XXII INIC – Encontro Latino Americano de Iniciação Científica; XVIII EPG – Encontro Latino Americano de Pós Graduação; XII INICJr – Encontro Latino Americano de Iniciação Científica Júnior; VIII INID – Encontro Nacional de Iniciação à Docência
PATRIMÔNIO E CULTURA DESAFIOS DA CIÊNCIA FRENTE A IDENTIDADES PLURAIS
25 E 26 DE OUTUBRO DE 2018
WWW.INICEPG.UNIVAP.BR

PROJETANDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR.

Agda Aloha, Bruna Prado, Marcos Ferreira, Michael Diniz, Rafael Prado.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São José dos Campos, Rodovia Presidente Dutra, km 145, s/n, Jardim Diamante – 12223-201 - São José dos Campos-SP, Brasil., aloha.agda@gmail.com, bruna.m.prado@hotmail.com, marcosroberto122@gmail.com, michael.diniz@ifsp.edu.br, rafael.m.prado@hotmail.com.

Resumo – O presente trabalho tem como objetivo demonstrar a aplicação do conhecimento obtido em Cálculo Diferencial e Integral I em um projeto para construção de uma montanha-russa. Para a realização do projeto foi necessário a utilização de um programa de plotar gráficos, *Geogebra Classic*, e um programa para resolver um sistema linear de 11 incógnitas, *Excel* 2016. Como resultado, obtivemos a geometria de uma montanha-russa através do gráfico de funções cúbicas, garantindo a suavidade da trajetória dos trilhos. Com isso, apresentamos um exemplo de aplicação do Cálculo Diferencial na composição da análise de um projeto de montanha-russa e como a partir dessa análise é possível melhorar este tipo de projeto.

Palavras-chave: Montanha-russa, Cálculo, Derivada, *Geogebra*.
Área do Conhecimento: Cálculo Diferencial e Integral I

Introdução

A montanha russa, como diz o nome, surgiu na Rússia no século XV. As primeiras teriam começado com montanhas de verdade cobertas de neves, na qual as pessoas deslizavam encosta abaixo sentados em blocos, e para parar, era colocado areia no final da pista. Esse bloco evoluiu para um trenó de verdade em 1784, mas foi somente em 1827, nos Estados Unidos, que surgiu a primeira montanha russa com trilhos de uma mina de carvão. O passeio tinha duração de duas horas e o freio era acionado manualmente (SANTORO, 2018).

A febre de montanha russa começou mesmo no século 19, quando começaram a surgir cenários e nasciam assim os parques de diversões. Na França surgiu o primeiro *looping*, ou seja, trecho em que os passageiros ficam de cabeça para baixo quando realizam um círculo completo. A primeira montanha russa, como é conhecida nos dias atuais, surgiu em 1884 nos Estados Unidos com uma velocidade de 10km/h, mas foi somente em 1959 que surgiu as montanhas de aço na Disneylândia (SANTORO, 2018).

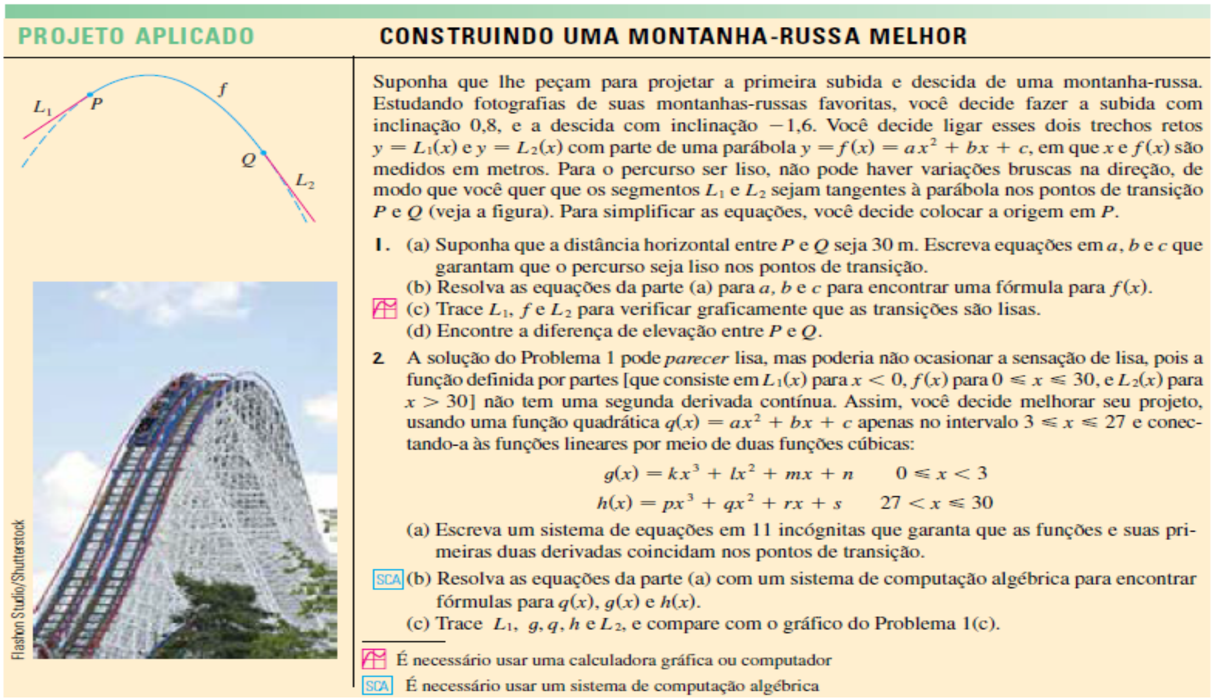
Todo o movimento da montanha-russa depende da ação da força da gravidade e por isso, logo no início houve sempre uma descida. A energia potencial gravitacional acumulada no alto se transforma em energia cinética ao longo da descida, porém há perdas de energia por causa do atrito e calor formado, diminuindo a velocidade do carro, mas são realizadas várias ações com o objetivo de tornar cada vez mais apavorante o trajeto da montanha-russa para as pessoas. Atualmente, há sistemas de propulsão que permitem lançar o carro logo no início, fazendo desnecessário a descida logo no começo (MUNDO ESTRANHO, 2018).

Vários cálculos são necessários para a construção de uma montanha-russa, como por exemplo, as curvas em altas velocidades devem ser inclinadas para dentro para aumentar o contato do carro com trilho e assim não sair pela tangente. À vista disso, este trabalho tem como objetivo descrever um projeto aplicado de Cálculo Diferencial e Integral I para projetar uma montanha-russa melhor.

Metodologia

Através do livro de Cálculo Volume I – James Stewart pode-se escolher o projeto aplicado que seria realizado. A Figura 1 mostra a imagem do objetivo e o que é pedido no projeto.

Figura 1 – Projeto aplicado: Construindo uma montanha-russa melhor.



PROJETO APLICADO — **CONSTRUINDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR**

Suponha que lhe peçam para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação 0,8, e a descida com inclinação $-1{,}6$. Você decide ligar esses dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e $f(x)$ são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição P e Q (veja a figura). Para simplificar as equações, você decide colocar a origem em P.

1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja 30 m. Escreva equações em a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.
   (b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.
   (c) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são lisas.
   (d) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.
2. A solução do Problema 1 pode *parecer* lisa, mas poderia não ocasionar a sensação de lisa, pois a função definida por partes [que consiste em $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 30$, e $L_2(x)$ para $x > 30$] não tem uma segunda derivada contínua. Assim, você decide melhorar seu projeto, usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leq x \leq 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leq x < 3$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leq 30$$

   (a) Escreva um sistema de equações em 11 incógnitas que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.
   SCA (b) Resolva as equações da parte (a) com um sistema de computação algébrica para encontrar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
   (c) Trace L_1, g, q, h e L_2, e compare com o gráfico do Problema 1(c).

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

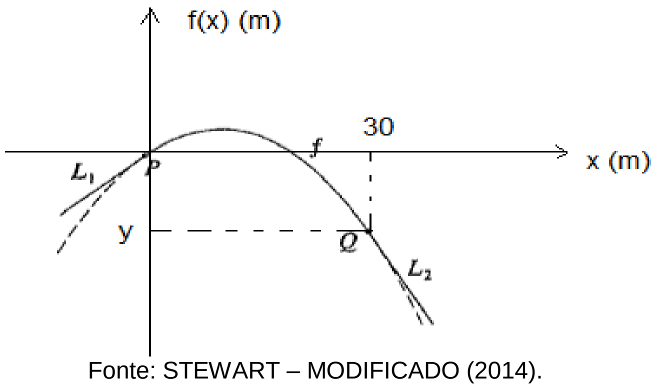
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

Flashon Studio/Shutterstock

Fonte: STEWART (2014)

Para resolver a primeira parte do projeto, utilizou-se um sistema cartesiano com origem no ponto P, como apresentado na Figura 2, e através do conhecimento obtido nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral I na qual a inclinação de uma reta à uma curva em determinado ponto é a dada pela derivada da função dessa curva naquele mesmo ponto, pode-se obter equações em a,b e c, resolvê-las, encontrar fórmula para f(x), a diferença de elevação entre P e Q e traçar graficamente o resultado obtido por meio do programa *Geogebra*.

Figura 2 – Plano cartesiano no projeto aplicado.



Fonte: STEWART – MODIFICADO (2014).

Para resolver a segunda parte do projeto, ou seja, o problema 2, primeiramente analisou qual intervalo seria de cada função e assim realizou-se a primeira e segunda derivada de cada uma. Em seguida, com os pontos de transição analisados pelos intervalos dados pelo projeto, pode-se obter equações que comporiam um sistema linear de uma matriz 11x11, resolvida pelo programa *Excel* 2016, e com todas as incógnitas conhecidas, pode-se traçar as funções também no *Geogebra* e comparar com o resultado obtido na parte 1 do projeto.

Resultados

Para a solução do problema 1 do projeto aplicado foi suposto que a equação da reta L_1 é dada por $L_1(x) = dx+e$ e a equação da reta L_2 é dada por $L_2(x)=fx+g$, sendo d e f os coeficientes angulares da reta, ou seja, a inclinação das retas dada pelo projeto como: d=0,8 e f=-1,6.

Sabe-se, além disso, que a função $f(x) = ax^2+bx+c$ tem como primeira derivada $f'(x) = 2ax+b$ e o ponto P tem coordenada (0,0).

Assim, a reta $L_1(0)$ tem que ser igual a f(0) já que se coincidem na origem, ou seja:

$$L_1(0) = f(0) = 0$$
$$0{,}8 * 0 + e = a * 0^2 + b * 0 + c = 0$$
$$e = c = 0$$

Obtendo dessa forma que os coeficientes e e c são nulos. Com a inclinação da reta L_1, pode-se encontrar outro coeficiente, já que $f'(0) = 2a * 0 + b = 0{,}8$ e assim b=0,8. E com a inclinação da reta L_2, pode-se encontrar o valor de a, na qual $f'(30) = 2a * 30 + 0{,}8 = -1{,}6$ e a=-0,04.

Dessa forma, a equação da função é: $f(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}8x$ e a equação da reta L_1 é $L_1(x) = 0{,}8x$.

A diferença de elevação entre P e Q, ou seja, o valor de y na Figura 2, pode ser encontrado através do valor de f(x) no ponto Q, ou seja, quando x vale 30m. E assim, o valor de f(30)=-12m.

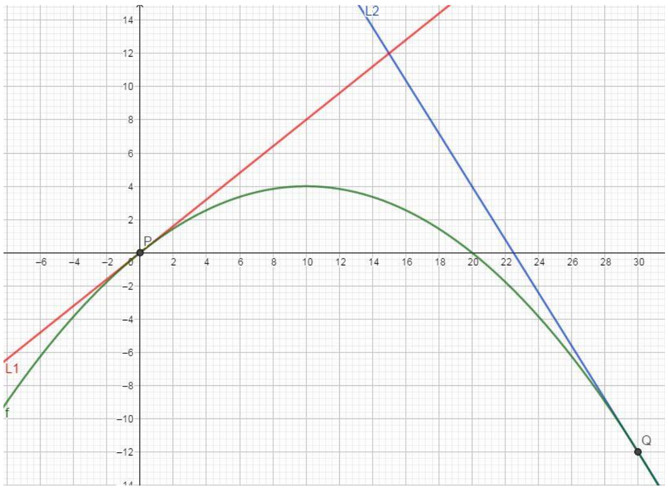
Para encontrar a equação da reta L_2, bastou realizar os seguintes cálculos:

$$L_2(30) = f(30)$$
$$-1{,}6 * 30 + g = -12$$
$$g = 36$$

A equação de L_2 é $L_2(x) = -1{,}6x + 36$.

Com todas as equações conhecidas, traçou-se essa função e retas no programa *Geogebra* para visualizar que as transições de retas e curvas são lisas. O Gráfico 1 apresenta esse resultado.

Gráfico 1: L_1, f e L_2 no programa *Geogebra*.



Fonte: AUTORES.

Entretanto, como a segunda parte do problema afirmou, a função definida pelos trechos lineares e quadráticos não possui uma segunda derivada contínua, ou seja, haveria uma mudança descontínua da aceleração de crescimento da curva nesses trechos, impossibilitando a montanha-russa de ser melhor. Assim, para a solução do problema 2, construiu-se a Tabela 1, em que mostra que os trechos cúbicos possuem uma segunda derivada continua.

Tabela 1: Funções e suas derivadas em cada intervalo.

Intervalo	Função	Primeira derivada	Segunda derivada
$]-\infty,0[$	$L_1(x) = 0{,}8x$	$L_1'(x) = 0{,}8$	$L_1''(x) = 0$
$[0,3[$	$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$	$g'(x) = 3kx^2 + 2lx + m$	$g''(x) = 6kx + 2l$
$[3,27]$	$q(x) = ax^2 + bx + c$	$q'(x) = 2ax + b$	$q''(x) = 2a$
$]27,30[$	$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$	$h'(x) = 3px^2 + 2qx + r$	$h''(x) = 6px + 2q$
$[30,+\infty[$	$L_2(x) = -1{,}6x + g$	$L_2'(x) = -1{,}6$	$L_2''(x) = 0$

Fonte: AUTORES.

Com esses intervalos dados pela descrição do projeto, nota-se que os pontos de transição são: 0, 3, 27 e 30. Dessa forma, para obter um sistema de equação para se encontrar as incógnitas das equações foi construída a Tabela 2:

Tabela 2: Equações obtidas conhecendo-se ponto de transições e condição.

Ponto de transição	Condição	Equação
0	$L_1(0) = g(0)$	$1n = 0$
	$L_1'(0) = g'(0)$	$1m = 0{,}8$
	$L_1''(0) = g''(0)$	$2l = 0$
3	$g(3) = q(3)$	$27k + 9l + 3m + 1n = 9a + 3b + 1c$
	$g'(3) = q'(3)$	$27k + 6l + 1m = 6a + 1b$
	$g''(3) = q''(3)$	$18k + 2l = 2a$
27	$q(27) = h(27)$	$729a + 27b + c = 19686p + 729q + 27r + 1s$
	$q'(27) = h'(27)$	$54a + 1b = 2187p + 54q + r$
	$q''(27) = h''(27)$	$2a = 162p + 2q$
30	$h(30) = L_2(30)$	Não considera-se esta condição, já que não conhece-se ainda o termo independente de L_2 para este problema 2.
	$h'(30) = L_2'(30)$	$2700p + 60q + r = -1{,}6$
	$h''(30) = L_2''(30)$	$180p + 2q = 0$

Fonte: AUTORES.

Esse sistema de equações obtidas pode ser colocado em uma matriz 11x11 como vê-se abaixo na Figura 3 para resolução no programa *Excel* 2016.

No programa, calculou-se a inversa da matriz 11x11 através do comando “matriz.inverso(matriz)”, e realizou a multiplicação da matriz inversa pela matriz resultado 11x1 através do comando “matriz.mult(matriz inversa;matriz resultado)”, obtendo os valores da matriz incógnita, pois em um sistema linear AX=B, em que A seria a matriz 11x11, X a matriz incógnita e B a matriz resultado, multiplicando ambos os lados da equação pela matriz inversa de A, segue que $A.\ A^{-1}.\ X = B.\ A^{-1}$ e portanto $A^{-1}.B = X$ ($A.\ A^{-1}$ é igual a matriz identidade, que não influencia na matriz X).

Figura 3 – Sistema linear com 11 incógnitas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -1 & 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 27 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 729 & 27 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19683 & -729 & -27 & -1 \\ 54 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2187 & -54 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -162 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2700 & 60 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 180 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ k \\ l \\ m \\ n \\ p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

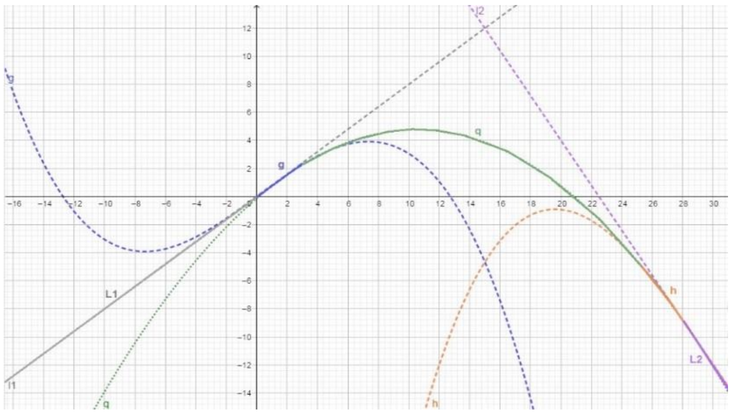
Fonte: AUTORES.

Dessa forma, as fórmulas para as funções pedidas são:

$$q(x) = -0{,}04444x^2 + 0{,}933333x - 0{,}13333$$
$$g(x) = -0{,}00494x^2 + 0{,}8x$$
$$h(x) = 0{,}004938x^3 - 0{,}44444x^2 + 11{,}733333 – 97{,}3333$$

Para calcular o termo independente, g, da função L_2 a partir da função h, calculou-se h(30), encontrando-se -12,0034 e descobriu-se que g é igual a 35,9966. O Gráfico 2 mostra o resultado dessas funções para a montanha-russa em cada intervalo, em que a parte pontilhada não contribui para o projeto dela, somente as linhas cheias.

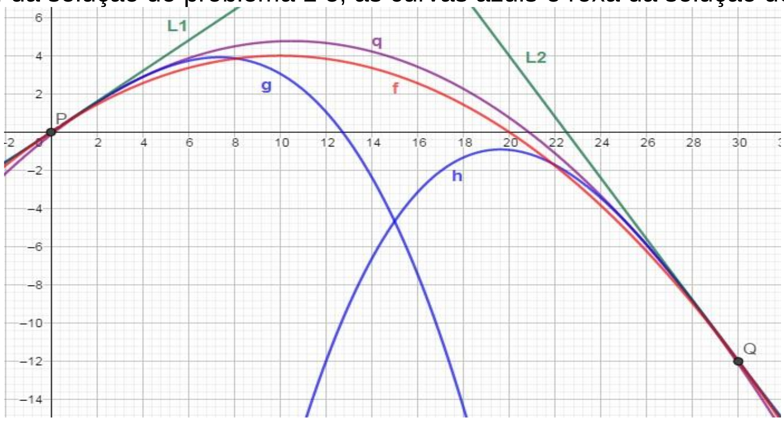
Gráfico 2: L_1, g, q, h e L_2 no programa *Geogebra*.



Fonte: AUTORES.

Para a comparação desse gráfico obtido com o do problema 1 foram plotados juntos no Gráfico 3, sendo a curva vermelha a do problema 1, a azul, roxa e outra azul do problema 2 e verde as retas.

Gráfico 3: Todas funções plotadas no *Geogebra*, sendo as retas tangentes às curvas de cor verde, vermelha a função f da solução do problema 1 e, as curvas azuis e roxa da solução do problema 2.



Fonte: AUTORES.

Discussão

Através da solução do problema 1 em que plotou-se os gráficos com as funções obtidas, pode-se verificar no Gráfico 1 que as transições de reta para a parábola eram lisas, entretanto, como se diz no problema 2, essas transições parecem lisas, mas quando uma pessoa estivesse na montanha-russa a sensação não seria de trajeto liso, pois a função definida pelas funções em cada intervalo não possui uma segunda derivada contínua. Dessa forma, para melhorar o projeto da montanha-russa, foi necessário a solução do problema 2.

No problema 2 pediu-se para encontrar as fórmulas para as funções cúbicas que nos pontos de transições se coincidiram com as retas tangentes, e a função quadrática que se ligaria às funções cúbicas. Através da solução de um sistema linear de 11 incógnitas descobriu-se as fórmulas para cada função e as plotou no programa, entretanto, por meio da análise dos gráficos plotados notou-se que os pontos de transição não coincidiam com os dados pelo projeto e utilizados para encontrar as incógnitas.

No Gráfico 2, e com o auxílio do comando "interseção entre dois objetos" do programa pode-se descobrir em quais pontos as funções se coincidiam. A função L_1 se coincidia com g no ponto de coordenada (0,0), g com q no ponto (2,8,2,1), q com h em (25,17,-4,8) e h com L_2 em (27,92,-8,67).

O ponto de coincidência de L_1 com g estava correto, entretanto, outros pontos variaram, mas se manteram próximos aos esperados, ou seja, a coordenada x 2,8 era para ser 3, enquanto 25 era para ser 27 e 27,92 ser 30.

Através da análise das funções descobriu-se que estas variações se devem às quantidades de números significativos, ou seja, quanto menos números significativos, mais os números se divergiam do esperado. Por meio de cálculos realizados à mão, descobriu-se que o ponto em que h e L_2 se coincidiram seriam (30,-12,0034), ou seja, o ponto Q.

Além disso, sobrepondo-se os gráficos encontrados pela solução dos problemas 1 e 2 notou-se que ambas as curvas quadráticas se encontram praticamente no mesmo ponto Q, excluindo as pequenas variações, porém, a curva quadrática do problema 2 tem um vértice mais alto que a curva do problema 1 e, como era de se esperar, ambas as curvas quadráticas possuem coeficiente de x^2 negativos, fazendo com que sejam parábolas com concavidade para baixo. Ademais, as curvas cúbicas suavizam a ligação entre as curvas.

Conclusão

Através das funções apresentadas pelo problema e com todos os demais dados, foi possível projetar uma montanha-russa melhor aplicando os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I, que se mostraram de extrema importância para a realização desse projeto aplicado.

O conceito de que a inclinação de uma reta tangente à uma curva em determinado ponto é dada pela derivada da função dessa curva naquele mesmo ponto foi necessário para se entender o quão mais suave ficaria a transição de uma reta para uma curva cúbica e também da curva cúbica para uma curva quadrática em vez de se fazer um trajeto ligando uma reta à curva quadrática diretamente, uma vez que, como a função para o projeto é definida por partes, a segunda derivada da função quadrática deveria ser contínua nos pontos de transição para mostrar ser uma curva lisa quando se ligasse a reta, porém, tal continuidade não foi obtida.

Comparando as soluções gráficas dos dois problemas, percebeu-se que os pontos de intersecção entre as retas e a curva quadrática no problema 1 estão muito próximos do valor de Q (30,-12), entretanto, os pontos de intersecção das curvas do problema 2 se diferem mais em razão da quantidade de números significativos utilizados para plotar o gráfico, e a curva quadrática do problema 2 possui um vértice mais alto que o problema 1.

Além disso, a utilização do programa *Excel* 2016 foi muito importante para obter os resultados apresentados com mais precisão, uma vez que dados com mais números significativos produz maior convergência para o valor real e, o *Geogebra* para plotar o projeto de montanha-russa permitindo destacar pontos de intersecção visualmente.

Portanto, o presente trabalho demonstrou como o aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral I é importante para o projeto de uma montanha-russa, além de que como a utilização de recursos computacionais e gráficos auxiliam na precisão dos dados.

Referências

SANTORO, André. Como surgiu a montanha-russa? – Mundo Estranho. Disponível em: <https://mundoestranho.abril.com.br/historia/como-surgiu-a-montanha-russa/> Acesso em: 24 de maio de 2018.

STEWART, James. Cálculo Volume I. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

MUNDO ESTRANHO. Como funciona uma montanha-russa? Disponível em: <https://mundoestranho.abril.com.br/tecnologia/como-funciona-uma-montanha-russa/> Acesso em: 24 de maio de 2018.