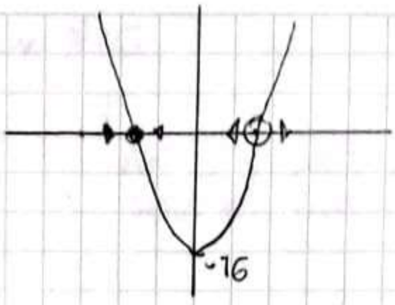
2.2.1 $\dot{x} = 4x^2 - 16$



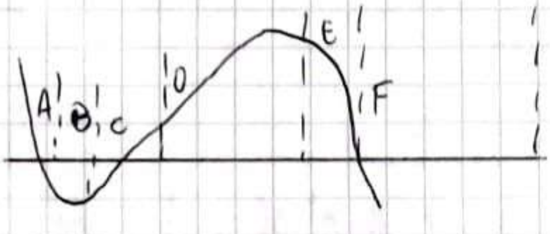

Los puntos fijos están en 2 y -2
y el campo de dirección -2 es estable
y 2 es inestable

2.2.3 $\dot{x} = x - x^3$

$\frac{dx}{dt} = x - x^3 \quad [\therefore \frac{dx}{dt} = x']$

$x - x^3 = 0$

$x(-x^2 + 1) = 0 \qquad x = 0,\ x = -1,\ x = 1$




Incremento: $\frac{dx}{dt}$ crece -1 a 1

decremento: $\frac{dx}{dt}$ decrece de $(-\infty, -1), (1, \infty)$

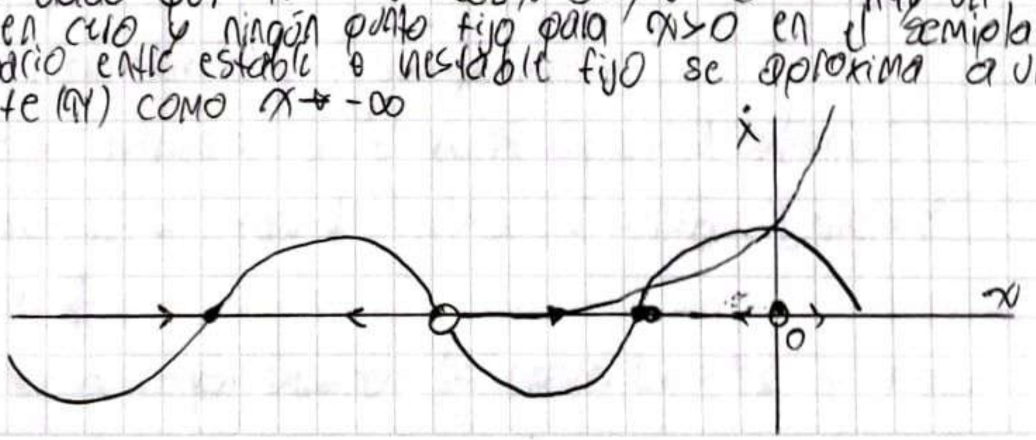
en rango A $> x > 0$ a $\frac{dx}{dt} < 0$ concavo abajo ~~arriba~~ / B $x < 0$ $\frac{dx}{dt} < 0$ concavo arriba

en rango C $x < 0$ a $\frac{dx}{dt} > 0$ concavo abajo / D, $x > 0$ $\frac{dx}{dt} > 0$ concavo arriba

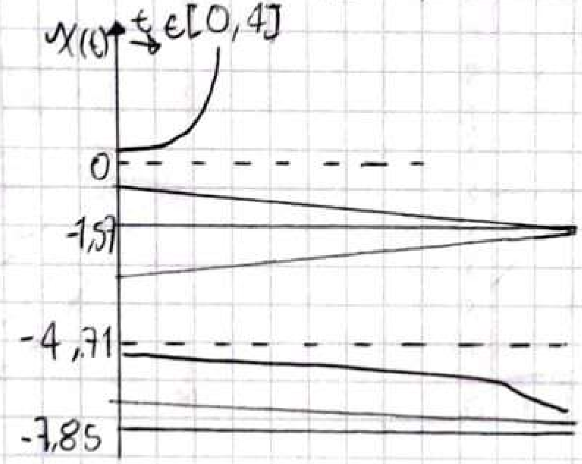
en rango E $x > 0$ $\frac{dx}{dt} < 0$ concavo abajo / F $x < 0$ $\frac{dx}{dt} < 0$ concavo arriba

2.2.7 No podemos resolver por puntos fijos analíticamente pero podemos encontrar los puntos fijos aproximadamente observando la intersección de $e^x$ y $\cos(x)$ y determinar la estabilidad de los puntos fijos a partir de la cual el gráfico es mejor que el otro cercano

El punto fijo viene dado por $\dot{x} = 0 \to e^x - \cos x = 0 \Rightarrow e^x = \cos x$ hay un punto inestable en $x=0$ y ningún punto fijo para $x > 0$ en el semiplano izquierdo, el espacio entre estable e inestable fijo se aproxima a un valor constante ($\pi$) como $x \to -\infty$



aquí hay puntos fijos en $x \approx \pi\left(\frac{1}{2}-n\right), n \in \mathbb{N}$, y $x=0$




No se puede hallar solución analítica

2.3.1

a) $\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = r\,dt$ $\quad \frac{K\,dN}{N(K-N)} = r\,dt$ $\quad \frac{dN}{N} + \frac{dN}{K-N} = r\,dt$ $\quad \ln N - \ln|K-N| = rt + C$

$\ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = rt + C$ $\quad \frac{N}{K-N} = Ce^{rt}$ $\quad \frac{K-N}{N} = Ce^{-rt}$ $\quad \frac{K}{N} = 1 + Ce^{-rt}$ $\quad \frac{K}{1+Ce^{-rt}} = N$

$N(0) = n_0 = \frac{K}{1+C}$ $\quad C = \frac{K}{n_0} - 1$ $\quad \frac{K}{1+\left(\frac{K}{n_0}-1\right)e^{-rt}} = N$ $\quad \boxed{x = \frac{1}{N}}$ →

→ $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{N^2}\frac{dN}{dt}$ $\quad -N^2\frac{dx}{dt} = r\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{xK}\right)$ $\quad -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = r\frac{1}{x^2K}(xK-1)$

$\frac{dx}{(xK-1)} = \frac{r\,dt}{K}$ $\quad \frac{1}{K}\ln(xK-1) = -\frac{rt}{K} + C$ $\quad \ln(xK-1) = -rt + C$

$xK - 1 + Ce^{-rt}$ $\quad x = \frac{1+Ce^{-rt}}{K}$ $\quad \frac{1}{N} = \frac{1+Ce^{-rt}}{K}$ $\quad N = \frac{K}{1+Ce^{-rt}}$ $\quad \frac{K}{1+\left(\frac{K}{n_0}-1\right)e^{-rt}} = N$

2.3.3 Se puede interpretar 'a' y 'b' biologicamente

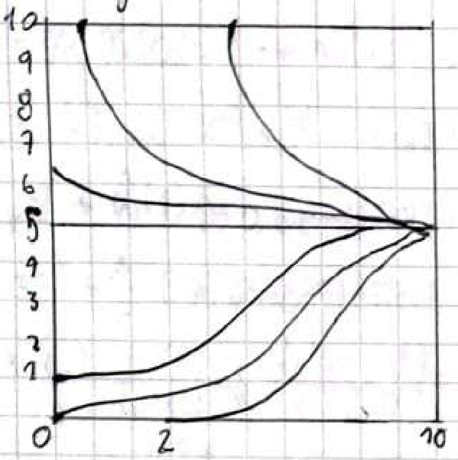
'a' es el crecimiento intrinseco y 'b' es el capacidad ambiental

El punto fijo para N es $-aN\ln(bN) = 0$ $\quad \ln(bN) = 0$ $\quad bN(t) = e^0$

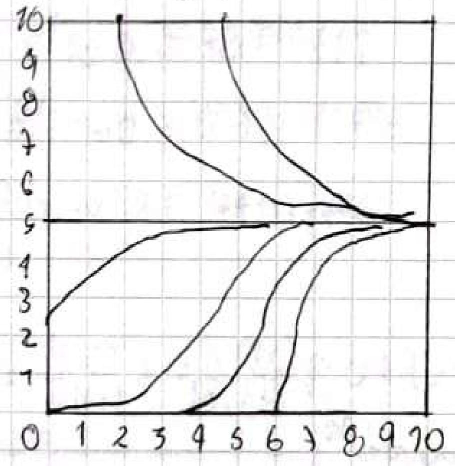
$bN(t) = 1$ $\quad N^*(t) = 0, \frac{1}{b}$

El siguiente vector de campo variando los valores iniciales y parametros

N* = -analog(bN) a = 0.8, b = 0.2



N* = -analog(ΔV): a = 0.8 - b = 0.2



2.3.5

$$x(t) = \frac{x_0 \cdot e^{(a-b)t}}{x_0 e^{(a-b)t} + y_0}$$

$$x_0 \cdot e^{(a-b)t}$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{y_0}{x_0 e^{(a-b)t}}}$$

$a > b$, $\lim_{t \to \infty} e^{(a-b)t} = \infty$

$$\frac{1}{e^{(a-b)t}} = 0$$

$\therefore \lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{1+0} = 1$

$x' = ax$, $y' = by$

condiciones iniciales $x_0, y_0 > 0$ y índices de crecimiento $a > b > 0$

$x' = ax$

$\frac{dx}{dt} = a \cdot dt$

$\ln x = a \cdot t + c$

$x(t) = k_1 e^{a \cdot t}$

$x(0) = x_0$

$k_1 = x_0$

$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$

$y' = by$

$\frac{dy}{dt} = by$

$\frac{dy}{y} = b \, dt$

$\ln y = b \cdot t + c_2$

$y(t) = k_2 \cdot e^{bt}$

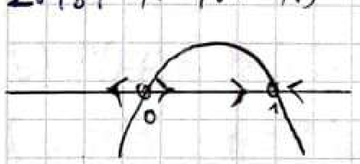
$y(0) = y_0$

$k_2 = y_0$

$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{bt}}$

$$a. \; x = \frac{x(t)}{x(t) + y(t)} = \frac{x_0 \cdot e^{at}}{x_0 e^{at} + y_0 e^{bt}} \to \frac{x_0 \, e^{at}/e^{bt}}{x_0 \cdot \frac{e^{at}}{e^{bt}} + y_0 \cdot \frac{e^{bt}}{e^{bt}}}$$

2.4.1 $\dot{x} = x(1-x)$



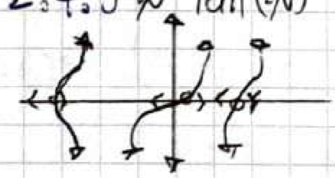
$x(1-x) = 0$ $x = 0$ o $1$

1 estable 0 inestable

i.e. $x(0) \in (-\infty, 0) \to$ con $t \to \infty$ $x(t) \to -\infty$

$x(t) \in (0, \infty) \to t \to \infty$ $x(t) \to 1$

2.4.3 $\dot{x} = \tan(x)$

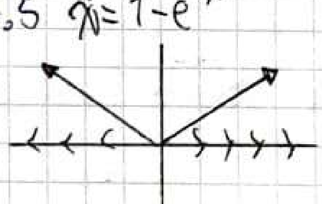


$\tan x = 0$

$x = 0$ $\wedge$ $n \in \mathbb{Z}$

0 punto fijo estable

2.4.5 $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$



$\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0$

$-x^2 \leq 0$

$e^{-x^2} \leq 1$

$1 - e^{-x^2} \geq 0$

$1 - e^{-x^2} = 0$

$e^{-x^2} = 1$

$x = 0$

Punto fijo 0 inestable

2.8.1 La pendiente del campo vectorial es básicamente la pendiente de la tangente del campo vectorial

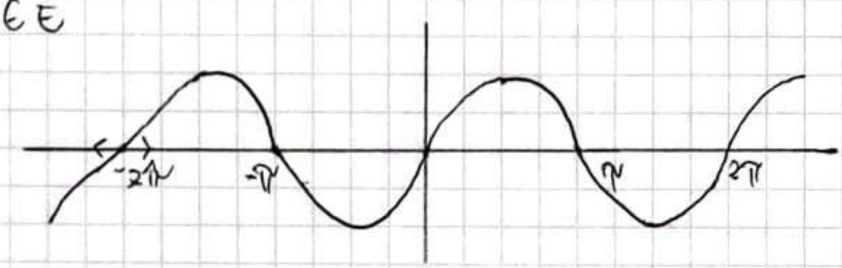
El campo vectorial de la figura 2.8.2 está dibujado para primer orden, representa el cambio en x con respecto al cambio en t por lo que podemos esperar una pendiente constante a lo largo de la línea horizontal porque la ecuación autónoma, dada para la pendiente no depende explícitamente de t pero depende de x. Aunque t varía a lo largo de las líneas horizontales x permanece constante por lo que la pendiente permanece constante.

$\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$

2.1.1 Encuentre los puntos fijos del flujo

Punto fijo $\rightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(x) = 0$ $\quad \operatorname{sen}(\pi) = 0; \operatorname{sen}(-\pi) = 0; \operatorname{sen}(-2\pi) = 0; \operatorname{sen}(2\pi) = 0$

$x^* = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$




2.1.3

a) $\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{d}{dx}(\dot{x})\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\dot{x} = \cos x \cdot \operatorname{sen} x \quad \ddot{x} = \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

b) $\ddot{x} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

$\operatorname{sen} 2x \leq 1 \quad \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow 2x = (4n+2)\frac{\pi}{2}$

$\boxed{x = (4n+1)\pi/4}$

2.1.5 $\dot{x} = \operatorname{sen} x$ a)

$x = \pi + \theta \quad \theta + \operatorname{sen}\theta = 0$ $\quad$ ecuación requerida: $\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

b) $x = 0$ y $x = \text{Pi}$ estable e inestables

$\dot{x} = 0 \quad f(x) = 0 \qquad x' = f(x) \quad f(a) = 0 \quad f'(x) > 0 \quad x.\ f(x+\epsilon) > 0 > f(x-\epsilon)$

f(x) es el punto fijo $\qquad f'(x) > 0 \rightarrow$ inestable

$f'(x) < 0 \rightarrow$ Estable

2.8.3 a)

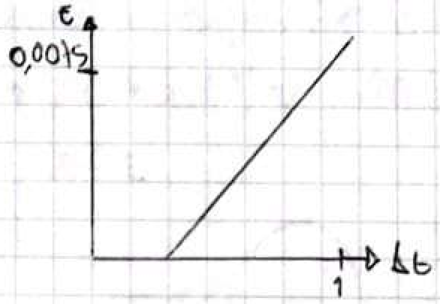
$\dot{x} = -x,\ x(0) = 1 \to x(t) = e^{-t}$  $x(1) \to e^{-1} \approx 0{,}3678794411$

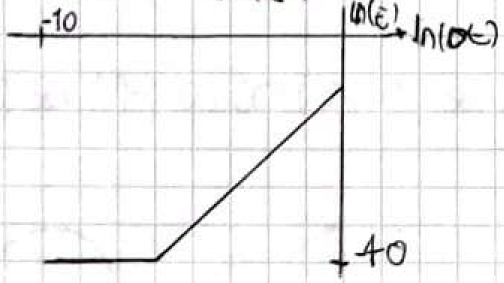
2.8.3 b) $\Delta t = 10^{0} \to x(1) = 0{,}375$  $\Delta t = 10^{-1} \to x(1) \approx 0{,}367879774412498$

$\Delta t = 10^{-2} \to x(1) \approx 0{,}36787944120255$  $\Delta t = 10^{-3} \to x(1) \approx 0{,}367879441171446$

$\Delta t = 10^{-4} \to x(1) \approx 0{,}367879441171445$

2.8.3 c) $\frac{\ln(E)}{\ln(\Delta t)} \approx \frac{\ln(C(\Delta t)^4)}{\ln(\Delta t)} = \frac{\ln(C) + \ln((\Delta t)^4)}{\ln(\Delta t)} = \frac{\ln(C)}{\ln(\Delta t)} + \frac{4\ln(\Delta t)}{\ln(\Delta t)} \approx 0 + 4 = 4$




2.8.7 a) $x(t_1) = x(t_0 + \Delta t)$

Por expansión de taylor

$x(t_1) = x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + x''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{x'''(t_0)\,O(\Delta t)^3}{3!}$  aquí $x(t_0) = t_0$ y

$x'(t_0) = f(x_0)$  así $x(t_1) = x_0 + f(x_0)\Delta t + f'(x_0)\frac{\Delta t^2}{2!} + O(\Delta t)^3$

aproximación de Euler $x_1 = x_0 + f(x_0)\Delta t$  $x(t_1) - x_1 = f'(x_0)\frac{\Delta t^2}{2!}$

$|x(t_1) - x_1| = |f'(\xi)|\frac{\Delta t^2}{2!}$ dónde $\xi \in (x_1, x_0)$

b) $P(\Delta t) = |x(t_1) - x_1| = C(\Delta t)^2$ dónde $C = |f'(\xi)|/2!$ dónde $\xi \in (x_1, x_0)$  $n = T/\Delta t$

Error global $E(\Delta t) \le n\,e(\Delta t)$  dónde $E(\Delta t) = |x(t_n) - x_n|$

$\le \frac{T}{\Delta t} C(\Delta t)^2$

$\le TC(\Delta t)$

el error global es $|x(t_n) - x_n|$