Métodos Matemáticos para Físicos

Juan José Camacho Olmos

Ejercicios 1.5.7.

2. Considere que

- $r = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i \hat{\imath}$
- $a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$ y $b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$
- $\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z)$ y $\psi = \psi(r) = \psi(x,y.z)$

Demuestre que:

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$$(\nabla(\phi\psi))^i = \partial^i(\phi\psi) = (\partial^i\phi)\psi + (\partial^i\psi)\phi$$
$$= (\nabla\phi)\psi + (\nabla\psi)\phi$$

b) $\nabla\cdot(\nabla\times a)$ ¿Qué se puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

$$(\nabla\cdot(\nabla\times a)) = \partial^i(\nabla\times a)_i = \partial^i \varepsilon_{ijk}\partial^j a^k$$
$$= \varepsilon_{ijk}\partial^i\partial^j a^k = \partial^1\partial^2 a^3 + \partial^3\partial^1 a^2 + \partial^2\partial^3 a^1 - \partial^3\partial^2 a^1 - \partial^1\partial^3 a^2 - \partial^2\partial^1 a^3$$

Derivadas Parciales Cruzadas (Clairaut)

$\partial^i\partial^j a^k = \partial^j\partial^i a^k$

$$= \cancel{\partial^1\partial^2 a^3} + \cancel{\partial^3\partial^1 a^2} + \cancel{\partial^2\partial^3 a^1} - \cancel{\partial^2\partial^3 a^1} - \cancel{\partial^3\partial^1 a^2} - \cancel{\partial^1\partial^2 a^3}$$
$$= 0$$

• $\nabla \times (\nabla \cdot a)$

$\nabla \cdot a$ da como resultado un escalar. Se tendría un producto vectorial, en este caso el rotacional de un escalar, lo cual no está definido.

F) $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$

$$\rightarrow (\nabla \times (\nabla \times a))^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j (\nabla \times a)_k$$
$$= \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} \partial_j \partial^m a^n$$
$$= (\delta^i_m \delta^j_n - \delta^i_n \delta^j_m) \partial_j \partial^m a^n$$
$$= \delta^i_m \delta^j_n \partial_j \partial^m a^n - \delta^i_n \delta^j_m \partial_j \partial^m a^n$$
$$= \partial_j \partial^i a^j - \partial_j \partial^j a^i$$
$$= \partial^i (\partial_j a^j) - (\partial_j \partial^j) a^i$$
$$= \partial^i (\nabla \cdot a) - (\nabla \cdot \nabla) a^i$$
$$\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$$