2 Considere dos espacios vectoriales de polinomios de grado ≤ 2 $P_2(x)$ y $G(y)$. Construyendo un espacio tensorial con el siguiente producto exterior

$T_2(xy) = P_2(x) \otimes G_2(y)$ de tal manera que cualquier polinomio en dos variables puede ser escrito como $T_2(xy) = c^{ij} |e_i^P e_j^G\rangle$ corresponden a bases ortogonales para los espacios vectoriales $P_2(x)$ y $G_2(y)$

a) Considere el polinomio $p^P(x) = x^2 + x + 3$ y expréselo en términos de la base de polinomios de Legendre

$$\{|e_i^P\rangle\} \longleftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$$

Legendre

0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

Sea $x^2+x+3 = C_0P_0(x) + C_1P_1(x) + C_2P_2(x) + C_3P_3(x)$
donde $P_i(x)$ son los polinomios de Legendre

$x^2+x+3 =$

$C_0 + C_1x + C_2\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$C_0 + C_1x - \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}3x^2C_2 = x^2+x+3$

$C_0 - \frac{1}{2}C_2 = 3 \Rightarrow C_0 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{10}{3}}$

$C_1x = x \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

$\frac{1}{2}(3x^2C_2) = x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}3C_2 = 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{2}{3}}$

$\frac{10}{3} + x + \frac{1}{3}(3x^2-1)$

b) Seleccione ahora dos polinomios $p^{P}(x) = x^2 + x + 3$ y

$p^{S}(y) = y + 1$

Constrya el tensor $p^{P\otimes S}(x,y)$ mediante el producto exterior $p^{P}(x) \otimes p^{S}(y)$.

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^2 1 \\ x y \\ x 1 \\ 3 y \\ 3 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^2 \\ xy \\ x \\ 3y \\ 3 \end{pmatrix} = x^2y + x^2 + x + 3y + 3$$

c) Elija las bases de monomios $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, y, y^2\}$ e identifique c^{ij} del tensor $p^{P\otimes S}(x,y)$ al expandir ese tensor a estas bases en el espacio tensorial $T_2(xy) = P_2(x) \otimes S_2(y)$

Sea $T_2(xy) = c^{ij} |e_i^P, e_j^S\rangle = x^2y + x^2 + x + 3y + 3$

Sea entonces $C_K |e_K^{P\otimes S}\rangle \Rightarrow$

$C_K = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + C_n e_n$

expandiendo con $x^2y + x^2 + x + 3y + 3$

$C_1(1) + C_2(y) + C_3(y^2) + C_4(x) + C_5(xy) + \ldots$

$\ldots + C_6(xy^2) + C_7(x^2) + C_8(x^2y) + C_9(x^2y^2)$

Igualando $= x^2y + x^2 + x + 3y + 3$

$C_1 = 3 \rightarrow C_1 = 3$

$C_2 y = 3y \rightarrow C_2 = 3$

$C_3 y^2 = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$C_4 x = x \rightarrow C_4 = 1$

$C_5 xy = 0 \rightarrow C_5 = 0$

$C_6 xy^2 = 0 \rightarrow C_6 = 0$

$C_7 x^2 = x^2 \rightarrow C_7 = 1$

$C_8 x^2y = x^2y \rightarrow C_8 = 1$

$C_9 x^2y^2 = 0 \rightarrow C_9 = 0$

$|e_i^P\rangle = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad |e_j^S\rangle = \begin{pmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Sabemos que $|e_i^P e_j^S\rangle = |e_i^P\rangle \otimes |e_j^S\rangle$

$$|e_i^P e_j^S\rangle = \begin{bmatrix} x^2y^2 \\ x^2y \\ x^2 1 \\ x y^2 \\ x y \\ x 1 \\ 1 y^2 \\ 1 y \\ 1 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x^2y^2 \\ x^2y \\ x^2 \\ xy^2 \\ xy \\ x \\ y^2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

$|e_i^P e_j^S\rangle = |e_K^{P\otimes S}\rangle$

Expandido queda tal que

$3 + 3y + x + x^2 + x^2y$

(d) Ahora suponga las bases de polinomios de Legendre $\{|e_i^P\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$ para $P_2(x)$ y $g_2(y)$. Calcule las componentes $\tilde{c}^{ij}$ $\{|e_j^g\rangle\} \leftrightarrow \{|P_j(y)\rangle\}$ del tensor $P^{P\otimes g}(x,y)$ respecto a estas bases en el espacio tensorial

$$\Upsilon_2(xy) = P_2(x) \otimes g_2(y).$$

Sea entonces $\tilde{C}^{ij}|P_i(x), P_j(y)\rangle$

Sea entonces

$$|P_i(x), P_j(y)\rangle = |P_i(x)\rangle \otimes |P_j(y)\rangle$$

$$|P_i(x)\rangle = [1, x, \tfrac{1}{2}(3x^2-1), \dots]$$

$$|P_j(y)\rangle = [1, y, \tfrac{1}{2}(3y^2-1), \dots]$$

$$\tilde{C}^{ij}|P_i(x), P_j(y)\rangle = x^2y + x^2 + x + 3y + 3$$

Entonces

$$\tilde{C}^{11}|P_1(x), P_1(y)\rangle = C_1(1\cdot 1) \rightarrow C_1 - C_7 - C_8 = 3$$

$$\tilde{C}^{12}|P_1(x), P_2(y)\rangle = C_2(1\cdot y) \rightarrow C_2 y = 3y$$

$$\tilde{C}^{13}|P_1(x), P_3(y)\rangle = C_3(1\cdot\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) \rightarrow C_3(\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) = 0$$

$$\tilde{C}^{21}|P_2(x), P_1(y)\rangle = C_4(x\cdot 1) \rightarrow C_4 x = x$$

$$\tilde{C}^{22}|P_2(x), P_2(y)\rangle = C_5(xy) \rightarrow C_5 xy = 0$$

$$\tilde{C}^{23}|P_2(x), P_3(y)\rangle = C_6(x\cdot\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) \rightarrow C_6 \tfrac{x}{2}(3y^2-1) = 0$$

$$\tilde{C}^{31}|P_3(x), P_1(y)\rangle = C_7(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\cdot 1) \rightarrow C_7(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)) = x^2 \rightarrow 3x^2C_7 - C_7 = 2x^2$$

$$\tilde{C}^{32}|P_3(x), P_2(y)\rangle = C_8(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\cdot y) \rightarrow C_8(\tfrac{y}{2}(3x^2-1)) = x^2y \rightarrow 3x^2C_8 - C_8 = 2x^2$$

$$\tilde{C}^{33}|P_3(x), P_3(y)\rangle = C_9(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\cdot\tfrac{1}{2}(3y^2-1)) \rightarrow C_9(\tfrac{1}{2}(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1)) = 0$$

$C_1 = \frac{13}{3}$ $\quad C_6 = 0$

$C_2 = 3$ $\quad C_7 = \frac{2}{3}$

$C_3 = 0$ $\quad C_8 = \frac{2}{3}$

$C_4 = 1$ $\quad C_9 = 0$

$C_5 = 0$

$C_7 = 2x^2/3x^2$ $\quad C_8 = 2x^2/3x^2$

$C_7 = \frac{2}{3}$ $\quad C_8 = \frac{2}{3}$

$C_1 = 3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

$C_1 = \frac{13}{3}$