Introducción a la Teoría de Juegos

Juan José Hernández Beltrán

24 de junio de 2023, Monterrey, Nuevo León

Introducción:

Se le denomina ***juego***, a aquella actividad en la que los participantes deben seguir una serie de reglas para conseguir la victoria. En un juego puede haber uno o varios jugadores y existen dos posibles resultados para cada uno de ellos: ganar o perder el juego. Un ***jugador*** es cada uno de los participantes que en el juego toman decisiones con el objetivo de alcanzar la victoria. Se considera como juego justo a aquel en el que todos los jugadores participan en igualdad de condiciones para alcanzar la victoria.

La ***Teoría de Juegos*** se ocupa del análisis riguroso y sistemático de estas situaciones. Esta área de las matemáticas se emplea en la toma de decisiones en múltiples circunstancias tales como los juegos de ajedrez, la biología, las negociaciones políticas o empresariales, estrategias militares o situaciones propias del día a día.

Conceptos:

El ***Principio de Invarianza*** es una técnica que consiste principalmente en buscar características que permanecen invariantes en un problema, es decir, aquellas que no varían en el desarrollo del proceso. Se puede identificar el candidato a invariante del ejercicio respondiendo a las siguientes cuestiones: *¿qué estado es el mismo? ¿qué permanece constante?*

La técnica de ***Coloración*** se emplea en la Teoría de juegos para juegos con tablero. En tales casos, la estrategia consiste en "colorear" el tablero de juego con una determinada coloración y, a partir de esto, deducir la estrategia ganadora del juego. La coloración está muy ligada a otras técnicas como la paridad.

Enunciados:

Problema 1: Hay tres pilas de piedras: una con 10 piedras, otra con 15 y otra con 20. En cada turno, un jugador elige una pila y la divide en dos pilas más pequeñas. El perdedor es el jugador que no puede hacer esto. ¿Quién va a ganar y cómo?

Problema 2: Los números 1 al 20 son escritos en el pizarrón. Dos jugadores por turnos ponen signos "+" y "−" entre los números. Cuando todos los signos son puestos, la expresión resultante se evalúa. El primer jugador gana si la suma es par, el segundo jugador gana si la suma es impar. ¿Quién va a ganar y cómo?

Problema 3: Los números 25 y 36 se escriben en el pizarrón. En cada turno, los jugadores escriben en el pizarrón la diferencia (positiva) entre dos números ya escritos (sólo lo escribe si el número resultante no está ya escrito en el pizarrón). Gana quien ya no pueda escribir ningún número.

Problema 4: Se plantea el siguiente juego: hay dos jugadores y el objetivo es alcanzar una moneda que se encuentra en el último lugar de una cadena con 99 canicas colocadas sobre una mesa. Por turnos, cada jugador puede elegir tomar entre una y cuatro canicas. Entonces, se irán tomando canicas de tal forma que el primer jugador que tome la moneda es el ganador. ¿Hay estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores? Puntualizamos que la moneda se incluye en el número de canicas que se puede tomar en un turno.

Problema 5: Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos:

- Si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede tomar una sola piedra o la mitad de las piedras.
- Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que tomar una sola piedra.

El objetivo del juego es tomar la última piedra. Determina los valores de n para los que Ana tiene una estrategia ganadora.

Problema 6: Dos jugadores por turnos ponen monedas del mismo tamaño en una mesa redonda sin poner alguna moneda sobre otra. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 7: Hay dos pilas con piedras. Una tiene 30 piedras y la otra 20. Dos jugadores por turnos quitan tantas piedras como quieran de alguna de las pilas. Gana el jugador que quita la última piedra. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 8: En el tablero de ajedrez, una torre está en la casilla *a1*. Los jugadores por turnos mueven la torre horizontal a la derecha o vertical hacia arriba. El jugador que pone la torre en la casilla *h8* gana.

Problema 9: Suponiendo que en un tablero de ajedrez la figura del caballo se encuentra en una determinada posición y realiza 19 movimientos. ¿Podría entonces volver a su posición inicial?

Problema 10: A un tablero de ajedrez se le quitan dos casillas que están en esquinas opuestas. ¿Es posible rellenar las 62 casillas restantes con fichas de tamaño 2×1?

Problema 11: Dos jugadores colocan de forma alternativa monedas sobre un tablero de ajedrez de 644×644 casillas. Gana el primer jugador que consiga poner una moneda que forme, con otras tres monedas del tablero, los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora?

Problema 12: Se escribe el número 1234 en el pizarrón. Un movimiento consiste en restarle algún dígito distinto de cero al número que se encuentre en el pizarrón, borrar el número que está en el pizarrón y reemplazarlo con la resta calculada. Gana el jugador que escriba el cero.