

Punto 3 Teorico

$$\frac{dL}{dt} = \Omega \times L$$



a. Por teorema de ejes Paralelos se puede relacionar el momento de inercia del disco con el eje de Rotacion de la siguiente forma

$I = I_{cm} + Md^2$, donde el momento de inercia del centro de masa del disco esta dado por

$$I_{cm} = \frac{1}{4}mr^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$$

b. $\int_0^r x^2 dm$, donde $dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi x dx = \frac{2m}{R^2} x dx$

$$\hookrightarrow \int_0^r \frac{2m}{r^2} x^3 dx = \frac{2m}{r^2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^r = \frac{1}{2}mr^2$$

c. $L = \frac{1}{2}I_0(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2}I_z(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - mgy \cos(\theta)$

donde L tiene la siguiente forma $L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$, de forma que segun la ec. de euler lagrange:

Por lo tanto las ec. de movimiento son las siguientes

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

Note que L no depende explícitamente de ϕ ni de ψ es decir

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = cte$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left[\frac{1}{2}I_z(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2(\theta)) + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos(\theta) \right]$$

$$= I_z \dot{\psi} + I_z \dot{\phi} \cos(\theta)$$

$$= I_z(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_0 \dot{\phi} \sin^2(\theta) + I_z (\dot{\phi} \cos^2(\theta) + \dot{\psi} \cos(\theta)) = \dot{\phi} (I_0 \sin^2(\theta) + I_z \cos^2(\theta)) + I_z \dot{\psi} \cos(\theta)$$

Por otro lado para θ se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgd \sin(\theta) - I_z (\dot{\psi} \dot{\phi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \dot{\phi} \sin(\theta)) + I_0 \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\hookrightarrow \text{donde } \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) (I_0 - I_z) - \dot{\phi} \dot{\psi} I_z \sin(\theta) + mgd \sin(\theta)$$