TRABAJO FINAL DE ANÁLISIS Y COMPUTACIÓN NUMÉRICO

Estudiantes:
ANDRES FELIPE SALAZAR R.
JUAN JOSÉ RESTREPO ROSERO
RUSBELT PALOMINO
MANUEL ALEJANDRO OREJUELA
CESAR JULIAN RAMOS SALAZAR

FACULTAD DE INGENIERÍA
CALI

CALI - VALLE DEL CAUCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
2021

ÍNDICE

Método de Diferencias Finitas Aplicado al Comportamiento de Longitudes de Onda

Resumen

En el diario vivir el ser humano interactúa con un sin fin de genialidades de la ingeniería. Todas estas han partido del mundo físico y mediante el uso de matemáticas y demás pueden ser representadas mediante modelos, ecuaciones, entre otros. En el presente documento se realizó una investigación sobre cómo en la vida diaria encontramos reflejadas las ecuaciones, en especìfico ecuaciones diferenciales hiperbólicas; más allá de ello se verá un modelo y una aplicaciòn especìfica relacionada con la ecuaciòn de onda, una cuerda en movimiento y el método de las diferencias finitas. Finalmente se verá una implementación práctica sobre el movimiento ondulatorio de una cuerda mediante un código desarrollado en python.

Antecedentes

Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas

- C. Ecuaciones Hiperbólica
  - Una ecuación diferencial hiperbólica es una ecuación parcial diferencial de segundo orden.
- El prototipo de la ecuación hiperbólica es la ecuación de onda la cual modela diversos fenómenos físicos, ya sea el de una cuerda o el comportamiento de la luz; se presentara una deducción de la ecuación de onda a partir de ecuaciones de maxwell y otra a partir de un modelo simplificado del movimiento de una cuerda: -B^2-4AC>0

Ecuación de Onda

- D' Alembert formuló esta ecuación que describe la propagación de una variedad de ondas, como la del sonido, las de la luz y las del agua. Es importante en campos como la acústica o la dinámica de fluidos.
- Siméon -Denis Poisson(1781-1840) fue un estudiante de Laplace y Legendre durante los años napoleónicos en Francia. Más adelante

asumió la cátedra en la Ecole Polytechnique, donde trabajó con ecuaciones parciales y ordinarias.

Método de las Diferencias Finitas

- Un problema físico que implica la presencia de la ecuación diferencial parcial hiperbólica es el estudio de las vigas que vibran con uno o ambos extremos sujetados y en la transmisión de electricidad en una línea larga donde existe alguna fuga de corriente hacia el piso
- L.E Richardson está relacionado con la extrapolación, realizó un trabajo sustancial en la aproximación de ecuaciones diferenciales parciales. Este método tiene error de truncamiento local de orden O(K^2 + H^2), pero por desgracia al igual que el método de diferencia progresiva, tiene bastantes problemas de estabilidad
- Jhon Clark (1926-2006) realizó investigaciones sobre la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, en especial problemas de conducción de calor.
- Los fundamentos teóricos del Método de Diferencias Finitas Generalizadas, se basa en la aproximación por mínimos cuadrados móviles.
- El desarrollo del método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) que surge como consecuencia de la evolución del método de diferencias finitas clásicas. Los trabajos de Jensen (1972) y Perrone y Kao (1975) pusieron las bases del método. Liszka y Orkisz (1980-1998) han realizado importantes contribuciones a la mejora y desarrollo del método.

Pregunta de investigación

¿En qué campos de la ingeniería podemos ver implícitamente la aplicación de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas y cómo solucionarlas mediante el método de las diferencias finitas para calcular la deformación de un material dado a lo largo del tiempo?

Objetivo general

- Implementar el método de diferencias finitas aplicado al movimiento de una cuerda de un instrumento basándose en la ecuación de onda.
- Simular en MATLAB el comportamiento oscilatorio de la cuerda con base a los resultados obtenidos al aplicar el método para solucionar la ecuación diferencial hiperbólica.

Objetivos específicos

- Aprender uno de los métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (EDPH).
- Identificar situaciones de la vida real donde se puedan crear modelos al estilo de una EDPH.

Desarrollo

A continuación estudiaremos y veremos el proceso requerido para entender las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas y como estas se encuentran implícitas en la ecuación que describe una cuerda cuando se excita con una fuerza y energía determinada.

Consideremos una cuerda de un instrumento musical, con una longitud *L,* la cual se encuentra tensionada y se mueve en dirección vertical únicamente, pero este desplazamiento en el eje y es pequeño en comparación con la longitud total L de la cuerda.

Ahora en el origen de las coordenadas, colocamos un extremo de la cuerda y a un punto X el otro. Sabemos que cuando la cuerda presente una perturbación, haciendo que dicha perturbación se desplace a lo largo de toda la cuerda, de extremo a extremo. Es por eso que dicho desplazamiento ocurra a lo largo del eje X en un intervalo de tiempo, por lo que denotaremos al desplazamiento de la cuerda en cada punto X como $y = u(x, t)$.

Como siguiente paso, supondremos que en un tiempo *t=0,* la cuerda adopta la forma de la gráfica de una función conocida como $y = f(x)$, es decir, $y = u(x, 0) = f(x)$. Se sabe desde el inicio que la cuerda del instrumento se encuentra tensionada, entonces si se le aplica una fuerza para que comience a moverse, cada uno de los puntos de la cuerda se desplazará e irá variando a lo largo del tiempo, es decir, cada punto tendrá una velocidad $v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ y una aceleración $a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$.

Recordando la segunda ley de Newton, *F = ma, donde F* es la fuerza que actúa en cada punto *x* de la cuerda en el instante *t,* sustituimos la la aceleración en dicha ecuación:

$$F = m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Además, la fuerza de tensión en cada punto es proporcional a la curvatura de la cuerda, es decir, entre más curvada esté, mayor será la tensión y en cada tiempo la curvatura está determinada por la posición cambiante $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ para $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ pequeña. Por lo que obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Y si no se tienen en cuenta fuerzas de fricción ni las fuerzas externas, u satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Donde α es una constante que representa la velocidad de propagación de la onda que dependerá del material del cual está hecha la cuerda. Por lo que el elemento de masa en una hipotética cuerda unidimensional está dada por la densidad ρ(x) del material y la tensión T(t) que se le aplique en un tiempo *t* a la cuerda, obteniendo así lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{T(t)}{\rho_0(x)}} = C$$

Y reemplazando α en nuestra expresión de onda anterior, finalmente se nos queda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Para seguir adelante se estudiaron diferentes métodos con los cuales llegar a la solución de nuestra ecuación diferencial. Al pasar dicha etapa se seleccionó el método que se explica brevemente a continuación.

Método de solución de la ecuación diferencial - Diferencias finitas

Este método es ampliamente usado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias como también ecuaciones diferenciales parciales. Estas últimas, son las que en esta investigación se están abordando, específicamente ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

A grandes rasgos este método consiste en tomar una ecuación diferencial ordinaria y hacer en ella una serie de sustituciones que nos permitirá obtener un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas, en otras palabras un sistema de ecuaciones lineales. Al llegar a este punto se puede proceder mediante métodos de solución a sistemas de ecuaciones lineales que fueron aprendidos en cursos pasados, por ejemplo el método de gauss jordan o gauss seidel.

Las sustituciones que el método de las diferencias finitas nos pide que hagamos son las siguiente:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Yi+1 - Yi-1}{2\Delta X} \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{Yi-1-2Yi+Yi+1}{\Delta X^2}$$

$$Y = Yi$$

Esquema explícito:

Basándonos en el esquema explícito de las segundas derivadas con respecto a la posición *x*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y[i+1] - 2y[i] + y[i-1]}{\Delta x^2}$$

De esta manera calculamos dichas derivadas de posición en relación a las deformaciones que ocurren a lo largo del tiempo *t* y luego se despeja el término $u^{t+\Delta t}$. Cabe resaltar que la deformación en el tiempo *t=0*, es conocida.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u^t[i+1] - 2u^t[i] + u^t[i-1]}{\Delta x^2}$$

Finalmente, la ecuación resultante debe tener la forma lineal con todos los coeficientes positivos, por lo que existe una restricción conocida como “Criterio de estabilidad”

Por ejemplo:

Dada una cuerda tensionada de extremo a extremo con las siguientes características:

L = 1.0 m
α = 1.5 m/s

con condiciones iniciales, en donde la cuerda está estirada una longitud *L=0.5 m* y parte del reposo.

$u = u_{inc} = 0.5\,m \qquad 0 < x < L \qquad t = 0$

$\frac{\partial u}{\partial t} = v_{inc} = 0\,m/s \qquad 0 < x < L$

$t = 0$

y sus condiciones de frontera para los extremos y los puntos intermedios entre estos, es decir, entre los extremos de la cuerda.

$u = u_0 = 0\,m$ $x = 0$

$t \geq 0$

$u = u_L = 0\,m$ $x = L$

$t \geq 0$

Resolviendo por el método de diferencias finitas, tenemos lo siguiente:

$N_x = 5$ es el número de nodos o particiones que haremos a lo largo del intervalo L (longitud de nuestra cuerda).

$\Delta x = \frac{L}{Nx-1}$ es la distancia que hay entre cada una de nuestras particiones.

$X[i] = i\Delta x$ es el vector de posición para cada punto de la cuerda calculado anteriormente.

$i = 0, 1, 2, \ldots, N_x - 1$

$X = < 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 >$

Ahora bien, haciendo uso de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ y empleando derivación numérica para calcular una aproximación para cada punto de los nodos obtenidos (puntos centrales) y con ello poner nuestra ecuación diferencial de onda en de diferencia finita se llega a lo siguiente:

$$0 < i < N - 1$$

$$\frac{u^{t+\Delta t}[i] - 2u^{t}[i] + u^{t-\Delta t}[i]}{\Delta t^2} = C^2\left(\frac{u^{t}[i+1] - 2u^{t}[i] + u^{t}[i-1]}{\Delta x^2}\right)$$

Deformación en el tiempo t

Sin embargo, la deformación antes de *t = 0* se desconoce, esto es ocasionado por el término que relaciona las deformaciones en los tiempos anteriores ($u^{t-\Delta t}$)por lo que debemos emplear una condición inicial con derivada central.

Recordando la condición inicial para la velocidad en *t = 0:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_{inc} = 0\, m/s$$

Y haciendo uso de las diferencias centrales de la derivación numérica, podemos reescribirla como la ecuación de la velocidad como:

$$\frac{u^{t+\Delta t}[i] - u^{t-\Delta t}[i]}{2\Delta t} = 0$$

$$u^{t+\Delta t}[i] - u^{t-\Delta t}[i] = 0$$

$$u^{t+\Delta t}[i] = u^{t-\Delta t}[i]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y despejando $u^{t+\Delta t}[i]$ obtenemos:

$$u^{t+\Delta t}[i] = (\frac{C^2\Delta t^2}{2\Delta x^2})u^{t}[i+1] + (1 - \frac{C^2\Delta t^2}{\Delta x^2})u^{t}[i] + (\frac{C^2\Delta t^2}{2\Delta x^2})u$$

Para el criterio de estabilidad

$$1 - \frac{C^2\Delta t^2}{\Delta x^2} > 0$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$$

Ahora bien, para el caso *t > 0* si es posible conocer el término $u^{t-\Delta t}$ por ende, volvemos a despejar $u^{t+\Delta t}[i]$ obteniendo así:

$$\frac{u^{t+\Delta t}[i] - 2u^{t}[i] + u^{t-\Delta t}[i]}{\Delta t^{2}} = C^{2}\left(\frac{u^{t}[i+1] - 2u^{t}[i] + u^{t}[i-1]}{\Delta x^{2}}\right)$$

$$u^{t+\Delta t}[i] = \left(\frac{C^{2}\Delta t^{2}}{\Delta x^{2}}\right)u^{t}[i+1] + \left(2 - \frac{2C^{2}\Delta t^{2}}{\Delta x^{2}}\right)u^{t}[i] + \left(\frac{C^{2}\Delta t^{2}}{2\Delta x^{2}}\right)u^{t}[i-1]$$

Para el criterio de estabilidad

$$2 - \frac{2C^{2}\Delta t^{2}}{\Delta x^{2}} > 0$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$$

Para las condiciones de frontera

$$u^{t+\Delta t}[0] = u_{0} = 0$$
$$u^{t+\Delta t}[N_{x} - 1] = u_{L} = 0$$

De estas condiciones se puede interpretar que son iguales a cero dado que hace referencia a los extremos de la cuerda los cuales al estar fijos, no presentarán ningún movimiento, es decir, ninguna perturbación; únicamente las partes centrales son las que sufren dichas deformaciones

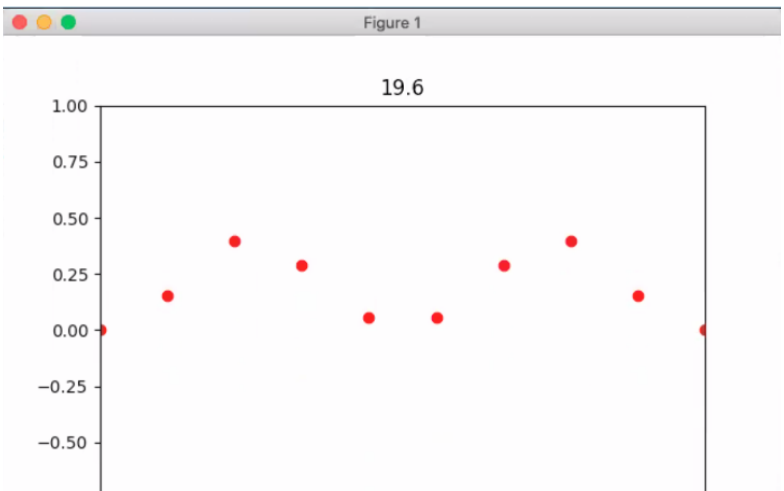
Otros ámbitos de aplicación

Lo explicado anteriormente es un ejemplo específico y es en el que se ha orientado el presente informe y los literales que veremos más adelante. Cabe recalcar que las ecuaciones diferenciales como las de la ecuación de onda, se encuentran en muchos espacios de la vida cotidiana.
Algunas aplicaciones demás son:

- La deformación de una viga de construcción
- Los movimientos ondulatorios en los cables tensores y en la estructura de un puente colgante

Resultados

tkinter



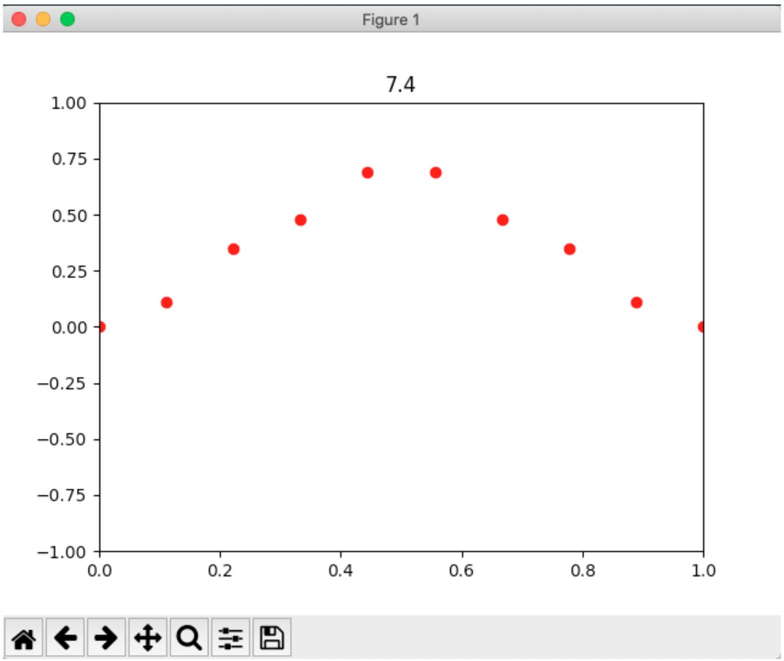
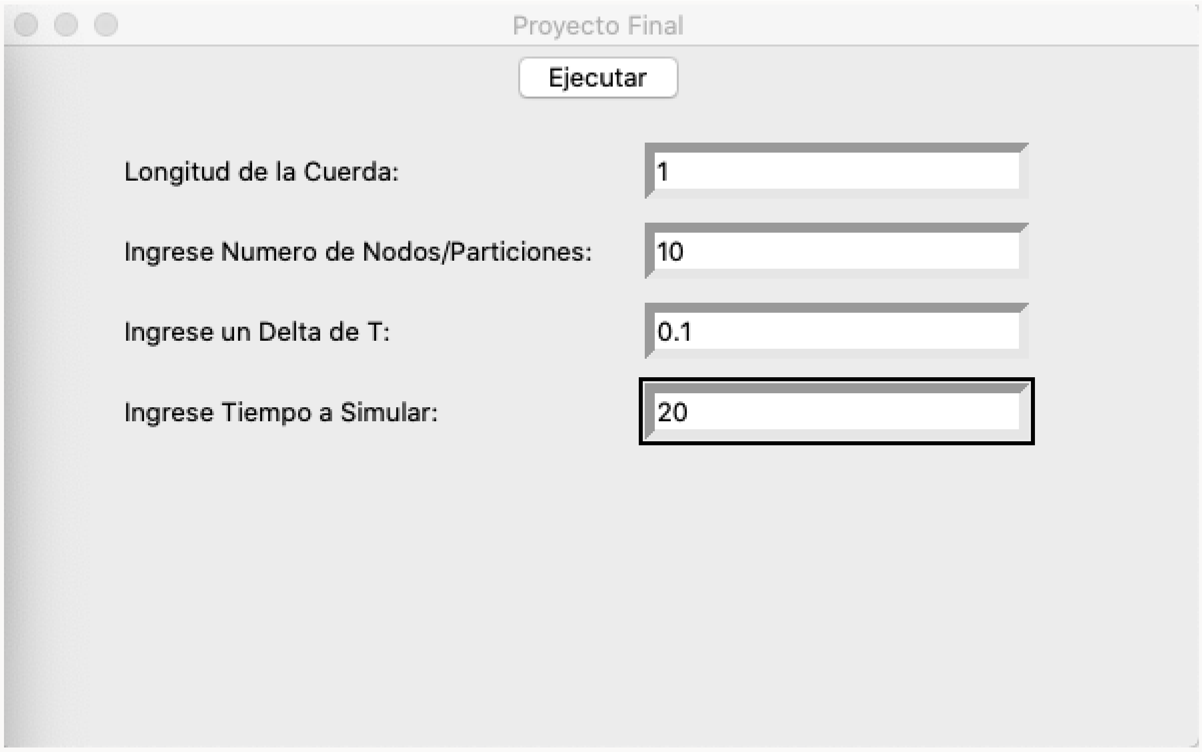
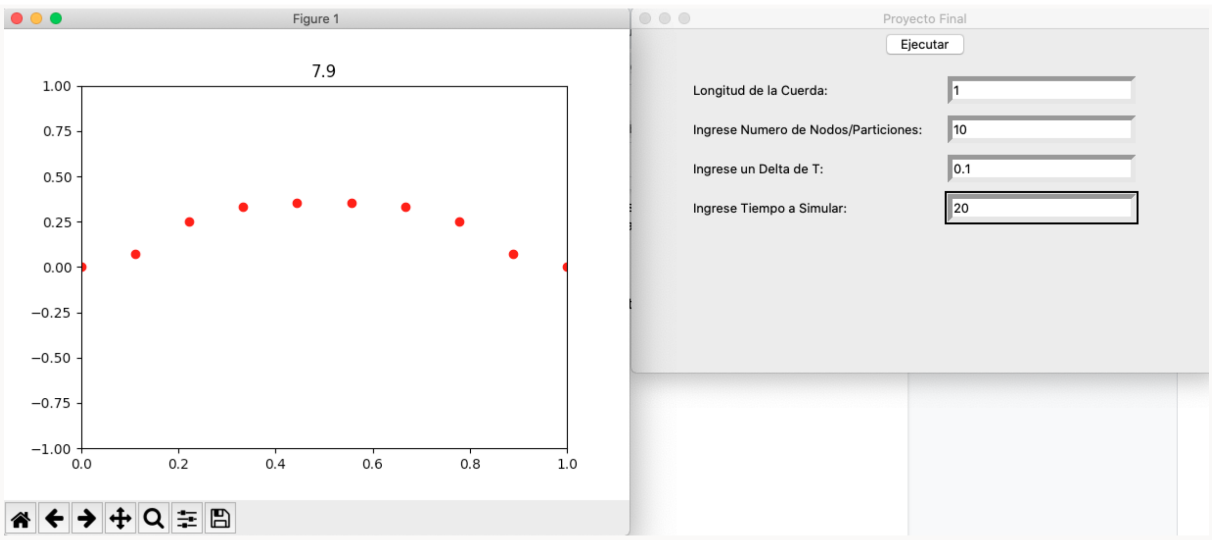


Figure 1
7.4
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0





Basados en el ejemplo anterior se realizó un código para simular el comportamiento de dicha cuerda teniendo en cuenta parámetros como la longitud de cuerda, los nodos como particiones, un dudt que representa las variaciones de las deformaciones de la cuerda a lo largo del tiempo.

Conclusiones

- Se aprendió que mediante el método de las diferencias finitas se pueden resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, como la ecuación generada por el comportamiento oscilatorio de una cuerda en movimiento.

- Se logró identificar e implementar de manera satisfactoria modelos que se encuentran implícitos en la vida real. Esto se logra mediante la implementación en python con distintas librerías gráficas como tkinter y de simulación propias de matlab.

Anexos

- Implementación Código

Users > andressalazar > Desktop > 2021-1 > Analisis_Numerico > TRABAJO_FINAL > gui.py > ...

```
###aqui empieza la parte grafica de tkinter####################
###############################################################
window=Tk()
#titulo de la ventana
window.title('Proyecto Final')

#etiqueta de la longitud de cuerda con su entry box
Lo=tk.IntVar()
lbl0=Label(window, text="Longitud de la Cuerda: ", fg='black')
lbl0.place(x=60, y=50)
txtfld0=Entry(window,bg='white',fg='black', bd=5,textvariable=Lo)
txtfld0.place(x=320, y=45)


##etiqueta del numero de nodos con su entry box
No=tk.IntVar()
lbl1=Label(window, text="Ingrese Numero de Nodos/Particiones: ", fg='black')
lbl1.place(x=60, y=90)
txtfld1=Entry(window,bg='white',fg='black', bd=5,textvariable=No)
txtfld1.place(x=320, y=85)

##etiqueta de entrada del dt con su entry box
dto=tk.StringVar()
lbl2=Label(window, text="Ingrese un Delta de T: ", fg='black')
```

Users > andressalazar > Desktop > 2021-1 > Analisis_Numerico > TRABAJO_FINAL > gui.py > ...

```
##tfinal = float(tfinalo.get())##20.##entrada
udt = u.copy()
u_dt = u.copy()

usolucion = [u]
vsolucion = [v]
tsolucion = [t]

while t < tfinal:
    #condicion inicial
    if t == 0.:
        for i in range(N):
            if i == 0:
                udt[i] = u0
            elif i == N-1:
                udt[i] = uL
            else:
                udt[i] = ( (c**2*dt**2/(2*dx**2))*u[i-1]
                          + (1 - c**2*dt**2/dx**2)*u[i]
                          + (c**2*dt**2/(2*dx**2))*u[i+1] )

    #en otro tiempo t
    else:
        for i in range(N):
```

Users > andressalazar > Desktop > 2021-1 > Analisis_Numerico > TRABAJO_FINAL > gui.py > ...

```
    u = udt.copy()
    v = (udt - u_dt)/(2*dt)
    t = t + dt
    usolucion.append(u)
    vsolucion.append(v)
    tsolucion.append(t)

usolucion = np.round(np.array(usolucion),3)
vsolucion = np.round(np.array(vsolucion),3)
tsolucion = np.round(np.array(tsolucion),3)

import matplotlib.animation as animation
fig = plt.figure()
ax = plt.gca()

def actualizar(i):
    ax.clear()
    plt.plot(x,usolucion[i], 'ro')
    plt.title(str(tsolucion[i]))
    plt.xlim(0,L)
    plt.ylim(-1,1)

ani = animation.FuncAnimation(fig,actualizar, range(len(tsolucion)))
plt.show()
```

Referencias

- [1] *Sgpwe.izt.uam.mx*, 2021. [Online]. Available: http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/gabl/ecuaciones_Diferenciales__parciales.pdf. [Accessed: 03- Jun- 2021].
- [2] "Ecuaciones diferenciales parciales, mecánica, ecuación de onda diferencias finitas python", *Youtube.com*, 2021. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=1oKhj1eW_q4&list=LL&index=2. [Accessed: 03- Jun- 2021].
- [3] "Solución de ecuaciones diferenciales por el método de diferencias finitas", *Youtube.com*, 2021. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=_0b7980WtI0&feature=youtu.be. [Accessed: 03- Jun- 2021].
- [4] "Codigos Metodos Numericos", *Youtube.com*, 2021. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=VpZsti5pYO4. [Accessed: 03- Jun- 2021].
- [5] "Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas: Ecuación de Onda.", *Youtube.com*, 2021. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=2HF0u75AI4Y. [Accessed: 03- Jun- 2021].
- [6] Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A.; and Vetterling, W. T. “Numerical Derivatives” §5.7 in Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 180-184, 1992.