,q)(P,D,Q,s) es de la forma:

Modelos SARIMA

Siguiendo la misma línea, un modelo SARIMA(p,d,q)(P,D,Q,s) es de la forma:

$$\phi(L)\Phi(L)(I - L)^d(I - L^s)^D X_t = \theta(L)\Theta(L)\varepsilon_t$$

Modelos SARIMA

Siguiendo la misma línea, un modelo SARIMA(p,d,q)(P,D,Q,s) es de la forma:

$$\phi(L)\Phi(L)(I-L)^d(I-L^s)^D X_t = \theta(L)\Theta(L)\varepsilon_t$$

donde,

$$\Phi(L) = I - \Phi_1 L - \cdots - \Phi_P L^P$$

Modelos SARIMA

Siguiendo la misma línea, un modelo SARIMA(p,d,q)(P,D,Q,s) es de la forma:

$$\phi(L)\Phi(L)(I-L)^d(I-L^s)^D X_t = \theta(L)\Theta(L)\varepsilon_t$$

donde,

$$\Phi(L) = I - \Phi_1 L - \cdots - \Phi_P L^P$$

y

Modelos SARIMA

Siguiendo la misma línea, un modelo SARIMA(p,d,q)(P,D,Q,s) es de la forma:

$$\phi(L)\Phi(L)(I-L)^d(I-L^s)^D X_t = \theta(L)\Theta(L)\varepsilon_t$$

donde,

$$\Phi(L) = I - \Phi_1 L - \cdots - \Phi_P L^P$$

y

$$\Theta(L) = I + \Theta_1 L + \cdots + \Theta_Q L^Q$$

Caso SARIMA(p,0,q)(P,0,Q,s)

En el caso de un modelo SARIMA(p,0,q)(P,0,Q,s), lo anterior queda:

Caso SARIMA(p,0,q)(P,0,Q,s)

En el caso de un modelo SARIMA(p,0,q)(P,0,Q,s), lo anterior queda:

$$x_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^{P} \Phi_i x_{t-is} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{Q} \Phi_i \varepsilon_{t-js}$$

Modelos de Heteroscedasticidad condicional

Homoscedasticidad y heteroscedasticidad

Hasta ahora, ha sido necesario asumir estacionaridad, así sea después de diferenciaciones iteradas.

Una de las implicaciones de la estacionaridad es que la varianza es la misma para todas las variables X_t. Esta condición se denomina **homoscedasticidad**.

Homoscedasticidad y heteroscedasticidad

Hasta ahora, ha sido necesario asumir estacionaridad, así sea después de diferenciaciones iteradas.

Una de las implicaciones de la estacionaridad es que la varianza es la misma para todas las variables X_t. Esta condición se denomina **homoscedasticidad**.

Sin embargo, como es de esperar, esta condición no siempre se cumple en la vida real.

Uno de los casos en los que esto no se cumple, ocurre en las series financieras, donde la varianza representa la volatilidad de un retorno, cuando dicho retorno es la serie X_t.

Homoscedasticidad y heteroscedasticidad

Hasta ahora, ha sido necesario asumir estacionaridad, así sea después de diferenciaciones iteradas.

Una de las implicaciones de la estacionaridad es que la varianza es la misma para todas las variables X_t. Esta condición se denomina **homoscedasticidad**.

Sin embargo, como es de esperar, esta condición no siempre se cumple en la vida real.

Uno de los casos en los que esto no se cumple, ocurre en las series financieras, donde la varianza representa la volatilidad de un retorno, cuando dicho retorno es la serie X_t.

Para ello se han creado los modelos de **Heteroscedasticidad condicional (CH)**

Modelos ARCH

Una serie sigue un modelo **autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de orden** m (ARCH(m)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

Modelos ARCH

Una serie sigue un modelo **autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de orden** m (ARCH(m)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Modelos ARCH

Una serie sigue un modelo **autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de orden** m (ARCH(m)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

donde μ_t es una serie de tiempo autorregresiva y

Modelos ARCH

Una serie sigue un modelo **autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de orden** m (ARCH(m)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

donde μ_t es una serie de tiempo autorregresiva y

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Modelos GARCH

Una serie sigue un modelo **general autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de órdenes** m y s (GARCH(m,s)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

Modelos GARCH

Una serie sigue un modelo **general autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de órdenes** m y s (GARCH(m,s)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Modelos GARCH

Una serie sigue un modelo **general autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de órdenes** m y s (GARCH(m,s)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Mientras que

Modelos GARCH

Una serie sigue un modelo **general autorregresivo de heteroscedasticidad condicional de órdenes** m y s (GARCH(m,s)) si su esperanza y su varianza siguen las siguientes condiciones:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

Mientras que

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$