Cálculo Numérico

Trabajo Práctico N°7

Problemas de valores de contorno - Ecuación parabólica

Una versión simplificada de la ecuación de difusión de calor (ecuación (3) del TP Nº5) unidimensional, se obtiene de considerar material homogéneo y conductividad térmica κ constante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\kappa} = \frac{\rho c}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

con c el calor específico, ρ la densidad del material, y $\dot{q}(t)$ una fuente de energía.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2}$$

Problema N°1

Por simplicidad consideremos un problema donde $\dot{q}(t) = 0$. La ecuación resultante puede discretizarse en el espacio, utilizando un esquema en diferencias $\mathcal{O}\left(h^2\right)$, y en el tiempo utilizando un esquema hacia adelante $\mathcal{O}\left(k\right)$ (o Euler explícito). Como resultado se obtiene el siguiente esquema explícito:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{k}\frac{\rho c}{\kappa} = \frac{1}{h^2}\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n\right) \tag{3}$$

Se considera (problema Nº5 - TP Nº6) una barra de aluminio ($\kappa = 235\,\mathrm{W/mK}$) de longitud L, ambos extremos se mantienen a temperatura constante $T_l = 30°$ C y $T_r = 75°$ C, y la distribución inicial de temperatura en la barra es $T(x,0) = T_l$. No existen variaciones de temperatura en la sección, la barra se mantiene aislada y no existe generación de energía.

Utilizando el esquema explícito (3), se quiere conocer la evolución temporal de la distribución de temperatura en la barra, $T(x,t)$. Compruebe que recupera la solución en estado estacionario para $t \to \infty$. Adoptar $\rho c = 5 \times 10^6$.

Por criterio de estabilidad, el paso de temporal k debe satisfacer la siguiente relación: $\frac{k\kappa}{h^2 \rho c} \leq \frac{1}{2}$. Note que esta restricción acopla la discretización temporal con la espacial.

Nota: Para verificar el correcto funcionamiento del algoritmo durante la evolución temporal, es posible comparar la solución numérica con alguna solución analítica conocida. El caso más simple es considerar $T_l = T_r = T_b$ en el problema anterior, con condición inicial $T(x,0) = T_i$. Luego la solución analítica del problema sujeto a las condiciones iniciales y de borde impuestas es:

$$T(x,t) = T_b + 2\left(T_i - T_b\right)\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{\kappa}{\rho c} t}\left(\frac{1-(-1)^m}{m\pi}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{4}$$

Problema N°2

Resolver el problema Nº1 implementando el método RK2 para resolver la evolución temporal. Notar que el método que obtiene es explícito, $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ y $\mathcal{O}\left(k^2\right)$.

Problema N°3

Otro método de un paso, y más utilizado en problemas prácticos debido a sus características de estabilidad, es el método de Crank-Nicolson:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{k}\frac{\rho c_p}{\kappa} = \frac{1}{2h^2}\left(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}\right) \tag{5}$$

Resuelva el problema Nº1 utilizando el método implícito (5). Este método tiene precisión espacial $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ y temporal $\mathcal{O}\left(k^2\right)$; y es incondicionalmente estable, no existiendo límites en el paso temporal por problemas de estabilidad numérica.

Notar que el error de aproximación a la evolución temporal de las variables depende del paso de tiempo k, $\mathcal{O}\left(k^2\right)$. Luego una elección razonable es adoptar $k = \mathcal{O}(h)$.

Verifique los resultados numéricos de la evolución temporal con la solución analítica dada en el problema Nº1.

Problema N°4

Consideremos un fluido contenido entre dos placas paralelas de dimensión infinita como se muestra de manera esquemática en la figura 1. Ambas placas planas y el fluido están inicialmente en reposo.

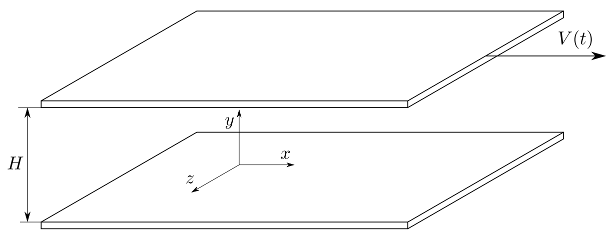


Figura 1: Esquema del problema de dos placas paralelas de dimensiones infinitas con un fluido en su interior.

Se utiliza un sistema de coordenadas espacial posicionado como se indica en la figura, la placa inferior está en el plano $x - z$, mientas que el eje y es perpendicular a ambas placas. Para algún tiempo $t = t_0$ la placa superior adquiere un desplazamiento con velocidad prescrita $V(t)$ en la dirección x como muestra la figura. El espaciamiento entre ambas placas se denota con H.

En este problema la velocidad del fluido $U(x, y, z, t) = (u, v, w)(x, y, z, t)$ tiene una única componente distinta de cero en la dirección x. La ecuación de Navier-Stokes que describe la evolución temporal de la velocidad del fluido $u(y, t)$ es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

con ν la viscosidad cinemática del fluido. Se requiere determinar el perfil de velocidad $u = u(y, t)$. Las condiciones iniciales y de borde de este problema son:

$$u(0, y) = 0 \quad \forall \quad 0 \geq y < H \qquad ; \qquad u(0, H) = V(0) \tag{7}$$

$$u(t, 0) = 0 \qquad ; \qquad u(t, H) = V(t) \tag{8}$$

El fluido entre las placas es un aceite con $\nu = 2.17 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$. El espaciamiento entre placas es $H = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$, y la velocidad de la placa superior es $V(t) = 40\,\mathrm{m/s}$. Utilice un espaciamiento de grilla $\delta y = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

Encuentre la solución utilizando un esquema explicito y otro implícito. Para el caso explicito la condición de estabilidad es $\nu\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Problema N°5

Un elemento combustible de un reactor nuclear en la forma de pared plana de espesor $2L = 20\,\mathrm{mm}$ se enfría convectivamente en ambas superficies mediante un flujo de fluido refrigerante con $h = 1100\,\mathrm{W/m^2}K$ y $T_\infty = 250°$ C. En la figura 2 se muestra un esquema del problema de interés.

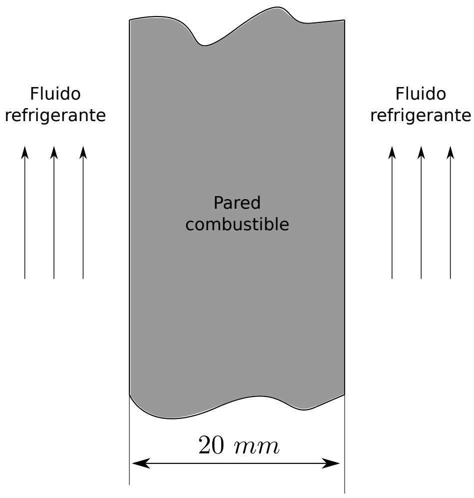


Figura 2: Esquema del problema. Pared combustible refrigerada a ambos lados por un flujo de fluido refrigerante.

A potencia normal de operación, el calor se genera de modo uniforme dentro del elemento a una rapidez volumétrica de $\dot{q}_1 = 1 \times 10^7\,\mathrm{W/m^3}$. Si hay un cambio en la rapidez de generación, ocurrirá una desviación de las condiciones de estado estable asociada con la operación normal. Considere un cambio súbito en la generación de calor donde $\dot{q}_2 = 2 \times 10^7\,\mathrm{W/m^3}$, y determine la evolución de la distribución de temperatura en el elemento combustible. Las propiedades térmicas del elemento combustible son $k = 30\,\mathrm{W/mK}$ y $\rho c = 5 \times 10^6$.

Problema N°6

La ecuación lineal de Burgers es una ecuación de convección-difusión definida como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9}$$

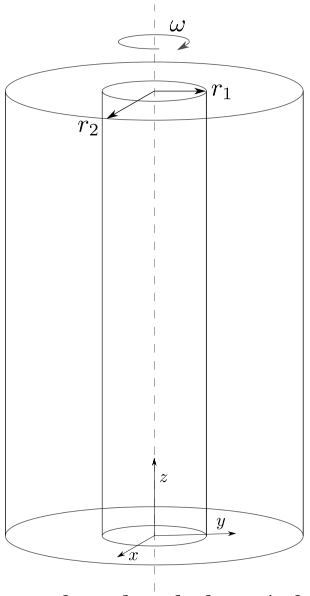
con a la velocidad del sonido.

Utilizando esquemas en diferencias, encuentre una versión discreta y explicita de la ecuación de Burgers con precisión espacial y temporal $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ y $\mathcal{O}\left(k\right)$ respectivamente.

Nota: No considere el problema en el borde ni los diferentes inconvenientes numéricos que puede encontrar al analizar la ecuación de Burgers.

Problema N°7 - (examen final)

Se quiere analizar la distribución de velocidad tangencial de un fluido contenido entre dos cilindros concéntricos de longitud $L = \infty$ en rotación. En la figura debajo se muestra un esquema del problema. En el problema que se considera $r_1 = 1.5\,\mathrm{mm}$ y $r_2 = 7.9\,\mathrm{mm}$ ($r_1 \leq r \leq r_2$). El fluido que se analiza es agua con $\nu = 1 \times 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}$ y $\rho = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$.



$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} u_\theta = u_\theta(r,t) \quad &; \quad u_\theta(r,0) = 0 \\ u_\theta(r_1,t) = \omega(t) r_1 \quad &; \quad u_\theta(r_2,t) = \omega(t) r_2 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t & 0 \leq t \leq 0.8 \\ 2 & 0.8 < t < 20 \\ 2 - \frac{5}{2}(t-20) & t \geq 20 \end{cases} \tag{12}$$

El campo de velocidad está determinado por la ecuación de Navier-Stokes. Escribiendo estas ecuaciones en coordenadas cilíndricas el problema se simplifica a uno unidimensional definido por la ecuación (10). Dadas las condiciones iniciales y de borde en la expresión (11), determine la evolución temporal de la velocidad u_θ para $\omega(t)$ definida en la ecuación (12), las unidades de $\omega(t)$ están dadas en rps.

Se pide:

1. Utilizar un esquema explícito $\mathcal{O}(\delta t)$ en el tiempo, y $\mathcal{O}(\delta r^2)$ en el espacio. Explicite el esquema en diferencias que utiliza para encontrar la solución del problema.

2. Se pide la distribución de velocidad a tiempo $t = 0.8, 2.5, 3.5, 6.0\,\mathrm{s}$. Utilice $\delta t = 2.5 \times 10^{-6}$.

3. La distribución de velocidades alcanza soluciones estacionarias para dos intervalos de tiempo diferentes: el primero para $0.8 < t < 20$ y el segundo para $t \geq 20$. Se considera una solución estacionaria cuando $\max_i \left(\frac{|u_i^{n+1} - u_i^n|}{\delta t} \right) < 1 \times 10^{-6}$.

   a) Encontrar el tiempo $t = t_1$ para el cual se alcanza la primer solución estacionaria.

   b) Encontrar el tiempo $t = t_2$ para el cual se alcanza la segunda solución estacionaria.

4. Obtenga una expresión discreta de la ecuación (10) utilizando el método de Crank-Nicolson. Considere una expresión válida lejos de los bordes.