

## CONTROL DE EQUILIBRIO DE PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

### Introducción

En esta práctica se estudiará el diseño e implementación de un controlador por realimentación de estados mediante el método LQR, aplicado al control de un péndulo invertido.

### Objetivo de aprendizaje

Sugerir soluciones a problemas complejos de ingeniería empleando técnicas avanzadas de control, como el control LQR, que involucren una aplicación novedosa del conocimiento adquirido.

### Marco teórico

El equilibrio es una tarea de control común. En este experimento encontraremos estrategias de control que equilibran un péndulo rotacional (como el de la figura 1a) en posición vertical, mientras el brazo se mantiene en una posición deseada.

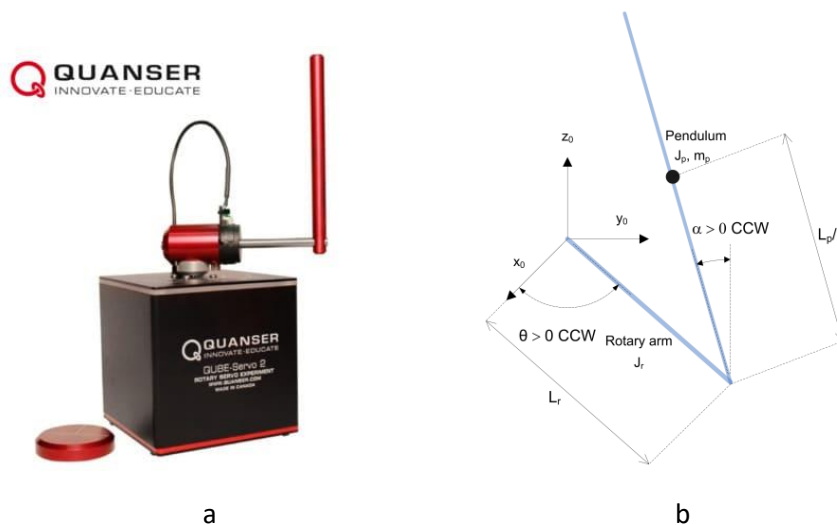


Figura 1. (a) Imagen del péndulo invertido Quanser. (b) Convención de ángulos y eslabones para el modelo del péndulo.

Cuando se equilibra el sistema (teniendo en cuenta la nomenclatura de la figura 1b), si el ángulo del péndulo ( $\alpha$ ) es pequeño, el equilibrio se puede lograr con un simple controlador por realimentación de estados, cuyo diagrama se observa en la figura 2. Si estamos interesados en mantener el brazo en una posición deseada, también se puede introducir un lazo de retroalimentación de la posición del brazo. La ley de control puede entonces expresarse como:

$$u = k_1 (\theta_r - \theta) - k_2 \alpha - k_3 \dot{\theta} - k_4 \dot{\alpha}$$

donde  $k_1$  es la “ganancia proporcional” del ángulo del brazo,  $k_2$  es la “ganancia proporcional” del ángulo del péndulo,  $k_3$  podría decirse que es la “ganancia derivativa” del ángulo del brazo y  $k_4$  sería la “ganancia derivativa” del ángulo del péndulo (haciendo analogía con el concepto del control PD). El ángulo deseado

# Práctica No.2 de laboratorio

Asignatura: Control Automático - Profesor: Alexander Martínez Álvarez – Monitora: Karen Marín Franco

del brazo se indica con  $\theta_r$  y la referencia para el ángulo del péndulo es cero (es decir, posición vertical superior).

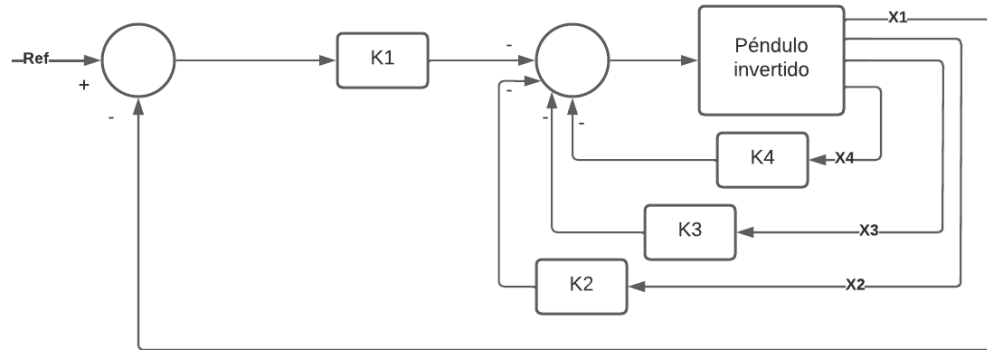


Figura 2. Diagrama de control para el equilibrio del péndulo.

El modelo del sistema puede ser obtenido usando la ecuación de Euler-Lagrange para el sistema de eslabones de la figura 1b, las ecuaciones resultantes deben ser linealizadas alrededor del punto de operación (péndulo vertical hacia arriba) y representadas como un sistema en espacio de estados. Al aplicar todos estos procedimientos se llega a la siguiente representación (para mayores detalles pueden consultarse las referencias [1][2][3]):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -28.1714 & -3.21283 & 0.928499 \\ 0 & 86.1096 & -3.17547 & -2.83808 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.39423 \\ 9.28499 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Equipos e instrumentos

- Quanser Qube Servo 2 con péndulo.

# Práctica No.2 de laboratorio

Asignatura: Control Automático - Profesor: Alexander Martínez Álvarez – Monitora: Karen Marín Franco

- Arduino UNO
- Cables de conexión
- Computador

## Preparación de la práctica

El objetivo de este procedimiento es diseñar un controlador usando el método LQR para, posteriormente, implementar el controlador de un péndulo invertido rotacional.

1. A partir del modelo del sistema, determine su estabilidad.
2. Encuentre un conjunto de ganancias para aplicar un esquema de control por realimentación de estados usando el método LQR. Para esto, puede definir la matriz  $Q$  inicialmente como una matriz identidad de orden cuatro y la “matriz”  $R$  como un escalar de valor unitario. Puede utilizar la función *lqr* de Matlab para obtener las ganancias de realimentación.
3. Realice la simulación del sistema controlado. Utilice diferentes valores de condiciones iniciales o de perturbaciones para conseguir mejores observaciones de la respuesta del sistema.
4. Modifique los valores de  $Q$  y  $R$  (podría usar el procedimiento sugerido en clase) para obtener otro conjunto de ganancias de realimentación. Simule el sistema de control en Simulink con estos nuevos valores y compare los resultados con los del punto anterior. Ajuste los valores de  $Q$  y  $R$  hasta conseguir un desempeño del sistema controlado que considere adecuado.
5. Realice la simulación del sistema controlado. Utilice diferentes valores de condiciones iniciales o de perturbaciones para conseguir mejores observaciones de la respuesta del sistema.

Tenga en cuenta que la variación máxima de los estados y del esfuerzo de control está dada por:

- ✓  $\theta$ : El sistema posee un par de topes mecánicos en la base del péndulo que le permiten girar solo 4.8 rad.
- ✓  $\alpha$ : Este ángulo evoluciona libremente. Sin embargo, se sugiere tener en consideración la restricción de  $\pi/6$  que está implementada en el programa de Arduino.
- ✓  $\theta'$ : Se recomienda usar 1 rad/s o valores cercanos a este, como velocidad angular máxima.
- ✓  $\alpha'$ : Mucho menor que  $\theta'$ , se puede suponer un valor que sea 10 veces menor.
- ✓  $u$ : Para definir la variación máxima de la señal de control debe tenerse en cuenta la información dada en la tabla 1.

# Práctica No.2 de laboratorio

Asignatura: Control Automático - Profesor: Alexander Martínez Álvarez – Monitora: Karen Marín Franco

Tabla 1. Parámetros físicos del sistema Quanser Qube Servo 2

Symbol	Description	Value
<b>DC Motor</b>		
$V_{nom}$	Nominal input voltage	18.0 V
$\tau_{nom}$	Nominal torque	22.0 mN-m
$\omega_{nom}$	Nominal speed	3050 RPM
$I_{nom}$	Nominal current	0.540 A
$R_m$	Terminal resistance	8.4 $\Omega$
$k_t$	Torque constant	0.042 N-m/A
$k_m$	Motor back-emf constant	0.042 V/(rad/s)
$J_m$	Rotor Inertia	$4.0 \times 10^{-6}$ kg-m <sup>2</sup>
$L_m$	Rotor inductance	1.16 mH
$m_h$	Module attachment hub mass	0.0106 kg
$r_h$	Module attachment hub radius	0.0111 m
$J_h$	Module attachment moment of Inertia	$0.6 \times 10^{-6}$ kg-m <sup>2</sup>
<b>Inertia Disc Module</b>		
$m_d$	Disc mass	0.053 kg
$r_d$	Disc radius	0.0248 m
<b>Rotary Pendulum Module</b>		
$m_r$	Rotary arm mass	0.095 kg
$L_r$	Rotary arm length (pivot to end of metal rod)	0.085 m
$m_p$	Pendulum link mass	0.024 kg
$L_p$	Pendulum link length	0.129 m
<b>Motor and Pendulum Encoders</b>		
	Encoder line count	512 lines/rev
	Encoder line count in quadrature	2048 lines/rev
	Encoder resolution (in quadrature, deg)	0.176 deg/count
	Encoder resolution (in quadrature, rad)	0.00307 rad/count
<b>Amplifier</b>		
	Amplifier type	PWM
	Peak Current	2 A
	Continuous Current	0.5 A
	Output voltage range (recommended)	$\pm 10$ V
	Output voltage range (maximum)	$\pm 15$ V

Utilice las combinaciones que sean necesarias hasta obtener al menos dos conjuntos diferentes de ganancias con los cuales el esfuerzo de control cumpla con las especificaciones dadas en la tabla 1 y se logre estabilizar el péndulo. Registre los valores de las ganancias y de las matrices Q y R utilizadas.

6. Seleccione un conjunto de ganancias de realimentación con las que se implementará el esquema de control usando el programa “*PruebaPendulo.ino*”



La preparación de la práctica se realizará en la sesión de clase del día lunes 2 de mayo y la sesión práctica se llevará a cabo en la clase del día miércoles 4 de mayo de 2022. El plazo para entregar el informe de laboratorio será hasta el día **miércoles 11 de mayo de 2022, a las 12:00 del mediodía.**

# Práctica No.2 de laboratorio

Asignatura: Control Automático - Profesor: Alexander Martínez Álvarez – Monitora: Karen Marín Franco

## Práctica de laboratorio

El día de la sesión de laboratorio se comprobará lo siguiente:

- Desarrollo y conclusiones obtenidas en el punto 3 y 4 de la preparación.
- Implementación del controlador propuesto en el punto 5 de la preparación.



## Criterios de evaluación

Con base en los resultados entregados por cada grupo de estudiantes, el profesor verificará si:

- Se identifican y analizan los efectos de la variación de los parámetros Q y R en el diseño un controlador usando la técnica LQR.
- Se tiene claridad sobre los efectos que un controlador puede tener sobre la estabilidad de un sistema.



## Entregables

Cada equipo de estudiantes presentará un informe de la práctica con las observaciones que el equipo de trabajo considere más relevantes e importantes, así como las conclusiones obtenidas.



## Fecha importante

El informe de la práctica debe enviarse al correo del profesor a más tardar el día miércoles 11 de mayo, a las 12:00 m.

La dirección de correo es: [amartin@javerianacali.edu.co](mailto:amartin@javerianacali.edu.co)

## Referencias

[1]"QUBE - Servo 2 - Quanser", Quanser, 2020. [Online]. Disponible en:  
<https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/>. [Consultado: 24 - Abril - 2022].

[2] Campos, Juan Camilo. *Guías de Sistemas Realimentados, Lab # 2 – State Space Modeling*. 2018.

[3] Campos, Juan Camilo. *Guías de Sistemas Realimentados, Lab # 3 – Rotary Pendulum*. 2018.

Estos documentos y otros que pueden servir de apoyo, están disponibles en la carpeta "Práctica No.2 de laboratorio – LQR" de la sección Documentos, en el Aula digital.