



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Controle Adaptativo Aplicado a um Veículo Aéreo Não Tripulado

Marina Torres da Silva

João Monlevade, MG
2017

Marina Torres da Silva

Controle Adaptativo Aplicado a um Veículo Aéreo Não Tripulado

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2017**

S586c

Silva, Marina Torres da.

Controle adaptativo aplicado a um veículo aéreo não tripulado [manuscrito]
/ Marina Torres da Silva. - 2018.

45f.: il.: grafs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.

Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia elétrica. 2. Máquinas elétricas. 3. Controladores PID. I.
Braga, Márcio Feliciano. II. Campos, Víctor Costa da Silva. III. Universidade
Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 621.313

Catálogo: ficha@sisbin.ufop.br



ATA DE DEFESA

Aos 17 dias do mês de julho de 2018, às 15 horas, no bloco H deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pela formanda Marina Torres da Silva, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Márcio Feliciano Braga, Víctor Costa da Silva Campos, Anny Verly e Rodrigo Augusto Ricco.

A candidata apresentou a monografia intitulada: Controle Adaptativo Aplicado a um Veículo Aéreo Não Tripulado. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela APROVAÇÃO da candidata, com a nota média 8,8, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pela formanda.

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
Márcio Feliciano Braga	9,0
Víctor Costa da Silva Campos	9,0
Anny Verly	8,5
Rodrigo Augusto Ricco	8,5
Média	8,8

João Monlevade, 17 de julho de 2018.

Márcio Feliciano Braga
Professor Orientador

Víctor Costa da Silva Campos
Professor Coorientador

Marina Torres da Silva
Aluna

Anny Verly
Professora Convidada

Rodrigo Augusto Ricco
Professor Convidado



TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Controle Adaptativo Aplicado a um Veículo Aéreo Não Tripulado" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 20 de julho de 2018.


Marina Torres da Silva

Resumo

Os Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) podem ser usados em muitas aplicações, como no mapeamento de regiões, na inspeção de linhas de transmissão e até no combate ao narcotráfico. Dada a sua importância e aplicabilidade, este trabalho propõe a utilização de técnicas de controle adaptativo aplicado a um VANT. Para isso, utiliza-se o modelo de um veículo do tipo quadrotor, que possui quatro hélices que geram as forças de sustentação do veículo. Portanto, é necessário um estudo sistemático da dinâmica de momentos e forças. Posteriormente, uma breve introdução sobre o surgimento do controle adaptativo, suas contribuições e classificações. Utiliza-se uma lei de controle adaptativa direta baseada em modelo de referência. Modela-se, então os controladores para as velocidades angulares e linear. Por fim são mostradas as simulações e os respectivos resultados.

Palavras-chave: VTOL, VANT, rotor, MRAC, STR, controle adaptativo, linearização.

Abstract

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) can be applied in many applications, such as regions mapping, transmission lines inspection and even combating drug trafficking. Given its importance and applicability, this work proposes the use of adaptive control techniques applied to a UAV. For this, the model of a quadrotor-type vehicle with four propellers that generate the forces of sustentation of the vehicle is employed. Therefore, it is necessary to establish a systematic study of the dynamics of momentum and forces involved. Subsequently, a brief introduction on the emergence of adaptive control, its contributions and classifications is presented. A direct adaptive control law based on a reference model is used so that it is possible to model the controllers for angular and linear velocities. Finally, the simulations and the respective results are shown.

Keywords: VTOL, UAV, rotor, MRAC, STR, adaptive control, linearization.

Lista de Figuras

Figura 1 – Exemplo de um drone a jato destinado a servir como alvo aéreo.	1
Figura 2 – Modelo de um VANT do tipo quadrotor.	2
Figura 3 – Modelo de um drone moderno.	2
Figura 4 – Exemplificação dos eixos de rotação considerados no desenvolvimento analítico do trabalho.	5
Figura 5 – Rotações sucessivas e os ângulos gerados, denominados ângulos de Euler.	6
Figura 6 – Aplicação para os ângulos de Euler em uma aeronave.	7
Figura 7 – Relaciona um ponto que se encontra na terra para um referencial em um corpo.	8
Figura 8 – Variações nas velocidades angulares do VANT e respectivas implicações.	12
Figura 9 – Sistema de controle adaptativo por escalonamento de ganho.	16
Figura 10 – Sistema de controle adaptativo por modelo de referência, MRAC.	18
Figura 11 – Exemplo de Sistema de Controle por Referência.	20
Figura 12 – Resposta do sistema de controle ilustrado na Figura 11 por meio do controle adaptativo MRAC.	21
Figura 13 – Evolução do erro e atualização do parâmetro K_c para o sistema da Figura 11.	22
Figura 14 – Sistema de controle adaptativo autoajustável-STR.	23
Figura 15 – Exemplo de um sistema de controle autoajustável-STR.	23
Figura 16 – Simulação para o exemplo em controle autoajustável.	25
Figura 17 – Evolução do erro e atualização de K_P para o exemplo da Figura 15.	25
Figura 18 – Sistema em série com um controlador proporcional em malha fechada.	26
Figura 19 – Malha para o Controlador Velocidade Linear.	28
Figura 20 – Planta do sistema de controle para o parâmetro d adaptado.	29
Figura 21 – Resposta do controlador w , com adaptação, para variação somente na entrada w	30
Figura 22 – Resposta do parâmetro d , com adaptação, para variação somente na entrada w	30
Figura 23 – Respostas dos controladores para entradas senoidais com adaptação do parâmetro d para: (a) estado w ; (b) estado p ; (c) estado q ; (d) estado r	31
Figura 24 – Resposta do parâmetro d , com adaptação, para uma entrada senoidal.	32
Figura 25 – Comportamento dos ganhos dos controladores para entradas senoidais com adaptação do parâmetro d : (a) estado w , (b) estado p , (c) estado q e (d) estado r	33

Figura 26 – Respostas dos controladores para diferentes entradas e adaptando o parâmetro d : (a) w para uma entrada senoidal, (b) p para uma entrada degrau, (c) q para uma entrada rampa e (d) r para uma entrada nula. . .	34
Figura 27 – Resposta do parâmetro d , com adaptação, para uma entrada senoidal. . .	35
Figura 28 – Comportamento dos ganhos dos controladores para diferentes entradas e adaptando o parâmetro d : (a) w para entrada senoidal, (b) p para entrada degrau, (c) q para entrada rampa e (d) r para entrada nula. . .	36
Figura 29 – Planta do sistema de controle para o parâmetro d não adaptado. . . .	37
Figura 30 – Respostas dos controladores para entradas senoidais sem adaptação do parâmetro d : (a) estado w , (b) estado p , (c) estado q e (d) estado r . . .	38
Figura 31 – Comportamento dos ganhos para entradas senoidais sem adaptação do parâmetro d : (a) estado w , (b) estado p , (c) estado q e (d) estado r . . .	39
Figura 32 – Resposta dos controladores para diferentes entradas sem adaptação do parâmetro d : (a) w para entrada senoidal, (b) p para entrada degrau, (c) q para entrada rampa e (d) r para entrada nula.	40
Figura 33 – Comportamento dos ganhos dos controladores para diferentes entradas sem adaptação do parâmetro d : (a) w para entrada senoidal, (b) p para entrada degrau, (c) q para entrada rampa e (d) r para entrada nula. . .	41

Lista Abreviações

VANT	Veículo Aéreo Não Tripulável
Rot	Matriz de Rotação
MRAC	Controle Adaptativo por Modelo de Referência
STR	Controle Autoajustável
MIT	Massachusetts Institute of Technology

Lista de símbolos

x, y, z	Posições lineares
p, q, r	Velocidades angulares
u, v, w	Velocidades lineares
ϕ	Ângulo de rolamento
θ	Ângulo de arfagem
ψ	Ângulo de guinada
m	Massa
$F(\cdot)$	Força
$I(\cdot)$	Inércia
$\tau(\cdot)$	Torque

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Estrutura do trabalho	2
2	MODELAGEM DO VANT	4
2.1	Descrição em Espaço de Estados	4
2.2	Rotação vetorial	5
2.2.1	Ângulos de Euler e produto matricial	5
2.3	Movimento de um corpo rígido	11
2.3.1	Modelo em espaço de estados	11
2.4	Forças e momentos	11
3	O CONTROLE ADAPTATIVO	15
3.1	Noção do Controle Adaptativo	15
3.2	A origem do Controle Adaptativo	15
3.3	Contribuições ao Controle Adaptativo	17
3.4	Controle Adaptativo em Malha Fechada	17
3.4.1	Métodos Diretos e Indiretos	17
3.5	Controle Adaptativo por Modelo de Referência — MRAC	18
3.5.1	Regra do MIT e Método do Gradiente	19
3.5.1.1	Exemplo de Sistema de Controle por Referência	19
3.5.2	Controle Autoajustável	22
3.5.2.1	Exemplo de Sistema de Controle autoajustável	23
3.6	Modelagem dos controladores	26
3.6.1	Controladores para Velocidades Angulares	26
3.6.2	Controlador para Velocidade Linear	27
4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	29
4.1	Com adaptação do parâmetro d	29
4.1.1	Simulação para variação somente na entrada w	29
4.1.2	Simulação para entradas senoidais	30
4.1.3	Simulação para tipos diferentes de entrada	31
4.2	Sem adaptação do parâmetro d	37
4.2.1	Simulação para entradas senoidais	37
4.2.2	Simulação para tipos diferentes de entrada	37

5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

1 Introdução

Embora o uso de drones pareça um assunto recente, a aplicação de veículos aéreos não tripulados remonta ao século XIX, quando os austríacos carregavam com explosivos balões sem tripulantes para atacar alvos em Veneza. Antes mesmo da Primeira Guerra, alguns engenheiros estudaram uma forma de levar um artefato explosivo pelo ar até um alvo distante dezenas de quilômetros, o que posteriormente levou à criação dos mísseis. Em 1915, o engenheiro Nikola Tesla descreveu em um estudo o potencial militar de uma frota de veículos de combate aéreos não tripulados (REVISTA248, 2017).

Apesar dos esforços, o primeiro drone moderno surgiu apenas em 1951, quando a Ryan Aeronautical Company (a mesma que construiu o NYP “Spirit of St. Louis”, que cruzou o Atlântico Norte em 1927) passou a desenvolver o *Firebee*, um drone a jato, Figura 1, destinado a servir como alvo aéreo (REVISTA248, 2017).

Figura 1 – Exemplo de um drone a jato destinado a servir como alvo aéreo.



Fonte: revista248 (2017)

O objetivo dos militares norte-americanos era preparar os pilotos de caça para a nova geração de aeronaves que surgia no início da década de 1950, frota esta que, devido ao alto desempenho e à inexistência de mísseis de elevada precisão, exigia grande perícia dos profissionais envolvidos.

Um tipo muito comum de VANT nos dias de hoje são os quadrotores. Um quadrotor é estruturalmente uma plataforma com quatro rotores dispostos em forma de crucifixo, como mostrado nas Figuras 2 e 3. A disposição correta dos motores elimina o efeito dos torques gerados por cada um dos rotores.

Os veículos aéreos não tripulados (VANT) podem carregar câmeras de alta resolução e os mais diversos tipos de sensores, permitindo diversas aplicações. As fotos tiradas por VANTs normalmente são de alta qualidade e excelente resolução. Nesse momento é possível pensar em várias aplicações como, por exemplo, mapeamento de grandes plantações, no

Figura 2 – Modelo de um VANT do tipo quadrotor.



Fonte: revista248 (2017)

âmbito militar para controle de fronteiras e combate ao narcotráfico. Além disso, também são utilizados por empresas para autopromoção.

Figura 3 – Modelo de um drone moderno.



Fonte: revista248 (2017)

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho de conclusão é modelar matematicamente um VANT do tipo quadrirotor e, posteriormente, aplicar técnicas de controle adaptativo, como MRAC, e simular para um modelo de referência (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2016).

1.2 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2, é discutida a teoria necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente, é apresentada uma caracterização de como descrever sistemas em espaço de estados. Em seguida, conceitos sobre rotação no espaço tridimensional e como utilizá-los

para relacionar velocidades (angulares e de translação) em diferentes referenciais são apresentados. No Capítulo 3, desenvolve-se a noção de controle adaptativo em malha fechada por métodos direto e indireto, por fim, o modelo de referência. O Capítulo 4 apresenta as simulações e discute os resultados obtidos. Finalmente, no Capítulo 5 são feitas as considerações finais, assim como a conclusão do trabalho.

2 Modelagem do VANT

Neste capítulo, é discutido o referencial teórico necessário para o desenvolvimento do trabalho. Primeiramente, apresenta-se uma caracterização de como descrever sistemas em espaço de estados. Em seguida, conceitos sobre rotação no espaço tridimensional e como utilizá-los para relacionar velocidades (angulares e de translação) em diferentes referenciais. Além disso, também definem-se conceitos que são levados em consideração para a modelagem e quais são desconsiderados, por não serem relevantes.

2.1 Descrição em Espaço de Estados

A análise vetorial é necessária para o tratamento das equações de movimento do VANT. Um bom material para aprofundar nas análises vetoriais é o livro Stevens, Lewis e Johnson (2016).

Na representação em espaço de estados, as equações da dinâmica são organizadas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Consideram-se n variáveis independentes, X_i (como componentes de posição, velocidade, etc.), e m entradas de controle, U_i (como aceleração, deflexão da superfície de controle, etc.). Além disso, considera-se que as funções f_i são não lineares, de forma a ter uma modelagem mais representativa do sistema. Considera-se que as variáveis X_i formem o menor conjunto de variáveis que, juntamente com as entradas U_i , descrevem completamente o comportamento do sistema, que matematicamente é descrito por

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n, U_1, U_2, \dots, U_m) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n, U_1, U_2, \dots, U_m) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= f_n(X_1, X_2, \dots, X_n, U_1, U_2, \dots, U_m)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Portanto, X_i , com $i = 1, \dots, n$, é um conjunto de variáveis de estado para o sistema.

O vetor X é uma matriz coluna $n \times 1$ das n variáveis de estado. O vetor U é uma matriz coluna $m \times 1$ das variáveis de controle e f é uma matriz coluna de funções não lineares. Mantendo U constante, as equações de estado não lineares (2.1), geralmente, têm um ou mais pontos de equilíbrio no espaço em que as derivadas desaparecem. Muitas vezes, para lidar com o sistema e aplicar ferramentas mais consolidadas, aproxima-se o comportamento do sistema não linear por um comportamento linear da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu,\tag{2.2}$$

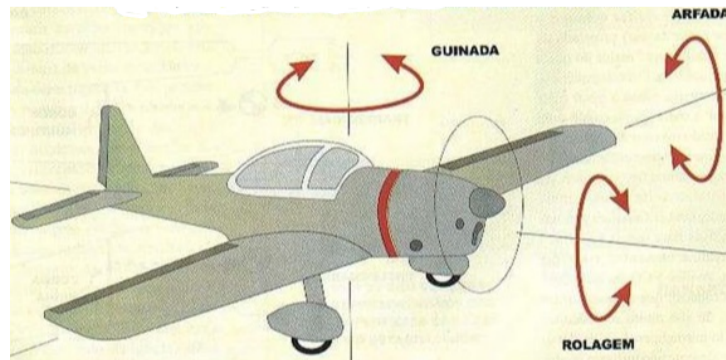
em torno de um ponto de equilíbrio e definem-se as matrizes A e B , cujo desenvolvimento pode ser encontrado em Stevens, Lewis e Johnson (2016).

A seguir, apresenta-se a modelagem em espaço de estados de um VANT do tipo quadrotor.

2.2 Rotação vetorial

Diversas variáveis precisam ser consideradas para a modelagem. Na Figura 4, o movimento em torno do eixo lateral recebe o nome de inclinação, tangagem ou arfagem, o movimento em torno do eixo longitudinal, chama-se rolamento e pode ser efetuado à esquerda ou à direita. Além disso, os movimentos de guinada são realizados em torno do eixo vertical que possibilita girar à direita, à esquerda e é responsável pela estabilidade direcional.

Figura 4 – Exemplificação dos eixos de rotação considerados no desenvolvimento analítico do trabalho.



Fonte: revista248 (2017)

Para modelar uma trajetória adequada para a aeronave, rotações vetoriais sucessivas são necessárias. As rotações geram pseudovetores e suas direções dependem da utilização da regra da mão direita. A regra da mão direita é a regra e recurso mnemônico geralmente utilizada quando se necessita diferenciar e/ou estabelecer como padrão uma entre duas orientações espaciais possíveis em um sistema físico pertinente. É particularmente útil para se estabelecer a “orientação do espaço” bem como a orientação do vetor resultante de um produto vetorial neste espaço. A regra é útil para estabelecer referenciais, os quais são explicados posteriormente.

2.2.1 Ângulos de Euler e produto matricial

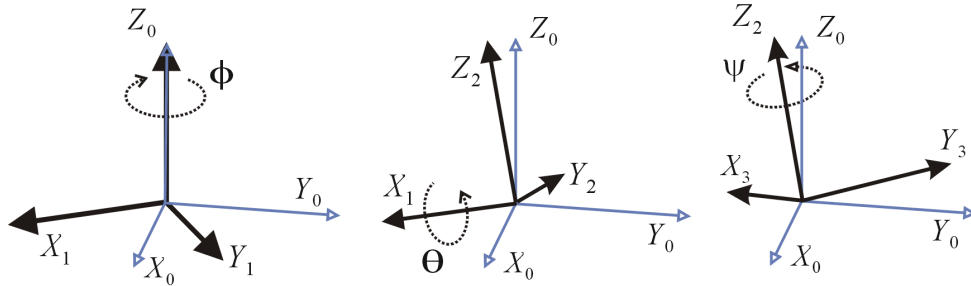
A orientação de um sistema de coordenadas cartesianas em relação a outro pode sempre ser descrita por três rotações sucessivas em torno dos vetores ortogonais da base. Os eixos e os ângulos de rotação, chamados de ângulos de Euler, são ilustrados na Figura 5. Os eixos e a ordem das rotações são escolhidos de várias maneiras em diferentes

campos da ciência. As propriedades básicas citadas a seguir são necessárias, porém não são desenvolvidas.

- As rotações sucessivas são descritas pelo produto das matrizes de rotação individuais.
- As matrizes de rotação são não comutativas.
- As matrizes de rotação são matrizes ortogonais.
- O determinante de uma matriz de rotação é unitário.

Na análise do movimento do VANT, utilizam-se dois referenciais, o referencial do corpo e o da terra. Isso se deve ao fato de que para análise de trajetórias é mais conveniente usar o referencial da terra, em contrapartida as forças são equacionadas no referencial do corpo (MARQUES, 2015).

Figura 5 – Rotações sucessivas e os ângulos gerados, denominados ângulos de Euler.



Fonte: Marques (2015)

Agora é possível relacionar os ângulos de rotação com os respectivos movimentos, sendo assim:

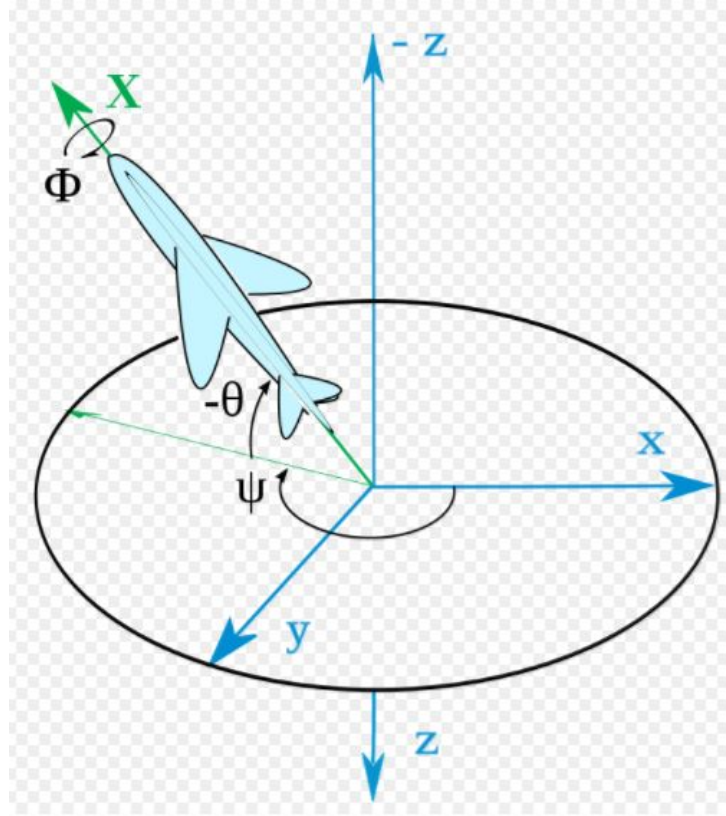
- A rotação em torno do eixo Z_0 gera o ângulo ϕ de rolamento.
- A rotação em torno do eixo X_1 gera o ângulo θ de arfagem.
- A rotação em torno do eixo Z_2 gera o ângulo ψ de guinada.

Os ângulos de Euler são gerados na seguinte sequência: ϕ , θ , ψ , conforme pode ser observado na Figura 6. Obtêm-se, então, as seguintes matrizes de rotação

$$\mathbf{Rot}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{Rot}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Figura 6 – Aplicação para os ângulos de Euler em uma aeronave.



Fonte: Marques (2015).

$$\mathbf{Rot}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

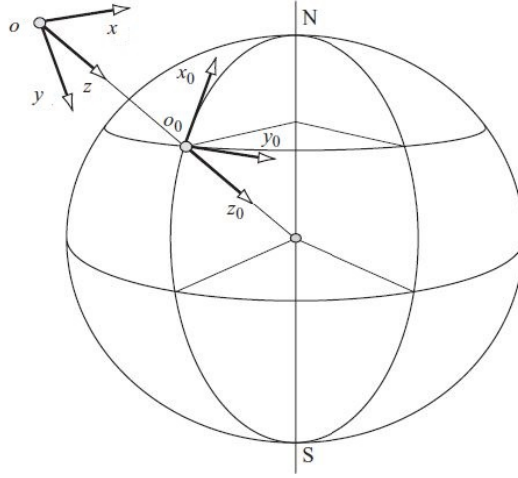
Agora é possível desenvolver uma matriz que define a rotação para qualquer eixo do sistema. De acordo com Stevens, Lewis e Johnson (2016), uma forma de se relacionar todas as referências é o produto de Rot_ϕ , Rot_θ e Rot_ψ , que é representada por $R_{\phi\theta\psi}$. A matriz resultante, $R_{\phi\theta\psi}$, é a responsável por relacionar um ponto que se encontra na terra para o referencial do corpo (normalmente no centro de gravidade) da aeronave, como destacado na Figura 7, a qual é dada por

$$\mathbf{R}_{\phi\theta\psi} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A inversa da matriz de rotação, $\mathbf{R}_{\phi\theta\psi}^{-1}$, é o recurso matemático para relacionar um ponto que se encontra no corpo para o referencial da terra, a qual pode ser escrita como

$$\mathbf{R}_{\phi\theta\psi}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Figura 7 – Relaciona um ponto que se encontra na terra para um referencial em um corpo.



Fonte: Marques (2015)

Segundo Pfeifer (2013), para se obter uma referência para as velocidades angulares p , q e r é necessário que um novo processo seja realizado. Assim,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = Rot_{\phi} Rot_{\theta} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Rot_{\phi} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{\phi\theta\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

que de forma compacta, pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Como deseja-se obter a modelagem na forma de equações de estado, as derivadas dos ângulos de Euler precisam ser isoladas. Assim, (2.9) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Após desenvolver a inversa da matriz, chega-se ao equacionamento que relaciona as velocidades angulares da aeronave, dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \sin\phi & \tan\theta \cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Para as velocidades lineares, u, v, w no referencial da aeronave com o referencial da terra, tem-se que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_{\phi\theta\psi} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Em seguida, isolando as derivadas de x, y e z , pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R_{\phi\theta\psi}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Uma força que atua nos VANTs é a de Coriolis. Assim, para o correto desenvolvimento matemático torna-se necessário entendê-la melhor. Sabe-se que a tendência de continuar o movimento é causada pela inércia. Um corpo em um referencial em rotação, portanto não inercial, está sujeito à ação de dois tipos de força de inércia, a Força Centrífuga que atua na direção do raio para fora da curva e outra força que tende a desviar lateralmente o movimento do corpo, essa última conhecida como Força de Coriolis. Tal força foi batizada em homenagem ao engenheiro e matemático francês, Gaspard Gustave de Coriolis, que descreveu as leis da mecânica para um sistema de referência em rotação (HALLIDAY; RESNICK, 2008).

Entretanto, como as velocidades lineares e angulares que são consideradas neste trabalho são relativamente pequenas, a Força de Coriolis pode ser ignorada e o movimento pode ser descrito apenas pela Segunda Lei de Newton. De acordo com Newton, para que se mude o estado de movimento de um objeto, é necessário exercer uma força sobre ele que depende da massa que ele possui (HALLIDAY; RESNICK, 2008), ou seja,

$$F = ma. \quad (2.14)$$

Levando em consideração as velocidades lineares e a segunda Lei de Newton, (2.14) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} F_{xc} \\ F_{yc} \\ F_{zc} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

em que F_{xc} , F_{yc} e F_{zc} são forças relacionadas aos eixos x, y e z , respectivamente, no referencial do corpo.

Como o objetivo é isolar as derivadas, então

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xc}/m \\ F_{yc}/m \\ F_{zc}/m \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

A Segunda Lei de Newton também é válida para movimentos de rotação. Neste caso, tem-se que $I\omega = \tau$, sendo τ o torque e I a inércia do corpo, em que

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Entretanto, como o corpo rígido considerado é simétrico em torno dos eixos de rotação, pode-se simplificar a matriz de momento de inércia para uma matriz diagonal, ou seja,

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Da Segunda Lei de Newton para rotação, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Na literatura é comum substituir variáveis de torque, τ , por L , M , N , portanto

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Por fim, é possível isolar o vetor de derivadas das velocidades angulares, o qual é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Finalmente, invertendo a matriz de inércia, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L/I_{xx} \\ M/I_{yy} \\ N/I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.3 Movimento de um corpo rígido

2.3.1 Modelo em espaço de estados

O modelo em espaço de estados utilizado é da forma

$$\dot{X} = f(X, U) \quad (2.25)$$

em que

$$\dot{X} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w} \ \dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}]^T. \quad (2.26)$$

Substituindo todas as variáveis, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\phi\theta\psi}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ p + q \tan \theta \sin \phi \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ q \sec \theta \sin \phi + r \sec \theta \cos \phi \\ F_{xc}/m \\ F_{yc}/m \\ F_{zc}/m \\ L/I_{xx} \\ M/I_{yy} \\ N/I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

A esse ponto é importante estabelecer que referência está sendo usada para cada variável:

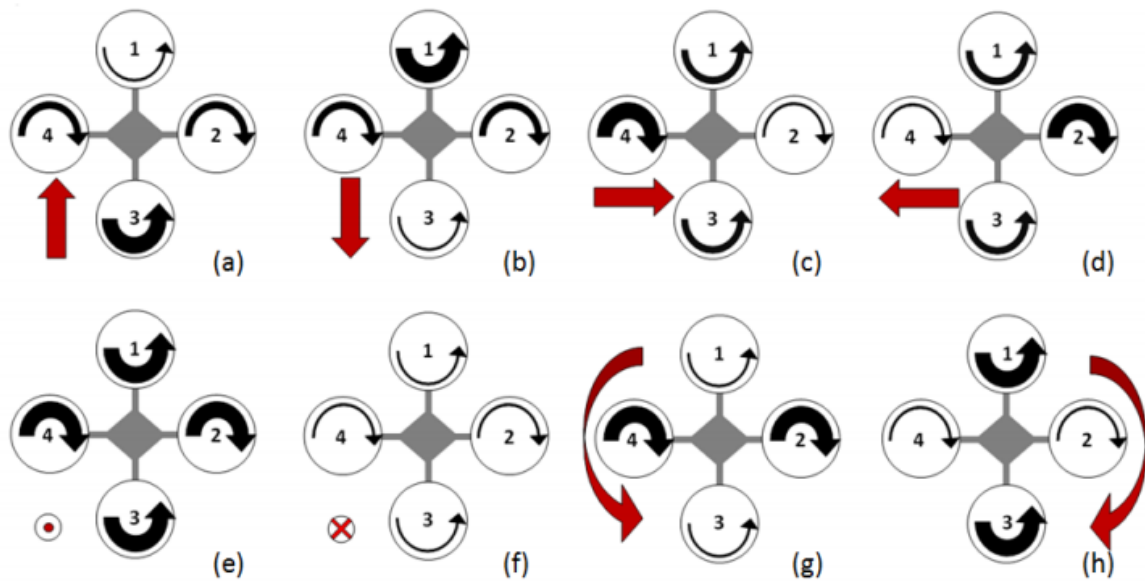
- Os ângulos ϕ , θ e ψ estão relacionados ao sistema Terra.
- As velocidades angulares p , q e r estão relacionadas ao sistema Corpo.
- Posições lineares x , y e z estão relacionadas ao sistema Terra.
- As velocidades lineares u , v e w estão relacionadas ao sistema Corpo.

2.4 Forças e momentos

Um quadrirotor é composto estruturalmente por quatro motores simetricamente distribuídos. Cada uma das hélices é responsável por uma parcela do empuxo necessário para sustentar o quadrirotor.

Duas das hélices giram no sentido horário, motores 2 e 4, e duas no sentido anti-horário, motores 1 e 3, como mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Variações nas velocidades angulares do VANT e respectivas implicações.



Fonte: Sá (2012)

A disposição correta dos motores elimina o efeito dos torques gerados por eles. Logo, hélices adjacentes devem girar em sentidos opostos. Para esta disposição e em uma mesma velocidade angular dos quatro motores, a plataforma permanece em equilíbrio de rotação.

Na Figura 8, as setas de cor preta indicam a velocidade e sentido de rotação das hélices, as setas em cor vermelha ilustram a movimentação da plataforma. De forma bastante intuitiva, a largura das setas indicam se os motores estão mais lentos ou não.

Cada representação é explicada a seguir:

- Em (a), as velocidades dos motores 2 e 4 são mantidas constantes, o motor 1 reduz sua velocidade e, por fim, o motor 3 é acelerado. Essa manobra faz com que o quadricóptero tenha uma arfagem positiva e se mova para a frente, como indica a seta vermelha.
- Em (b), as velocidades dos motores 2 e 4 são mantidas constantes, o motor 3 reduz sua velocidade e, por fim, o motor 1 é acelerado. Essa manobra faz com que o quadricóptero tenha uma arfagem negativa, e se mova para trás, como indica a seta vermelha.
- Em (c), as velocidades dos motores 1 e 3 são mantidas constantes, o motor 2 reduz sua velocidade e, por fim, o motor 4 é acelerado. Essa manobra faz com que o quadricóptero tenha um rolamento positivo, e se mova para a direita, como indica a seta vermelha.
- Em (d), as velocidades dos motores 1 e 3 são mantidas constantes, o motor 4 reduz sua velocidade e, por fim, o motor 2 é acelerado. Essa manobra faz com que o

quadrirotor tenha um rolamento negativo, e se mova para a esquerda, como indica a seta vermelha.

- Em (e), ocorre o aumento simultâneo das velocidades dos quatro motores, em mesmo módulo. Essa manobra faz com que o quadrirotor se mova verticalmente para cima.
- Em (f), ocorre a diminuição simultânea das velocidades dos quatro motores, em mesmo módulo. Essa manobra faz com que o quadrirotor se mova verticalmente para baixo.
- Em (g), as velocidades dos motores 2 e 4 são aumentadas simultaneamente em mesmo módulo. Essa manobra provoca uma movimentação em torno do eixo vertical no sentido anti-horário, guinada negativa.
- Em (h), as velocidades dos motores 1 e 3 são aumentadas simultaneamente em mesmo módulo. Essa manobra provoca uma movimentação em torno do eixo vertical no sentido horário, guinada positiva.

A partir dessas considerações é possível analisar o comportamento do VANT considerando as entradas do sistema F_{zc} , L , M e N , além de incluir as componentes peso. Para que as componentes do peso sejam referenciadas no corpo, a matriz de rotação é utilizada, resultando em

$$F = R_{\phi\theta\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Finalmente, (2.28) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} F_{xc} \\ F_{yc} \\ F_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \sin \phi \cos \theta \\ mg \cos \phi \cos \theta + F_z \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Substituindo (2.7) e (2.29) em (2.27), tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \theta \cos \psi + v(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + w(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi) \\ u \cos \theta \sin \psi + v(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ -u \sin \theta + v(\sin \phi \cos \theta) + w(\cos \phi \cos \theta) \\ p + q \tan \theta \sin \phi \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ q \sec \theta \sin \phi + r \sec \theta \cos \phi \\ -g \sin \theta \\ g \sin \phi \cos \theta \\ g \cos \phi \cos \theta + F_z/m \\ L/I_{xx} \\ M/I_{yy} \\ N/I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

3 O Controle Adaptativo

Definem-se, neste capítulo, noções importantes sobre o controle adaptativo e sua evolução. Uma introdução sobre métodos em malha fechada e modelos por referência, assim como exemplos com abordagem em controle adaptativo, são apresentados. Aborda-se, também, a estratégia de projeto utilizada para sintonizar os controladores da planta.

3.1 Noção do Controle Adaptativo

O termo adaptativo expressa a possibilidade de modificar comportamentos ou características de acordo com a situação ou o objetivo. Assim, pode-se definir Controle Adaptativo como o método utilizado pelos controladores capazes de modificar o seu comportamento em função das características aprendidas do processo que controlam.

Infelizmente, tal definição é ambígua, uma vez que, em qualquer controlador convencional realimentado, o controle exercido sobre o processo é função não só dos objetivos do próprio controle, mas também da resposta que o processo gera.

Na realidade e desde que o conceito de Controle Adaptativo surgiu, no início dos anos cinquenta, tem-se visto uma frequente utilização e aplicação deste termo, ainda que a discussão do seu significado esteja longe do final (SOUSA, 2013).

De qualquer forma, e sem entrar em maiores discussões filosóficas, a noção de Controle Adaptativo pode assentar na caracterização do que se entende por modificações no comportamento de um controlador.

Definem-se dois níveis de atuação do Controle Adaptativo, segundo escalas temporais distintas. A primeira escala temporal é mais rápida, na qual o controlador exerce o controle convencional por realimentação, de acordo com a sua função de transferência, supostamente constante. A segunda escala, por sua vez, é mais lenta, ao nível da qual o controlador atualiza a função de transferência do processo, adaptando-se ao mesmo.

Os controladores convencionais supostamente são invariantes no tempo, e é nesse ponto que o Controle Adaptativo se difere.

3.2 A origem do Controle Adaptativo

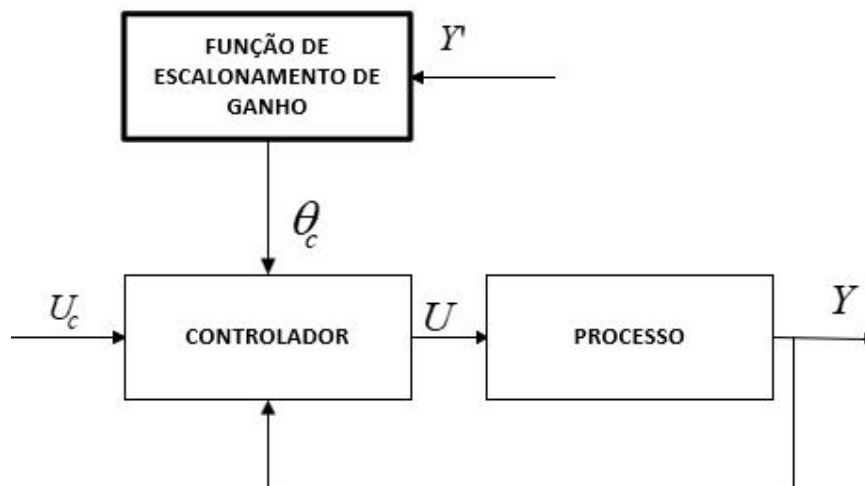
É usual apontar o início da década de cinquenta como a origem do interesse pelo que viria a se denominar Controle Adaptativo. Cita-se, como justificativa, a existência de uma patente de um controlador adaptativo, registrada em 1950, por *Caldwel* (SOUSA, 2013).

As primeiras referências surgiram, principalmente, na indústria aeronáutica, na qual os sistemas clássicos de controle para pilotagem automática não eram capazes de suprir a diversidade de condições de velocidade e altitude a que um avião estava sujeito. Ainda que um controlador clássico de ganho constante, linear e realimentado se comportasse bem para determinados parâmetros de operação, para qualquer variação, o sistema de pilotagem automática deixava de apresentar bons resultados.

Surgiu então o conceito de Escalonamento de Ganho, Figura 9, no qual o ganho do controlador é regulado automaticamente em função do valor de um conjunto de parâmetros ou variáveis auxiliares escolhidas, arbitrariamente. O controlador apresentava, para cada condição de operação, o melhor ganho possível.

Esse esquema de controle pode ser considerado um tipo de controle adaptativo, uma vez que o controlador adapta a sua função de controle às características do processo.

Figura 9 – Sistema de controle adaptativo por escalonamento de ganho.



Fonte: Adaptado de Sá (2012)

O Escalonamento de Ganho é a forma de controle adaptativo estruturalmente mais simples, permitindo uma resposta rápida às variações na dinâmica do processo. Contudo, o fato de ser internamente um modo de controle adaptativo em malha aberta, não lhe permite qualquer modificação da função de escalonamento em função das variações de desempenho apresentado pelo sistema em malha fechada.

Outra desvantagem é a necessidade de um estudo intenso da dinâmica do processo a controlar a fim de, não só determinar quais as melhores variáveis auxiliares a empregar, mas principalmente deduzir qual a função mais apropriada de escalonamento.

De qualquer forma, voltando à análise histórica do controle adaptativo, o interesse da indústria aeronáutica neste tipo de controle diminuiu bastante em virtude de uma ausência de resultados práticos significativos e um desastre fatal, ocorrido em um voo teste, concretizou a falta de interesse. Nos anos sessenta, o estudo teórico se intensificou.

3.3 Contribuições ao Controle Adaptativo

No campo da área de controle, surgiram bastantes contribuições das quais se destacam os resultados sobre Estabilidade de *Lyapunov*, que se assumiram como ferramenta base no desenvolvimento e na garantia da convergência e estabilidade nos sistemas de controle adaptativo. A teoria de Espaços de Estados facilitou a análise dos sistemas dinâmicos, com maior facilidade na manipulação matemática, para além dos avanços na área de Controle Estocástico.

Ainda na década de setenta, a atividade científica na área de controle adaptativo desenvolveu-se consideravelmente. Vários trabalhos teóricos demonstravam a estabilidade de diversos métodos de controle adaptativo. A título de exemplo *Narendra, Lin e Valavanis* e de *Morse* demonstraram a estabilidade para sistemas de controle adaptativo por modelo de referência, MRAC. Outro exemplo é *Astrom e Wittenmark*, pelo pioneirismo na aplicação prática do controle adaptativo em um processo de dinâmica desconhecida (AUSTIN, 2011; VALAVANIS, 2008; STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2016).

3.4 Controle Adaptativo em Malha Fechada

Todas as metodologias de controle adaptativo em malha fechada giram seu funcionamento em torno de uma estimação, em tempo real, de determinados parâmetros do sistema, operação que é denominada Identificação.

3.4.1 Métodos Diretos e Indiretos

O controle adaptativo dividiu-se originalmente em Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) e Controle Autoajustável (STR). O MRAC foi desenvolvido para sistemas de controle contínuos no tempo, o STR volta-se mais ao controle de sistemas discretos.

Entretanto, surgiu uma classificação alternativa para abordagens representativas do controle adaptativo em malha fechada, a divisão ficou em métodos indiretos e métodos diretos.

Nos métodos indiretos, a identificação estima os parâmetros do processo, ou seja, tem por objetivo identificar, em tempo real, a dinâmica do processo a controlar. Só então é que, com base na identificação, os parâmetros do controlador são atualizados, de acordo com um determinado método escolhido. A cada período de amostragem os processos de identificação e atualização são repetidos.

Por sua vez, os métodos diretos atualizam diretamente os parâmetros do controlador. Assim, não é feita qualquer identificação propriamente dita dos parâmetros do processo.

Historicamente, classificava-se o MRAC como um método direto e o STR como um método indireto (SOUSA, 2013).

Contudo, com o passar do tempo, vários autores começaram a evitar essa denominação, por perceberem que na realidade tanto o MRAC como o STR podiam assumir implementações diretas ou indiretas, dependendo do sistema e condições. Além disso, os objetivos de controle de ambas as técnicas eram semelhantes.

Por essas razões, a classificação entre métodos direto e indireto, a qual permite agrupar os algoritmos de controle adaptativo em malha fechada em dois conjuntos com estruturas e propriedades de estabilidade e convergência distintas, é apresentada neste trabalho.

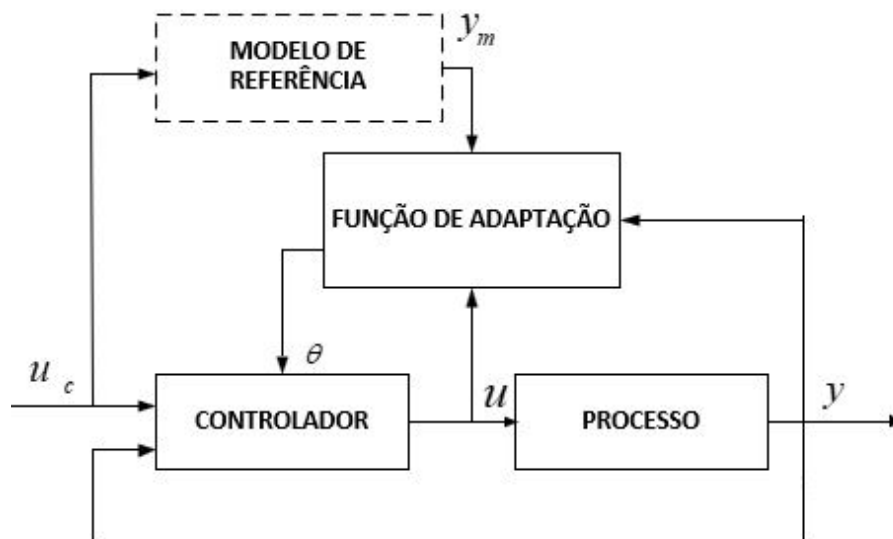
3.5 Controle Adaptativo por Modelo de Referência — MRAC

O MRAC é uma metodologia do controle adaptativo em malha fechada, em que o desempenho que se pretende para o sistema realimentado, encontra-se pré-especificado por meio de um modelo denominado Modelo de Referência. O controle adaptativo tenta aproximar a resposta real do sistema à obtida pelo sistema de referência, ambos sujeitos à mesma variável de entrada (ZUBEM, 2010).

O desafio do método consiste na determinação de um mecanismo de adaptação que assegure o encontro entre a resposta real e a desejada e, além disso, garanta estabilidade ao sistema.

No MRAC, o erro entre a saída do modelo e a saída da planta é medido e, por meio de métodos de estimação de parâmetros, os parâmetros do controlador são modificados a fim de que o sistema comporte-se como o modelo de referência. Na Figura 10, pode-se observar o modelo de referência, a função de adaptação, o controlador e o processo propriamente dito, para melhor entendimento do método.

Figura 10 – Sistema de controle adaptativo por modelo de referência, MRAC.



Fonte: Adaptado de Sousa (2013)

Um dos métodos mais utilizados para a atualização dos parâmetros do controlador são a Regra do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) e o Método do Gradiente.

3.5.1 Regra do MIT e Método do Gradiente

Apresentada por *Whitaker* em 1958 no *Massachusetts Institute of Technology*, de onde derivou-se o nome (SOUSA, 2013), a regra do MIT consiste na substituição dos parâmetros desconhecidos pelas suas estimativas para cada instante de tempo t .

Considerando-se um sistema em malha fechada em que o controlador tem um parâmetro ajustável θ , a resposta em malha fechada é determinada pelo modelo, cuja saída é y_m . Seja e , representado como

$$e = y - y_m, \quad (3.1)$$

o erro entre as saídas do sistema em malha fechada, y , e do modelo, y_m . Uma possibilidade é ajustar um conjunto de parâmetros de maneira que a função-custo seja minimizada, que pode ser representada como

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2. \quad (3.2)$$

Para tornar J pequeno, é razoável alterar os parâmetros na direção do gradiente negativo de J , como, por exemplo,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (3.3)$$

o que leva ao outro nome pelo qual a regra é conhecida, Método do Gradiente.

3.5.1.1 Exemplo de Sistema de Controle por Referência

A seguir analisa-se um exemplo retirado de Sousa (2013), que emprega a Regra do MIT como algoritmo de ajuste de controle. Para tal, considere o sistema de controle esquematizado na Figura 11.

O processo possui uma dinâmica representada por $G_p(s)$, cuja constante de tempo $\frac{1}{a}$ é conhecida, e o ganho $K_p > 0$ é desconhecido e pode ser não constante. O objetivo do controle é obter uma resposta na forma,

$$y(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{b}} y_{ref}(s) = G_m(s) y_{ref}(s). \quad (3.4)$$

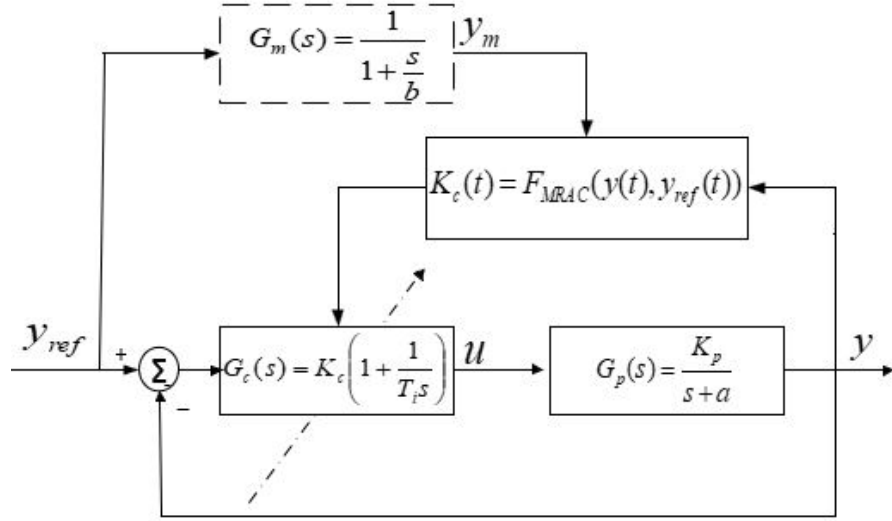
Adota-se um controle proporcional e integral,

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (3.5)$$

que é definido pelos seguintes parâmetros

$$T_i = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad K_c = \frac{b}{K_p}. \quad (3.6)$$

Figura 11 – Exemplo de Sistema de Controle por Referência.



Fonte: Adaptado de Sousa (2013)

Considera-se K_p desconhecido e segundo o algoritmo de atualização do gradiente, o vetor θ_c e a função de custo $J(\theta_c)$ reduzem-se a

$$\theta_c = K_c \in R \quad (3.7)$$

$$J(\theta_c) = J(K_c) = \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(y - y_m)^2. \quad (3.8)$$

Por outro lado, a resposta do sistema em malha fechada é

$$y(s) = \frac{K_c K_p}{s + K_c K_p} y_{ref}(s). \quad (3.9)$$

De (3.3), tem-se que

$$\frac{d\theta_c}{dt} = \frac{dK_c}{dt} = -g \frac{\partial y}{\partial K_c} e = -g f(t) e(t), \quad (3.10)$$

em que a taxa de adaptação é dada por g .

Assumindo que L representa o operador da transformada de Laplace, $f(t)$ pode ser escrita como

$$f(t) = \frac{\partial y}{\partial K_c}(t) = \frac{\partial}{\partial K_c} L^{-1} \left(\frac{K_c K_p}{s + K_c K_p} \right) y_{ref}(s) = L^{-1} \left(\frac{K_p s}{s + K_c K_p} \right) y_{ref}(s) \quad (3.11)$$

por fim,

$$f(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{K_c} \frac{s}{K_c s + K_c K_p} y(s) \right) \quad (3.12)$$

que não pode ser utilizada, uma vez que K_p é desconhecido. A aplicação da regra do MIT baseia-se em uma aproximação. Espera-se o melhor resultado possível, dessa forma, $K_c K_p = b$, veja (3.6). Com a devida formulação, obtém-se

$$F(s) = L(f(t)) \approx \frac{1}{K_c} \frac{s}{s+b} y(s). \quad (3.13)$$

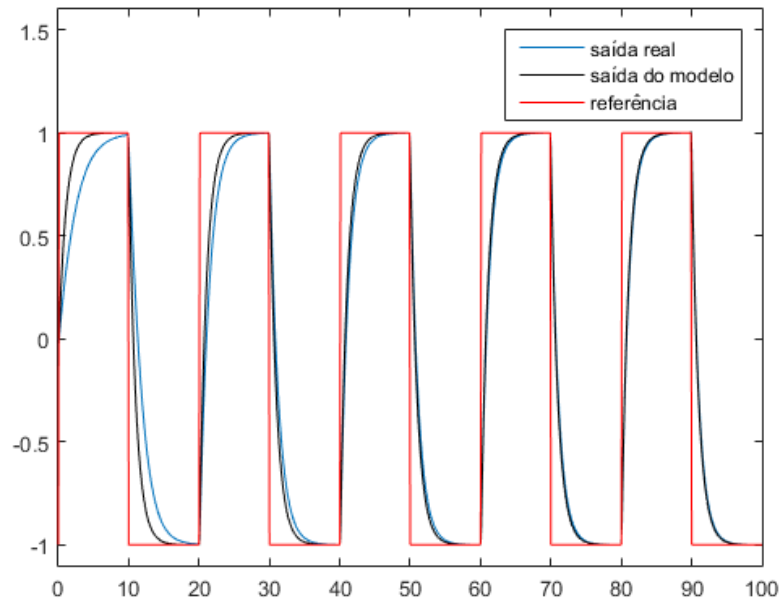
Após tal aproximação chega-se em

$$\frac{dK_c}{dt} = F_{MRAC}(y(t), y_m(t)) = -g f(t) e(t) = -\frac{g}{K_c} L^{-1} \left(\frac{s}{s+b} y(s) \right) [y(t) - y_m(t)]. \quad (3.14)$$

Observa-se que a única variável desconhecida trata-se agora de g , ganho adaptativo. Esse valor é obtido, geralmente, experimentalmente de forma a que o sistema mantenha-se estável e, além disso, garanta a convergência.

O próximo passo é a simulação do sistema de controle com a função de adaptação descrita em (3.14), escolhendo $K_p = 2$, $a = 0.1$ e $b = 1$. Quanto aos parâmetros do controlador, T_i é calculado como $T_i = a^{-1} = 10$ e K_p é parte do algoritmo de adaptação. Utiliza-se ainda um ganho de adaptação $g = 0.05$.

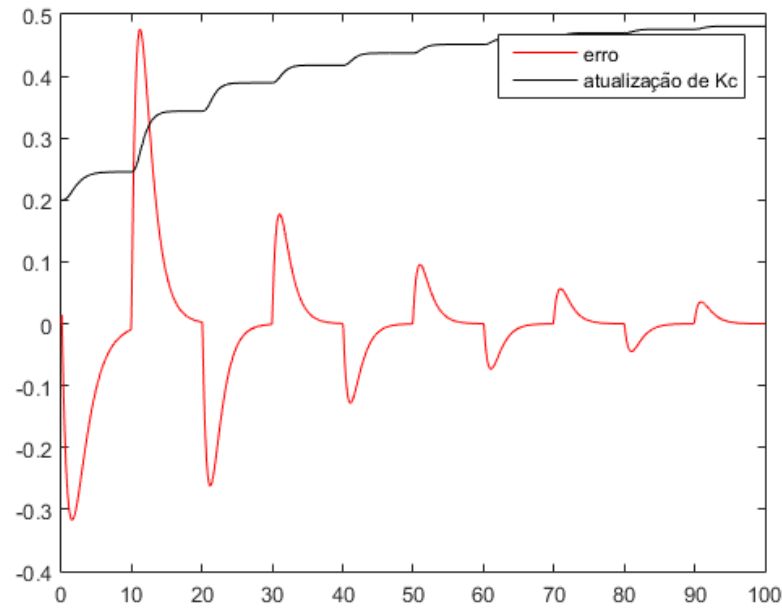
Figura 12 – Resposta do sistema de controle ilustrado na Figura 11 por meio do controle adaptativo MRAC.



Fonte: Autora

O resultado da simulação encontra-se na Figura 12. Como se pode observar, aplicou-se uma onda quadrada de amplitude em módulo de 1 e período de 20 segundos como sinal de entrada.

A resposta em malha fechada do sistema, $y(t)$, se aproxima da resposta desejada, $y_m(t)$, com o passar do tempo. Tal comportamento se torna claro ao observar o gráfico, e

Figura 13 – Evolução do erro e atualização do parâmetro K_c para o sistema da Figura 11.

Fonte: Autora

em particular da evolução do erro, Figura 13, que com o passar do tempo o erro tende a zero.

Observa-se na evolução do parâmetro em adaptação, K_c , que ele tende a estabilizar em volta do seu valor ideal, $K_c = b/K_p = 0.5$, tal como seria de esperar, dado que o sistema em causa efetivamente converge.

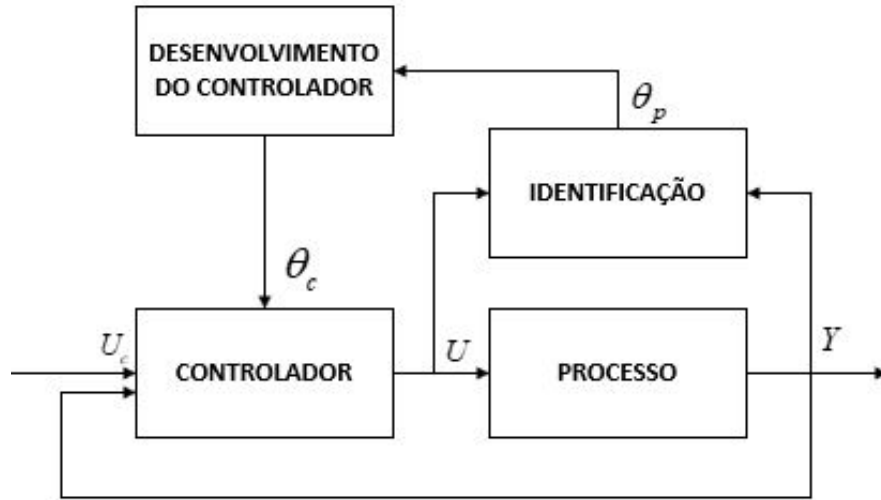
3.5.2 Controle Autoajustável

Ao contrário do MRAC tradicional, o controle autoajustável baseava-se em um método de dois tempos, onde os parâmetros do processo são constantemente atualizados, com base em técnicas de identificação em tempo real, sendo as suas estimativas utilizadas no desenvolvimento do controle.

O STR é estruturalmente constituído por duas malhas. A malha denominada interior assegura a realimentação convencional do sistema, que engloba a planta e o controlador. A malha externa ou malha de adaptação é responsável pelo processo de adaptação de controle.

O desenvolvimento de um sistema de controle envolve muitas tarefas, como modelagem de uma lei de controle, implementação e validação. O regulador autoajustável (STR) tenta automatizar várias dessas tarefas. Isto é ilustrado na Figura 14, que mostra um diagrama de blocos de um processo com um regulador autoajustável.

Figura 14 – Sistema de controle adaptativo autoajustável-STR.

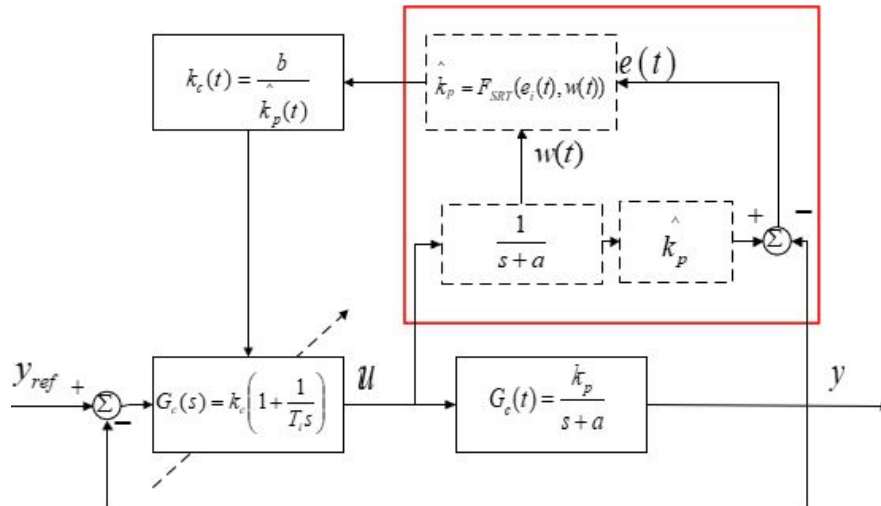


Fonte: Autora

3.5.2.1 Exemplo de Sistema de Controle autoajustável

A seguir analisa-se um exemplo retirado de Sousa (2013), que propõe uma solução de controle STR, para o processo considerado objeto de estudo. Considere o sistema de controle esquematizado na Figura 15.

Figura 15 – Exemplo de um sistema de controle autoajustável-STR.



Fonte: Adaptado de Sousa (2013)

O processo possui uma dinâmica representada por G_p , cuja constante de tempo $1/a$ é conhecida, e o ganho $k_p > 0$ é não só desconhecido, como também não é necessariamente constante. O objetivo do controle, tal como no exemplo anterior, é obter uma resposta em

malha fechada na forma,

$$y(s) = \frac{1}{1 + \frac{b}{s}} y_{ref}(s). \quad (3.15)$$

O controlador STR deste exemplo possui uma estrutura de adaptação naturalmente constituída por um bloco de identificação e outro de desenvolvimento do controlador.

Adota-se, para mais fácil comparação com os exemplos anteriores, um controle PI, cujo projeto dos seus parâmetros é muito simples: T_i tem por função cancelar o polo da planta, enquanto que k_c é determinado de modo a se obter uma resposta em malha fechada idêntica à pretendida em (3.15). Desta forma,

$$k_c = b/\hat{k} \quad \text{e} \quad T_i = 1/a \quad (3.16)$$

em que \hat{k} representa a estimativa do ganho real do processo, k_p , obtida pelo bloco de identificação.

Cabe então ao bloco de identificação a estimação de k_p . Existe uma variedade de métodos de identificação em tempo real, contínuos ou discretos. Neste exemplo adotou-se um algoritmo contínuo simples.

Considera-se a variável auxiliar do bloco de identificação, $w(t)$,

$$w(s) = \frac{1}{s + a} u(s) \quad (3.17)$$

considera-se ainda o erro à saída, resultante da estimação, $e_i(t)$,

$$e_i(t) = \hat{k}_p(t)w(t) - y(t). \quad (3.18)$$

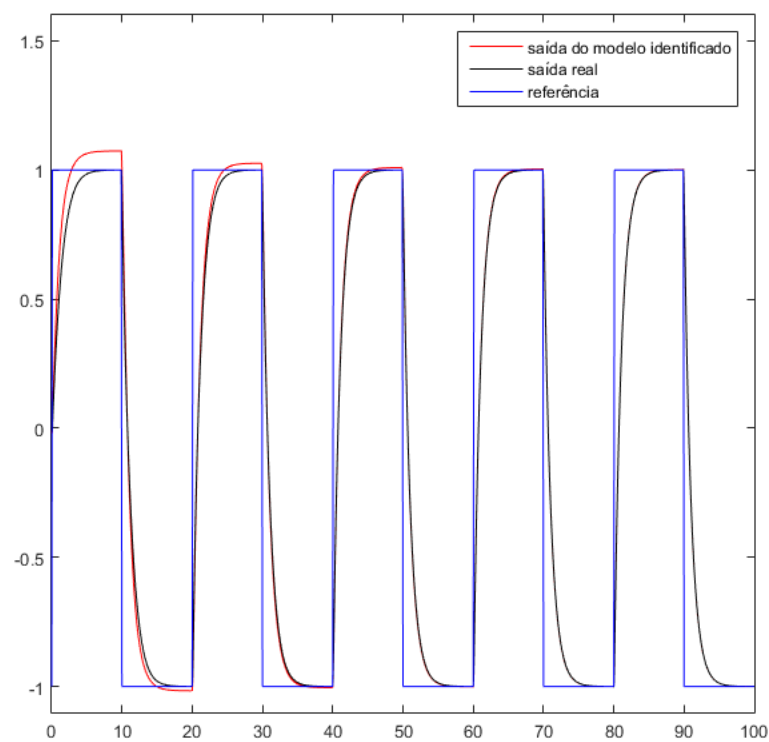
O algoritmo de identificação proposto adota a seguinte atualização da estimativa de k_p ,

$$\frac{d}{dt} \hat{k}_p(t) = F_{STR}(e_i(t), w(t)) = -g e_i(t) w(t), \quad (3.19)$$

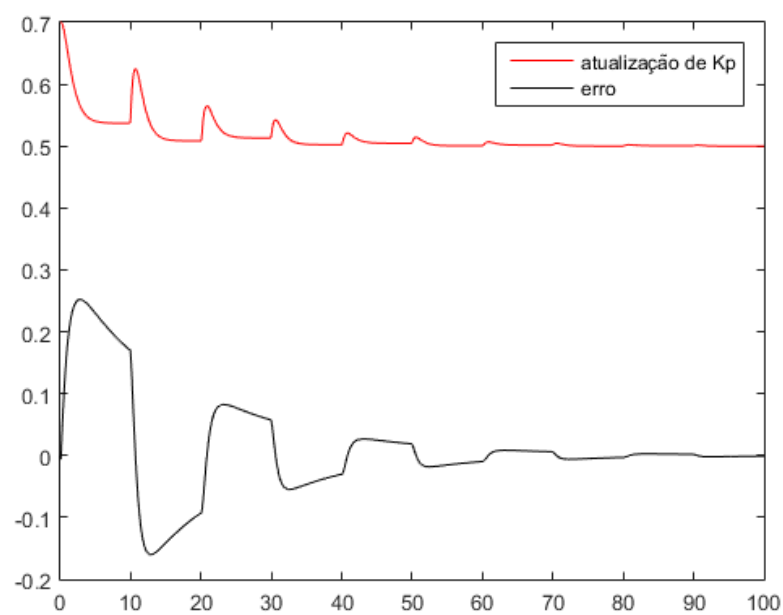
para $g > 0$, cuja implementação é imediata, uma vez que $e_i(t)$ e $w(t)$ são conhecidos, arbitra-se o valor da constante g . O bloco de estimação pode então ser representado como a Figura 15 descreve.

Se o algoritmo de estimação convergir, o valor estimado converge para o valor real, isto é, $\hat{k}_p \rightarrow k_p$, quando $t \rightarrow \infty$. Nesta situação, o controle será eficaz, dado que se baseia numa estimativa consistente. Observe na Figura 17 que, o parâmetro K_c tende ao valor de 0.5, desejado. O erro por sua vez, tende a zero.

Figura 16 – Simulação para o exemplo em controle autoajustável.



Fonte: Autora

Figura 17 – Evolução do erro e atualização de K_P para o exemplo da Figura 15.

Fonte: Autora

3.6 Modelagem dos controladores

Apresenta-se nessa Seção os projetos dos controladores utilizados. Tendo em vista que a modelagem da planta está disponível optou-se pelo método MRAC.

3.6.1 Controladores para Velocidades Angulares

A análise matemática segue a linha de raciocínio abordada nos exemplos da seção anterior. Assim sendo, supondo um controlador proporcional, K e um modelo de referência do tipo

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{b}} \quad (3.20)$$

e a equação

$$\dot{\alpha} = \frac{\beta}{I_\alpha}, \quad (3.21)$$

onde $\dot{\alpha} = \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ e $\beta = L, M, N$ da matriz (2.30).

Aplicando-se transformada de Laplace na equação (3.21) tem-se

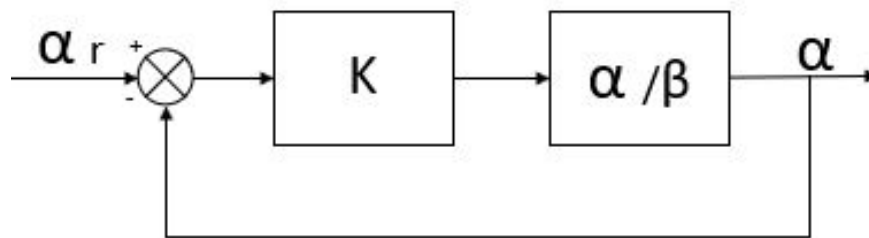
$$s\alpha = \frac{\beta}{I_\alpha} \quad (3.22)$$

então,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{I_\alpha} \frac{1}{s}. \quad (3.23)$$

Na Figura 18, mostra-se um controlador de ganho K em série com a função de transferência do sistema, desenvolvida em (3.23), em que α_r é a entrada de referência desejada.

Figura 18 – Sistema em série com um controlador proporcional em malha fechada.



Fonte: Autora

A função de transferência da malha mostrada na Figura 18 é dada por

$$\frac{\alpha}{\alpha_r} = \frac{\frac{K}{I_\alpha} \frac{1}{s}}{1 + \frac{K}{I_\alpha} \frac{1}{s}} = \frac{\frac{K}{I_\alpha}}{s + \frac{K}{I_\alpha}} = \frac{1}{\frac{I_\alpha s}{K} + 1}. \quad (3.24)$$

Como deseja-se que (3.24) seja equivalente à (3.20), idealmente tem-se a relação

$$\frac{I_\alpha}{K} = \frac{1}{b}. \quad (3.25)$$

Escolhendo-se a função de custo sugerida em Sousa (2013),

$$J = \frac{1}{2}e^2 \quad (3.26)$$

em que

$$e = y - y_m. \quad (3.27)$$

Com o auxílio de

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}, \quad (3.28)$$

tem-se

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e_m^2 = \frac{1}{2}(y - y_m)^2. \quad (3.29)$$

Adota-se $e = \alpha - \alpha_m$, além disso,

$$\alpha = \frac{1}{\frac{I_\alpha s}{K} + 1} \alpha_r. \quad (3.30)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace a (3.30)

$$\alpha = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\frac{I_\alpha s}{K} + 1} \alpha_r \right\}. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.3) e relacionando à variável α_r , tem-se

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma(\alpha - \alpha_m)L^{-1} \left\{ \frac{I_\alpha}{K} \frac{s}{I_\alpha + K} \alpha \right\}. \quad (3.32)$$

Sabe-se que no ponto ótimo $\frac{I_\alpha}{K} = \frac{1}{b}$ e substituindo $\theta = K$, logo aproxima-se o resultado da seguinte forma:

$$\frac{dK}{dt} \approx -\gamma(\alpha - \alpha_m)L^{-1} \left\{ \frac{1}{b} \frac{1}{K} \frac{s}{\frac{s}{b} + 1} \alpha \right\}. \quad (3.33)$$

Note que, devido à forma das equações das três velocidades angulares, p , q e r , esse projeto de controlador pode ser aplicado em cada uma dessas malhas.

3.6.2 Controlador para Velocidade Linear

Utilizando o controlador (3.20) e assumindo que $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ são iguais a zero, então ϕ e θ são constantes. Assim, de acordo com (2.30), tem-se

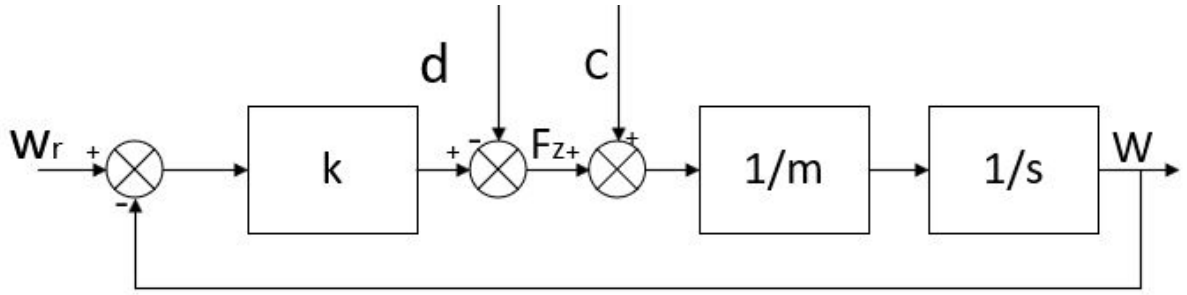
$$\dot{w} = g \cos \phi \cos \theta + \frac{F_z}{m}. \quad (3.34)$$

Como $g \cos \phi \cos \theta$ é uma constante, então (3.34) pode ser reescrita como

$$\dot{w} = \frac{c + F_z}{m}, \quad (3.35)$$

com $c = mg \cos \phi \cos \theta$. Considerando um controlador proporcional (3.20) e uma realimentação unitária, o sistema de (3.35) pode ser representado pela Figura 19 na qual apresenta-se um parâmetro auxiliar d responsável por eliminar o efeito de c , que pode ser visto como uma perturbação no sistema.

Figura 19 – Malha para o Controlador Velocidade Linear.



Fonte: Autora

Idealmente, deseja-se que

$$d = c \quad \text{e} \quad k = mb. \quad (3.36)$$

Assim, desenvolvendo analiticamente a malha fechada da Figura 19, obtém-se

$$w = \frac{c - d}{ms + k} + \frac{kw_r}{ms + k}. \quad (3.37)$$

Seguindo passos similares aos do controlador desenvolvido na Subseção 3.6.1, a seguinte lei de adaptação é obtida

$$\dot{d} = \frac{\gamma_d}{k}(w - w_m) \left(1 - e^{-kt/m}\right) \quad (3.38)$$

Após $t \gg \frac{4m}{k} \approx 4\tau$, (3.38) reduz-se para

$$\dot{d} \approx \frac{\gamma_d}{k}(w - w_m). \quad (3.39)$$

Para o parâmetro k do controlador, tem-se

$$\dot{k} = -\gamma(w - w_m) \left(\frac{w}{b} - w_f\right) \quad \text{com} \quad \dot{w}_f = -bw_f + \frac{b}{k}w. \quad (3.40)$$

Com a modelagem matemática dos controladores, é possível executar a simulação do processo. A implementação é constituída por quatro malhas de controle w, p, q e r , cujos resultados são apresentados no próximo capítulo.

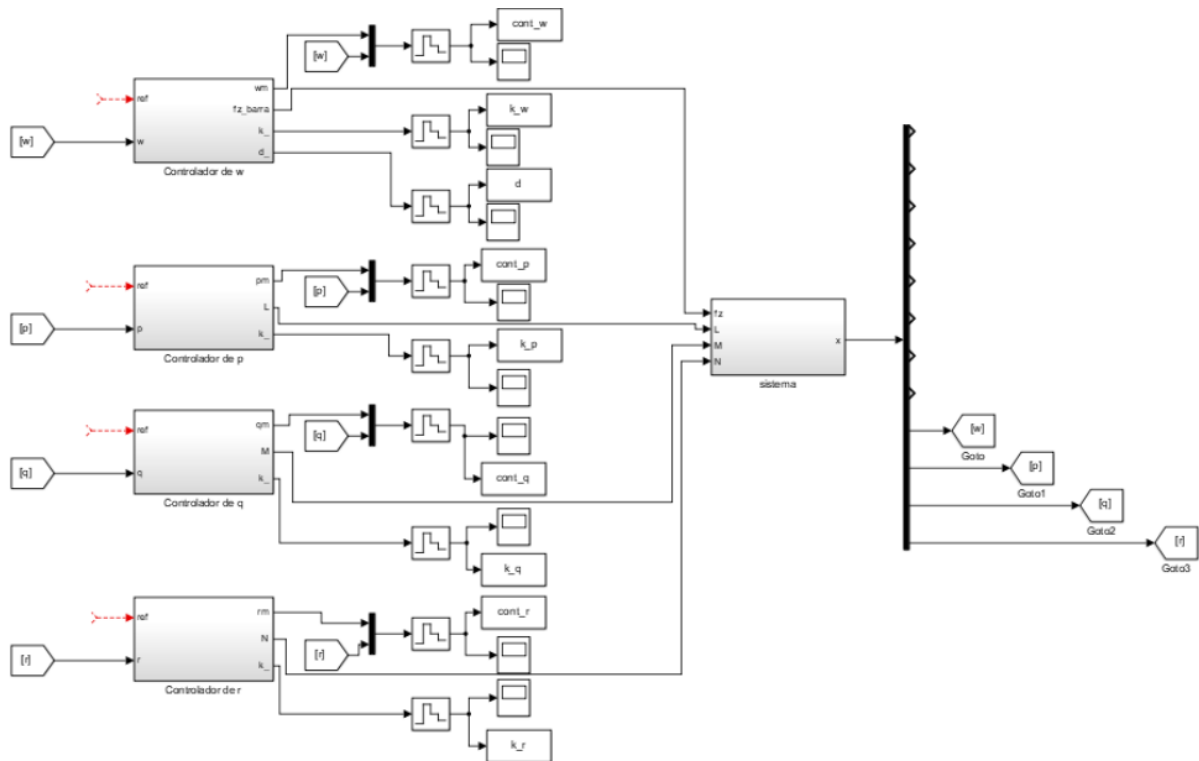
4 Simulações e Resultados

Neste capítulo são apresentadas os resultados obtidos pelos controladores adaptativos desenvolvidos no Capítulo 3. Executam-se as simulações no *Software MatLab* com o recurso de *Simulink*. As simulações foram divididas conforme a adaptação do parâmetro d e as entradas de referência.

4.1 Com adaptação do parâmetro d

A modelagem dos controladores apresentada na Seção 3.6 foi implementada com o auxílio do *Simulink*, cujo resultado pode ser observado na Figura 20. Como discutido na Seção 3.6.2, observe que o parâmetro d afeta, somente, o controlador w .

Figura 20 – Planta do sistema de controle para o parâmetro d adaptado.

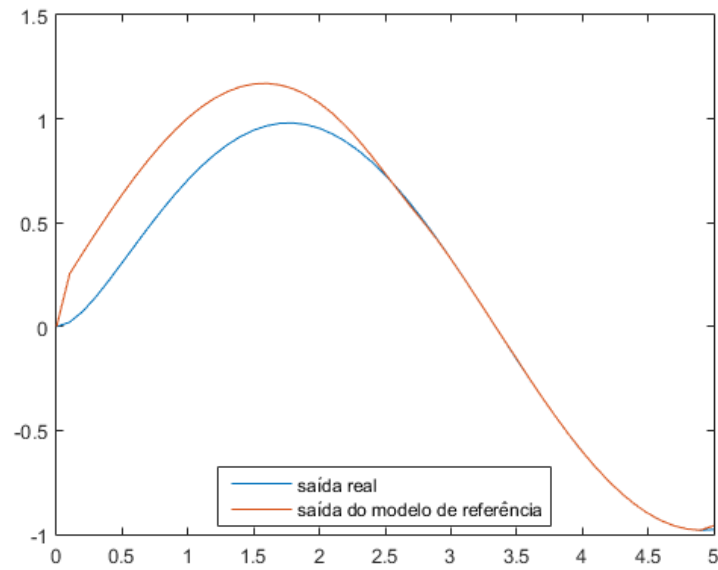


Fonte: Autora

4.1.1 Simulação para variação somente na entrada w

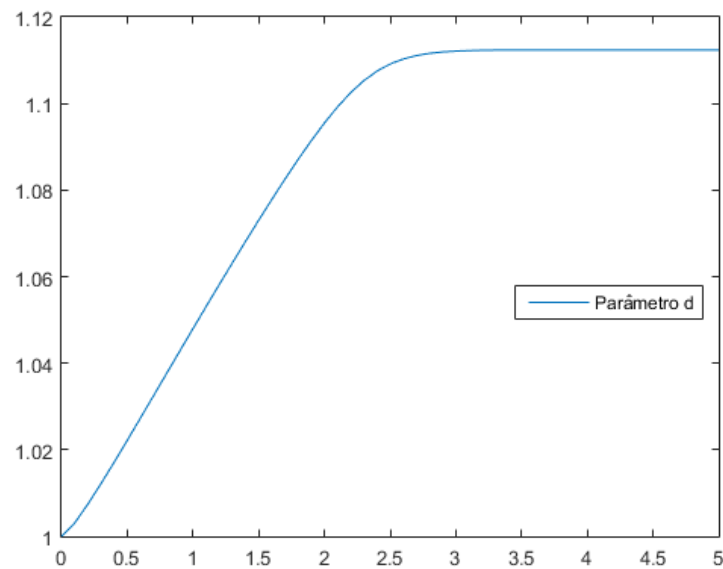
A Figura 22 representa a resposta do parâmetro d para todas as entradas nulas, exceto w . A simulação se mostrou viável pois, como discutido na 3.6.2, o parâmetro d não sofre interferência para entradas nulas em p , q e r .

Figura 21 – Resposta do controlador w , com adaptação, para variação somente na entrada w .



Fonte: Autora

Figura 22 – Resposta do parâmetro d , com adaptação, para variação somente na entrada w .

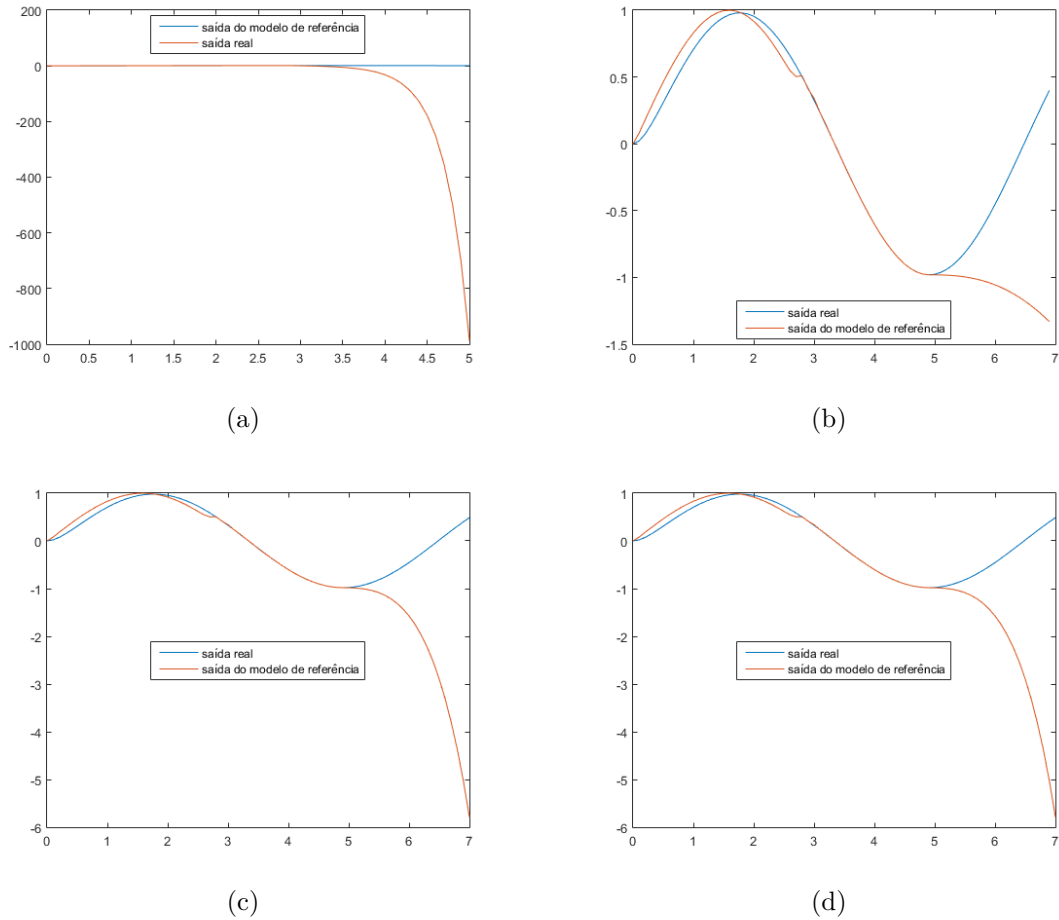


Fonte: Autora

4.1.2 Simulação para entradas senoidais

Para validar os controladores projetados inicialmente, utilizou-se um conjunto de entradas senoidais. As respostas dos controladores são mostradas na Figura 23. Veja que a resposta não foi a desejada para nenhum dos controladores, uma vez que as saídas desejadas não acompanharam a referência.

Figura 23 – Respostas dos controladores para entradas senoidais com adaptação do parâmetro d para: (a) estado w ; (b) estado p ; (c) estado q ; (d) estado r .



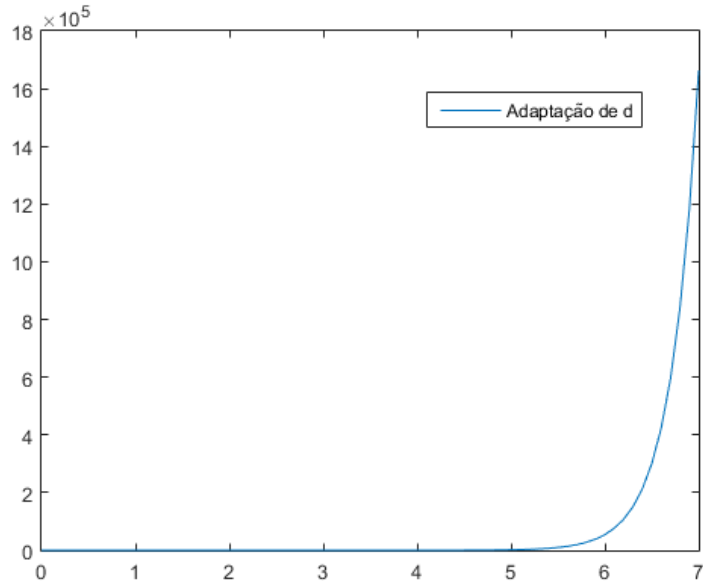
Fonte: Autora

Observe que o controlador associado à velocidade linear w , projetado na Seção 3.6, deveria atingir o valor ótimo $d = c$. No entanto, como evidenciado pela Figura 24, o valor do parâmetro d divergiu, pois as entradas p , q e r não são constantes.

A constatação anterior também pode ser observada por meio da Figura 25 que mostra o comportamento dos ganhos para cada controlador. Observe que, como o parâmetro d não convergiu, o ganho associado ao estado w tendeu ao valor nulo diferentemente do que era desejado, o qual foi arbitrado como 5. Por outro lado, o comportamento do ganho dos controladores p , q e r são semelhantes pois foram igualmente modelados e atingem o resultado esperado.

4.1.3 Simulação para tipos diferentes de entrada

Para entrada dos controladores w , p , q e r , utiliza-se como referência, uma senoide, um degrau, uma rampa e uma entrada nula, respectivamente. Observe na Figura 26 as respostas dos controladores para cada entrada de referência citada anteriormente. As

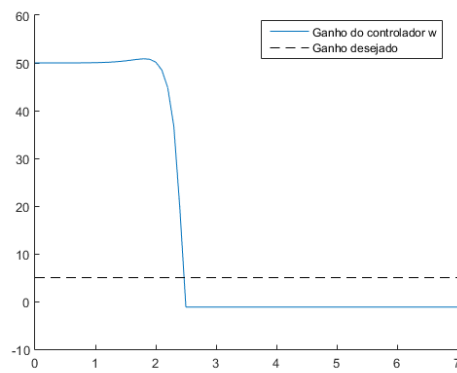
Figura 24 – Resposta do parâmetro d , com adaptação, para uma entrada senoidal.

Fonte: Autora

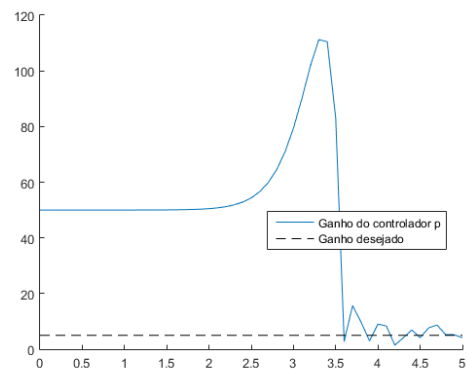
respostas dos controladores são satisfatórias, exceto pelo controlador w , isso se deve ao fato de ser o único controlador a depender do parâmetro d . A Figura 27 é a resposta do parâmetro d , a mesma não converge a um bom resultado pois os cálculos foram feitos para ângulos ϕ e θ constantes, o que não é verdade para uma entrada senoidal. Os ganhos por sua vez são observados na Figura 28, também não foram satisfatórios pois dependem diretamente das entradas de referência.

Como observado a utilização da estratégia de adaptação do parâmetro d não se mostrou viável, assim a Seção 4.2 apresenta uma adaptação na metodologia proposta.

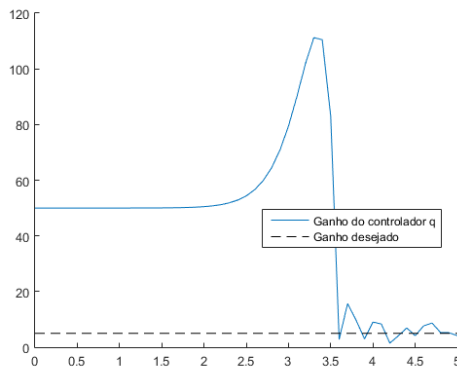
Figura 25 – Comportamento dos ganhos dos controladores para entradas senoidais com adaptação do parâmetro d : (a) estado w , (b) estado p , (c) estado q e (d) estado r .



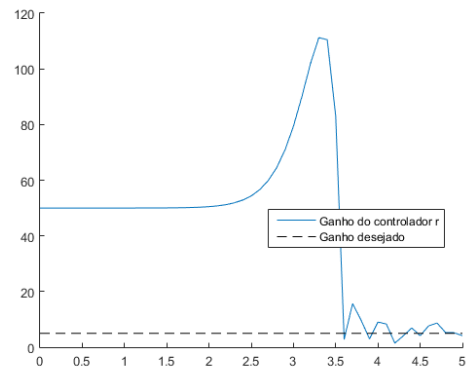
(a)



(b)



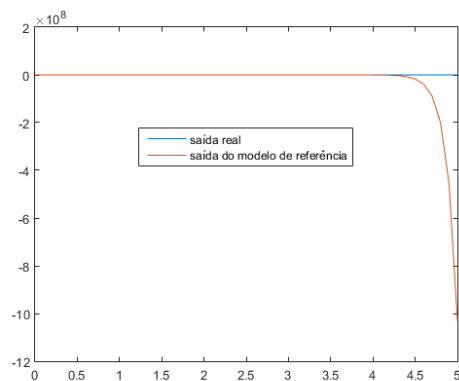
(c)



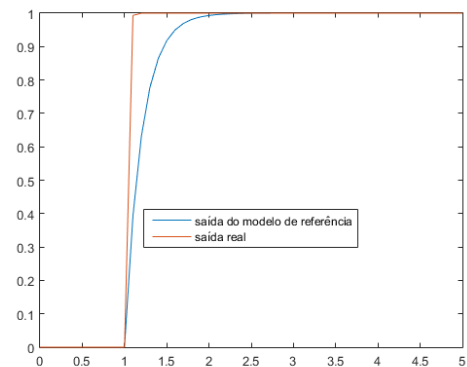
(d)

Fonte: Autora

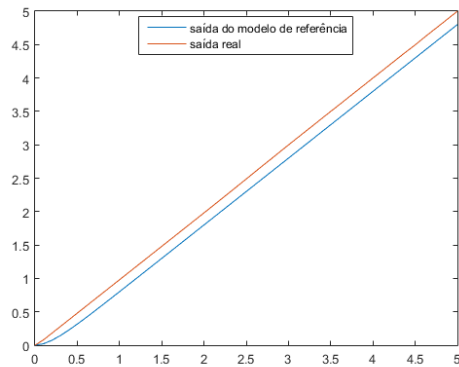
Figura 26 – Respostas dos controladores para diferentes entradas e adaptando o parâmetro d : (a) w para uma entrada senoidal, (b) p para uma entrada degrau, (c) q para uma entrada rampa e (d) r para uma entrada nula.



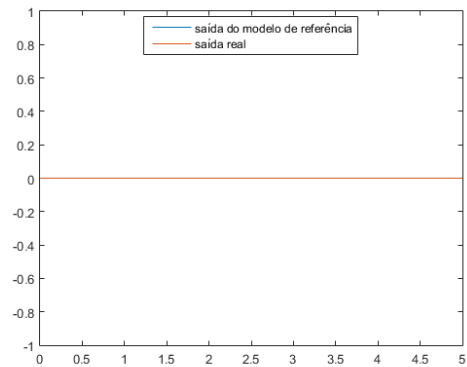
(a)



(b)



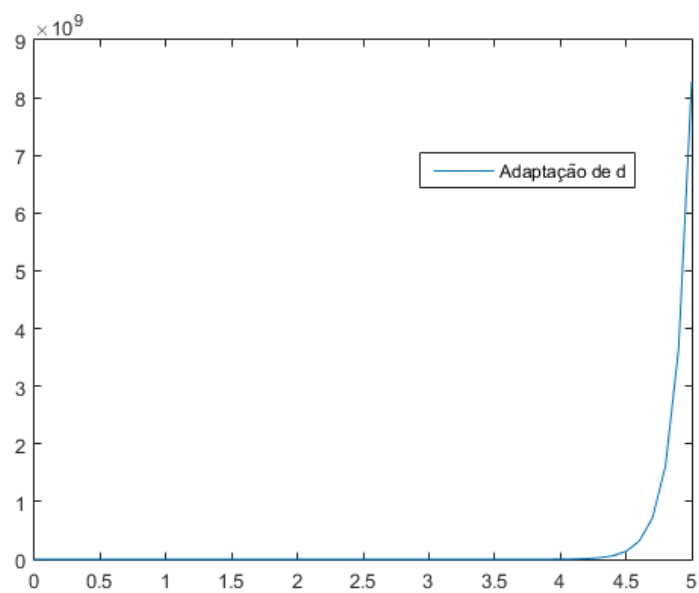
(c)



(d)

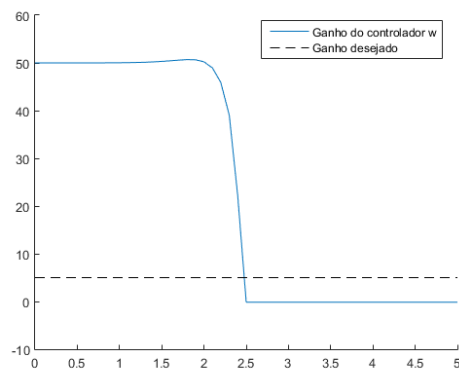
Fonte: Autora

Figura 27 – Resposta do parâmetro d , com adaptação, para uma entrada senoidal.

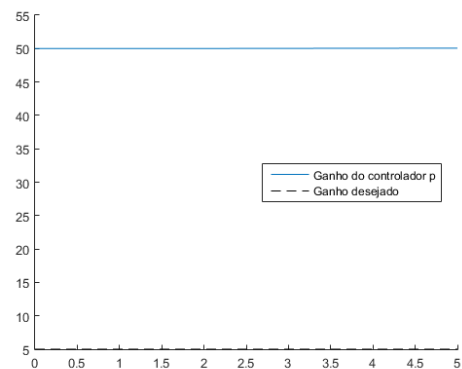


Fonte: Autora

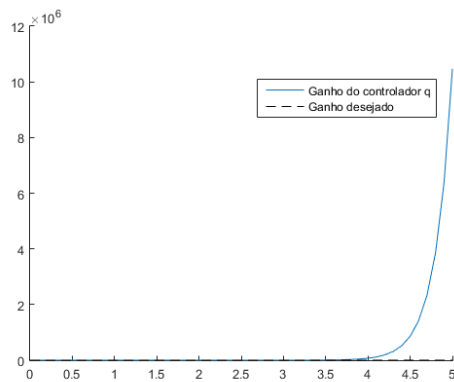
Figura 28 – Comportamento dos ganhos dos controladores para diferentes entradas e adaptando o parâmetro d : (a) w para entrada senoidal, (b) p para entrada degrau, (c) q para entrada rampa e (d) r para entrada nula.



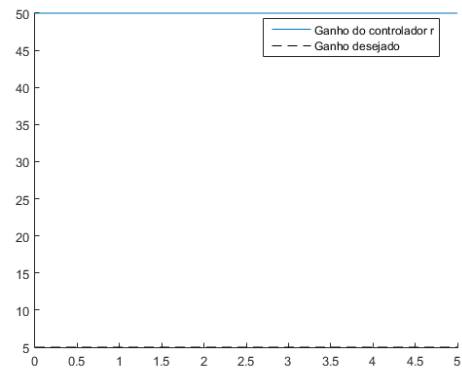
(a)



(b)



(c)



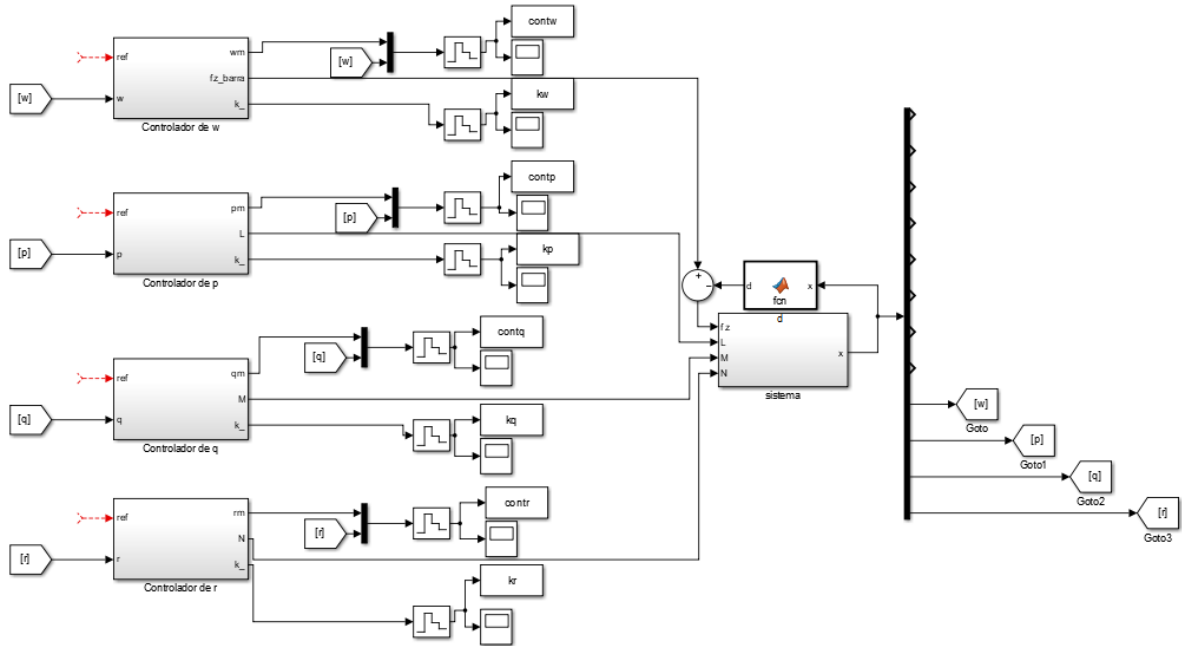
(d)

Fonte: Autora

4.2 Sem adaptação do parâmetro d

Como a adaptação do parâmetro d não se mostrou viável, uma estratégia alternativa é apresentada nesta seção. Para o parâmetro d é atribuído $d = g \cos \phi \cos \theta$. Tal atribuição é válida, tendo em vista que esses parâmetros são os conhecidos para qualquer VANT.

Figura 29 – Planta do sistema de controle para o parâmetro d não adaptado.



Fonte: Autora

4.2.1 Simulação para entradas senoidais

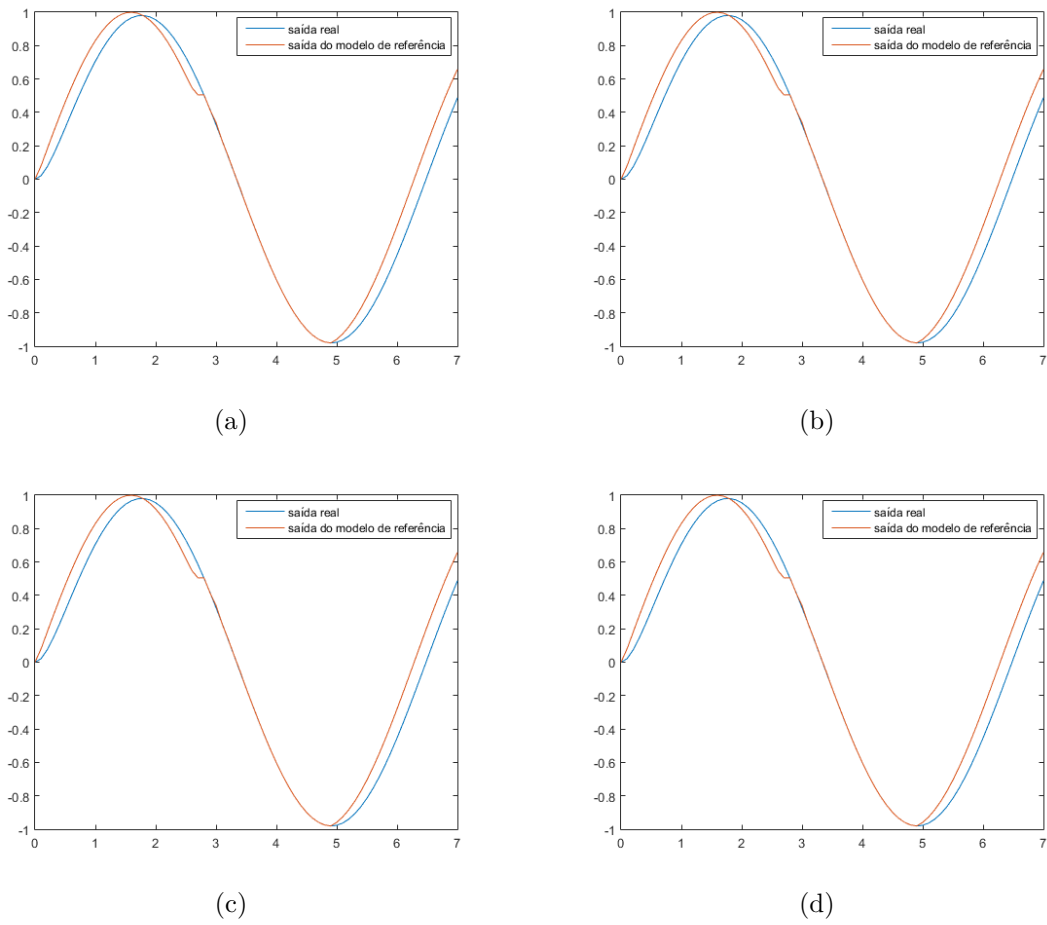
A Figura 30 é a resposta dos controladores para entradas senoidais sem adaptação do parâmetro d . A simulação se mostrou satisfatória tendo em vista que o sinal real e o sinal de referência tendem à mesma curva.

A Figura 31 mostra o comportamento dos ganhos dos controladores para entradas senoidais sem adaptação do parâmetro d . Apesar de um grande sobressinal, observe que as oscilações foram reduzidas, assim como, o tempo de assentamento.

4.2.2 Simulação para tipos diferentes de entrada

Com intuito de verificar a eficácia dos controladores projetados, diferentes tipos de entradas são empregadas para cada controlador, sem adaptação do parâmetro d . Os controladores w , p , q e r tiveram como entradas uma senoide, um degrau, uma rampa e uma entrada nula, respectivamente. Observe na Figura 32 as respostas geradas para cada entrada citada acima. A simulação se tornou viável, mesmo sem a adaptação do parâmetro d .

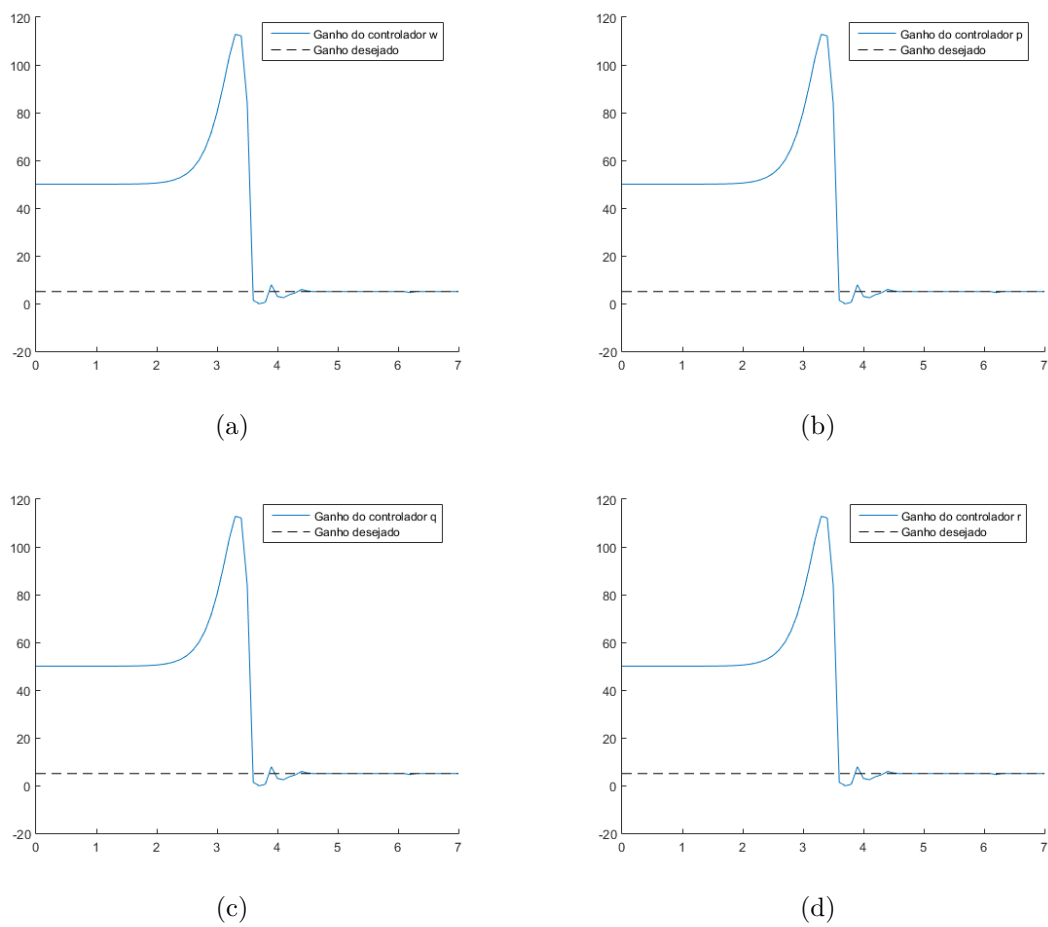
Figura 30 – Respostas dos controladores para entradas senoidais sem adaptação do parâmetro d : (a) estado w , (b) estado p , (c) estado q e (d) estado r .



Fonte: Autora

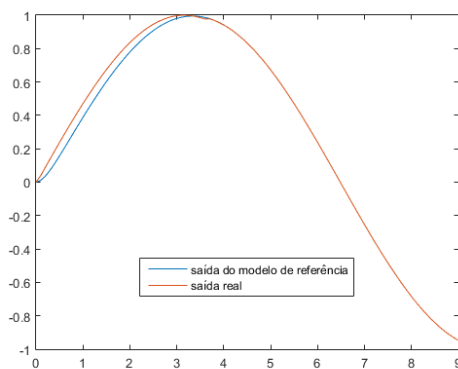
A Figura 33 é o comportamento dos ganhos dos controladores para diferentes entradas, observe que a resposta era o que se esperava para cada entrada.

Figura 31 – Comportamento dos ganhos para entradas senoidais sem adaptação do parâmetro d : (a) estado w , (b) estado p , (c) estado q e (d) estado r .

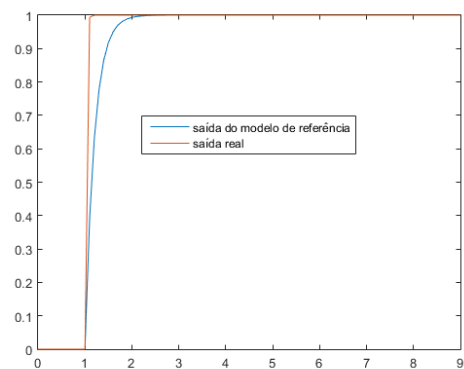


Fonte: Autora

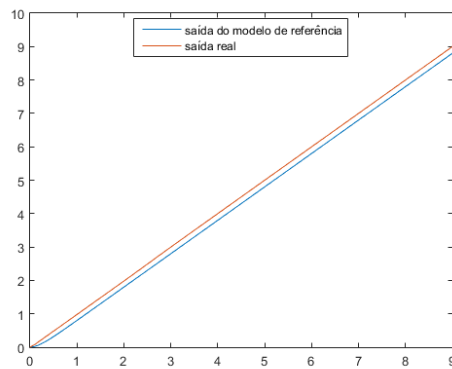
Figura 32 – Resposta dos controladores para diferentes entradas sem adaptação do parâmetro d : (a) w para entrada senoidal, (b) p para entrada degrau, (c) q para entrada rampa e (d) r para entrada nula.



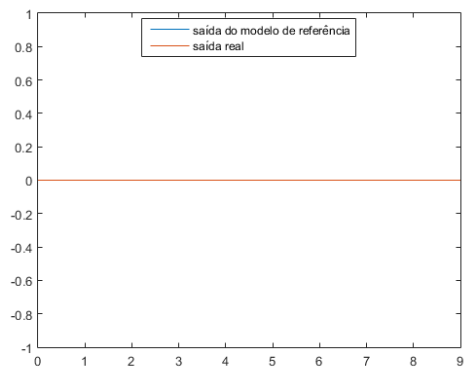
(a)



(b)



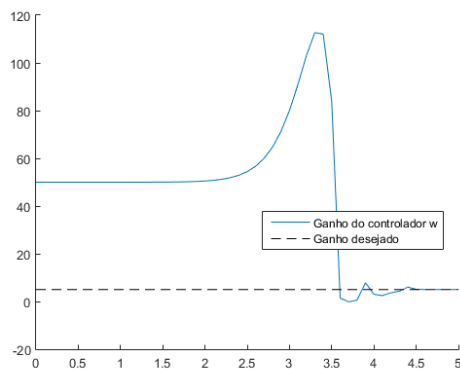
(c)



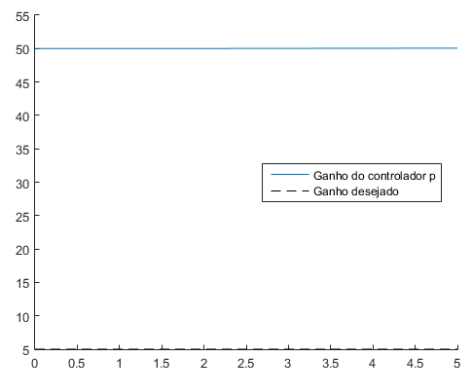
(d)

Fonte: Autora

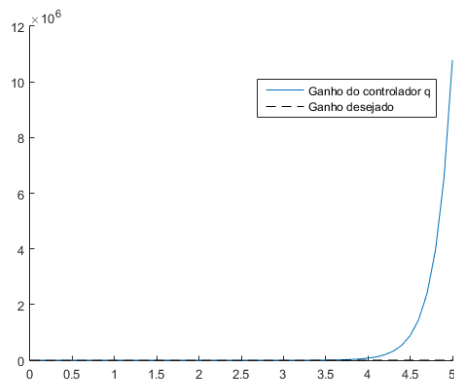
Figura 33 – Comportamento dos ganhos dos controladores para diferentes entradas sem adaptação do parâmetro d : (a) w para entrada senoidal, (b) p para entrada degrau, (c) q para entrada rampa e (d) r para entrada nula.



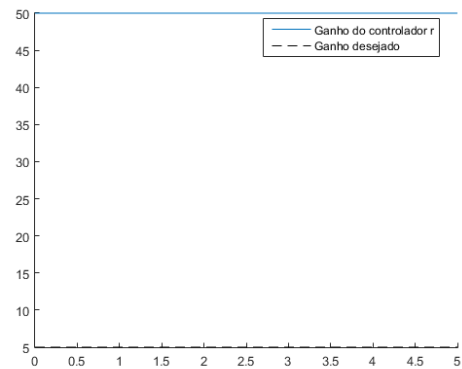
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Autora

5 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvida uma estratégia de controle adaptativo que consiste em uma metodologia em malha fechada, em que o desempenho é definido por um modelo de referência, MRAC. Tendo em vista que o método indireto possui a etapa de identificação, portanto, mais recurso computacional, o método direto foi escolhido, o qual requer apenas a atualização do controlador. O VANT em questão é do tipo quadrotor, que possui quatro rotores que geram as forças de sustentação do veículo. Foram modelados quatro controladores, dos quais, três para velocidades angulares e um para velocidade linear. Para a modelagem dos controladores para velocidades angulares, p , q e r , foi utilizado um controlador proporcional e a função de custos quadrática para desenvolver os cálculos. O controlador para a velocidade linear w também usa como referência um controlador proporcional. Além disso as derivadas $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ são definidas como nulas, portanto os ângulos ϕ e θ constantes. Um parâmetro auxiliar, d , se viu necessário, para a modelagem do controlador para velocidade linear, para eliminar qualquer perturbação referente à massa do VANT e/ou a gravidade terrestre. Com a modelagem dos controladores foi possível implementar as malhas de controle w , p , q e r . A apresentação das simulações, juntamente com os resultados foram divididos conforme a adaptação do parâmetro d e as entradas de referência.

Com adaptação do parâmetro d dividiu-se as simulações por tipo de entrada de referência. Para entradas senoidais em todos os estados as respostas não foram satisfatórias, uma vez que as saídas não acompanharam a referência, isso se deve ao fato de que o parâmetro d foi projetado para entradas constantes em p , q , e r . Ainda com adaptação do parâmetro d diferentes entradas foram aplicadas para os estados w , p , q e r uma entrada senoidal, um degrau, uma rampa e uma entrada nula, respectivamente. Para esse caso as respostas foram bem satisfatórias, exceto pelo controlador w , isso se deve ao fato de ser o único controlador a depender do parâmetro d . Os ganhos também não foram satisfatórios por dependerem diretamente das entradas de referência que não respeitaram a definição de ϕ e θ constantes. Observou-se que a estratégia de adaptação do parâmetro d não se mostrou viável.

Tendo em vista que a adaptação do parâmetro d não se tornou viável, apenas para o estado w , uma estratégia alternativa se viu necessária. As simulações foram realizadas sem a adaptação do parâmetro d e subdivididas pelo tipo de entrada de referência. Para entradas senoidais os sinais de entrada e de referência convergiram para a mesma curva, em todos os estados. Apesar de um sobressinal considerável nos ganhos, houve uma melhora nas oscilações e uma diminuição do tempo de assentamento, quando comparado com o sistema adaptando o parâmetro d . Para tipos deferentes de entradas foram aplicadas para os estados w , p , q e r uma entrada senoidal, um degrau, uma rampa e uma entrada nula,

respectivamente. Mesmo sem a adaptação do parâmetro d o resultado da simulação se mostrou viável, os ganhos seguiram o que se esperava quanto ao aspecto das entradas.

Estruturas diferentes para os controladores é o objetivo para trabalhos futuros. No desenvolvimento da simulação o computador se mostrou pouco eficiente tendo em vista que a simulação se tornou muito complexa, o que limitou o estudo. Assim com novas estruturas de controladores e computadores de melhor desempenho, os resultados mais satisfatórios podem ser investigados.

Referências Bibliográficas

- AUSTIN, R. *Unmanned aircraft systems: UAVs design, development and deployment*. Nova York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2011. v. 54. 17
- HALLIDAY; RESNICK. *Fundamentos de Física*. [S.l.]: ITC, 2008. 9
- MARQUES, G. D. C. Mecânica. In: _____. [S.l.]: CENTRO DE ENSINO E PESQUISA APLICADA, 2015. cap. CINEMÁTICA DAS ROTAÇÕES, p. 23. 6, 7, 8
- PFEIFER, E. *Projeto e Controle de um UAV Quadrirotor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2013. 8
- REVISTA248. 2017. Disponível em: <http://aeromagazine.uol.com.br/artigo/origem-dos-vant_1907.html>. 1, 2, 5
- Sá, R. C. *Construção, modelagem dinâmica e controle PID para estabilidade de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2012. 12, 16
- SOUSA, J. M. O. e. *Controlo Adaptativo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, 2013. 15, 17, 18, 19, 20, 23, 27
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. *Aircraft Control and Simulation*. [S.l.]: Hoboken, 2016. 2, 4, 7, 17
- VALAVANIS, K. P. *Advances in unmanned aerial vehicles: state of the art and the road to autonomy*. Nova York, NY, USA: Springer Science & Business Media, 2008. v. 33. 17
- ZUBEM, F. J. V. *Introdução ao Controle por Realimentação*. 2010. Disponível em: <ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ea616/_1s10/notas/_de/_aula/topico11/_EA616/_1s2010.pdf>. 18