

---

# Universidade de Brasília

## Laboratório de Controle Dinâmico

### Experimento 1

---

## Kit Motor - Tacômetro

---

3 de Abril de 2014

Professor: Marco A. Egito - turma C

Alunos:

Rodrigo Cardoso

11/0040279

Juarez Aires

11/0032829

Marco Emílio

10/0114067

#### I. OBJETIVOS

Analisar o funcionamento de uma planta com motor CC e determinar os parâmetros que caracterizam o seu funcionamento.

#### II. INTRODUÇÃO

A peça chave da planta em estudo é o motor de corrente contínua. Como indicado pelo nome, esse tipo de motor é alimentado com uma tensão contínua  $u_{in}(t)$  e produz uma velocidade angular de rotação  $w(t)$ . Sejam  $U_{in}(s)$  e  $\Omega(s)$  as transformadas de Laplace de  $u_{in}(t)$  e  $w(t)$  respectivamente, o funcionamento do motor é tema bem conhecido e a função de transferência é dada por:

$$\frac{\Omega(s)}{U_{in}(s)} = \frac{K_m}{1 + s \cdot T} \quad (1)$$

onde  $K_m$  é uma constante de ganho característica de cada motor e  $T$  está relacionado com a constante de tempo do sistema. Para medir a velocidade de rotação do eixo é comum fazer-se uso de um tacômetro. O tacômetro é acoplado ao eixo girante e produz em seus terminais de saída uma tensão  $u_{tac}(t)$  proporcional à velocidade do eixo por um fator  $K_t$ . Dessa forma, podemos relacionar a transformada  $U_{tac}(s)$  de  $u_{tac}(t)$  com  $U_{in}(s)$  por:

$$\frac{U_{tac}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{K_m \cdot K_t}{1 + s \cdot T} \quad (2)$$

Podemos então estudar a planta ao controlar a entrada  $u_{in}(t)$  e analisar a saída do tacômetro  $u_{tac}(t)$ . Com essa análise podemos determinar a constante  $T$  e a constante de ganho resultante  $K = K_m \cdot K_t$ . Se possuímos uma

forma de medir  $K_m$  por outro meios, podemos determinar também  $K_t$ . Os métodos para essa determinação serão vistos na primeira etapa desse experimento.

Outra propriedade importante em sistemas de controle é a sua linearidade. Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  as respostas de um sistema a entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , um sistema é dito linear se a resposta a uma combinação linear das entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  produzir a mesma combinação linear de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . Isto é, para um sistema linear:

$$F(a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) = aF(x_1) + bF(x_2) \quad (3)$$

Dois efeitos comuns de não linearidade podem ser verificada graficamente: saturação de um sistema e a faixa de zona morta. A saturação do sistema ocorre quando aumentamos gradativamente a energia de entrada do sistema e notamos que, a partir de um certo ponto, o sistema muda sua resposta drasticamente. A faixa de zona morta corresponde a resposta do sistema para baixas intensidades da entrada. Idealmente qualquer entrada deveria produzir uma alteração na saída, mas para muitos sistemas a entrada deve subir acima de um mínimo crítico para que haja uma resposta. Na prática, dificilmente nos deparamos com um sistema realmente linear, mas dentro de uma certa faixa de atuação alguns sistemas podem ser satisfatoriamente aproximados por um modelo linear.

Abordaremos também no experimento um sistema de malha fechada. Em tal sistema um sinal relacionado à variável sendo controlada - no caso, a velocidade de rotação do motor - é comparado com um valor estabelecido produzindo um sinal de erro relativo. Esse erro relativo passa por um estágio de amplificação e atua sobre o sistema, fechando a malha. Ao variarmos os parâmetros

desse estágio de ganho podemos observar diferentes resposta no sistema e, ao acrescentar componentes capacitivos aumentamos a ordem do sistema. Sistemas de ordem mais alta apresentam diferentes respostas, mas de forma generalizada pode-se dizer que em ordens mais altas temos maior oscilação da variável sendo controlada.

### III. MATERIAIS

Foram utilizados durante o experimento:

- kit Motor - Tacômetro n° 6
- Osciloscópio
- Gerador de Sinal
- Estroboscópio
- Cabos Conectores

As figuras em 1 e 2 a seguir ilustram os equipamentos utilizados no experimento. Em 2 vemos o kit motor-tacômetro utilizado. Na parte superior da figura vemos o motor e o tacômetro propriamente ditos, em baixo deles vemos um esquemático explicativo dos bornes, e em baixo vemos em preto e em vermelho os bornes de conexão. Os sinais de entrada, medidas e realimentação são feitos por meio dos bornes. No painel esquemático existem conectores por onde podemos adicionar elementos resistivos e capacitivos externamente. Os bornes são nomeados e as funcionalidades dos principais bornes utilizados são descritas a seguir:

- $E_1$  : entrada positiva do bloco somador
- $E_2$  : entrada negativa do bloco somador
- $U_1$  : entrada do módulo amplificador e saída do somador
- $U_2$  : sinal que vai para o drive do motor
- $V_1$  : saída do módulo amplificador
- $V_4$  : saída do tacômetro
- com : é o terra do circuito

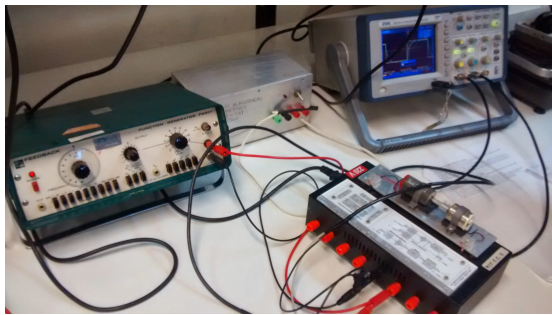


Figura 1: Equipamentos utilizados

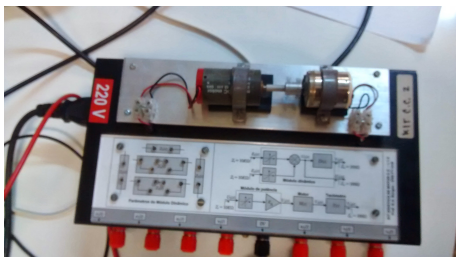


Figura 2: kit motor-tacômetro

### IV. PROCEDIMENTOS

Para determinar e estudar os diversos parâmetros do sistema, realizaram-se 5 testes. Cada teste é descrito nas subseções seguinte. Ao final da seção diversas figuras ilustram o diagrama de blocos de cada montagem.

#### A. 1º Teste - Determinando $K_m, K_t$ e $T$

- Para determinar  $K_m$  aplicamos uma tensão contínua de intensidade conhecida sobre o motor DC. A tensão é aplicada diretamente sobre o terminal marcado com  $u_2$ , pois esse é o terminal que alimenta o driver do motor. Assim que o motor atinge regime permanente, ligamos acima do eixo o estroboscópio. A frequência do estroboscópio é ajustada até que o parafuso no eixo do motor seja visto parado. Um cuidado deve ser tomado: devido a simetria do eixo, se a frequência do estroboscópio for metade da do eixo, o parafuso também será visto parado. Dessa forma, deve se procurar a menor frequência que 'para' o eixo e anotar o seu dobro como a real velocidade do eixo. O procedimento é repetido para 5 frequências e uma tabela é montada.
- Em cada medição da etapa anterior, medimos também a tensão dada pela saída  $v_4$  - essa é a saída do tacômetro. Montamos outra tabela com a velocidade do motor (dado pelo estroboscópio) e a tensão medida em  $v_4$ . Ao final das medidas desliga-se a planta.
- Nessa etapa alimentamos a planta com um sinal de onda quadrada em  $u_2$ . A frequência deve ser tal que possa-se observar a saída dada em  $v_4$  atingir regime permanente. Em nosso experimento utilizamos 1Hz. Mediu-se então o valor máximo atingido em  $v_4$  e procurou-se o instante, a partir do início da subida do sinal, em que o sinal atingiu 63% do valor final.

#### B. 2º Teste - Observando a não-linearidade

Para observar os efeitos de não-linearidade do sinal descritos na introdução:

- primeiramente, aplicamos em  $U_2$  um sinal de onda triangular de frequência 0.1 Hz e observamos no osciloscópio o sinal de entrada e a saída dada pelo tacômetro em  $V_4$ .
- entramos agora com um sinal triangular de alta amplitude (14V) e observamos novamente a entrada e a saída do sistema no osciloscópio.

#### C. 3º Teste - Sistema de malha fechada de primeira ordem

- Primeiramente fechamos a malha ao conectar a saída do tacômetro  $V_4$  com a entrada negativa do somador em  $E_2$ . Em seguida ligamos a saída do somador  $U_1$  com a entrada do drive do motor em  $U_2$ . Jogamos então um sinal de onda quadrada de amplitude 6V e frequência 1Hz. Medimos os valores de  $E_1$ ,  $V_4$  e constante de tempo.
- A figura 3 a seguir mostra esquematicamente a função das impedâncias presentes no kit

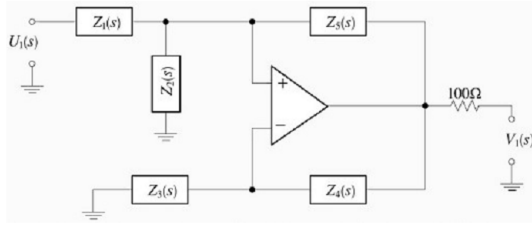


Figura 3: esquemático das impedâncias do módulo amplificador

para a segunda etapa desse teste desfazemos a ligação  $U_1-U_2$  e ligamos a saída do bloco amplificador  $V_1$  com a entrada do drive do motor  $U_2$ . Fizemos os valores de impedância como segue:  $Z_1 = 0\Omega$ ,  $Z_2 = \text{aberto}$ ,  $Z_3 = 2.2k\Omega$ ,  $Z_4 = 22k\Omega$  e  $Z_5 = \text{aberto}$ . Repetimos as medidas feitas na primeira etapa.

#### D. 4º Teste - Sistema de Malha Fechada de 2ª Ordem

Para acrescentar um polo ao sistema, ligaremos um componente capacitivo ao estágio de ganho do sistema. A montagem dos bornes é a mesma utilizada no 3º teste, mas dessa vez fazemos:  $Z_1 = 2k\Omega$ ,  $Z_2 = \frac{1}{s(1\mu F)}$ ,  $Z_3 = 2.2k\Omega$ ,  $Z_4 = 22k\Omega$  e  $Z_5 = \text{aberto}$ . A amplificação será dado por  $1 + \frac{Z_4}{Z_3}$  e fazemos então dois ensaios: um com amplificação unitária e outro com amplificação 11. Esperamos dessa forma observar dois comportamentos do sistema: um comportamento subamortecido e outro superamortecido. No caso do superamortecido medimos a constante de tempo resultante e no caso subamortecido medimos o sobrevalor percentual e o tempo de pico.

#### E. 5º Teste - Malha Fechada de 3ª Ordem

Nessa etapa acrescentamos um terceiro polo ao sistema ao ligar uma capacitor  $C_4 = 1\mu F$  em paralelo com  $R_4 = 2k\Omega$ , também fazemos  $R_1 = 2k\Omega$ . O objetivo dessa etapa é somente observar o comportamento de um sistema de terceira ordem.

#### F. Diagrama de Blocos dos Diversos Sistemas

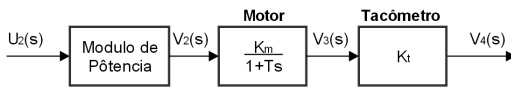


Figura 4: Sistema em malha aberta com entrada direto no estágio de potência

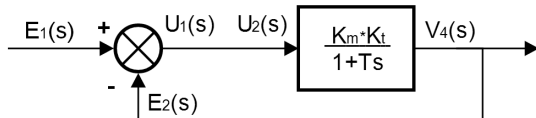


Figura 5: Sistema em malha fechada com realimentação negativa

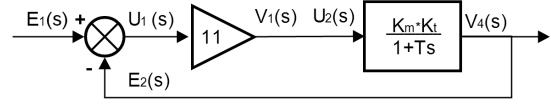


Figura 6: Realimentação com ganho adicional

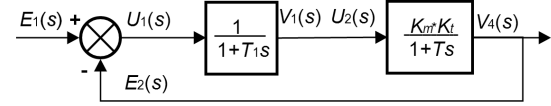


Figura 7: Modelo em 2ª Ordem sem ganho adicional

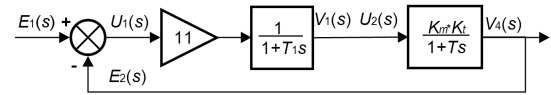


Figura 8: Modelo em 2ª Ordem com ganho adicional

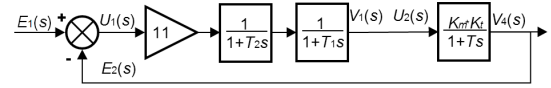


Figura 9: Modelo em malha fechada de 3ª Ordem depois do acréscimo do ultimo polo

## V. DADOS EXPERIMENTAIS

Para ordenar a apresentação os dados são dispostos na ordem das etapas do experimento.

#### A. 1º Teste

a) : Abaixo é mostrada a tabela com os valores de entrada e saída obtidos, assim como os valores calculados para K.

$U_2(V)$	$\omega(rpm)$	$V_4(V)$
6.020	11500	5.76
4.140	7600	3.84
3.033	5500	2.72
1.422	2120	1.12

Tabela I: Dados da parte 1.

Em seguida, mediu-se o intervalo de tempo para que a entrada atingisse 63% de seu valor final:

$$\tau = 24.8ms \quad (4)$$

#### B. 2º Teste

As figuras 10 e 11 a seguir mostram os resultados obtidos.

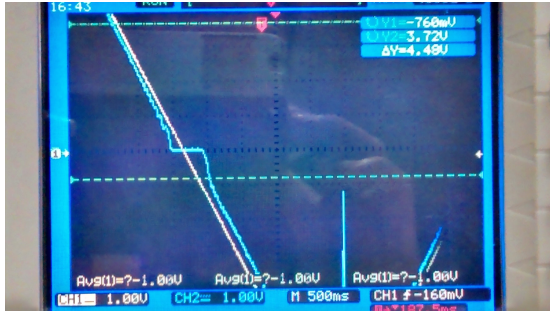


Figura 10: zona morta

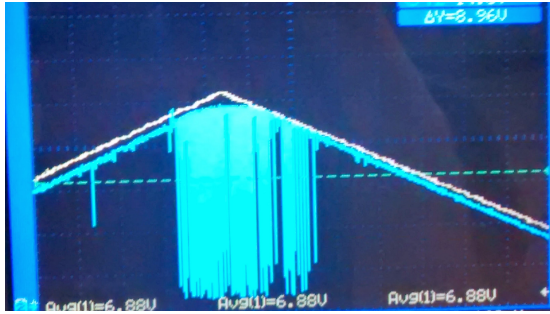


Figura 11: saturação

### C. 3º Teste

Os dados dos procedimentos são mostrados na tabela a seguir:

	$E_1$	$V_4$
sem ganho	14.2 V	6.56
com ganho	10.4	9.0

Tabela II: Dados da parte 3

### D. 4º Teste

Observou-se uma resposta transitória característica de segunda ordem sub-amortecida ao acrescentar o ganho. A resposta do sistema sem ganho foi sobre-amortecida. Para o último caso aproximamos medimos apenas a constante de tempo:

$$\tau = 29ms, \text{ resposta amortecida} \quad (5)$$

Para o caso sub-amortecido medimos o sobrevalor percentual e o tempo de pico:

$$\begin{aligned} O.S.\% &= 18.681\% \\ t_p &= 52ms \end{aligned} \quad (6)$$

### E. 5º Teste

O resultado da construção desse sistema é mostrado abaixo:



Figura 12: Comportamento em osciloscópio do sistema de 3ª ordem.

## VI. ANÁLISE DE DADOS

### A. Considerações Prévias

A seguir são demonstradas algumas relações que auxiliam o entendimento do experimento. Primeiramente, são apresentadas as funções de transferência:

Para o sistema de primeira ordem, é sabido:

$$H(s) = \frac{V_4}{U_2} = \frac{K_M K_T}{1 + sT} = \frac{K}{1 + sT} \quad (7)$$

O mesmo sistema, agora com um ganho  $G$  constante, e em *feedback* negativo, é dado por:

$$H_1(s) = \frac{V_4}{E_1} = \frac{G \cdot H(s)}{1 + G \cdot H(s)} = \frac{GK}{1 + sT + GK} \quad (8)$$

O polo desse sistema é  $p_1 = -\frac{1+GK}{T}$ .

Em seguida, adicionando um bloco de primeira ordem no caminho direto (dado por  $D(s) = \frac{1}{1+sR_1C_2}$ ), desenvolvemos a seguinte expressão para o sistema de 2ª ordem de malha fechada:

$$H_2(s) = \frac{V_4}{E_1} = \frac{D(s) \cdot H_1(s)}{1 + D(s) \cdot H_1(s)} = \quad (9)$$

$$= \frac{\frac{1}{1+sR_1C_2} \cdot \frac{GK}{1+sT+GK}}{1 + \frac{1}{1+sR_1C_2} \cdot \frac{GK}{1+sT+GK}} \quad (10)$$

Logo,

$$H_2(s) = \frac{V_4}{E_1} = \frac{KG}{s^2(R_1C_2T) + s(R_1C_2 + T) + (1 + KG)} \quad (11)$$

Os pólos apresentados por esse sistema são:

$$\begin{aligned} &\frac{-R_1C_2 + T + \sqrt{(R_1C_2 + T)^2 - 4R_1C_2T(1+KG)}}{2R_1C_2T} \\ &\frac{-R_1C_2 + T - \sqrt{(R_1C_2 + T)^2 - 4R_1C_2T(1+KG)}}{2R_1C_2T} \end{aligned} \quad (12)$$

Por fim, para calcular a FT do sistema de 3ª ordem, basta substituir o ganho  $G$ , antes constante, por um ganho com impedância:

$$G(s) = 1 + \frac{Z}{R_3} = \frac{s + \frac{R_4 + 1}{R_3}}{s + \frac{1}{R_4C}} = \frac{s + \beta}{s + \alpha} \quad (13)$$

Fazendo essa substituição, encontra-se o sistema de 3a ordem:

$$H_3 = \frac{V_4}{E_1} = \quad (14)$$

$$= \frac{(s + \beta)K}{(1 + sR_1C_2)(s + \alpha)(1 + sT) + K(s + \beta)} \quad (15)$$

#### B. 1º Teste

b) : Pelo teorema do valor final, temos:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (16)$$

c) : Aplicando isso à equação da função de transferência assumindo uma função degrau de entrada com amplitude genérica A, temos:

$$U_{tac}(s) = U_{in}(s) \frac{K_M K_T}{1 + sT} = \frac{A}{s} \cdot \frac{K_M K_T}{1 + sT} \quad (17)$$

$$U_{tac}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{A}{\cancel{s}} \cdot \frac{K_M K_T}{1 + sT} = A \cdot K_M \cdot K_T = A \cdot K \quad (18)$$

d) : Denota-se K para o produto dos coeficientes  $K_M$  e  $K_T$ . Ou seja, é possível calcular o coeficiente K pela fórmula:

$$K = \frac{U_{tac}(\infty)}{A} \quad (19)$$

onde A é a amplitude da entrada em forma de onda quadrada. O resultado é aplicado aos dados da tabela I e mostrado a seguir:

$U_2(V)$	$V_4(V)$	$K = \frac{V_4}{U_2}$
6.020	5.76	0.957
4.140	3.84	0.928
3.033	2.72	0.897
1.422	1.12	0.788

Tabela III: Cálculo de K

Vemos que, em nossas medidas, o ganho total do sistema parece variar com a amplitude do sinal de entrada. Para prosseguirmos devemos escolher um ganho específico. Escolhemos fazer todos os procedimentos então com uma amplitude de 6.00V e para isso:

$$K = 0.957 \quad (20)$$

Podemos aplicar o mesmo teorema para a equação 1:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= U_{in}(s) \frac{K_M}{1 + sT} \\ w(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{A}{\cancel{s}} \cdot \frac{K_M}{1 + sT} \\ &= A \cdot K_M \end{aligned} \quad (21)$$

De forma que determinamos  $K_M$  por:

$$K_M = \frac{w(\infty)}{A} \quad (22)$$

As contas são feitas na tabela a seguir:

$U_2(V)$	$\omega(rpm)$	$\frac{w(\infty)}{A} (rpm/V)$
6.020	11500	1.9103E03
4.140	7600	1.8357E3
3.033	5500	1.8134E3
1.422	2120	1.4909E3

Tabela IV: Cálculo de  $K_M$

Novamente escolhemos o valor de ganho para 6V:

$$K_M = 1910 \quad (23)$$

Agora voltamos para  $K_t$ :

$$\begin{aligned} K &= K_M K_t = \frac{V_4(\infty)}{A} \\ , \text{ mas } K_M &= \frac{w(\infty)}{A} \\ \Rightarrow K &= \frac{w(\infty)}{A} K_t = \frac{V_4(\infty)}{A} \\ \therefore K_t &= \frac{V_4(\infty)}{w(\infty)} \end{aligned} \quad (24)$$

a tabela mostra os cálculos:

$\omega(rpm)$	$V_4(V)$	$\frac{V_4(\infty)}{w(\infty)} (V/rpm)$
11500	5.76	0.5009E-3
7600	3.84	0.5053E-3
5500	2.72	0.4945E-3
2120	1.12	0.5283E-3

Tabela V: Cálculo de  $K_t$

E então:

$$K_t = 0.5009E - 3 \quad (25)$$

e) : A constante de tempo foi medida utilizando-se o fato de que o intervalo de tempo que ela representa é da partida do sinal até que o mesmo atinja 63% de seu valor final. O valor medido foi de

$$\tau = 24.8ms \quad (26)$$

#### C. 2º Teste

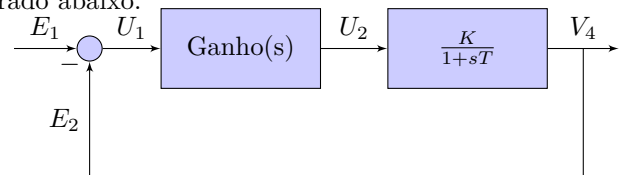
f) : O motor possui um efeito de zona morta que pode ser explicado da seguinte forma:

- Para baixas tensões, é necessária uma tensão mínima para que ele comece a girar.
- Para altas tensões, há uma tensão máxima a partir da qual a velocidade do motor para de acompanhar a tensão de entrada devido às limitações físicas do motor devidas à construção do mesmo e outros fatores, como o atrito viscoso em seu interior.

g) : Isso se traduz no ceifamento da tensão de saída do tacômetro para baixas e altas tensões de entrada.

#### D. 3º Teste

h) : Primeiramente, são deduzidas abaixo as equações referentes ao sistema com realimentação de primeira ordem. O diagrama de blocos referente ao sistema é mostrado abaixo.





i) : Para o sistema com realimentação negativa, sabe-se que a função de transferência é da forma:

$$FT(s) = \frac{G(s) \cdot H(s)}{1 + H(s)F(s)} \quad (27)$$

Onde  $G(s)$  é o ganho dado pelo módulo de ganho,  $H(s)$  é a função de transferência do sistema motor-tacômetro e  $F(s)$  é o ganho de realimentação. Para os experimentos realizados com realimentação,  $F(s)$  é tipicamente unitário.

j) : Logo, a função de transferência do sistema realimentado pode ser dada por:

$$FT(s) = \frac{V_4}{E_1} = \frac{G \cdot \frac{K}{1+sT}}{1 + G \cdot \frac{K}{1+sT}} = \frac{G \cdot K}{1 + sT + G \cdot K} \quad (28)$$

$$FT(s) = \frac{\frac{G \cdot K}{1+G \cdot K}}{1 + s \frac{T}{1+G \cdot K}} \quad (29)$$

k) : Aplica-se agora o Teorema do valor final para verificar o ganho do sistema realimentado com entrada degrau:

$$v_4(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{G \cdot K}{1 + sT + G \cdot K} = \frac{AGK}{1 + GK} \quad (30)$$

l) : Para o primeiro caso, de ganho adicional unitário, tem-se que o valor de  $v_4(\infty)$  será dado por:

$$v_4(\infty) = \frac{AGK}{1 + GK} \Big|_{G=1} = \frac{AK}{K + 1} \quad (31)$$

Onde  $A$  denota a amplitude do degrau utilizado. Ou seja, o valor de  $K_1$  é dado por:

$$K_1 = \frac{v_4(\infty)}{A} = \frac{K}{K + 1} \quad (32)$$

Utilizando o valor de  $K$  apropriado para a situação ( $K=0.957$ ), calcula-se um valor teórico para esse ganho  $K_1$ :

$$K_{1-\text{teórico}} = \frac{K}{K + 1} = \frac{0.957}{1 + 0.957} \approx 0.4890 \quad (33)$$

O valor prático é obtido da seguinte forma:

$$K_{1-\text{prático}} = \frac{v_4(\infty)}{A} = \frac{6.56}{14.2} \quad (34)$$

$$K_{1-\text{prático}} \approx 0.4620 \quad (35)$$

(K de malha fechada sem ganho)

O mesmo pode ser feito para o sistema com ganho. Nesse sistema, utilizou-se resistores de 22kΩ e 2.2kΩ de forma que o ganho do AmpOp não-inversor totaliza 11, ou seja,  $G(s)=11$ .

Dessa forma, temos:

$$v_4(\infty) = \frac{AGK}{1 + GK} \Big|_{G=11} = \frac{11AK}{11K + 1} \quad (36)$$

E o novo ganho, denotado  $K_2$  é dado por:

$$K_2 = \frac{v_4(\infty)}{A} = \frac{v_4(\infty)}{E_1} = \frac{11K}{11K + 1} \quad (37)$$

Realizando o procedimento análogo, temos os seguintes valores teórico e experimental para  $K_2$ :

$$K_{2-\text{prático}} = \frac{V_4}{E_1} = \frac{9.6}{10.4} \quad (38)$$

$$\boxed{K_2 - \text{prático} = 0.865} \quad (39)$$

(K de malha fechada com ganho)

$$K_{2-\text{teórico}} = \frac{11K}{11K + 1} = \frac{11 \cdot 0.957}{11 \cdot 0.957 + 1} \quad (40)$$

$$\boxed{K_2 - \text{teórico} = 0.913}$$

Podemos comparar o erro percentual entre as previsões teóricas e experimentais pela forma:

$$\epsilon = \frac{|X_{\text{exp}} - X_{\text{teo}}|}{X_{\text{teo}}} \quad (41)$$

para os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 4.9\% \\ \epsilon_2 &= 5.3\% \end{aligned} \quad (42)$$

Vemos que os dois erros são relativamente baixos e compatíveis com a precisão das medidas tomadas. Verifica-se aqui concordância entre as previsões teóricas e os resultados experimentais.

Passamos agora para a análise das constantes de tempo. Vemos pela equação 29 que a constante de tempo do sistema será dada por:

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + G \cdot K} \quad (43)$$

para  $G = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \tau'_{G=1} &= \frac{\tau}{1 + G \cdot K} = \frac{24.8e-3}{1 + 1 \cdot 0.957} \\ \boxed{\tau'_{G=1} = 12.7\text{ms}} \end{aligned} \quad (44)$$

( $\tau'$  para malha fechada sem ganho)

para  $G = 11$ , temos:

$$\begin{aligned} \tau'_{G=11} &= \frac{\tau}{1 + G \cdot K} = \frac{24.8e-3}{1 + 11 \cdot 0.957} \\ \boxed{\tau'_{G=11} = 2.2\text{ms}} \end{aligned} \quad (45)$$

( $\tau'$  para malha fechada com ganho)

Notamos que a adição do ganho diminuiu em torno de 5x a constante de tempo. Podemos resumir o sistema com ganho na função de transferência:

$$\boxed{\begin{aligned} F.T. \quad 1^\circ \text{ ordem} &= \frac{0.865}{1 + 0.0022s} \\ G &= 11, \text{ malha fechada} \end{aligned}} \quad (46)$$

(F.T. para malha fechada com ganho)

e o polo é:

$$\boxed{\begin{aligned} p \quad 1^\circ \text{ ordem} &= -454.55 \\ G &= 11, \text{ malha fechada} \end{aligned}} \quad (47)$$

(polo para malha fechada com ganho)

## E. 4º Teste

Para o caso com ganho, que gerou uma resposta sub-amortecida, podemos calcular o fator de amortecimento  $\xi$  e a frequência natural  $w_n$ :

$$\xi = \frac{-\ln(O.S.)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(O.S.)}}$$

$$\xi = \frac{-\ln(0.18681)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.18681)}} \quad (48)$$

$\xi = 0.471$

$$w_n = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$w_n = \frac{\pi}{0.052 \sqrt{1 - 0.471^2}} \quad (49)$$

$w_n = 68.488 \text{ rad/sec}$

Para o caso em que a resposta foi sobre-amortecida, podemos aproximar o sistema de segunda ordem por um de primeira. Um sistema de primeira ordem está caracterizado pela sua constante de tempo. Para esse sistema temos então:

$\tau = 29ms$

(50)

Com a ajuda da rotina `feedback()` do matlab a função de transferência é calculada:

$$F.T. = \frac{10.53}{4.96e - 5s^2 + 0.0268s + 11.53}$$

(F.T. para malha fechada de 2ª ordem com  $G = 11$ )

(51)

com o comando `pole()`, também do matlab, obtém-se os polos da função

$p = 1.0e + 02(-2.7016 \pm 3.9926i)$

(polos para malha fechada de 2ª ordem com  $G = 11$ )

(52)

## F. 5º Teste

m) : O sistema de 3ª ordem construído em laboratório consiste em adicionar um capacitor em paralelo à realimentação do Amp-Op. Dessa forma, o ganho não-inversor do Amp-Op conta com uma impedância. Isso é demonstrado abaixo:

n) : O ganho não inversor é dado por:

$$FT(s) = \frac{O(s)}{I(s)} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \quad (53)$$

Onde  $Z_4$  é a impedância de realimentação. No caso,  $Z_4$  é dado pela associação em paralelo de um resistor e um capacitor e  $Z_3$  é dado por um resistor:

$$FT(s) = 1 + \frac{\frac{1}{sC} || R_4}{R_3} = 1 + \frac{\frac{R_4}{R_3}}{1 + sCR_4} = \frac{s + \frac{\frac{R_4}{R_3} + 1}{R_4 C}}{s + \frac{1}{R_4 C}} \quad (54)$$

Os valores utilizados foram de  $C=1\mu F$ ,  $R_4 = 22k\Omega$  e  $R_3 = 2.2k\Omega$ . Dessa forma, a FT do bloco de ganho é dada por:

$$FT_{ganho} = \frac{s + 500}{s + 45.45} \quad (55)$$

Que é um bloco de 1ª ordem.

Adicionalmente, ainda no módulo dinâmico, há uma divisão de tensão entre  $Z_1$  e  $Z_2$ . Essa divisão, lembrando que  $Z_1 = 2.2k\Omega$  e  $Z_2$  é a impedância de um capacitor de  $1\mu F$ , pode ser modelada da seguinte forma:

$$FT_{divisor} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_1} \quad (56)$$

$$FT_{divisor} = \frac{\frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}} = \frac{454.54}{s + 454.54} \quad (57)$$

Por fim, a FT do motor-tacômetro é obtida utilizando-se os valores de K e T:

$$FT_{sistema} = \frac{K}{1 + sT} |_{K=0.957, T=24.8ms} = \frac{38.59}{s + 40.32} \quad (58)$$

o) : O sistema foi modelado a partir da *toolbox* Simulink do software Matlab e sua simulação é mostrada abaixo:

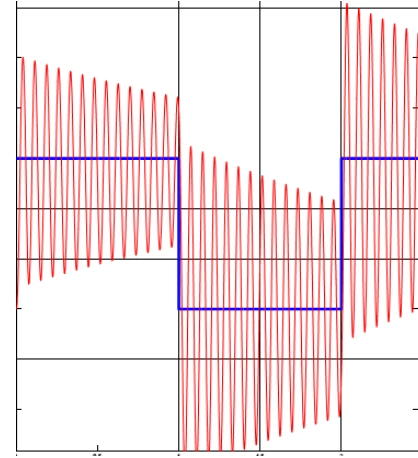


Figura 14: Resposta ao sistema de 3ª ordem obtida em simulação.

Novamente, com o matlab a função de transferência é calculada:

$$F.T. = \frac{46.32s + 2.316e04}{0.02641s^3 + 3.465s^2 + 197.7s + 2.536e04}$$

(F.T. para malha fechada de 3ª ordem)

(59)

e os polos:

$$p = 1.0e + 02 * \begin{bmatrix} -1.3033 \\ -0.0045 + 0.8584i \\ -0.0045 - 0.8584i \end{bmatrix}$$

(polos para malha fechada de 3ª ordem)

(60)

Vemos que um dos polos possui parte real mais negativa que os outros dois. Isso faz com que sua resposta caia muito mais rapidamente que a resposta aos outros dois polos

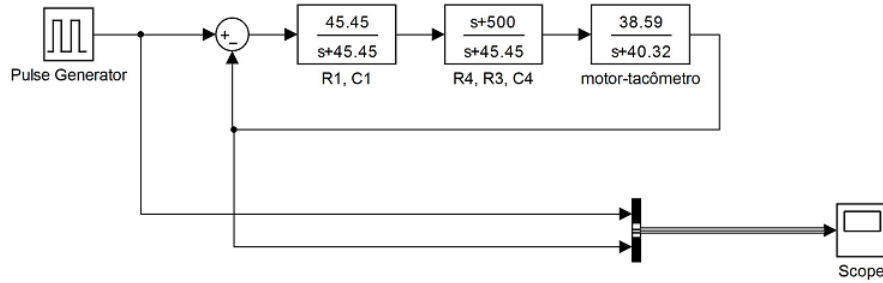


Figura 13: Diagrama de Blocos do sistema de 3ª ordem.

e seu efeito não é facilmente observável. Mesmo assim a resposta do sistema é alterada devido ao terceiro polo.

Notamos que a simulação obtida difere um pouco do comportamento observado em laboratório, mas que, em ambos os casos, a adição do terceiro polo aumenta a oscilação do sistema.

## VII. CONCLUSÃO

O experimento permitiu determinar diversas constantes envolvidas na planta motor-tacômetro. Gradativamente, componentes foram adicionados à malha de controle e pôde-se observar a validação das previsões teóricas no cálculo das constantes de tempo e ganho devido a cada componente adicionado. No sistema de segunda ordem pôde-se observar diferentes tipos de resposta a medida que um ganho em malha direta foi adicionado. Para esse sistema calculou-se a fração de amortecimento e a frequência natural. Ao final observou-se experimentalmente um sistema de terceira ordem e o aumento na oscilação do sistema devido à um polo extra. Na análise computacional envolvida, o Matlab foi utilizado para calcular as funções de transferência e polos de cada sistema estudado e, por fim, simular o sistema de terceira ordem.

## REFERÊNCIAS

- [1] Nise, N.S. *Engenharia de Sistemas de Controle* 5ª ed. LTC, 2009.
- [2] Ogata, K. *Modern Control Engineering* 5ª ed. Pearson, 2010.
- [3] Adel S. Sedra and Kenneth C. Smith, *Microelectronic circuits*, 5th ed. Oxford, England: Oxford University Press, 2004.