# Proyecto 1
# Aplicaciones de EDO

Juan José Rivera Román - 20002802
Mario Esteban Ponce Contreras - 21000508
Universidad Galileo
Guatemala, Guatemala

***Resumen*—Al momento de trabajar con ecuaciones diferenciales de primer orden, no siempre es posible expresar la solución de manera explícita o ímplicita, aun cuando sea posible demostrar que dicha solución existe. En esos casos, una forma de expresar la solución a una ecuacion diferencial es por medio de algún método numérico. En este proyecto se estudia y aplica el método de Runge-Kutta, uno de los métodos numéricos más precisos.**

## I. Introducción

En este proyecto se pone en práctica lo aprendido en el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, los distintos tipos de métodos para encontrar las soluciones generales y particulares, además, se explorará el método de aproximación de Runge-Kutta que permite aproximar la solución a una ecuación diferencial de primer orden con valores iniciales $y\prime = f(x, y), y(x_o) = y_o$.

El objetivo principal del proyecto es entender y aplicar el método de aproximación de Runge-Kutta, comparar los resultados con el método analítico estudiado en clase y comprobar la presición del método para la resolución de ecuaciones diferenciales dados ciertos valores iniciales.

## II. Procedimiento

Se inició la práctica investigando en distintas fuentes el método de Runge-Kutta, cómo utilizarlo y las condiciones que deben cumplir para aplicar el método. Luego se procedió a abstraer el método en código de programación para facilitar la realización pruebas que permitan validar el correcto funcionamiento del algoritmo aplicado. Finalmente, se diseñó e implementó una interfaz de usuario para que cualquier usuario pueda hacer uso del algoritmo sin conocimiento previo en programación.

### II-A. *Materiales*

- Computadora con Visual Studio Code y procesador de 1.80GHz mínimo.
- Software: Nodejs, npm y Vue-cli.

### II-B. *Diagrama de flujo del proyecto*

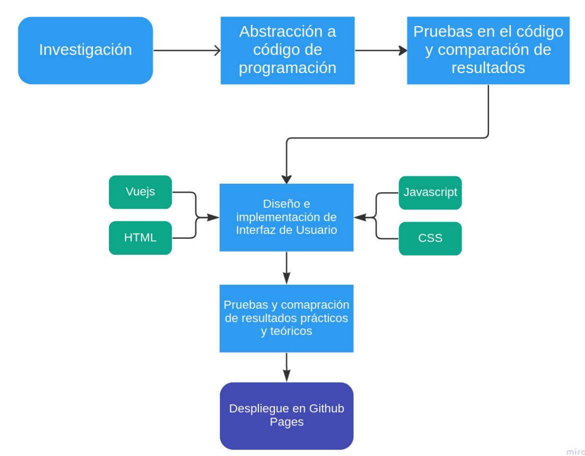


Figura 1. Diagráma de flujo del proyecto

### II-C. *Pasos del procedimiento*

Siguiendo el algoritmo de aproximación del método de Runge-Kutta:

1. Se definen la ecuación $y\prime = f(x, y)$ y sus valores iniciales $x_o$ y $y(x_o)$ además de definir el tamaño del paso $h$ entre $x_n$ y $x_{n-1}$
2. Dependiendo del orden del método a utilizar, se calcula determinado número de términos que forman parte del promedio ponderado con el que se forma el polinomio de Taylor que se utiliza para aproximar la solución.

Para el métdo de primer orden:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{1}$$

Para el método de segundo orden:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{2}$$

Donde:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

Para el método de cuarto orden:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{3}$$

Donde:

$$\begin{gathered} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{gathered}$$

Finalmente, se compararon los resultados obtenidos por medio del método analítico con los resultados obtenidos por medio del método de Runge-Kutta de diferente orden. En general, la aproximación es mucho mejor al aumentar el grado del método, y gráficamente, es mucho más fácil apreciar la presición del la aproximación en cuanto menor sea el paso $h$ entre cada iteración.

## III. Resultados

### III-A. *Prueba 1*

Cuadro I
Datos para la prueba 1

| | |
|---|---|
| EDO | $y\prime = x + 1 - y$ |
| Método | RK2 |
| h | 0.25 |
| $y(0)$ | 0 |
| x | 1 |
| Solución | $y(x) = x$ |

Cuadro II
Resultados de la prueba 1

| $x_n$ | $k_1$ | $k_2$ | $y_n$ | Valor real | % de error |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00 % |
| 0.25 | 1.0000 | 1.0000 | 0.2500 | 0.2500 | 0.00 % |
| 0.50 | 1.0000 | 1.0000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.00 % |
| 0.75 | 1.0000 | 1.0000 | 0.7500 | 0.7500 | 0.00 % |
| 1.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.00 % |

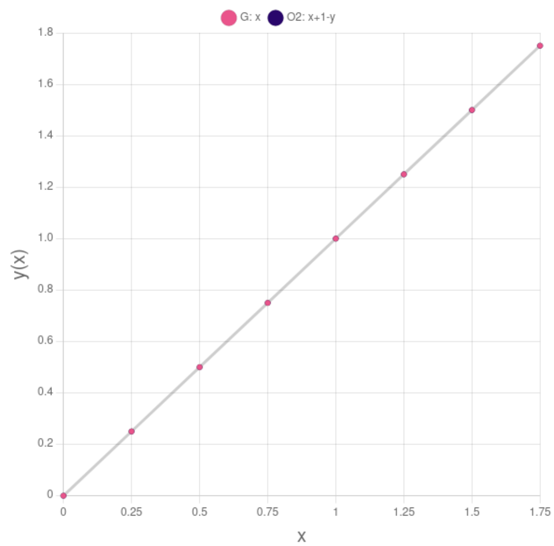


Figura 2. Comparación gráfica de la solución analítica y la aproximación RK2

### III-B. *Prueba 2*

Cuadro III
Datos para la prueba 2

| | |
|---|---|
| EDO | $y\prime = 2y - 6$ |
| Método | RK4 |
| h | 0.25 |
| $y(0)$ | 1 |
| x | 1 |
| Solución | $y(x) = 3 - 2e^{2x}$ |

Cuadro IV
Resultados de la prueba 2

| $x_n$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.25 | 1.0000 | 1.0000 | 0.2500 | 0.2500 |
| 0.50 | 1.0000 | 1.0000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.75 | 1.0000 | 1.0000 | 0.7500 | 0.7500 |
| 1.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| $x_n$ | $y_n$ | Valor real | % de error |
|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00 % |
| 0.25 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00 % |
| 0.50 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00 % |
| 0.75 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00 % |
| 1.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00 % |

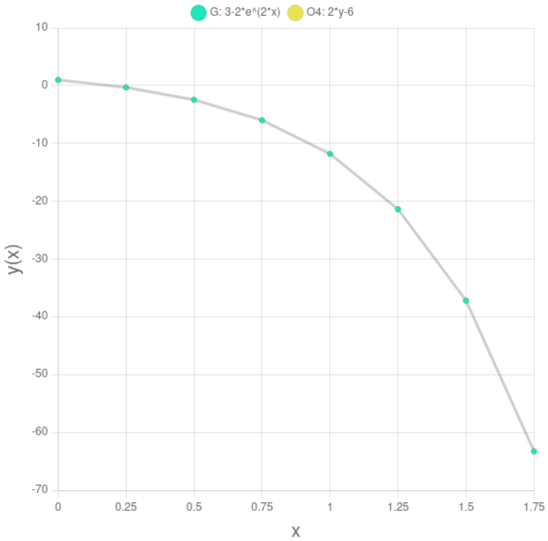


Figura 3. Comparación gráfica de la solución analítica y la aproximación RK4

### III-C. *Prueba 3*

Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, entonces la velocidad $v$ de una masa $m$ que se deja caer desde cierta altura, con:

$$m = 5slugs$$
$$k = 0{,}125$$
$$g = 32\frac{pies}{s^2}$$

Se puede modelar como:

$$v\prime = g - \frac{k}{m}v^2 \tag{4}$$

Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 1$, se calcula la velocidad del cuerpo pasados 5 segundos:

Cuadro V
RESULTADOS DE LA PRUEBA 3

| $x_n$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 31.9750 | 24.7856 | 27.5158 | 11.6712 | 25.7081 |
| 2.00 | 15.4772 | 4.0327 | 12.7836 | -5.0406 | 33.0531 |
| 3.00 | 4.6872 | 0.6767 | 4.1252 | -2.5557 | 35.0090 |
| 4.00 | 1.3591 | 0.1580 | 1.2207 | -0.8148 | 35.5593 |
| 5.00 | 0.3883 | 0.0421 | 0.3508 | -0.2385 | 35.7153 |

Utilizando la solución analítica:

$$y(x) = \frac{16\sqrt{5}(e^{4x/\sqrt{5}} - 1)}{e^{4x/\sqrt{5}} + 1} \tag{5}$$

Cuadro VI
COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA PRUEBA 3

| $x_n$ | $y_n$ | Valor real | % de error |
|---|---|---|---|
| 1.00 | 25.7081 | 25.5295 | 0.70 % |
| 2.00 | 33.0531 | 33.8322 | 2.30 % |
| 3.00 | 35.0090 | 35.4444 | 1.23 % |
| 4.00 | 35.5593 | 35.7212 | 0.45 % |
| 5.00 | 35.7153 | 35.7677 | 0.15 % |

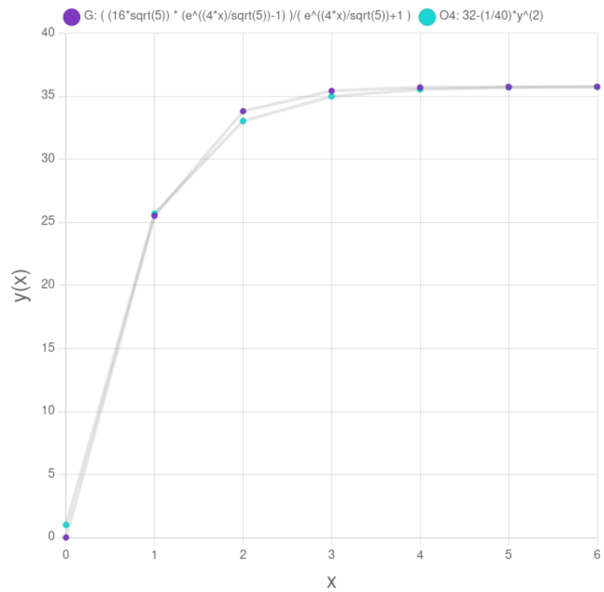


Figura 4. Comparación gráfica de la solución analítica y la aproximación RK4

## IV. DISCUSIÓN / ANÁLISIS

Tanto en la Prueba 1 como en la Prueba 2, los valores apróximados por el método de Runge-Kutta se acercaron significativamente a los valores calculados de manera analítica, esto se hace aún más evidente al observar las gráficas, tanto la gráfica de la solución exácta como la gráfica de la aproximación por el método de Runge-Kutta se superponen, dejando en claro que sus valores son casi idénticos.

En el caso de la prueba 2, a pesar de que el porcentaje de error fue mayor, este es aun menor al 0.2 %, lo que lo hace una aproximación lo suficientemente exácta para la mayoría de aplicaciones.

Para la prueba 3, la diferencia entre la velocidad en $t = 5s$ calculada analíticamente y el valor aproximado con el método de Runge-Kutta es significativamente pequeña, lo que confirma la utilidad del método en aplicaciones reales y especialmente para ecuaciones diferenciales con soluciones tan complejas de obtener y expresar de manera analítica como la de la prueba 3.

## V. Conclusión

Es importante ser capaces de identificar y resolver ecuaciones diferenciales, puesto que su aplicación en el mundo real es amplia. Sin embargo, que una equación diferencial tenga una o varias soluciones, no significa necesariamente que esta pueda ser expresada de forma explícita o implícita, para estos casos en donde la solución no puede expresarse de manera simple el método de aproximación de Runge-Kutta resulta muy útil. Aun si se aplica el método de primer orden, las aproximaciones son más exáctas que con otros métodos numéricos y su implementación es relativamente sencilla, especialmente si se utiliza el recurso computacional para facilitar y acelerar el calculo de todos los datos del rango que se desea.

## Referencias

[1] Trench, William, *Elementary Differential Equations*, https://digitalcommons.trinity.edu/mono/8, Trinity University, 2013.

[2] Zill, D., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Cengage Learning, 11a. edición, 2018.