ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক: সূত্র, ধরন ও উদাহরণ

ম্যাট্রিক্সের ধারণা

সারি: ম্যাট্রিক্সের অনুভূমিক রেখাগুলোকে সারি বলে। কলাম: ম্যাট্রিক্সের উল্লম্ব রেখাগুলোকে কলাম বলে।

$\rightrightarrows$ 4 টি সারি $\downarrow\downarrow\downarrow$ 3 টি কলাম

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

এখানে A ম্যাট্রিক্সে 4 টি সারি এবং 3 টি কলাম আছে। তাই A-এর ক্রম 4×3।
কতগুলো সংখ্যাকে আয়তাকারভাবে সারি ও কলামে সাজালে তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। যদি A-এর সারি সংখ্যা m এবং কলাম সংখ্যা n হয়, তবে A-এর ক্রম $m \times n$।

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

এখানে a_{ij} হলো i-তম সারি ও j-তম কলামের উপাদান।

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ

১. আয়তাকার ম্যাট্রিক্স
সারি ও কলাম সংখ্যা অসমান হলে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

২. বর্গ ম্যাট্রিক্স
সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হলে বর্গ ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

৩. সারি ম্যাট্রিক্স
একটি মাত্র সারি থাকলে সারি ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

৪. কলাম ম্যাট্রিক্স
একটি মাত্র কলাম থাকলে কলাম ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

৫. শূন্য ম্যাট্রিক্স
সব উপাদান শূন্য হলে শূন্য ম্যাট্রিক্স।

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

৬. কর্ণ ম্যাট্রিক্স
বর্গ ম্যাট্রিক্সে মুখ্য কর্ণ ছাড়া অন্য সব উপাদান শূন্য হলে কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

৭. স্কেলার ম্যাট্রিক্স
কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলো সমান হলে স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

৮. অভেদক ম্যাট্রিক্স
মুখ্য কর্ণের উপাদান 1 এবং অন্য সব উপাদান 0 হলে অভেদক ম্যাট্রিক্স।

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

৯. ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স
মুখ্য কর্ণের নিচের সব উপাদান শূন্য হলে ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

১০. নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স
মুখ্য কর্ণের উপরের সব উপাদান শূন্য হলে নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

১১. ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স
সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

১২. প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
যদি $A = A^T$ হয়, তবে A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

১৩. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স
যদি $A = -A^T$ হয়, তবে A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

১৪. সমঘাতী ম্যাট্রিক্স
যদি $A^2 = A$ হয়, তবে A সমঘাতী ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = A$$

১৫. অভেদঘাতী ম্যাট্রিক্স
যদি $A^2 = I$ হয়, তবে A অভেদঘাতী ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = I$$

১৬. শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স
যদি কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য $A^n = O$ হয়, তবে A শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = O$$

১৭. লম্ব ম্যাট্রিক্স
কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি,

$$AA^T = A^TA = I$$

অর্থাৎ,

$$A^T = A^{-1}$$

১৮. অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স
কোনো A ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো জটিল সংখ্যা হলে, প্রত্যেক জটিল সংখ্যার স্থানে তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বসিয়ে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তাকে A-এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলে।
অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকে $\overline{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & i & 2-3i \\ 5 & -i & 4 \\ 3-5i & 7 & 5+2i \end{bmatrix}$$

তাহলে,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i & 2+3i \\ 5 & i & 4 \\ 3+5i & 7 & 5-2i \end{bmatrix}$$

১৯. হার্মিসিয়ান ম্যাট্রিক্স
কোনো বর্গ জটিল ম্যাট্রিক্স A-এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ যদি A-এর সমান হয়, তবে A কে হার্মিসিয়ান ম্যাট্রিক্স বলে।
অর্থাৎ,

$$A = \overline{A}^T$$

অথবা,

$$A = A^*$$

যেখানে,

$$A^* = \overline{A}^T$$

ম্যাট্রিক্সের ধর্ম

$$1.(A^T)^T = A, \qquad 2.(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad 3.(AB)^T = B^TA^T$$

NABIB'S CLASSROOM

$4. IA = AI = A, \qquad 5. A(B+C) = AB + AC, \qquad 6. (B+C)A = BA + CA$

$$7. AB = BA \quad \text{or} \quad AB \neq BA$$

$$8. A(BC) = (AB)C$$

ম্যাট্রিক্সের সমতা

দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হবে যদি তাদের ক্রম একই হয় এবং অনুরূপ উপাদানগুলো সমান হয়।

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$$

উদাহরণ

$$\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+3y = 5, \quad x-2y = 2$$

$$x = \frac{16}{7}, \qquad y = \frac{1}{7}$$

যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণ

একই ক্রমের দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ বা বিয়োগ করা যায়।

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], \qquad A - B = [a_{ij} - b_{ij}], \qquad kA = [ka_{ij}]$$

উদাহরণ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্স গুণ

যদি A-এর ক্রম $m \times n$ এবং B-এর ক্রম $n \times p$ হয়, তবে AB নির্ণয়যোগ্য এবং AB-এর ক্রম $m \times p$।

$$A_{m\times n} B_{n\times p} = AB_{m\times p}$$

উদাহরণ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের ঘাত

$$A^2 = A\cdot A, \qquad A^3 = A^2 \cdot A, \qquad A^{n+1} = A^n \cdot A, \qquad A^0 = I, \qquad I^n = I$$

ম্যাট্রিক্সের বহুপদী

যদি,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

তবে,

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

উদাহরণ

যদি $f(x) = x^2 - 2x + 3$ হয়, তবে

$$f(A) = A^2 - 2A + 3I$$

নির্ণায়ক

শুধু বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক থাকে।

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

উদাহরণ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad |A| = 2\cdot 5 - 3\cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

অনুরাশি ও সহগুণক

কোনো নির্ণায়কের কোনো উপাদানের সারি ও কলাম বাদ দিলে যে ছোট নির্ণায়ক পাওয়া যায়, তাকে অনুরাশি বলে।
যদি M_{ij} হয় অনুরাশি, তবে সহগুণক,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

চিহ্নের ছক:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

সহগুণক দিয়ে নির্ণায়ক

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{অথবা} \qquad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

নির্ণায়কের মান

কোনো নির্ণায়কের যেকোনো সারি বা কলামের উপাদানসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহগুণকের গুণফলের সমষ্টিই নির্ণায়কের মান।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$$

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3×3 নির্ণায়ক

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

উদাহরণ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

1. যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রত্যেকটি উপাদান শূন্য হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

2. নির্ণায়কের সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. নির্ণায়কের দুইটি সারি বা দুইটি কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের পরিবর্তন হয় না, কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

NABIB'S CLASSROOM

4. যদি কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা দুইটি কলাম একই হয় অথবা একটি অন্যটির গুণিতক হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} ma_1 & na_1 & c_1 \\ ma_2 & na_2 & c_2 \\ ma_3 & na_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

5. নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রত্যেকটি উপাদানকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানও ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ হয়।

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mA$$

6. নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রতিটি উপাদানের সাথে অন্য কোনো সারি বা কলামের অনুরূপ উপাদানের এক বা একাধিক গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রতিটি উপাদান দুইটি অংশের সমষ্টি হিসেবে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের সূত্র

$$1.|AB| = |A||B|, \qquad 2.|pA| = p^n|A|, \qquad 3.|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$4.|(pA)^{-1}| = \frac{1}{p^n|A|}, \qquad 5.|pA^{-1}| = \frac{p^n}{|A|}, \qquad 6.|(pA^{-1})^{-1}| = \frac{|A|}{p^n}$$

ক্রেমারের নিয়ম

দুই চলকের সরল সমীকরণজোট ধরি,

$$a_1x + b_1y = c_1, \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

যেখানে,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

তাহলে, $D \neq 0$ হলে,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স

যদি $|A| \neq 0$, তবে A^{-1} থাকে।

$$1.A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

$$2.AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad 3.(A^{-1})^{-1} = A$$

$$4.(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$5.AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

2×2 ম্যাট্রিক্সের বিপরীত

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

উদাহরণ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad |A| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

কর্ণ ম্যাট্রিক্সের ঘাত ও বিপরীত

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

দ্রুত মনে রাখার সূত্র

$$1.(A^T)^T = A, \qquad 2.(AB)^T = B^TA^T, \qquad 3.(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$4.A(B + C) = AB + AC, \qquad 5.A(BC) = (AB)C,$$

$$6.A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}, \qquad 7.|AB| = |A||B|$$

$$8.A = A^T, \quad 9.A = -A^T, \quad 10.A^2 = A, \quad 11.A^2 = I, \quad 12.A^n = O$$

NABIB'S CLASSROOM