OPTIMIZACION DE PORTAFOLIO PARA OPTIMIZACION DE CARTERAS CON ENFOQUE EN COPULAS
Ing. Matematica
Optimización II
Proyecto Final (20 %)
Profesora: Angélica M. González O.
Estudiante: Juan Jose Castrillon y Felipe Gómez
05.11.2023

1. ABSTRACT

Este artículo explora la aplicación de cópulas en la optimización del portafolio para financiamiento de inventario. Analizamos cómo las cópulas ayudan a abordar desafíos financieros y de gestión de inventario de manera efectiva, permitiendo una toma de decisiones más informada y estratégica. La comprensión de esta metodología es fundamental para la gestión eficiente de inventario y la optimización de recursos financieros en un entorno empresarial competitivo y en constante cambio.

2. INTRODUCCION

La optimización del portafolio para el financiamiento de inventario desempeña un papel fundamental en la gestión empresarial moderna. Este enfoque, ampliamente utilizado en la gestión de inventario y finanzas, tiene como objetivo encontrar la combinación óptima de activos (inventarios) que maximice el rendimiento o minimice los costos, teniendo en cuenta las restricciones financieras y los aspectos relacionados con el riesgo.
La gestión efectiva del inventario es crucial para el éxito de una empresa, ya que el inventario representa una parte significativa de los activos y recursos financieros de la organización. En este sentido, la optimización del portafolio permite a las empresas tomar decisiones estratégicas sobre cómo asignar sus recursos limitados de manera eficiente, considerando factores clave como la demanda del mercado, los costos de mantenimiento de inventario y las limitaciones presupuestarias.
Un aspecto notable en la optimización del portafolio es el uso de cópulas. Las cópulas son herramientas matemáticas que desempeñan un papel crucial al modelar la dependencia entre los activos o productos en inventario. A diferencia de los enfoques lineales tradicionales, las cópulas capturan de manera más realista las relaciones no lineales y asimétricas entre los activos. Esto es particularmente importante en un entorno empresarial en constante cambio, donde las interacciones entre diferentes productos o activos pueden no seguir patrones lineales predecibles.
En este contexto, este artículo tiene como objetivo explorar en detalle la aplicación de cópulas en la optimización de portafolios. A lo largo de este documento, examinaremos cómo las cópulas permiten abordar de manera más precisa y efectiva los desafíos financieros y de gestión de inventario, y cómo estas herramientas pueden contribuir a la toma de decisiones más informadas y estratégicas.

3. ANTECEDENTES

3.1. Portfolio optimization for inventory financing: Copula-based approaches

Este artículo se basa en la optimización de cartera específicamente en la gestión de activos para mitigar los riesgos de la fluctuación de los precios de los activos. Utilizan modelos de cópula y optimización de cartera para investigar cómo los IFP pueden aprovechar información oportuna del mercado de garantías para optimizar sus carteras. Se basan en nuevos hallazgos en los que sugieren que la cópula canónica general de la vine puede incorporarse a estrategias de cartera que el IFP puede adoptar para mitigar los riesgos de

incumplimiento y mejorar su perfil de riesgo.
Este artículo es de suma importancia para el tópico del cual se habla en este artículo ya que se basa en optimización de cartera y los impactos que se pueden generar a través del uso de las cúpulas. Se tomaron algunos datos que podrían ser relevantes para la implementación de nuestro modelo y se observaron algunos comportamientos similares a los que se hablaron en este artículo.

3.2. Portfolio Optimization: The Markowitz Mean-Variance Model

Este artículo se basa en el modelo de optimización de la varianza media de Markowitz. Básicamente este es un modelo matemático que se basa en la idea de que los inversores son extremadamente reacios al riesgo y sólo aceptarán más riesgo si se les compensa con mayores rendimientos esperados. La idea del modelo es determinar la combinación óptima de valores equilibrando sus rendimientos esperados con los riesgos asociados a ellos. También habla sobre el poder reducir el riesgo de manera eficiente manteniendo una combinación de activos que no están perfectamente correlacionados entre sí.
Este artículo aporta bastante información de suma importancia a nuestro artículo ya que da a entender más a fondo la optimización de una cartera utilizando el modelo de Markowitz. También, se fundamenta utilizando datos reales y implementando el modelo en Python lo que nos ayuda también a centrar las ideas y ver un poco como funciona la computación en dichos modelos y problemas.

4. DATOS

Para la implementación y ejecución del modelo se tomaron datos de los diferentes portafolios que tiene la página Kenneth R. French. Se tomó un portafolio con los activos Mkt-Rf y SMB y una muestra de 1000 datos que representan los retornos. Para el uso adecuado de las cópulas multivariadas se debe de saber de qué distribución provienen los datos, su independencia o dependencia y algunos otros datos estadísticos que ayudarán a tener un desarrollo correcto en la implementación de este modelo.
Cuando se obtuvieron los datos, se utilizó la herramienta stat Fit de Simul8 para obtener algunas estadísticas descriptivas acerca de la distribución de los datos.

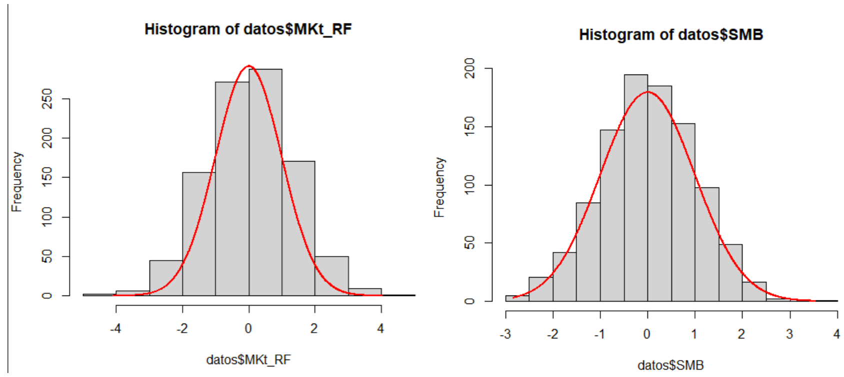
descriptive statistics	
data points	1000
minimum	-2.89576
maximum	3.01866
mean	0.0728145
median	0.0735593
mode	-0.44693
standard deviation	1.01952
variance	1.03942
coefficient of variation	1400.16
skewness	0.107333
kurtosis	-0.201958

descriptive statistics	
data points	1000
minimum	-2.84512
maximum	3.52591
mean	0.0225462
median	0.0148429
mode	-0.0270252
standard deviation	0.99973
variance	0.999459
coefficient of variation	4434.14
skewness	-0.0630301
kurtosis	-0.163556

(1)

(2)

Luego, ya con algún conocimiento del comportamiento de los datos se decidió hacer un histograma. Al tener conocimiento de la estadística descriptiva realizamos que la media está cerca a 0 y la desviación estándar cerca a uno. Estos parámetros se parecen a los de una distribución normal estándar por lo que se decidió trazar una línea representando una empírica de una distribución normal. El histograma se ajustaba realmente bien y se concluyó que los datos que se tenían provienen de una distribución normal.



(3)

(4)

5. MODELO

5.1. Cópula Multivariada

La función de distribución acumulada (CDF) es aquella con la cual se representa el comportamiento de un conjunto de datos y la dependencia entre estos. Sin embargo existen métodos que permiten representar el comportamiento de más de un conjunto de datos y la dependencia entre estas diferentes muestras, uno de estos métodos son las cópulas multivariadas. Si se tiene un conjunto de muestras $X = (X_1, ..., X_n)$ con distribuciones marginales $F_i(i = 1, ..., n)$, entonces puede existir un cópula que describa el comportamiento de estas muestras y la dependencia existente entre estas.

$$F(x_1, ..., x_n) = C[F_1(x_1), ..., F_n(x_n)]$$

Realizando el reemplazo $F_i(X_i) = U_i$, se puede obtener:

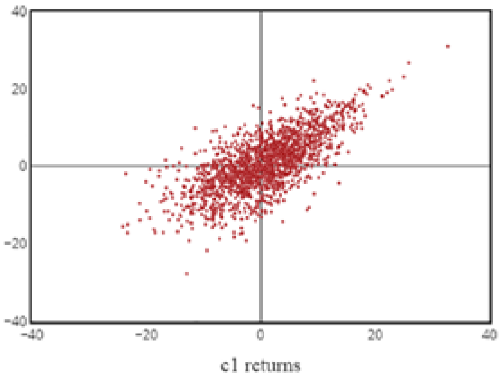
$$F(x_1, ..., x_n) = C[F_1(x_1), ..., F_n(x_n)] = C[u_1, ..., u_n] = P(U_1 \leq u_1, ..., U_n \leq u_n)$$

Donde $C[u_1, ..., u_n]$ representa la CDF de las muestras de datos representando su dependencia teniendo en cuenta las distribuciones marginales. Si las distribuciones marginales son diferenciables se puede hacer la relación entre la función de densidad del vector de muestras y la densidad de cópula de la forma:

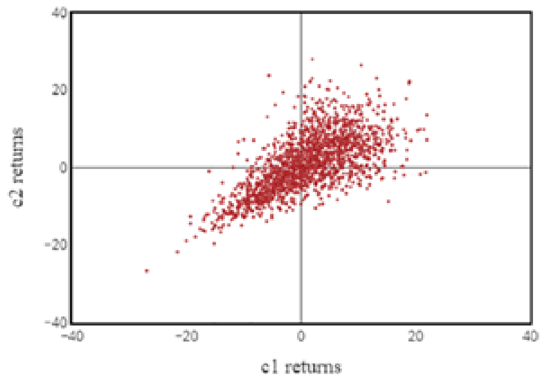
$$f(x_1, ..., x_n) = C_{1,...,n}[F_1(x_1), ..., F_n(x_n)] * f_1(x_1)*, ..., *f_n(x_n)$$

5.2. Implementación

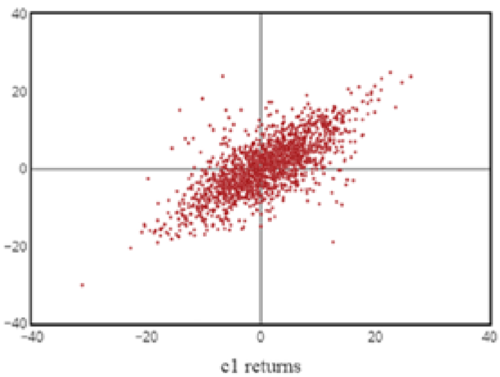
Para determinar las cópulas multivariadas apropiadas para los datos, se utilizan cuatro diagramas de dispersión provenientes de 4 diferentes cópulas multivariadas, la Gumbel, Clayton, t Student y gaussiana. La cópula de Gumbel depende de la cola superior y la cópula de Clayton depende de la cola inferior. La cópula t Student es tanto inferior como dependiente de la cola superior , mientras que la gaussiana no es ni inferior ni dependiente de la cola superior.



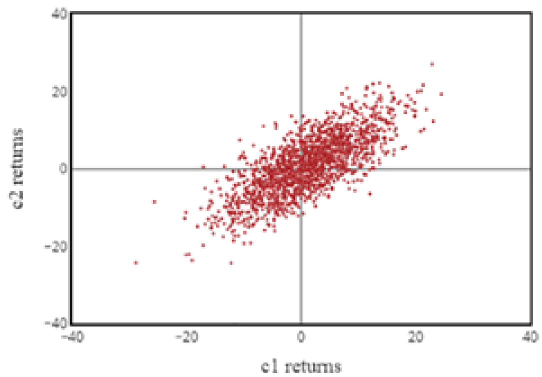
a) Gumbel copula



b) Clayton copula

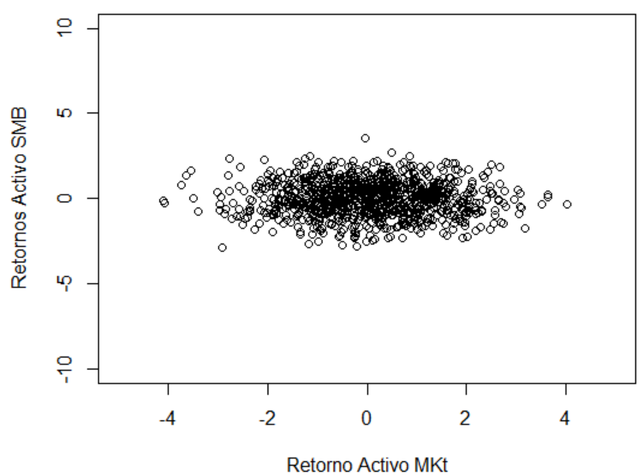


c) Student T copula



d) Gaussian copula

Luego de realizar el análisis de los dos activos donde podemos tomar el comportamiento de los activos MKt-RF y SMB como distribuciones normales, al realizar realizar el diagrama de dispersión entre estos activos, el resultado obtenido fue:



Podemos concluir que la cópula que mejor representa la dependencia de los datos y sus distribuciones marginales es la cópula Gaussiana, no solo por la baja dependencia que encontramos tanto en la cola inferior como en la cola superior, sino también, por el hecho de que partimos de datos con un comportamiento normal, los cuales son muy bien representados por la cópula Gaussiana.

5.3. Cópula Gaussiana

Representa la estructura de dependencia para una distribución normal multivariada, lo que significa que distribuciones marginales normales combinadas con cópula gaussiana forman distribuciones normales multivariadas. Una expresión para la cópula gaussiana está dada por:

$$C_\Psi(u_1, ..., u_n) = F_Y[\Phi^{-1}(u_1), ..., \Phi^{-1}(u_n)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} ... \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} 2\Phi^{-\frac{d}{2}} abs(\Psi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}r^T\Psi^{-1}r}\, dr_1...dr_n$$

Donde $Y = (Y_1, ..., Y_n)^T - > N_d(0, \Psi)$ y $r = (r_1, ..., r_n)^T$

Debido a la complejidad observada para la implementación de cópula, se hace uso de la librería copula en R para realizar la implementación de la misma y de esta manera poder obtener los retornos esperados de los activos a partir de la cópula Gaussiana.

```
c_gaussian <- normalCopula(param, dim = 2)
samples <- rCopula(1, c_gaussian)
MKt_sim <- qnorm(samples[, 1], mean(datos$MKt_RF), sd(datos$MKt_RF))
SMB_sim <- qnorm(samples[, 2], mean(datos$SMB), sd(datos$SMB))
MKt_sim
SMB_sim
```

1. `c_gaussian <- normalCopula(param, dim = 2)`: Aquí se crea una copula Gaussiana con parámetros `param` y una dimensión (`dim`) de 2.

2. `samples <- rCopula(1, c_gaussian)`: Se generan muestras aleatorias (`samples`) a partir de la copula `c_gaussian`. Se generan 1 muestra, y estas muestras representarán la estructura de dependencia entre las dos variables en la copula.

3. `MKt_sim <- qnorm(samples[, 1], mean(datos$MKt_RF), sd(datos$MKt_RF))`: Se calcula `MKt_sim` simulando la variable aleatoria `MKt_RF` a partir de la primera columna de las muestras generadas en el paso anterior. Se utiliza la función `qnorm` que realiza la transformación cuantil de una distribución normal estándar a una distribución con la media (`mean(datos$MKt_RF)`) y la desviación estándar (`sd(datos$MKt_RF)`) de la variable `MKt_RF` de tus datos. Esto simula la variable `MKt_RF` basándose en la estructura de dependencia entre las dos variables en la copula y las estadísticas de `MKt_RF` de los datos.

4. `SMB_sim <- qnorm(samples[, 2], mean(datos$SMB), sd(datos$SMB))`: Se realiza un proceso similar al paso anterior, pero esta vez se simula la variable `SMB` basándose en la segunda columna de las muestras generadas en el paso 2 y las estadísticas de `SMB` en los datos.

En resumen, este código representa la simulación de dos variables aleatorias (`MKt_sim` y `SMB_sim`) basadas en una copula Gaussiana y las estadísticas de los datos originales. Esto permite generar datos que sigan una estructura de dependencia especificada por la copula y que se asemejen a los datos originales en términos de medias y desviaciones estándar. Así, finalmente se obtienen los retornos esperados de ambos activos a partir la cópula.

5.4. Modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz, desarrollado por Harry Markowitz en 1952, es un enfoque fundamental en la teoría de la inversión. Este modelo se centra en la optimización de carteras de inversión, buscando un equilibrio entre el rendimiento esperado y el riesgo. La asignación óptima de activos en una cartera se basa en las siguientes fórmulas y conceptos clave.

5.4.1. Definiciones Clave

$$
\begin{aligned}
n &: \text{Número de activos en la cartera} \\
\mathbf{w} &: \text{Vector de pesos de activos, donde } w_i \text{ es el peso del activo } i \text{ en la cartera} \\
\mathbf{R} &: \text{Vector de rendimientos esperados de los activos} \\
\mathbf{C} &: \text{Matriz de covarianza de los activos, donde } C_{ij} \text{ es la covarianza entre los activos } i \text{ y } j \\
\mu_p &: \text{Rendimiento esperado de la cartera} \\
\sigma_p &: \text{Desviación estándar (riesgo) de la cartera}
\end{aligned}
$$

5.4.2. Función Objetivo

El objetivo es encontrar una cartera que maximice el rendimiento esperado y minimice el riesgo. Esto se logra mediante la siguiente función objetivo:

$$\max_{\mathbf{w}} \ \mu_p - \lambda\sigma_p^2$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
\mu_p &= \mathbf{w}^T\mathbf{R} \\
\sigma_p &= \sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{w}} \\
\lambda &: \text{Parámetro que controla el equilibrio entre el rendimiento y el riesgo}
\end{aligned}
$$

5.4.3. Restricciones

Para garantizar que la asignación de pesos sea válida, se imponen restricciones. Las restricciones típicas incluyen:
1. Restricción de suma de pesos: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$
2. Restricción de no negatividad: $w_i \geq 0$ para todo i

5.4.4. Solución Óptima

Ajustando el valor de λ, se obtiene una "frontera eficiente"de carteras que equilibran el riesgo y el rendimiento de manera óptima. Los inversores pueden seleccionar la cartera que mejor se adapte a sus preferencias en función del nivel de riesgo y rendimiento deseado.

Asi, se puede decir que el modelo de Markowitz es fundamental en la construcción de carteras de inversión, ya que permite a los inversores personalizar su exposición al riesgo y el rendimiento. La elección del valor de λ es clave para diseñar una cartera acorde a los objetivos y la tolerancia al riesgo.

5.5. Implementación Markowitz

El código implementado en python sigue los pasos:

5.5.1. Carga de Datos

Se cargan los datos históricos de rendimiento de activos financieros. En este ejemplo, se utilizan dos activos: el índice de mercado (MKt) y una cartera de acciones (SMB). Los rendimientos de estos activos se almacenan en las listas MKt-sim y SMB-sim.

5.5.2. Cálculo de Medidas Estadísticas

Se calculan medidas estadísticas a partir de los datos cargados. Esto incluye la media recortada (robust-mean) del rendimiento de los activos, que se utiliza para estimar el rendimiento esperado. La matriz de covarianza de los activos, que refleja sus interacciones, también se calcula.

5.5.3. Definición de Restricciones

Se definen restricciones para el problema de optimización. Estas restricciones aseguran que los pesos de los activos en la cartera sean no negativos y que la suma de los pesos sea igual a 1.

5.5.4. Ponderación Inicial

Se establece una ponderación inicial para los activos en la cartera. En este ejemplo, se utiliza una ponderación inicial de 40

5.5.5. Funciones Objetivo

Se definen dos funciones objetivo:

Función Objetivo 1 (Rendimiento)
Esta función tiene como objetivo maximizar el rendimiento esperado de la cartera. Se define como el producto escalar de los pesos de los activos y los rendimientos esperados:

$$\text{Función Objetivo 1 (Rendimiento)} : f_1(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T\mathbf{R}$$

Donde: $\mathbf{w}$ es un vector de pesos de activos. $\mathbf{R}$ es un vector de rendimientos esperados de activos.

Función Objetivo 2 (Riesgo)
Esta función tiene como objetivo minimizar el riesgo de la cartera, que se mide mediante la desviación estándar. Se define como la raíz cuadrada de la varianza de la cartera:

$$\text{Función Objetivo 2 (Riesgo)} : f_2(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{w}}$$

Donde: $\mathbf{C}$ es la matriz de covarianza de los activos.

Función Objetivo Combinada
La función objetivo combinada es una combinación lineal de las dos funciones objetivo anteriores, ponderada por los valores de α y β:

$$\text{Función Objetivo Combinada} : f_{\text{combinada}}(\mathbf{w}) = \alpha f_1(\mathbf{w}) + \beta f_2(\mathbf{w})$$

Donde: α y β son pesos que indican la importancia relativa del rendimiento y el riesgo en la cartera.

Finalmente, se obtienen los mejores pesos para cada activo, el rendimiento esperado y el riesgo esperado dependiendo del α y β.

6. RESULTADOS

Los datos obtenidos para simular los datos desde la cópula Gaussiana con el código de R fueron:

```
> MKt_sim
[1] 0.6765745
> SMB_sim
[1] 0.04041076
```

Así se evidencia como se verían los retornos esperados luego de simula un solo dato apartir de cópula Gaussiana.

Luego de implementar el código en python, los datos obtenidos fueron:

```
0.06235345205694567 0.020957700059043082
Pesos de la cartera optimizada: [0.37762276 0.62237724]
Rendimiento esperado óptimo: 0.03658967808412093
Riesgo óptimo (desviación estándar): 0.7623810501541848
```

Donde los dos primeros valores representan los retornos esperedados de cada activo, los pesos optimidos calculados para la asignación del rendimiento y riesgo esperado de la cartera con estos activos.

7. CONCLUSIONES

Después de evaluar el comportamiento y uso del modelo implementado podemos decir que el uso de la cópula ayudó claramente a optimizar la cartera con los activos seleccionados. Sabemos que para definir un comportamiento debemos implementar el modelo en más carteras, con diferentes tipos de datos y distribuciones pero para la precisión y el tiempo del proyecto se decidió hacerlo con dos activos. Podemos confirmar que una de las claves para tener éxito en problemas de este estilo es tener claro de qué distribución provienen los datos y tener también claro cómo se comportan. A través de las cópulas pudimos modelar la dependencia entre los activos y simular siguientes retornos con base a información que obtuvimos de estas. Reiteramos que la optimización de cartera con enfoque en cópulas es fundamental para abordar de manera más precisa los desafíos que pueden surgir en el mundo laboral.
Se puede concluir también que uno de los pasos importantes y fundamentales para poder tener un buen desempeño en la optimización de una cartera es la definición de los pesos que se le asignan primero a los activos y más adelante los pesos que se le asignan a las funciones objetivo en la función objetivo conjunta. Estos pesos son los que van a indicar que tanto riesgo y rendimiento el usuario desea tener en su cartera y son los que van a hacer posible la buena utilización del modelo. Respecto a los pesos de la función objetivo podemos concluir que el modelo tienen un funcionamiento correcto ya que al darle más importancia o peso a los retornos, el retorno aumenta pero el riesgo también va a aumentar y pasa lo mismo si se quiere dar más peso a minimizar los riesgos ya que disminuye el riesgo pero potencialmente también disminuyen los retornos esperados.

8. REFERENCIAS

- Bangdong Zhi, Xiaojun Wang, Fangming Xu, (2021). Portfolio optimization for inventory financing: Copula-based approaches

- sanchez G (27 de Diciembre de 2020). Optimización algorítmica de carteras con Markowitz. https://gsnchez.com/blog/article/Optimizacion-algoritmica-de-carteras-con-markowitz

- Ayuda a tomar decisiones financieras informadas y a mitigar riesgos.

- Markowitz Efficient Set: Meaning, Implementation, Diversification. (n.d.). Investopedia. Retrieved September 26, 2023, from https://www.investopedia.com/terms/m/markowitzefficientset.asp
- Torres, F. (n.d.). Portfolio Optimization: The Markowitz Mean-Variance Model — by Luís Fernando Torres — LatinXinAI. Medium. Retrieved September 26, 2023, from https://medium.com/latinxinai/portfolio-optimization-the-markowitz-mean-variance-model-c07a80056b8a
- Multivariate Distributions — Copulas 0.9.1 documentation. (n.d.). Synthetic Data Vault. Retrieved September 26, 2023, from https://sdv.dev/Copulas/tutorials/03MultivariateDistributions.html
- . (2022, October 2). . - YouTube. Retrieved September 26, 2023, from https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-1-84628-288-151