Transformada Rápida de Fourier (FFT)

ELO 314 – Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales
Segundo semestre - 2015

Matías Zañartu, Ph.D.
Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María

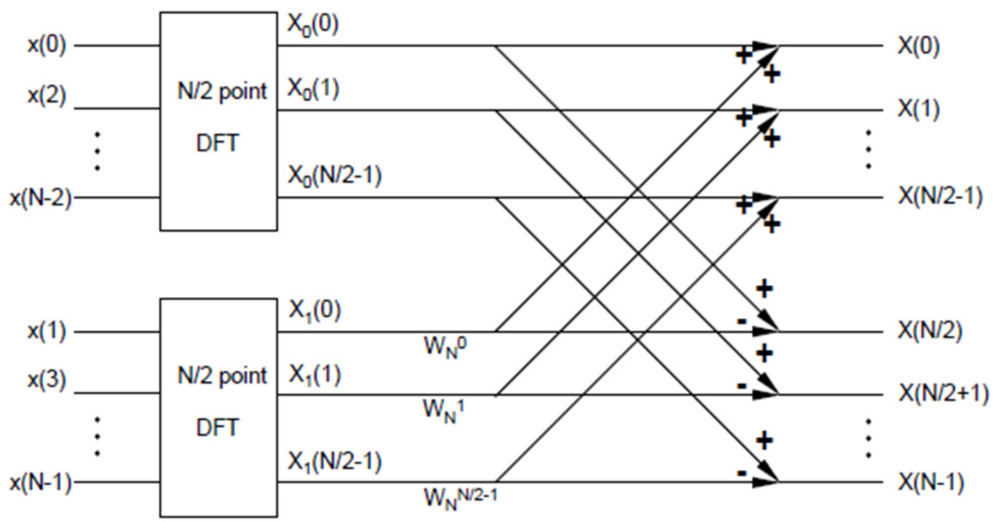
Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **Elementos claves para la eficiencia del algoritmo**
  - La DFT de N puntos se puede dividir en la suma ponderada de dos DFT de N/2 puntos
  - Las DFT de N puntos es (2π) periódica cada N puntos, lo que implica que las DFT de N/2 puntos lo son cada N/2 puntos
  - Los coeficientes de la transformada de Fourier tienen simetría y se repiten en frecuencia, lo que permite ahorrar cálculos
  - Orden de complejidad numérica $N^2 \rightarrow N log_2(N)$

***Nota:** Parte de esta presentación fue adaptada del material de la asignatura IPD-414 preparado por el Dr. Marcelo Pérez

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **DFT: Divide y conquista**
  - Un método eficiente para calcular una DFT de N puntos:
    - Separar muestras pares e impares
    - Tomar la DFT de N/2 puntos en cada grupo
    - Ponderar por factores W_N y sumar



Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT: Divide y conquista recursivo**
  - El principio básico de la FFT es usar el método de divide y conquista de la DFT de forma recursiva
  - Se repite el proceso para cada DFT de menor orden hasta llegar a la más pequeña posible: la DFT de 2 puntos
  - Se asume que $N=2^m$ lo que permite reducir el orden hasta una DFT de 2 puntos

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **DFT de 2 puntos**
  - Aplicación directa de la definición de la DFT

Considerando entradas: $x(0)$, $x(1)$, salidas $X(0)$, $X(1)$ y $N = 2$.

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_{nk}^{N}$$

Factores de peso

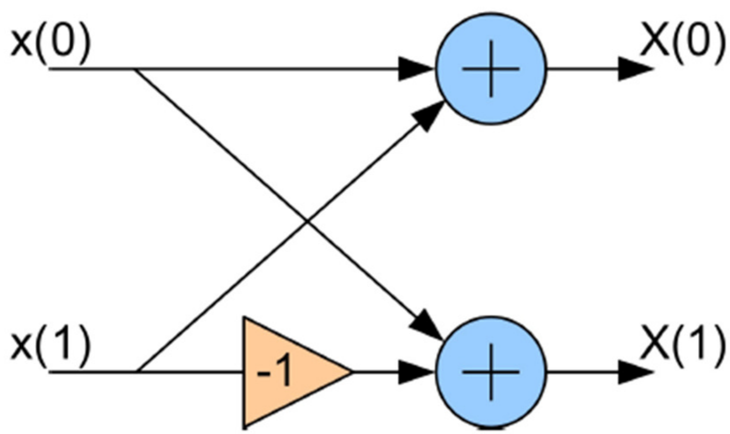
$$\begin{aligned}
W_{00}^{2} &= \cos(0) - j\sin(0) = 1 \\
W_{01}^{2} &= \cos(0) - j\sin(0) = 1 \\
W_{10}^{2} &= \cos(0) - j\sin(0) = 1 \\
W_{11}^{2} &= \cos(\pi) - j\sin(\pi) = -1
\end{aligned}$$

***Nota:** La notación de los coeficientes difiere a la de la guía, aunque ambos métodos son comúnmente usados

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **DFT de 2 puntos**
  - Aplicación directa de la definición de DFT

$$
\begin{aligned}
X(0) &= x(0) + x(1) \\
X(1) &= x(0) - x(1)
\end{aligned}
$$



Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **DFT de 4 puntos: Forma directa**

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_{nk}^{N}$$

$$\begin{aligned}
X(0) &= x(0)W_{00}^4 + x(1)W_{01}^4 + x(2)W_{02}^4 + x(3)W_{03}^4 \\
X(1) &= x(0)W_{10}^4 + x(1)W_{11}^4 + x(2)W_{12}^4 + x(3)W_{13}^4 \\
X(2) &= x(0)W_{20}^4 + x(1)W_{21}^4 + x(2)W_{22}^4 + x(3)W_{23}^4 \\
X(3) &= x(0)W_{30}^4 + x(1)W_{31}^4 + x(2)W_{32}^4 + x(3)W_{33}^4
\end{aligned}$$

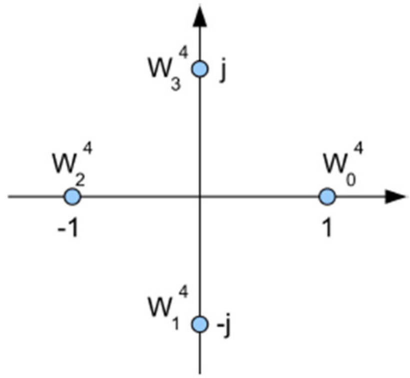
Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **DFT de 4 puntos: Simetría en los coeficientes**

$$W_{nk}^{N} = e^{-j2\pi nk/N}$$

$$\begin{array}{llll}
W_{00}^{4} = 1 & W_{01}^{4} = 1 & W_{02}^{4} = 1 & W_{03}^{4} = 1 \\
W_{10}^{4} = 1 & W_{11}^{4} = -j & W_{12}^{4} = -1 & W_{13}^{4} = j \\
W_{20}^{4} = 1 & W_{21}^{4} = -1 & W_{22}^{4} = 1 & W_{23}^{4} = -1 \\
W_{30}^{4} = 1 & W_{31}^{4} = j & W_{32}^{4} = -1 & W_{33}^{4} = -j
\end{array}$$

$$W_{nk}^{N} = e^{-j2\pi nk/N}$$



Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Simetría en los coeficientes**

Por simetría $W_2^4 = -W_0^4$ y $W_3^4 = -W_1^4$

$$\begin{aligned}
X(0) &= x(0)W_0^4 + x(1)W_0^4 + x(2)W_0^4 + x(3)W_0^4 \\
X(1) &= x(0)W_0^4 + x(1)W_1^4 + x(2)W_2^4 - x(3)W_1^4 \\
X(2) &= x(0)W_0^4 - x(1)W_0^4 + x(2)W_0^4 - x(3)W_0^4 \\
X(3) &= x(0)W_0^4 - x(1)W_1^4 + x(2)W_2^4 + x(3)W_1^4
\end{aligned}$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Simetría en los coeficientes**

Agrupando por coeficientes

$$\begin{aligned}
X(0) &= (x(0)+x(2))W_0^4 + (x(1)+x(3))W_0^4 \\
X(1) &= (x(0)-x(2))W_0^4 + (x(1)-x(3))W_1^4 \\
X(2) &= (x(0)+x(2))W_0^4 - (x(1)+x(3))W_0^4 \\
X(3) &= (x(0)-x(2))W_0^4 - (x(1)-x(3))W_1^4
\end{aligned}$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos:**

$$
\begin{aligned}
X(0) &= x(0) + x(2) + (1)\,(x(1) + x(3)) \\
X(1) &= x(0) - x(2) + (-j)\,(x(1) - x(3)) \\
X(2) &= x(0) + x(2) - (1)\,(x(1) + x(3)) \\
X(3) &= x(0) - x(2) - (-j)\,(x(1) - x(3))
\end{aligned}
$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Variable intermedia**

Utilizando la variable intermedia

$$
\begin{aligned}
Y(0) &= x(0) + x(2) \\
Y(1) &= x(0) - x(2) \\
Y(2) &= x(1) + x(3) \\
Y(3) &= x(1) - x(3)
\end{aligned}
$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

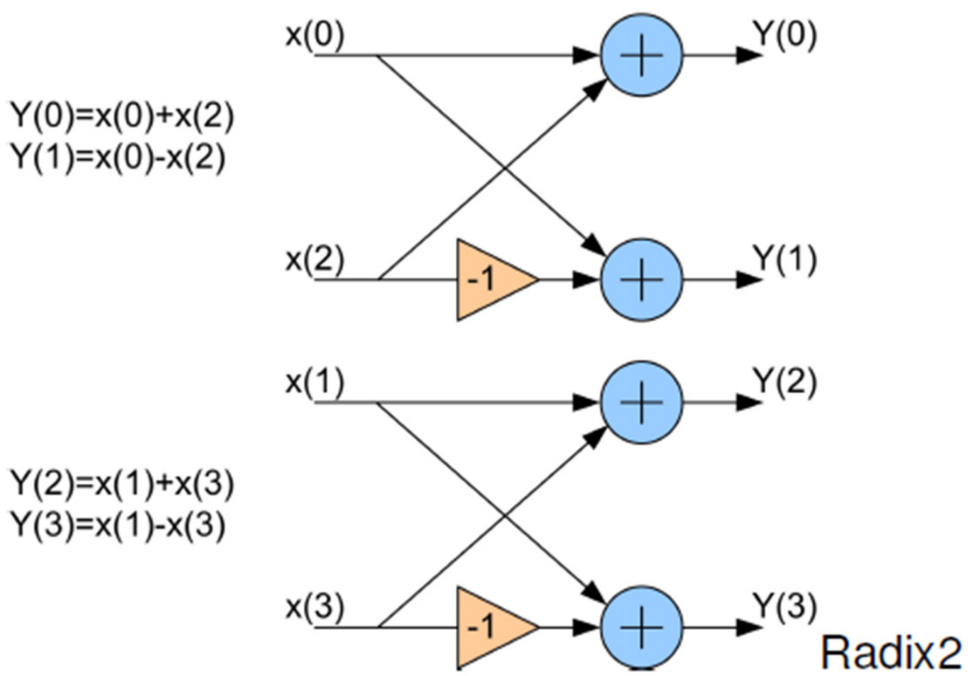
- **FFT de 4 puntos: Variable intermedia**

Finalmente

$$
\begin{aligned}
X(0) &= (Y(0) + Y(2))W_0^4 \\
X(2) &= (Y(0) - Y(2))W_0^4 \\
X(1) &= Y(1)W_0^4 + Y(3)W_1^4 \\
X(3) &= Y(1)W_0^4 - Y(3)W_1^4
\end{aligned}
$$

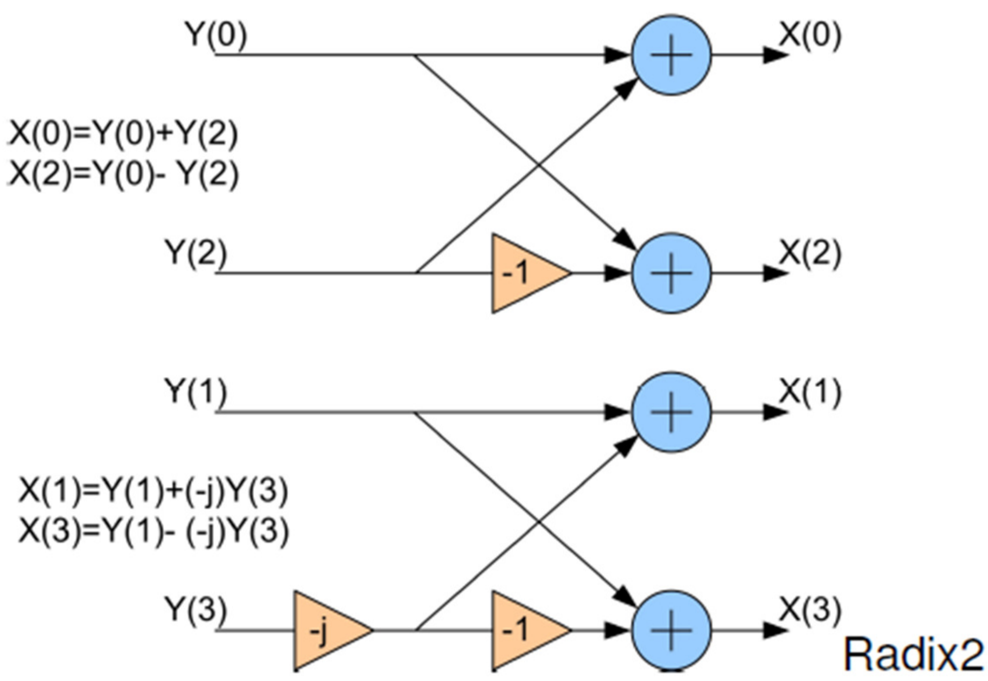
Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Representación gráfica**



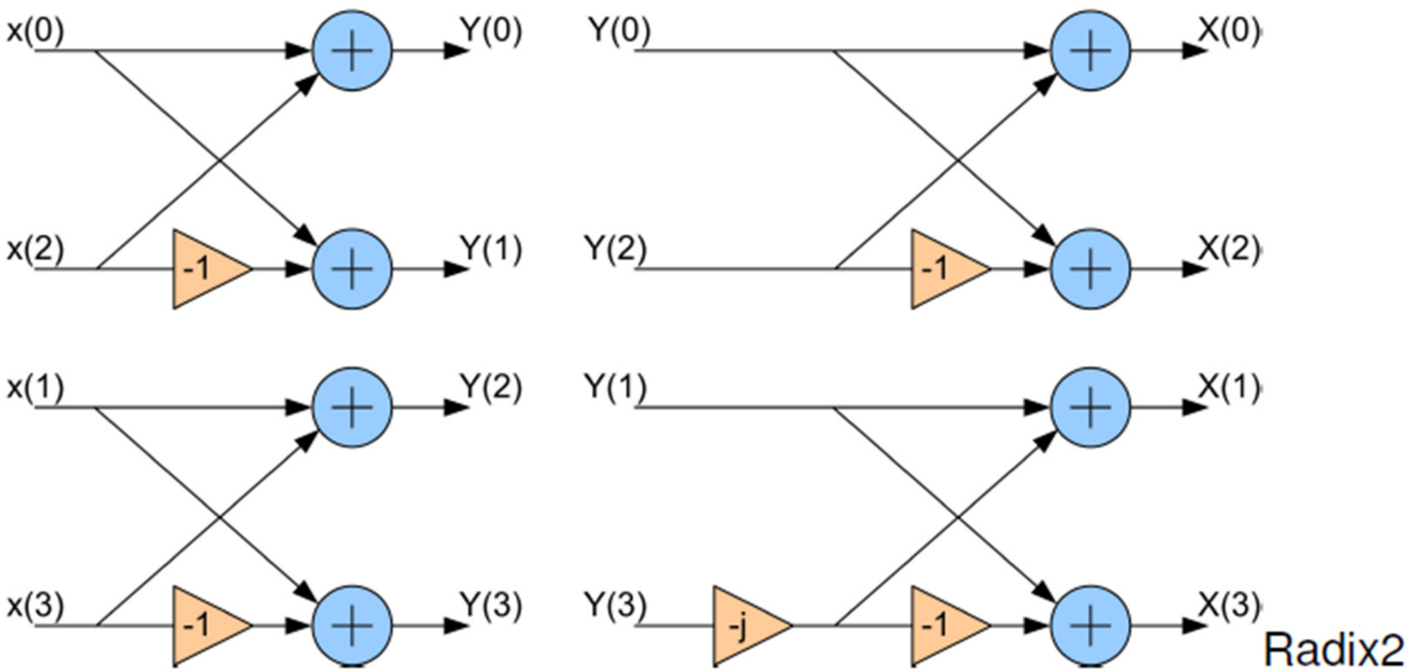
Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Representación gráfica**



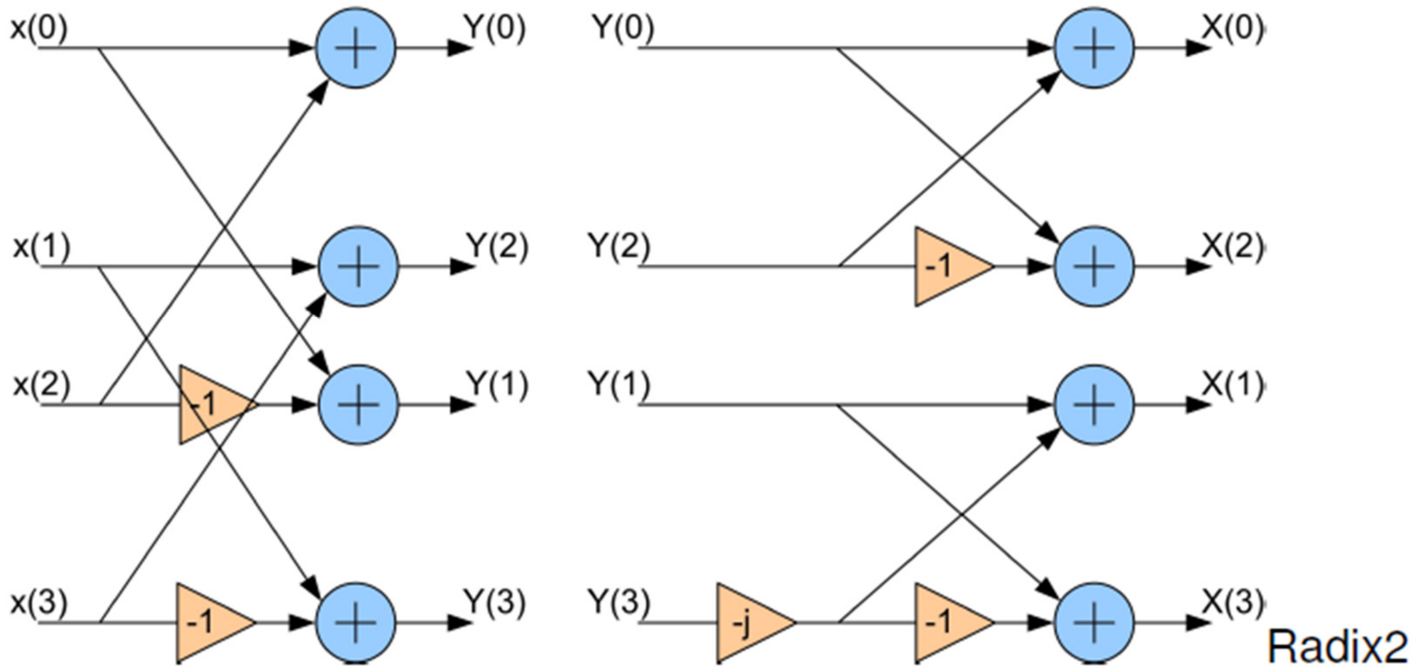
Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Representación gráfica**



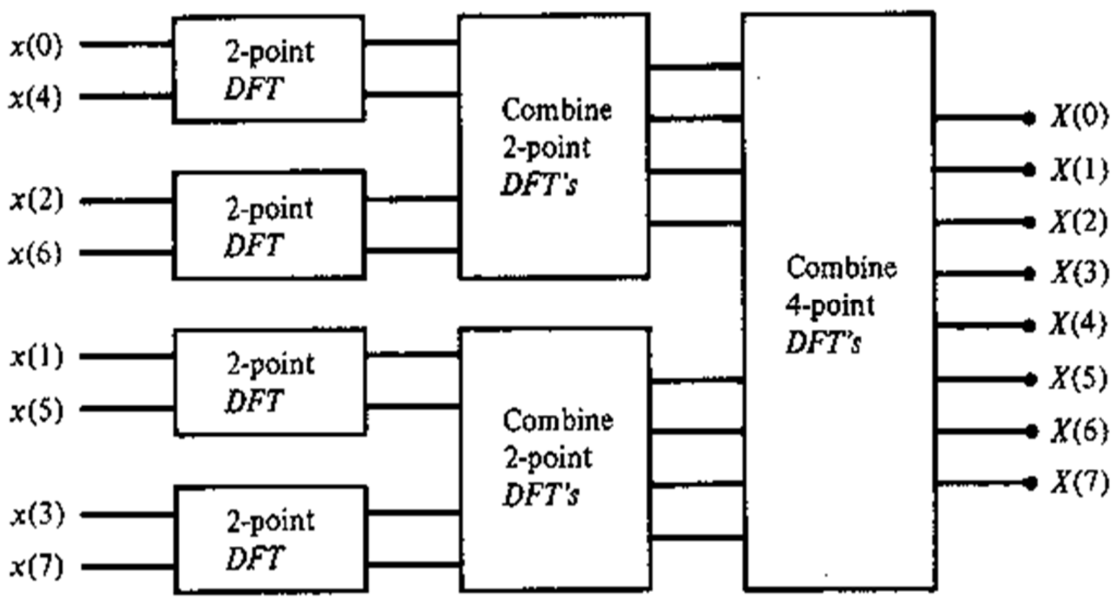
Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 4 puntos: Representación gráfica**



Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- **FFT de 8 puntos: Representación gráfica**



Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- FFT de 8 puntos: Representación gráfica