

Ejercicios Teórico-Prácticos: Transformadas de Fourier, Laplace y Z

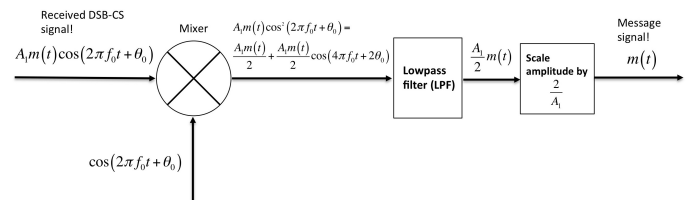
Señales y Sistemas 2025

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

1. Transformada de Fourier

- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno Transformada de Fourier.
- Explique las semejanzas y diferencias entre la serie de Fourier (exponencial, trigonométrica y compacta), la transformada de Fourier, transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) y transformada discreta de Fourier (DFT). Considere las diferentes combinaciones entre: espectro continuo y discreto y señal en tiempo continuo y discreto. Además, consulte en qué consiste el algoritmo *Fast Fourier Transform* - (FFT) y su utilidad para el cálculo de la transformada discreta de Fourier. Explique en detalle el algoritmo FFT y su costo computacional vs el de la transformada discreta. Ver cuaderno Transformada de Fourier.
- Encuentre la función de densidad espectral (transformada de Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades):
a) $e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$; b) $\cos(w_c t)$, $w_c \in \mathbb{R}$; c) $\sin(w_s t)$, $w_s \in \mathbb{R}$;
d) $f(t) \cos(w_c t)$, $w_c \in \mathbb{R}$, $f(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; e) $e^{-a|t|^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$. f) $\text{Arect}_d(t)$, $A, d \in \mathbb{R}$.
- Aplique las propiedades de la transformada de Fourier para resolver:
a) $\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t} \cos(w_c t)\}$, $w_1, w_c \in \mathbb{R}$; b) $\mathcal{F}\{u(t) \cos^2(w_c t)\}$, $w_c \in \mathbb{R}$; c) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7}{w^2+6w+45} * \frac{10}{(8+jw/3)^2}\right\}$; d) $\mathcal{F}\{3t^3\}$,
e) $\frac{B}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+(w-n\omega_o)^2} + \frac{1}{a+j(w-n\omega_o)} \right)$, donde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\omega_o = 2\pi/T$ y $B, T \in \mathbb{R}^+$. Ver Tablas de propiedades y Tablas transformada de Fourier.
- Consulte en qué consiste la modulación por amplitud por detección coherente y sus aplicaciones. Genere un ejemplo ilustrativo sobre Python en el que se grafique las señales en el tiempo y en frecuencia (utilizando la 'rfft') para: señal mensaje tipo pulso rectangular y señal mensaje tipo coseno. El usuario podrá definir el índice de modulación de interés. Ver cuaderno Modulación AM.
- Aplicación en comunicaciones - modulación AM.** Sea la señal portadora $c(t) = A_c \cos(2\pi F_c t)$, con $A_c, F_c \in \mathbb{R}$, y la señal mensaje $m(t) \in \mathbb{R}$. Encuentre el espectro en frecuencia de la señal modulada en amplitud (AM), $y(t) = \left(1 + \frac{m(t)}{A_c}\right) c(t)$. Luego, descargue desde YouTube, 5 segundos de su canción favorita (capturando del segundo 20 al 25).

Presente una simulación de modulación por amplitud AM (tomando como mensaje el fragmento de la canción escogida y con un índice de modulación de 1). Grafique las señales en tiempo y frecuencia (magnitud) de la señal mensaje, portadora y modulada. Reproduzca los fragmentos de audio del mensaje, portadora y señal modulada. Nota: se sugiere utilizar un canal de señal de audio para el desarrollo del ejercicio. Ver Cuaderno guía modulación AM. Luego, sea el demodulador en amplitud presentado en la siguiente Figura:



Asumiendo $\theta_0 = 0$, determine el espectro en cada una de las etapas del sistema. Además, utilizando el fragmento de la canción de Youtube, grafique cada una de las etapas principales del de demodulación en el tiempo y la frecuencia (reproduzca el segmento de la canción en cada etapa). Nota: para la etapa de filtrado pasa bajas, emplee filtrado ideal espectral mediante FFT.

- Aplicación en circuitos eléctricos - potencia.** Consulte en qué consiste la distorsión total de armónicos (*Total Harmonic Distortion*-(THD)) y el factor de potencia en un circuito eléctrico. Cómo puede calcularse el THD desde la FFT?. Cómo puede calcularse la distorsión del factor de potencia con base al THD?. Genere un ejemplo ilustrativo para el cálculo del THD y la distorsión del factor de potencia para un rectificador de onda completa con carga: i) netamente resistiva y ii) carga RC en serie. Establezca las condiciones necesarias para las simulaciones y pruebe con diferentes valores de R y C. Discuta los resultados obtenidos. Ver cuaderno Rectificador RC y THD.
- Utilizando la herramienta Streamlit, genere un dashboard para los ejercicios: i) **Aplicación en comunicaciones - modulación AM** y ii) **Aplicación en circuitos eléctricos - potencia** (Ver material de apoyo Dashboards).

2. Transformada de Laplace

- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Convolución.
- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Respuesta impulso.
- Demuestre si los siguientes sistemas de la forma $y = \mathcal{H}\{x\}$, son sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT) (simule los sistemas en Python):
 - $y[n] = x[n]/3 + 2x[n-1] - y[n-1]$.
 - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x^2[k]$.
 - $y[n] = \text{median}(x[n])$; donde median es la función mediana sobre una ventana de tamaño 3.
 - $y(t) = Ax(t) + B$; $A, B \in \mathbb{R}$.
- Hallar la salida $y[n]$ de un SLIT ante la entrada $x[n] = \{-15, 5, -3^\dagger, 0, 5, 7, -1\}$, con respuesta al impulso $h[n] = \{1, -2, 0^\dagger, 1, -2\}$, donde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$ y $n=0$ para $x[n]^\dagger$. Nota: Utilizar método gráfico para encontrar la salida y comprobar con simulación en Python. Ver cuaderno Convólución discreta. Repita el proceso para el sistema con respuesta al escalón $\{-1, 6, -10, 3^\dagger, 1, -10, 2, 5\}$ (Ver cuaderno Respuesta Escalón).
- Sea la señal Gaussiana $x(t) = e^{-at^2}$ con $a \in \mathbb{R}^+$, el sistema A con relación entrada-salida $y_A(t) = x^2(t)$, y el sistema lineal e invariante con el tiempo B con respuesta al impulso $h_B(t) = Be^{-bt^2}$: a) Encuentre la salida del sistema en serie $x(t) \rightarrow h_B(t) \rightarrow y_A(t) \rightarrow y(t)$ b) Encuentre la salida del sistema en serie $x(t) \rightarrow y_A(t) \rightarrow h_B(t) \rightarrow y(t)$.
- Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Definición transformada de la Laplace.
- Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Propiedades básicas transformada de la Laplace.
- Demuestre las siguientes propiedades (sin utilizar tablas de propiedades): i) $\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = e^{-st_0}X(s)$, ii) $\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X(s/a)$, iii) $\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\} = sX(s)$, y iv) $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$. Ver material de apoyo y propiedades de Laplace.
- Encuentre la transformada de Laplace, dibuje el esquema de polos y ceros y la región de convergencia (ROC), de las siguientes señales: i) $e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$, ii) $e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$, iii) $e^{-a|t|}$, iv) $e^{-2t}[u(t) - u(t-5)]$.
- Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Transformada inversa de Laplace.
- Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Autofunciones y SLITs.
- Encuentre la función de transferencia en lazo abierto para un circuito RLC serie (entrada tensión de alimentación - salida tensión en el capacitor) y un circuito RCL en paralelo (entrada corriente de alimentación - salida corriente en el inductor). Nota: tenga en cuenta las condiciones iniciales del

sistema según lo explicado en el material de apoyo Circuito RLC y Análisis de redes eléctricas.

- Para las funciones de transferencia en lazo abierto encontradas en el punto anterior, encuentre la expresión de la salida en el tiempo para una configuración en lazo cerrado del sistema, en función de R , L y C , para las siguientes entradas: i) impulso, ii) escalón unitario, y iv) rampa. Compruebe los resultados en simulación sobre Python (utilizando sympy) y grafique la señal de salida para cada caso. Ver cuaderno de ayuda Fracciones parciales Circuito RLC.
- Consulte en qué consiste un sistema subamortiguado, sobreamortiguado, y de amortiguamiento crítico (ver Péndulo elástico y forma canónica SLITs). Genere simulaciones para ejemplificar cada uno de los casos con los sistemas R, L, C serie y paralelo estudiados. Nota: asuma condiciones iniciales cero. Encuentre las expresiones para el factor de amortiguamiento, la frecuencia natural no amortiguada y la frecuencia natural amortiguada en función de R , L , y C (asuma condiciones iniciales cero). Utilizando la herramienta Streamlit, genere un dashboard para la simulación de los sistemas. El usuario podrá escoger el tipo de circuito (serie o paralelo), el tipo de respuesta (subamortiguado, sobreamortiguado, amortiguamiento crítico o inestable), el factor de amortiguamiento (restringido por el dashboard según sea el caso) y la frecuencia natural. El dashboard deberá mostrar el diagrama de bode, diagrama de polos y ceros, respuesta al impulso, al escalón y a la rampa, el tiempo de levantamiento, máximo sobreimpulso, tiempo del máximo sobreimpulso, tiempo de establecimiento y los valores de R , L , C estimados.

3. Transformada Z

- Consulte y realice los ejercicios del cuaderno Transformada Z.
- Explique las semejanzas y diferencias entre la serie de Fourier, transformada de Fourier en tiempo continuo y discreto, transformada de Laplace y la transformada Z. Ver material de apoyo Transformada de Fourier y Transformada Z.
- Encuentra la transformada Z para las siguientes señales: i) $x[n] = -a^n u[-n-1]$, ii) $x[n] = a^n$ para $0 \leq n \leq N-1$ y $a > 0$, y iii) $x[n] = \{5, 3, -2^\dagger, 0, 4, -3\}$, donde $n = 0$ para $x[n]^\dagger$.
- Consulte en qué consisten los filtros de respuesta impulso finita (Finite impulse response - FIR) y los filtros de respuesta impulso infinita (infinite impulse response - IIR). Realice un paralelo entre los FIR, IIR y los sistemas con y sin realimentación. Ver cuaderno Transformada Z.
- Presente una comparación entre las estrategias de diseño mediante invarianza al impulso y transformación bilineal.
- Extienda el dashboard relacionado con modulación AM (Ver ejercicios Transformada de Fourier), diseñando un filtro pasabajas para el proceso de demodulación. El usuario podrá

escoger el orden y tipo de filtrado (FIR o IIR). Para el caso de los filtros IIR el usuario podrá determinar el tipo de arquitectura: Butterworth, Bessel o Chebyshev. Además de las gráficas ya presentadas por el dashboard base en el ejercicio de modulación y demodulación AM, se debe incluir el diagrama de Bode y la gráfica de polos y ceros del filtro implementado.

Referencias

<https://github.com/amalvarezme/SenalesSistemas>

Hsu, H., (2014). Signals and systems (Vol. 8). New York: McGraw-Hill Education.

Castellanos-Dominguez et. al (2010), *Teoría de señales: fundamentos*, Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales.

Hsu, H. (2003), *Theory and problems of analog and digital communications*, Schaum's Outline series, McGraw-Hill.

Hsu, H. (1995), *Schaum's outlines of theory and problems of signals and systems*, McGraw Hill.

Hsu, H. (1970), *Análisis de Fourier*, Prentice Hall.