

Taller DFT, FFT y Diseño de Filtros FIR
Procesamiento Digital de Señales
Prof. Hernán Darío Benítez Restrepo.
Ingeniería Electrónica
Pontificia Universidad Javeriana Cali

Octubre 7 de 2022

1. Discrete Fourier Transform (DFT)

1. Un sistema LTI tiene la respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} \frac{1}{1, 1 + \cos\omega} \quad (1)$$

encuentre la ecuación en diferencias en términos de $x(n)$ y $y(n)$ que describe el sistema.

2. Encuentre la función de transferencia $H(\omega)$ de un sistema LTI que satisface la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) \quad (2)$$

2. Fast Fourier Transform

1. Asuma que una multiplicación compleja toma $1 \mu s$ y que la cantidad de tiempo para calcular una DFT se determina por la cantidad de tiempo que toma calcular todas las multiplicaciones:
 - a) ¿Cuanto tiempo toma calcular una DFT de 1024 puntos directamente?
 - b) ¿Cuanto tiempo toma si usa la FFT?
 - c) ¿Repita los puntos anteriores con una DFT de 4096 puntos.
2. ¿Qué es la decimación por tiempo en la FFT ?
3. Grafique la estructura de cálculo de la FFT para 4 puntos usando el enfoque de decimación por tiempo?

3. Filtros FIR

1. Diseñe un filtro FIR $h(n)$ de fase lineal por ventanas que aproxime la respuesta de un filtro ideal:

$$H_d(w) = \begin{cases} 1 & \text{para } -\frac{\pi}{6} \leq w \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 & \text{para en otro caso} \end{cases}$$

Type of window	Approximate transition width of main lobe	Peak sidelobe (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	-13
Bartlett	$8\pi/M$	-27
Hanning	$8\pi/M$	-32
Hamming	$8\pi/M$	-43
Blackman	$12\pi/M$	-58

Figura 1: Especificaciones en el dominio de la frecuencia para diferentes tipos de ventanas en el diseño de filtros IIR

Name of window	Time-domain sequence, $h(n), 0 \leq n \leq M-1$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$

Figura 2: Diferentes funciones de ventana para el diseño de filtros FIR

Diseño con una ventana de longitud $M = 25$ que logre la banda de transición del filtro más angosta de acuerdo a las especificaciones dadas en la Figura 1. Puede usar las definiciones de las ventanas dadas en la Figura 2.

- Realice una comparación en términos de las ventajas y desventajas de los métodos de diseño de filtros FIR por ventanas, muestreo en frecuencia y enfoque de Chebyshev. De acuerdo a éste análisis ¿cuál es el mejor método ?
- Diseño los siguientes filtros ideales FIR:
 - Pasobajo
 - Pasoalto
 - Pasabanda
 - Rechaza banda

con un orden N por medio del método de ventanas. Para cada caso encuentre $h(n)$ y use la ventana que Hanning. Asuma como conocidas las respectivas frecuencias de corte en cada caso así como las atenuaciones en las bandas de paso y rechazo.

- En la respuesta de fase de un filtro FIR ¿Qué se conoce como 'warped phase' y 'unwarped phase' ?
- Encuentre el group delay del siguiente filtro:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (3)$$

Sugerencia: $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

- Suponga la respuesta impulsional $h(n)$ mostrada en la Figura 3. Determine:

- El orden del filtro, si es simétrico o antisimétrico, la fase y el group delay τ .
- El tipo de filtro y la respuesta frecuencial $H(e^{j\omega})$ para el caso general cuando el orden es N .

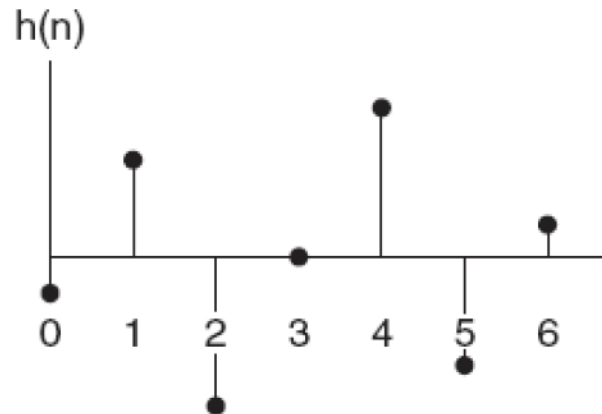


Figura 3: Respuesta impulsional $h(n)$ de un filtro FIR

7. Considere las siguientes especificaciones para un filtro pasabanda:

$$\begin{array}{ll} |H(e^{j\omega})| \leq 0,01 & 0 \leq \omega \leq 0,2\pi \\ 0,95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,05 & 0,3\pi \leq \omega \leq 0,7\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0,02 & 0,8\pi \leq \omega \leq \pi \end{array}$$

Diseñe un filtro FIR que cumple estas especificaciones usando una ventana rectangular. Suponga que el orden del filtro es $N=110$.

8. Queremos diseñar un filtro FIR de rizado uniforme por el método de aproximación de Chebyshev para satisfacer las siguientes especificaciones:

$$\begin{array}{ll} 0,98 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,02 & 0 \leq \omega \leq 0,2\pi \\ |H(e^{j\omega})| < 0,001 & 0,22\pi \leq \omega \leq 0,78\pi \\ 0,95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1,05 & 0,8\pi \leq \omega \leq \pi \end{array}$$

- ¿Cuáles son los niveles de rizado en las bandas de paso y de rechazo δ_1, δ_3 y δ_2 ?
 - ¿Cuáles son las atenuaciones en dB de las bandas de paso y la banda de rechazo α_1, α_3 y α_2 ?
 - ¿Cuál función de pesos $W(\omega)$ se debe usar para diseñar el filtro?
9. Grafique la realización directa (diagrama de bloques) de un filtro FIR de media móvil de 5 coeficientes.
10. Consideremos un filtro digital (sistema LTI) caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (4)$$

Use la transformada directa z para encontrar la función de transferencia $H(z)$. En los filtros FIR ¿A qué son iguales los coeficientes a_k ? ¿Por qué?