Análise Dinâmica Linear

Experimento 6
Modelagem e Estabilização do Pêndulo Invertido

4 de Dezembro de 2013

Professor: Henrique Cezar Ferreira
Alunos:
Juarez A.S.F 11/0032829
Luís Henrique Vieira Amaral 10/0130488

I. Objetivos

Estudar a caracterização no espaço de estados de um pêndulo invertido acoplado à planta linear Quanser, obter uma linearização do modelo e a faixa de operação deste, posicionar os polos do sistema adequadamente e, finalmente, atuar sobre o sistema de modo a manter o pêndulo em equilíbrio.

II. Introdução Teórica

Sejam A, B, C e D as matrizes de estado de um sistema linear qualquer. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{u}$ as variáveis de estado, a saída e a entrada, respectivamente. As equações de estado são:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \tag{1}$$

Na ausência de entrada, o sistema fica:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \tag{2}$$

aplicando a transformada de Laplace e supondo condições iniciais nulas temos:

$$\begin{cases} s\mathbf{X(s)} = A\mathbf{X(s)} \\ \mathbf{Y(s)} = C\mathbf{X(s)} \end{cases} \tag{3}$$

resolvendo, obtemos:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1} \\ \mathbf{Y(s)} = C(sI - A)^{-1} \end{cases} \tag{4}$$

Um resultado da álgebra matricial nos diz que a inversa de uma matriz A genérica é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{det|A|} \cdot adjA \tag{5}$$

onde adjA é a matriz adjunta de A, dada pela transposta da matriz dos cofatores. Aplicando esse resultado no nosso sistema temos:

$$\mathbf{Y(s)} = C\frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} \tag{6}$$

mas det(sI - A) nos dá justamente o polinômio característico p(s) de A, que pode ser escrito como :

$$p(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) \tag{7}$$

onde λ_n é o n-ésimo autovalor da matriz A(os autovalores podem se repetir). Dessa forma, no sistema sem entrada os candidatos a polos do sistema são os autovalores da matriz A.

No controle de sistemas queremos muitas vezes que os polos do sistema tenham todos parte real negativa. Veja que se isso for verdade, ao invertemos a transformada da Laplace, todas as exponenciais terão expoentes negativos e a resposta do sistema está limitada a uma faixa finita. Caso contrário teremos expoentes positivos que fazem a solução ir para infinito.

Se em uma dada planta tivermos polos com parte real positiva, podemos atuar no sistema com um sinal de controle de modo a posicionar os polos no semiplano complexo de parte real negativa e estabilizar o sistema. Vamos refazer o processo anterior, mas acrescentando uma entrada da forma $u = -Kx$. O sistema fica:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = (C - DK)\mathbf{x} \end{cases} \tag{8}$$

de modo análogo ao que já fizemos, resolvemos para Y(s) no domínio de Laplace:

$$\mathbf{Y}(s) = (C - DK) \cdot \frac{adj(sI - (A - BK))}{det(sI - (A - BK))} \tag{9}$$

agora os candidatos à polos do sistema serão dados pelos autovalores de $(A-BK)$. Podemos ajustar então a matriz K para que os novos polos estejam todos no semiplano negativo. Ao fazermos isso garantimos a estabilidade do sistema.

A análise anterior levou em conta que o sistema físico em estudo era linear. Esta não é, infelizmente, a situação da maioria dos sistemas físicos reais. Em geral temos:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \tag{10}$$

A fórmula de Taylor de duas variáveis com condições iniciais nulas nos permite escrever:

$$\begin{cases} \dot{x} \approx x\frac{\partial f}{\partial x}|_{t=0} + u\frac{\partial f}{\partial u}|_{t=0} \\ y \approx x\frac{\partial g}{\partial x}|_{t=0} + u\frac{\partial g}{\partial u}|_{t=0} \end{cases} \tag{11}$$

fazendo:

$$\begin{cases} A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{t=0} \\ B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{t=0} \\ C = \frac{\partial g}{\partial x}|_{t=0} \\ D = \frac{\partial g}{\partial u}|_{t=0} \end{cases} \tag{12}$$

obtemos uma aproximação linear para nosso sistema em torno da origem e podemos aplicar a mesma análise feita anteriormente. É importante ressaltar que o procedimento se trata de uma aproximação em torno da origem e será válido, portanto, para pontos próximos desta. Até quão longe a aproximação é válida depende do sistema e do grau de precisão requerido pela aplicação. Essa faixa de operação deve ser determinada experimentalmente e aproximações mais complicadas utilizando uma ordem maior na série de Taylor podem ser necessárias para melhorar a precisão do modelo caso necessário.

III. Descrição Experimental

- Inicialmente, abriu-se o modelo s_sip_freefal_ss_vs_eom.mdl no simulink no qual havia dois subsistemas em paralelo que representavam as equações lineares no espaço de estados e as equações não lineares do pêndulo invertido.
- O programa script_setup_lab_ip01_2_sip.m foi executado e os parâmetros do modelo foram carregados no software Simulink. Em seguida definiu-se a variável IC_ALPHA0 = deg2rad(0,1). Então, configurou-se o tempo de simulação para 3 segundos e o sistema foi simulado.
- Após a simulação, abriu-se os dois scopes referentes à posição linear do carro e posição angular do pendulo e procurou-se determinar a região em que a aproximação linear foi adequada ao comparar a diferença entre a resposta do modelo linear com do modelo não linear.
- Determinou-se os polos do sistema em malha ao calcular os autovalores da matriz A.
- Já na segunda parte do experimento, abriu-se no Simulink o modelo s_sip_lqr_ip02.mdl que possuía o modelo de controle da planta para três diferentes entradas. Assim, executou-se, novamente o script setup_lab_ip01_2_sip.m para carregar os parâmetros e variáveis do sistema.
- Definiu-se os polos do sistema para serem:

  $$\begin{pmatrix} -12.7349 + 22.6058i \\ -12.7349 - 22.6058i \\ -1.551 + 1.0488i \\ -1.551 - 1.0488i \end{pmatrix}$$

  e com auxílio do comando place(A, B, P), determinou-se a matriz de ganho K para posicionar os polos no semiplano negativo.
- Determinou-se então os polos do novo sistema ao calcular os autovalores da matriz A - BK.
- Então, posicionou-se o carro no meio do trilho, deixando o pêndulo para baixo e o sistema foi inicializado. Rotacionou-se, manualmente o pêndulo até que ele atingisse a posição vertical quando ocorreu o acionamento, automático, do sistema de controle.
- Com o sistema estabilizado, perturbou-se a haste do pêndulo e observou-se a resposta.
- Em seguida, com o sistema ligado, alterou-se a entrada do sistema para um onda quadrada.
- Por fim a entrada 3 foi selecionada , a bola posicionada no centro do trilho e deixada se movimentar.

IV. Resultados

A matriz K obtida foi:

$$K = \begin{bmatrix} -40.8241 & 149.4337 & -42.3754 & 13.5353 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Os novos polos obtidos foram:

$$eig(A - B \cdot K) = \begin{bmatrix} -12.7349 + 22.6058i \\ -12.7349 - 22.6058i \\ -1.5551 + 1.0488i \\ -1.5551 - 1.0488i \end{bmatrix} \tag{14}$$

Pôde-se observar ainda que o pêndulo se manteve equilibrado conforme esperado:

- para o primeiro sinal de entrada o pêndulo manteve-se estável e equilibrado na posição vertical mesmo com pequenos empurrões. Nessa primeira etapa notava-se trepidações do carrinho para manter o carro em equilíbrio. Quando os empurrões foram mais fortes o controle não foi suficiente e o pêndulo caiu.
- para o segundo sinal de entrada o carro andou de um lado para o outro repetidamente, ao mesmo tempo em que mantinha o pêndulo na posição vertical.
- para o último sinal de entrada o carro parecia seguir a bolinha a medida que essa deslizava sobre a superfície. Novamente o movimento do carrinho era feito mantendo o pêndulo equilibrado e estável.

V. Discussão

A aproximação linear utilizada para o sistema em estudo foi satisfatória uma vez que o controle do pêndulo na posição vertical foi atingido com sucesso. Notamos que ela é válida para as condições supostas no modelo, isto é, pequenos ângulos. Quando a perturbação é grande e faz o ângulo aumentar demasiadamente, o controle se perde e o pêndulo cai. Isso revela que a faixa de operação de validade do nosso modelo é importante, uma vez que ele se torna ineficiente a medida que nos afastamos dela.

A determinação da faixa foi feita experimentalmente. Simulamos os dois modelos, linear e não linear, e procuramos graficamente a região em que os dois modelos retornavam o resultados próximos. Para o sistema em estudo, obteve-se que:

- até 13º temos um erro de 1º na resposta do modelo
- até 8º temos um erro de 0.5º na resposta do modelo

Como foi visto na introdução, se tivermos acesso às variáveis de estado da planta, podemos adicionar uma entrada proporcional ao estado do sistema por uma matriz K para alocarmos adequadamente os polos do sistema. Para determinar essa matriz de ganho K, podemos utilizar a função place(A, B, P) do matlab. Essa rotina determina justamente o ganho K para que a matriz (A - BK) tenha os polos dados por P.

Ao modificarmos os polos do sistema mudamos a característica da resposta temporal. Ao garantirmos que os polos tenham todos partes reais negativas fazemos com que a resposta temporal apresente sempre exponenciais de fatores negativos, o que faz a resposta ficar limitada a uma faixa finita de valores. Isto é, ao posicionarmos os polos no semiplano negativo, impedimos que a resposta do sistema vá para infinito.

No sistema em estudo a aproximação linear foi suficiente para o controle de pequenos ângulos. Caso fosse necessário o controle para ângulos maiores, o modelo teria de ser refinado e precisaríamos acrescentar termos de ordem mais alta na série de Taylor utilizada. Um modelo baseado em série de Taylor de segunda ordem teria as equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(x,u) \approx x f_x + u f_u + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xu f_{xu} + u^2 f_{uu}) \\ \\ y(x,u) \approx x g_x + u g_u + \frac{1}{2}(x^2 g_{xx} + 2xu g_{xu} + u^2 g_{uu}) \end{cases} \tag{15}$$

onde f_x nota a derivada parcial de f com respeito a x, e assim por diante.

Durante o experimento teve-se dificuldade inicialmente em fazer funcionar o controle. Apesar de todos os procedimentos terem sidos seguidos o pêndulo não se equilibrava e o sistema de controle falhava. Depois de algumas tentativas, notou-se que as engrenagens do carrinho da planta estava desgastadas, de modo que a roda girava em falso em muitas ocasiões. Ao girar em falso, a planta não correspondia ao modelo matemático desenvolvido, e portanto o controle utilizado não era adequado. Mudou-se então para outra planta mais bem conservada e e experimento prosseguiu com sucesso. Nota-se aqui que o efeito de interferências não previstas no modelo podem inviabilizar a aplicação deste.

VI. Conclusão

O experimento permitiu estudar a modelagem no espaço de estados para o pêndulo invertido acoplado à planta linear Quanser. O sistema foi linearizado e a região de operação foi determinada experimentalmente ao comparar a resposta do modelo linear com a do modelo não linear. O sinal de controle foi determinado de forma a colocar os polos do sistema no semiplano negativo e conseguiu-se controlar o pêndulo de forma a mantê-lo vertical com uma estabilidade razoável. Ao final pode-se observar o carrinho seguindo um alvo de controle ao passo que mantinha o pêndulo equilibrado. O experimento é um exemplo de como as diversas ferramentas de análise de sistemas lineares podem ser utilizadas para desenvolver ferramentas de controle complexo.

Referências

[1] Nise, N.S. *Engenharia de Sistemas de Controle* 5ª ed. LTC, 2009.
[2] Ogata, K. *Moder Control Engeeniring* 5ª ed. Pearson, 2010.