Simulacro del Examen

1.

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

z_1	=	$x_1 + iy_1$
z_2	=	$x_2 + iy_2$
z_3	=	$x_3 + iy_3$
z_4	=	$x_4 + iy_4$

$$Tr(A) = z_1 + z_4.$$

$$\text{I}.\ \langle A | B \rangle \rightleftharpoons Tr(A^\dagger B) \equiv (A^\dagger)^i_j B^j_i \equiv (A^*)^j_i B^j_i$$

a) Compruebe si esta es una buena definición de producto interno. (I)

Si (I) es un producto interno en $M_{2\times2}(\mathbb{C})$, entonces es lineal con respecto al segundo argumento, es hermítico (conjugado simétrico) y tiene positividad definida.

1) Verificamos que I es lineal respecto al segundo argumento.

Supóngase que $A, B, C \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$ son matrices arbitrarias y $\alpha \in \mathbb{C}$ es un complejo arbitrario.

$$\langle A | B + C \rangle = Tr(A^\dagger (B+C)) = Tr(A^\dagger B + A^\dagger C)$$
$$= Tr(A^\dagger B) + Tr(A^\dagger C) = \langle A | B \rangle + \langle A | C \rangle$$

$$\langle A | \alpha B \rangle = Tr(A^\dagger(\alpha B)) = Tr(\alpha A^\dagger B)$$
$$= \alpha\, Tr(A^\dagger B) = \alpha \langle A | B \rangle$$

2. Verificamos que I es hermítico.

$$\overline{\langle B|A\rangle} = \overline{Tr(B^{+}A)} = Tr((B^{+}A)^{*}) = Tr(A^{*}B^{T}) = \underbrace{Tr(A^{+}B)}_{\langle A|B\rangle}$$

$$\overline{\langle B|A\rangle} = \langle A|B\rangle$$

3. Positividad definida. Veamos si $\langle A|A\rangle = Tr(A^{+}A) \geq 0$ y $\langle A|A\rangle = 0$ si y solo si A es una matriz nula.

$$Tr(A^{+}A) = Tr\left(\begin{pmatrix} z_1^{*} & z_2^{*} \\ z_3^{*} & z_4^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= Tr\begin{pmatrix} z_1^{*}z_1 + z_2^{*}z_2 & z_1^{*}z_3 + z_2^{*}z_4 \\ z_3^{*}z_1 + z_3^{*}z_2 & z_3^{*}z_3 + z_4^{*}z_4 \end{pmatrix}$$

$$Tr(A^{+}A) = z_1^{*}z_1 + z_2^{*}z_2 + z_3^{*}z_3 + z_4^{*}z_4$$

Como $z^{*}z \geq 0$ para cualquier número complejo z, entonces $Tr(A^{+}A) \geq 0$. Además $Tr(A^{+}A) = 0$ si y solo si $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$, es decir si A es la matriz nula.

$\Rightarrow$ Como se cumplen 1, 2 y 3, entonces (I) es una buena definición de producto interno.

b) A partir de esa definición de producto interno construya la definición de norma asociada (Norma de Frobenious)

Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Entonces la norma definida por (I) para la matriz A será:

$$\|A\| = \langle A|A\rangle^{1/2} = \sqrt{Tr(A^{\dagger}A)}$$

y, por el inciso 3 del punto aterior, $Tr(A^{\dagger}A) = z_i^{*} z_i$

$$\Rightarrow \|A\| = \sqrt{z_i^{*} z_i}$$

c) A partir de la definición de la norma de Frobenious, encuentra la expresión para la definición de distancia entre dos matrices 2x2.

Sean $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Entonces la distancia entre A y B estará denotada por:

$$d(A,B) = \|A-B\| = \langle A-B|A-B\rangle^{1/2} = \sqrt{Tr((A-B)^{\dagger}(A-B))}$$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \quad A-B = \begin{pmatrix} z_1-w_1 & z_2-w_2 \\ z_3-w_3 & z_4-w_4 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{\dagger} = \begin{pmatrix} (z_1-w_1)^{*} & (z_3-w_3)^{*} \\ (z_2-w_2)^{*} & (z_4-w_4)^{*} \end{pmatrix}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(z_1-w_1)^{*}(z_1-w_1)+(z_3-w_3)^{*}(z_3-w_3)+(z_2-w_2)^{*}(z_2-w_2)+(z_4-w_4)^{*}(z_4-w_4)}$$

d) Considere las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y compruebe si esas matrices son ortogonales bajo la definición de producto interno de Frobenious.

- Dos matrices son ortogonales si su producto interno es 0, $\langle A|B\rangle = 0$

$$\langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle = 2$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_1 \rangle = 2$$

$$\langle \sigma_0 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \langle \sigma_2 | \sigma_2 \rangle = 2$$

$$\langle \sigma_0 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad \langle \sigma_3 | \sigma_3 \rangle = 2$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = i - i = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Como $\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 2\delta_{ij}$, con $\delta_{ij} \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Las matrices de Pauli son ortogonales bajo el producto interno de Frobenious.

e) Calcule la distancia entre las matrices de Pauli:

$$d(\sigma_0, \sigma_1) = \sqrt{1(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1)} = 2$$

$$d(\sigma_0, \sigma_2) = \sqrt{1(1) + (-i)i + i(-i) + (1)(1)} = 2$$

$$d(\sigma_0, \sigma_3) = \sqrt{0 + 0 + 0 + (2)(2)} = 2$$

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{0 + (1-i)(1+i) + (1+i)(1-i) + 0} = 2$$

$$d(\sigma_1, \sigma_3) = \sqrt{(-1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) + (1)(1)} = 2$$

$$d(\sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{(-1)(-1) + (i)(-i) + (-i)(i) + (1)(1)} = 2$$

$$d(\sigma_0, \sigma_0) = 0 = d(\sigma_1, \sigma_1) = d(\sigma_2, \sigma_2) = d(\sigma_3, \sigma_3)$$

La distancia está dada por $d(\sigma_i, \sigma_j) = 2\,\delta_{ij}$ con $\delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}$

F) Compruebe que las matrices de Pauli forman una base para ese espacio vectorial.

- Un conjunto de matrices será base de su espacio matricial si son linealmente independientes.

⇒ En el inciso d) se demostró que las matrices de Pauli son ortogonales entre ellas, por lo tanto, linealmente independientes.

⇒ Por lo tanto, el conjunto de matrices de Pauli es una base para el espacio de Matrices Complejas 2x2.

g) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle \doteq Tr(A^{\dagger}B)$.

Previamente demostrado en el inciso d).

h) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ $\quad A = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \\ z_3 = x_3 + iy_3 \\ z_4 = x_4 + iy_4 \end{matrix}$

con x_i y $y_i \in \mathbb{R}$

- Para matrices reales puras.

Considere el conjunto $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0\}$
(se anulan las partes imaginarias)

a. $0A$ está en W

$$0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

- La matriz nula está en W porque es una matriz cuyas componentes son todas cero. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \in \mathbb{R}$

$0A \in W$

b. Si A y B están en W entonces $A+B$ estará en W.

$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix}$ con $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$

$$A + B = \begin{pmatrix} x_1 + w_1 & x_3 + w_3 \\ x_2 + w_2 & x_4 + w_4 \end{pmatrix}$$

- La suma de un número real con otro número real es un número real, $A + B \in W$

c. Si A está en W y α es un escalar, αA está en W.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_3 \\ \alpha x_2 & \alpha x_4 \end{pmatrix}$$

• El escalar "reescala" las componentes de la matriz sin cambiar su naturaleza, por lo tanto, $\alpha A \in W$.

//

• Para matrices imaginarias puras

Considere el conjunto $V = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{C}) \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$ (se anulan las partes reales)

a. 0A está en V

$$0 \cdot \begin{pmatrix} iy_1 & iy_3 \\ iy_2 & iy_4 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} ia_1 & ia_3 \\ ia_2 & ia_4 \end{pmatrix}$$

• La matriz nula está en V porque es una matriz cuyas componentes son todas cero. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

y Cero es un complejo de la forma $0 + 0i$. Es un complejo cuya parte real es cero, lo que significa que también es un número imaginario. $0 \in \mathbb{I}$. $\Rightarrow 0A \in V$.

b. Si A y B están en V, A+B estará en V

$$A = \begin{pmatrix} iy_1 & iy_3 \\ iy_2 & iy_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} iv_1 & iv_3 \\ iv_2 & iv_4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} i(y_1 + v_1) & i(y_3 + v_3) \\ i(y_2 + v_2) & i(y_4 + v_4) \end{pmatrix}$$

, es fácil ver que la suma de dos imaginarios arroja un imaginario.

$\hookrightarrow \underline{A + B \in V}$

c. Si α es un escalar y A está en V, αA estará en V

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha i y_1 & \alpha i y_3 \\ \alpha i y_2 & \alpha i y_4 \end{pmatrix}$$

- El escalar "reescala" las componentes de la matriz sin cambiar su naturaleza por lo tanto $\alpha A \in V$