Taller 2 Punto 2:

el algoritmo de verlet esta dado por:

(1) $X_{n+1} = 2X_n - X_{n-1} + h^2 a$, donde a es una funcion de la posición, $a_n(x_n)$

Cada termino es una Aproximacion que se relaciona con el valor real de la siguiente forma

$X_{n+1} = \overline{X}_{n+1} + \epsilon_{n+1}$, donde $\overline{X}_{n+1}$ es el valor real, al Remplazar los errores en (1)

Se obtiene:

$$\overline{X}_{n+1} + \epsilon_{n+1} = 2(\overline{x}_n + \epsilon_n) - \overline{x}_{n-1} - \epsilon_{n-1} + h^2 a_n(\overline{x}_n + \epsilon_n)$$

Note que $a_n(\overline{x}_n + \epsilon_n)$ Se Puede expandir en serie de Taylor tal que:

$$a_n(\overline{x}_n + \epsilon_n) \simeq a_n(\overline{x}_n) + \epsilon_n a_n'(\overline{x}_n)$$

al Remplazar se obtiene

$$\overline{x}_{n+1} + \epsilon_{n+1} = 2\overline{x}_n + 2\epsilon_n - \overline{x}_{n-1} - \epsilon_{n-1} + h^2 a_n(\overline{x}_n) + h^2 \epsilon_n a_n'(\overline{x}_n)$$

Reorganizando:

$$[\overline{x}_{n+1} + \overline{x}_{n-1} - 2\overline{x}_n - h^2 a(\overline{x}_n)] + \epsilon_{n+1} = 2\epsilon_n - \epsilon_{n-1} + \epsilon_n h^2 a_n'(\overline{x}_n)$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_{n+1} - 2\epsilon_n + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n h^2 a_n'(\overline{x}_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n(2 + h^2 a_n'(\overline{x}_n)) = 0$$

b. Por definición en un oscilador armonico se tiene que $a(x) = -\omega^2 x$

tal que $a'(x) = -\omega^2$

tome $R = \frac{1}{2} h^2 \omega^2 = -\frac{1}{2} h^2 a'$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n(2 + (-2R)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1} - 2\epsilon_n(2 - R) = 0$$

c. Suponga $\epsilon_n = \epsilon_0 \lambda^n$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \lambda^{n+1} + \epsilon_0 \lambda^{n-1} - \epsilon_0 \lambda^n (2 - 2R) = 0$$

$$\epsilon_0 \lambda^{n-1} (\lambda^2 + \lambda^0 - \epsilon_0 \lambda^1 2 (1 - R)) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda 2 (1 - R) + 1 = 0$$, Por formula cuadratica:

$$\lambda = \frac{+2(1-R) \pm \sqrt{4(1-R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = (1-R) \pm \frac{1}{2} \cdot 2 \left((1-R)^2 - 1\right)^{1/2}$$

$$\lambda = (1-R) \pm \left[(1-R)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

d. $|\lambda_\pm| \leq 1$ define la estabilidad del algoritmo

si $|\lambda_\pm| \leq 1$, entonces

caso 1.

$$1 \geq (1-R) \pm \left[(1-R)^2 - 1\right]^{1/2} \Rightarrow R \geq \pm \left[(1-R)^2 - 1\right]^{1/2} \Rightarrow R^2 \geq (1-R^2) - 1$$

expandiendo se obtiene:

$$R^2 \geq 1 - 2R + R^2 - 1$$

$$\Rightarrow R^2 - R^2 + 2R \geq 0 , \quad 2R \geq 0$$

$R = \frac{1}{2} h^2 w^2$

$h^2 w^2 \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{w}$, Por lo tanto $h < \frac{2}{w}$

Caso II

$$-1 \leq (1-R) \pm [(1-R)^2-1]^{1/2}$$

$$\hookrightarrow (2-R) \geq \mp [(1-R)^2-1]^{1/2}$$

$$\Rightarrow (2-R)^2 \geq (1-R)^2-1$$

Al expandir se obtiene

$$4-4R+R^2 \geq 1-2R+R^2-1$$

$$\Rightarrow 4-2R \geq 0$$

$$2R \leq 4$$

$$R \leq 2$$

Al Reemplazar $R = \frac{1}{2}h^2w^2$

$$\Rightarrow h^2w^2 \leq 4$$

$hw \leq 2$ * (Consideraremos solo el caso en el que $\sqrt{4} = 2$)

$$h \leq \frac{2}{w}$$