Tecnológico de Monterrey
Escuela de Ingeniería y Ciencias

Optimización de Recursos Temporales y Económicos por Suministros en un Plan de Reforestación

Etapa 3: Implementación Modelo y Algoritmos

Juan José H. Beltrán Santiago Juárez Roaro Diego Olalde Tristán Paula de Alba

2 de junio de 2025

1. Introducción al Problema

En los últimos años sabemos que el impacto del cambio climático ha aumentado la deforestación en grandes escalas, el uso excesivo de recursos naturales y la urbanización descontrolada. Este deterioro ambiental ha llevado a una pérdida significativa de biodiversidad y a la alteración de ciclos naturales fundamentales. Ante esto, los programas de reforestación surgen como una estrategia fundamental para restaurar ecosistemas y mitigar los efectos del calentamiento global. Sin embargo, llevar a cabo un plan de reforestación exitoso implica mucho más que sembrar árboles. Requiere de una planificación precisa de recursos, tiempos y logística. Coordinación entre proveedores, almacenamiento temporal, tratamiento adecuado de las plantas, distribución a los polígonos de siembra y cumplimiento de tiempos de aclimatación son solo algunos de los factores que deben considerarse cuidadosamente para evitar interrupciones, sobrecostos o pérdidas en el proceso. Debido a la complejidad de esta cadena de decisiones, es necesario el uso de herramientas que permitan representar el problema en su totalidad. Por ello, este reto se enfoca en el diseño de un modelo matemático que permita optimizar el uso de recursos temporales y económicos, considerando todas las restricciones operativas del sistema. A través de esta modelación, se nos es posible construir una herramienta de apoyo para la toma de decisiones que sea de utilidad, facilitando una planificación eficiente y sostenible de los proyectos de reforestación en México.

1.1. Consideraciones para Modelar e Implementar el Problema.

- Todos los proveedores realizan puntualmente las entregas antes del inicio de cada periodo discreto. Los pedidos deben realizarse con cierta anticipación para satisfacer este supuesto.
- Las plantas requieren un periodo de aclimatación de varios días antes de poder ser plantadas.
- La capacidad del almacén está limitada según el espacio ocupado por cada unidad de especie almacenada.
- Cada especie requiere un tratamiento específico antes de su traslado.
- La capacidad del vehículo es limitada por espacio
- Existe un limite de tiempo disponible para cada jornada laboral.
- El transporte se realiza desde el almacén hacia los polígonos, siguiendo rutas planificadas que minimizan tiempos y evitan subtours.
- Toda la demanda por especie y polígono se satisface completamente dentro del horizonte de planificación.
- Se consideran costos asociados a la adquisición (incluyendo un costo fijo por pedido), almacenamiento, tratamiento, transporte y plantación de las especies.

2. Modelo Matemático

A continuación se presenta un modelo matemático funcional y lineal que, por lo tanto, puede resolverse a optimalidad utilizando cualquier solver de PL que se desee. Solo para fines de este curso, se presentan las diferencias respecto a la versión no-lineal en la Sección 2.6.

2.1. Definición de Conjuntos. En adelante se define la notación $[n] = \{i \;:\; i \in \mathbb{N}, i \leq n\}$, para facilitar la lectura. Se definen los siguientes conjuntos:

- $[I]$. Conjunto de proveedores, donde I es la cantidad de proveedores.
- $[L]$. Conjunto de polígonos de plantación, donde L es la cantidad de polígonos.
- $[M]$. Conjunto de especies de plantas, donde M es la cantidad de especies.
- $[T]$. Conjunto de periodos discretos, donde T es la cantidad de periodos discretos a considerar.
- $V = L \cup \{0\}$. Nodos para el ruteo, donde 0 representa el almacén.

- $[K]$. Conjunto de rutas que hace el vehículo. Es decir, cada una de las diferentes rutas que deben realizarse durante el proyecto.

2.2. Definición de Parámetros.

- $d_{lm} : l \in [L], m \in [M]$. Demanda del polígono de siembra l de la especie m para todo el proyecto, medida en unidades.
- $o_{im} : i \in [i], m \in [m]$. Oferta del proveedor i de la especie m para todo el proyecto, medida en unidades.
- $c_{im} : i \in [I], m \in [M]$. Costo por unidad comprada al proveedor i de la especie m.
- $g_m : m \in [M]$. Unidades de mano de obra necesarias para tratar una unidad de la especie m en el almacén.
- p. Capacidad total de tratamiento del almacén por periodo, en unidades de mano de obra.
- $f_m : m \in [M]$. Unidades de espacio requeridas en almacén (y en vehículo) por unidad de la especie m.
- a. Capacidad total del almacén, medida en unidades de espacio.
- Ω. Capacidad del vehículo de envío, medida en unidades de espacio.
- Δ. El 'desfase' o periodos de tiempo que las unidades deben permanecer en el almacén antes de enviarse a los polígonos de plantación. En el contexto del problema, es cuántos periodos de tiempo necesitan para aclimatarse al lugar.
- ρ. Tiempo de carga/descarga por cada unidad cargada/descargada, medido en unidades de tiempo.
- s. Capacidad para transporte de cada periodo, medido en unidades de tiempo.
- $\mathcal{M}$. Constante suficientemente grande, para relacionar variables continuas y variables binarias.
- $\sigma_a : a \in V$. Costo de recorrer el arco a del grafo G, medido en unidades de tiempo.
- γ: Costo fijo por plantar una unidad.
- θ: Costo fijo por realizar un pedido a algún proveedor.

2.3. Definición de Variables.

2.3.1. Variables de Decisión.

- $x_{itm} : i \in [I], t \in [T] \cup \{-\Delta, ..., 0\}, m \in [M]$. Unidades de la especie m adquiridas del proveedor i y llevadas al almacén al inicio, del periodo t.
- $y_{ltm} : l \in [L], t \in [T], m \in [M]$. Unidades de la especie m enviadas del almacén al polígono de siembra l en el periodo t.
- $r_{\alpha\beta tk} : \alpha, \beta \in V, t \in [T], k \in [K]$. Variable binaria que toma el valor de 1 si la ruta k utilizó el arco (α, β) en el periodo t; y toma el valor de 0 sino.
- $\mu_{tkm} : t \in [T], k \in [K], m \in [M]$. Cantidad de unidades de la especie m que se cargan al vehículo para la ruta k del periodo t.

2.3.2. Variables Auxiliares.

- $\phi_{tm} : t \in [T] \cup \{-\Delta, ..., 0\}, m \in [M]$. Unidades del producto m que se quedaron en el almacén en el periodo t. En el contexto del problema, estas son unidades que se mantienen almacenadas.
- $w_{\alpha\beta tkm} : \alpha, \beta \in V, t \in [T], k \in [K], m \in [M]$. Cantidad de unidades de la especie m entregadas en la ruta k del periodo t al salir del nodo i y dirigirse al nodo j para descargar.
- $q_{\alpha kt} : \alpha \in [L], k \in [K], t \in [T]$. Toma un valor correspondiente al orden en el que el nodo α es visitado por la ruta k del periodo t.
- $h_{kt} : k \in [K], t \in [T]$. Variable binaria que toma el valor de 1 si y solo si se utiliza el vehículo k en el tiempo t.
- $u_{it} : i \in [I], t \in [T]$. Variable binaria que toma el valor de 1 si y solo si se hace un pedido al proveedor i en el tiempo t.

2.4. Restricciones.

2.4.1. Restricciones de Flujo en el Almacén. En el almacén, para cada período y cada producto, la suma del inventario remanente del período anterior más lo suministrado por los proveedores en el período actual debe ser igual al inventario sobrante del período actual más lo transferido a los polígonos de plantación en el período actual.

$$\phi_{t-1-\Delta,m} + \sum_i x_{i,m,t-\Delta} = \phi_{tm} + \sum_l y_{lmt} \qquad \forall i \in [I], t \in [T], m \in [M] \tag{1}$$

Se agrega una restricción para que no exista un remanente de inventario en cada almacén, en cada producto en el primer período. Es decir, al inicio del proyecto.

$$\phi_{t,m} = 0 \qquad \forall m \in [M], t \in \{-\Delta, ..., 0\} \tag{2}$$

Se agrega una restricción para que no existan pedidos en periodos negativos.

$$x_{itm} = 0 \qquad \forall m \in [M], i \in [I], t \in \{-\Delta, ..., 0\} \tag{3}$$

2.4.2. Límite en la Capacidad de Tratamiento por Periodo de Tiempo. Para cada especie y período, la suma del número de unidades de cada especie que van a salir del almacén multiplicada por el tiempo que toma tratar cada unidad, debe ser igual o menor a la capacidad de tratamiento del almacén, medida en unidades de mano de obra.

$$\sum_m (g_m * \sum_l y_{ltm}) \leq p \qquad \forall t \in [T] \tag{4}$$

2.4.3. Limite por la Capacidad Máxima del Almacén. Para cada especie y período, el producto del número de unidades almacenadas más la cantidad de unidades que se adquieren de proveedores en el mismo período, de cada especie, multiplicada por el espacio que ocupan en almacén, debe ser menor o igual a la capacidad de inventario del almacén.

$$\sum_m (f_m * (\phi_{t-1-\Delta,m} + \sum_l y_{ltm})) \leq a \qquad \forall t \in [T] \tag{5}$$

2.4.4. Satisfacer la Demanda de los Polígonos de Plantación. La suma, sobre todos los periodos, de las unidades de cada especie enviadas a cada almacén, debe ser exactamente igual a la demanda de cada polígono de siembra. Es decir, que al final del proyecto de reforestación, toda la demanda debe ser cubierta.

$$\sum_t y_{ltm} = d_{lm} \qquad \forall l \in [L], m \in [M] \tag{6}$$

2.4.5. No Sobrepasar la Oferta de Cada Proveedor. La suma de las unidades de cada especie adquiridas de cada proveedor durante todos los periodos de tiempo del proyecto, no debe sobrepasar la oferta de dicho proveedor para dicha especie.

$$\sum_t x_{itm} \leq o_{im} \qquad \forall i \in [I], m \in [M] \tag{7}$$

2.4.6. Encender Variable u si se Requiere Cierto Proveedor. Se utiliza $\mathcal{M}$ para comparar la variable binaria u con la variable continua x. La binaria solo toma el valor de 1 si x es distinta de 1; pues la binaria se requiere para calcular costos fijos de envío.

$$\sum_m x_{itm} \leq u_{it} * \mathcal{M} \qquad \forall i \in [i], t \in [T] \tag{8}$$

2.4.7. Preservar el Flujo del Vehículo. Para toda ruta, si esta entra a algún un nodo del grafo (polígono de siembra), tiene que salir también.

$$\sum_{\alpha \in V} r_{\alpha\beta kt} - \sum_{\alpha \in V} r_{\beta\alpha kt} = 0 \qquad : \alpha \neq \beta \qquad \forall \beta \in V, k \in [K], t \in [T] \tag{9}$$

2.4.8. Todas las Rutas Visitan el Almacén. El almacén está representado por el nodo 0. Esta restricción debe encenderse o apagarse según se utilice o no un vehículo. Vehículos que no van a repartir unidades no tienen porque salir del almacén. La variable binaria h toma el valor de 1 si y solo si el vehículo correspondiente va a repartir alguna carga.

$$\sum_{\beta \in [L]} r_{0\beta kt} = h_{kt} \qquad \forall k \in [K], t \in [T] \tag{10}$$

$$\sum_m \mu_{tkm} \leq h_{kt} * \mathcal{M} \qquad \forall t \in [T], k \in [K] \tag{11}$$

2.4.9. No se Supera la Capacidad Máxima del Vehículo. Sumando los productos de las unidades de espacio requeridas por cada especie multiplicadas por la cantidad de unidades de esa especie, se obtiene la carga total que llevó el vehículo al iniciar cada ruta, medida en unidades de espacio. Esta carga total debe ser menor que su capacidad máxima.

$$\sum_{m\in[M]} f_m * \mu_{kmt} \leq \Omega \qquad \forall k \in [K], t \in [T] \tag{12}$$

Es recomendable utilizar la variable auxilar μ_{kmt} para contabilizar la cantidad de unidades de cada especie que lleva el vehículo en cada ruta.

$$\sum_{\alpha\in V}\sum_{\beta\in V} w_{\alpha\beta kmt} = \mu_{kmt} : \alpha \neq \beta \qquad \forall k \in [K], t \in [T], m \in [M] \tag{13}$$

2.4.10. Llevar a Cada Polígono Exactamente las Unidades que se le Asignaron en cada Periodo. Es decir, la suma de las unidades que todas las rutas llevaron a cada polígono deben ser iguales a las variables de decisión correspondientes (y), para cada periodo de tiempo y cada especie.

$$\sum_{\alpha\in V}\sum_{k\in K} w_{\alpha\beta kmt} = y_{\beta tm} \qquad : \alpha \neq \beta \qquad \forall \beta \in [L], m \in [M], t \in [T] \tag{14}$$

2.4.11. Límite de Tiempo para Rutas en Cada Periodo. Cada periodo (en contexto, podría pensarse en cada jornada laboral) tiene un límite de tiempo. Asumiendo que cada vez que termina un periodo todas las tareas (rutas) que iniciaron en él, también deben terminarse, entonces el tiempo total que tomen las rutas no debe superar la duración del periodo.

$$\sum_{k\in[K]}\sum_{\alpha\in V}\sum_{\beta\in V} \sigma_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta kt} + 2\rho * \sum_{k\in[K]}\sum_{\alpha\in V}\sum_{\beta\in V}\sum_{m\in[M]} w_{\alpha\beta kmt} \leq s \qquad \forall t \in [T] \tag{15}$$

La primera sumatoria corresponde al tiempo invertido en transporte; la segunda al tiempo invertido en carga/descarga, por cada periodo.

2.4.12. Evitar Subtours. Esta restricción se asegura de que no existan subtours al asignar a cada polígono de siembra visitado un ordinal $\in \mathbb{N}$, que forma parte de una sucesión de enteros consecutivos, que representan la posición de cada polígono dentro de la ruta.

$$q_{\alpha kt} - q_{\beta kt} + L * r_{\alpha\beta kt} \leq L - 1 \qquad : \alpha \neq \beta \qquad \forall \alpha, \beta \in [L], k \in [K], t \in [T] \tag{16}$$

2.4.13. No Existe Carga Transportada entre Arcos no Utilizados. Esta restricción se asegura de que si un nodo no se utiliza, es decir, $r = 0$, sus correspondientes w estén forzadas a ser 0.

$$w_{\alpha\beta kmt} \leq \mathcal{M} * r_{\alpha\beta kt} \qquad \forall \alpha, \beta \in V, k \in [K], m \in [M], t \in [T] \tag{17}$$

2.4.14. Restricciones sobre la Naturaleza de las Variables.

$$x_{itm} \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \qquad \forall i \in [I], t \in [T], m \in [M]$$

$$y_{ltm} \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \qquad \forall l \in [L], t \in [T], m \in [M]$$

$$\phi_{tm} \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \qquad \forall t \in [T] \cup \{-\Delta, ..., 0\}, m \in [M]$$

$$r_{\alpha\beta kt} \in \{0, 1\} \qquad \forall \alpha, \beta \in V, k \in [K], m \in [M], t \in [T]$$

$$w_{\alpha\beta kmt} \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in A, k \in [K], t \in [T], m \in [M]$$

$$q_{\alpha kt} \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \qquad \forall \alpha \in A, k \in [K], t \in [T]$$

$$\mu_{kmt} \in \mathbb{Z}^+ \cup 0 \qquad \forall k \in [K], m \in [M], t \in [T]$$

$$u_{it} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in [I], t \in [T]$$

$$h_{kt} \in \{0, 1\} \qquad \forall k \in [K], t \in [T]$$

2.5. Función Objetivo. Nuestro modelo busca optimizar simultáneamente dos aspectos clave de la logística de reforestación: el costo total del proyecto y el tiempo operativo utilizado en cada jornada. Para ello, se plantea una función objetivo compuesta por una combinación lineal ponderada de ambos criterios:

$$\text{mín } Z = e_1 Z_1 + e_2 Z_2 \tag{18}$$

donde $e_1 + e_2 = 1$ y los pesos $e_1, e_2 \in \{0, 1\}$ reflejan la importancia relativa asignada a cada objetivo.

(Costo económico del proyecto) $$Z_1 = \sum_{i\in[I]} \sum_{t\in[T]} \sum_{m\in[M]} c_{im} \cdot x_{itm} + \gamma \cdot \sum_{t\in[T]} \sum_{m\in[M]} \sum_{l\in[L]} y_{ltm} + \theta \cdot \sum_{i\in[I]} \sum_{t\in[T]} u_{it}$$

(Tiempo operativo total) $$Z_2 = \sum_{t\in[T]} \sum_{(\alpha,\beta)\in A} \sum_{k\in[K]} \sigma_{\alpha\beta} \cdot r_{\alpha\beta kt} + 2\rho \cdot \sum_{t\in[T]} \sum_{(\alpha,\beta)\in A} \sum_{k\in[K]} \sum_{m\in[M]} w_{\alpha\beta kmt}$$

Esta formulación permite evaluar diferentes escenarios de planificación mediante la asignación de pesos, de forma que el modelo se adapte a prioridades específicas de la operación, como la eficiencia presupuestal o la capacidad logística.

2.6. Versión No-Lineal del Modelo. A grandes razgos, se podría pensar en una restricción, variación de la Ecuación 14, como la siguiente para anidar el VRP a la cadena de suministro:

$$\sum_{\alpha\in V} w_{\alpha\beta kmt} = y_{\beta tm} * r_{0\beta tk} \qquad : \alpha \neq \beta \quad \forall \beta \in [L], m \in [M], t \in [T] \forall k \in [K] \tag{19}$$

Esta restricción indicaría que, para cada periodo, debe satisfacerse la entrega asignada por la cadena de suministro para cada polígono, pero únicamente si cierto vehículo se utiliza (sale del almacén). Las desventajas de enfrentarnos a un problema no-lineal son evidentes, tal como hemos visto en clase. Por ello, se tomó la decisión de linealizar el modelo para que pueda resolverse a optimalidad con cualquier solver de PL.

3. Método Heurístico

Dado que el problema de ruteo de vehículos es NP-Hard per sé, al anidarlo en una cadena de suministro, el tamaño del los problemas que pueden resolverse a optimalidad en tiempos considerables es muy limitado. Por ello, anticipándonos a la necesidad, proponemos dos enfoques heurísticos diferentes.

3.1. Modelo Heurístico Integrado. El primer modelo heurístico que proponemos es uno que integre tanto la parte de optimización de la cadena de suministro y la parte del ruteo, es decir, que aborda todo el problema desde un enfoque heurístico. Para ello proponemos lo siguiente.

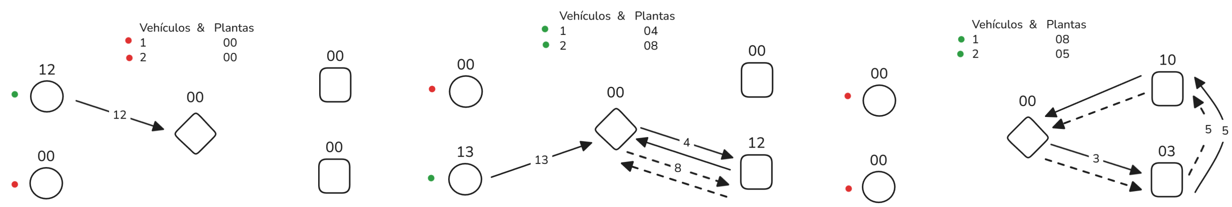
1. **Asignación de proveedores**: Para la asignación de proveedores proponemos usar un algoritmo **Greedy** por costo mínimo respetando las sus restricciones de oferta y la demanda de los polígonos.
2. **Planificación de almacenamiento** : Para esta etapa proponemos utilizar un enfoque tipo **Rolling Horizon** . Este método consiste en planear de forma secuencial por periodos, resolviendo las decisiones de un periodo a la vez, avanzando paso a paso en el tiempo. En cada periodo, el modelo evalúa cuánto producto llega de los proveedores, cuánto se puede tratar en el almacén según la capacidad de mano de obra, cuánto se puede almacenar sin exceder el espacio disponible, y qué cantidad está lista para enviarse a los polígonos (considerando el tiempo de aclimatación requerido). Una vez tomadas las decisiones del periodo actual, se actualizan las variables de inventario y se avanza al siguiente periodo. Este enfoque permite reaccionar a cambios y mantener una planificación eficiente sin necesidad de resolver todo el problema completo desde el inicio.
3. **Ruteo**: Por último, para la parte del ruteo se propone usar un VRP con una heurística Greedy, en el cual la idea es primero ir al nodo más lejano, en esta caso el polígono más lejano, satisfacer su demanda y que el sobrante sea entregado al nodo más cercano del que fue visitado anteriormente.

3.2. Modelo Híbrido. En este caso se propone resolver la parte de la optimización de la cadena de suministros con el modelo exacto propuesto en la primer parte y optimizar el ruteo con el modelo VRP con heurística Greedy. Esta aproximación híbrida permite aprovechar la precisión del modelo exacto en decisiones críticas como la asignación de proveedores, tratamiento y almacenamiento. Una vez determinada la cantidad de unidades a enviar a cada polígono en cada periodo, se aplica una heurística voraz para planear las rutas de los vehículos de forma eficiente.

La idea de plantear estos dos modelos es entender qué tanto influye en el ruteo usar los resultados del modelo exacto de cadena de suministro ya que el modelo exacto puede dar una buena solución en costos de compra y almacenamiento, pero podría generar entregas dispersas o poco eficientes desde el punto de vista logístico, lo que complica el ruteo. Es decir, aunque se minimicen los costos de abastecimiento, eso no garantiza rutas cortas o agrupadas. En cambio, el modelo heurístico completo toma decisiones más pensadas en la operación logística, aunque no siempre sean las más baratas en compras o almacenamiento. Comparar ambos enfoques nos ayudará a ver si conviene resolver la cadena y el ruteo por separado, o si vale la pena integrar ambas etapas desde el inicio.

4. Implementación

4.1. Modelo Matemático. Como se pudo preveer, la complejidad del modelo matemático restringe en gran medida el tamaño de las instancias que pueden resolverse a optimalidad con él. Considerando esto, y solo para mostrar la funcionalidad de nuestro modelo, se ejecutó en una instancia pequeña (en adelante referida como *Experimento A*), con una única especie de planta, dos proveedores, dos polígonos de plantación, tres periodos, dos viajes por periodo y un desfase de un periodo. Los detalles sobre los parámetros utilizados se pueden consultar en el Anexo 5.2.



(a) Periodo 1. (b) Periodo 2. (c) Periodo 3.

Figura 1. Resultados del Experimento A resuelto a optimalidad con el modelo matemático.

En la Figura 1 se puede observar que el modelo matemático parece representar adecuadamente el problema y otorgar soluciones óptimas. En los grafos, los nodos circulares representan a los proveedores; los rombos el almacén, y los cuadrados los polígonos de plantación. En los nodos proveedores el número sobre ellos representa la cantidad de unidades que envían de cada especie; y el punto verde o azul a su lado indica si se les solicitó o no una entrega (u), respectivamente. Las flechas entre proveedor y almacén indican cuantas unidades de enviaron en la entrega (x). El número sobre el nodo almacén indica la cantidad de unidades recibidas que se quedarán almacenadas el siguiente periodo (phi). Los números sobre los nodos polígono indican cuántas unidades recibieron (y). Las flechas entre nodos almacén y polígono indican el movimiento de los vehículos. El vehículo 1 se representa con una flecha continua y el vehículo 2 con una flecha punteada. El número en las flechas indica las unidades que se repartieron al nodo hacia el que se dirige (w). En la tabla encima de cada grafo se incluye la cantidad de unidades cargadas a cada vehículo al salir del almacén (μ), y el punto verde o azul a su lado indica si los vehículos se utilizaron o no, respectivamente (h).

Nótese que, en el periodo 3, la razón por la que el vehículo 2 ejecuta una ruta evidentemente no-optima en términos de distancia —pues sería mejor ir y venir directamente al nodo 1— es porque las distancias se consideran únicamente como costos en tiempo. En esta instancia la función objetivo se concentra exclusivamente en minimizar costos económicos, pues así se ajustaron los pesos para poder corroborar mejor las soluciones al experimentar. Por lo tanto, cualesquiera rutas, que cumplan las restricciones resultan equivalentes para esta instancia.

5. Anexos

5.1. Repositorio de GitHub. En el repositorio de GitHub se encuentran los códigos fuentes y ejecutables para el modelo matemático y el método heurístico. Los detalles técnicos para su ejecución se pueden encontrar en el archivo README del repositorio.

https://github.com/JuanjoBelt/MA2008B-SupplyChainAndVRP

5.2. Experimento A. El experimento A es una instancia pequeña que puede ser resulta a optimalidad con el modelo matemático en un tiempo razonable. Los parámetros y las salidas obtenidas a través del modelo matemático pueden encontrarse en su respectiva carpeta dentro del repositorio de GitHub.