(1)OMCC99-P1

Se supone que 5 personas conocen informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

(2)OMCC99-P4

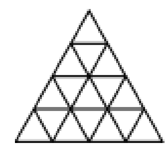
En el trapecio $ABCD$ de bases AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si $BC = a$, $MC = b$ y el ángulo MCB mide $150°$. Encuentre el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

(3)OMCC00-P1

Encuentre todos los números naturales de tres dígitos abc $(a \neq 0)$ tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

(4)OMCC00-P4

En la figura, escriba un entero positivo dentro de cada triangulito, de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos, sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos.
Nota: dos triangulitos son *vecinos* si comparten un lado.



(5)OMCC01-P1

Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demuestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

(6)OMCC01-P4

Determine el menor entero positivo n para el cual existan enteros positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ menores o iguales que 15 y no necesariamente distintos, tales que los cuatro últimos dígitos de la suma $a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$ sean 2001.

(7)OMCC02-P1

¿Para qué enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, \dots, n$ en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

(8)OMCC02-P4

Sea ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E un punto sobre el segmento AC tal que $BE = 2AD$ y F el punto de intersección de AD con BE. Si el ángulo DAC mide $60°$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo FEA.

(9)OMCC03-P1

Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego. Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número

(10)OMCC03-P4

Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas, tales que:

- l_1 pasa por el punto P e interseca a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.
- l_2 pasa por el punto Q e interseca a S_1 en un punto B_1 distinto de Q a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

Demuestre que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

(11)OMCC04-P1

En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B, juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero. Determine si alguno de los dos jugadores tiene estrategia ganadora y explique cuál es esa estrategia.

(12)OMCC04-P4

Se tiene un tablero cuadriculado de 10times10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. un lado común a dos casillas en el tablero se llama lado frontera si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determina el mínimo y máixmo número de lados frontera que puede haber en el tablero, justifica la respuesta.

(13)OMCC05-P1

De los números positivos que pueden expresarse como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, ¿cuál ocupa la posición 2005?

(14)OMCC05-P4

Dos jugadores llamados *Azul* y *Rojo* juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y las columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

> *Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.*

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es esa estrategia.

(15)OMCC06-P1

Se consideran los enteros positivos $S_d = 1 + d + d^2 + d^3 + \ldots + d^{2006}$, con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Determine la última cifra del número $S_0 + S_1 + \cdots + S_9$.

(16)OMCC06-P4

El producto de varios números enteros mayores que 0 y distintos entre sí es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

(17)OMCC07-P1
La OMCC es una competencia anual de matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n-ésima olimpiada?

(18)OMCC07-P4
Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f y g. Se dice que una palabra *produce* a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

- Cambiar una letra por dos letras como sigue
$$a \to bc, b \to cd, c \to de, d \to ef, e \to fg, f \to ga, g \to ab.$$
- Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Por ejemplo
$$dfd \to f.$$

Por ejemplo, $cafcd$ produce a $bfcd$, porque $cafcd \to cbcfcd \to bfcd$. Demuestre que en esta isla toda palabra produce a cualquier otra palabra.

(19)OMCC08-P1
Encuentre el menor entero positivo N tal que la suma de sus cifras sea 100, y la suma de las cifras de $2N$ sea 110.

(20)OMCC08-P4
Cinco amigas tienen una pequeña tienda que abre de lunes a viernes. Como cada día son suficientes dos personas para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, que especifique quiénes trabajarán cada día, y que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana.
b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes.

¿De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo? Por ejemplo, si las amigas son A, B, C, D y E, un posible plan de trabajo sería: lunes A y B, martes A y D, miércoles B y E, jueves C y E, y viernes C y D.

(21)OMCC09-P1
Sea $P(n)$ el producto de los dígitos no nulos del entero positivo n. Por ejemplo $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Encuentre el valor de la suma $P(1) + P(2) + \ldots + P(2008) + P(2009)$.

(22)OMCC09-P4
Se desea colocar números naturales alrededor de una circunferencia cumpliendo la siguiente propiedad: las diferencias entre cada par de números vecinos, en valor absoluto, son todas diferentes.

a) ¿Será posible colocar los números del 1 al 2009 satisfaciendo la propiedad?
b) ¿Será posible suprimir alguno de los números del 1 al 2009, de tal manera que los 2008 números restantes se puedan colocar satisfaciendo la propiedad?.

(23)OMCC10-P1
Si $S(n)$ denota la suma de los dígitos de un número natural n, encuentre todas las soluciones de $n(S(n) - 1) = 2010$ mostrando que son las únicas.

(24)OMCC10-P4

Se desea embaldosar un patio cuadrado de lado N entero positivo. Se dispone de dos tipos de baldosas, cuadradas de 5×5 y rectangulares de 1×3. Determine los valores de N para los cuáles es posible hacerlo.

Nota: el patio debe quedar completamente cubierto, sin que las baldosas se sobrepongan.

(25)OMCC11-P1

En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

(26)OMCC11-P4

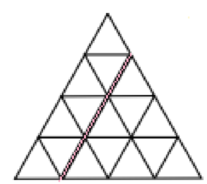
Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

(27)OMCC12-P1

Encuentre todos los enteros positivos que sean iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

(28)OMCC12-P4



Trilandía es una ciudad muy peculiar. La ciudad tiene forma de triángulo equilátero de lado 2012. Las calles dividen la ciudad en varios bloques que tienen forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en el borde de Trilandía. En total hay 6036 calles. El alcalde quiere ubicar puestos de vigilancia en algunas esquinas de la ciudad, para vigilar las calles. Un puesto de vigilancia puede vigilar todas las calles en las que esté ubicado. ¿Cuál es la menor cantidad de puestos que se requieren para poder vigilar todas las calles de Trilandía?

(29)OMCC13-P1

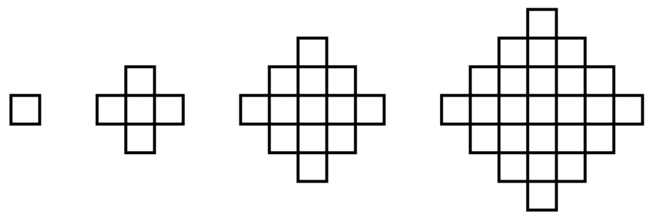
Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, ¿cuál ocupa la posición 2013?

(30)OMCC13-P4

Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se superponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe estrategia ganadora para alguna jugadora?

(31)OMCC14-P1
Un entero positivo se denomina *tico* si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Verifique que 2014 es tico. ¿Cuál será el próximo año tico? ¿Cuál será el último año tico de la historia?

(32)OMCC14-P4
Con cuadrados de lado 1 se forma en cada etapa una figura en forma de escalera, siguiendo el patrón del dibujo.



Por ejemplo, la primera etapa utiliza 1 cuadrado, la segunda utiliza 5, etc. Determine la última etapa para la cual la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadrados.

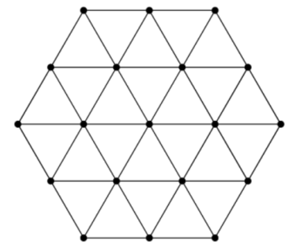
(33)OMCC15-P1
Se desea escribir n números reales diferentes con $n \geq 3$, alrededor de una circunferencia, de modo que cada uno de ellos sea igual al producto de su vecino de la derecha por su vecino de la izquierda. Determine todos los valores de n para los cuales lo anterior es posible.

(34)OMCC15-P4
Anselmo y Bonifacio inician un juego donde alternadamente van sustituyendo el número escrito en la pizarra. En cada turno, el jugador debe sustituir el número escrito, ya sea por la cantidad de divisores del número escrito o por la diferencia entre el número escrito y su cantidad de divisores. Anselmo es el primero en jugar, y aquel jugador que escriba el 0 gana. Dado que el número inicial es 1036, determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

(35)OMCC16-P1
Encuentre todos los enteros positivos n de 4 cifras tales que todos sus dígitos son cuadrados perfectos y n es múltiplo de 2, 3, 5 y 7.

(36)OMCC16-P4
En la pizarra está escrito el número 3. Ana y Bernardo juegan alternadamente, comenzando por Ana, de la siguiente manera: si en la pizarra está escrito el número n, el jugador que tenga el turno lo debe sustituir por cualquier entero m que sea primo relativo con n y tal que $n < m < n^2$. El primer jugador que escriba un número mayor o igual que 2016 pierde. Determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala.

(37)OMCC17-P1



En la figura se muestra una malla hexagonal formada por triangulitos equiláteros. Gabriel y Arnoldo toman turnos para jugar de la siguiente manera. En su turno, cada jugador colorea un segmento de recta, incluidos sus extremos, de acuerdo a las siguientes reglas.

- Los extremos del segmento deben coincidir con los vértices de algunos de los triangulitos.
- El segmento debe estar formado por uno o varios lados de algunos de los triangulitos.
- El segmento no puede tener ningún punto en común con ninguno de los segmentos coloreados anteriormente (incluidos los extremos).

Pierde el jugador que en su turno no pueda colorear ningún segmento. Si Gabriel juega primero determine qué jugador tiene un estrategia ganadora y descríbala.

(38)OMCC17-P4

Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sea B' la reflexión de B con respecto a la recta AC, y M el punto medio de AC. Se prolonga BM más allá de M hasta un punto D de modo que $BD = AC$. Demuestre que $B'C$ es la bisectriz del ángulo $MB'D$.

(39)OMCC18-P1

Se tienen 2018 tarjetas numeradas de 1 hasta 2018. Los números de las tarjetas son visibles todo el tiempo. Tito y pepe juegan tomando una tarjeta en cada turno hasta que acaben, empezando por Tito. Cuando terminan de tomar todas las tarjetas, cada uno suma los números de sus tarjetas, y aquel que obtenga como resultado un número par gana el juego. Determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora y explique por qué funciona.

(40)OMCC18-P4

Determine todas las ternas (p, q, r) de enteros positivos, donde p y q son números primos, tales que:

$$\frac{r^2 - 5q^2}{p^2 - 1} = 2\,.$$