TDDD14 - Home assignment 1

Jesper Wrang (jeswr740) - 960619-8472 - jeswr740@student.liu.se

2019-04-06

1

(a) $0^*(0+1)(0+1)^*$ - översatt till svenska: godtyckligt med nollor, sedan måste de vara antingen en etta eller nolla, sedan godtyckligt med karaktärer. Alla utom e) innehåller en etta eller nolla, därför accepteras alla de strängarna.

Svar: a, b, c och d

(b) $(0 + 1)^*1(0 + 1)^*0(0 + 1)^*$ - måste innehålla en etta och sedan en nolla. Endast b) och c) uppfyller detta.

Svar: b och c

(c) $(0+(0+1)^*)(0^*+1^*)$ - första parentesen säger: noll eller godtycklig sträng. Sista parentesen säger godtyckligt med nollor sedan godtyckligt med ettor. Detta sätter alltså inget riktigt krav på strängen, utan alla matchar.

Svar: a, b, c, d och e

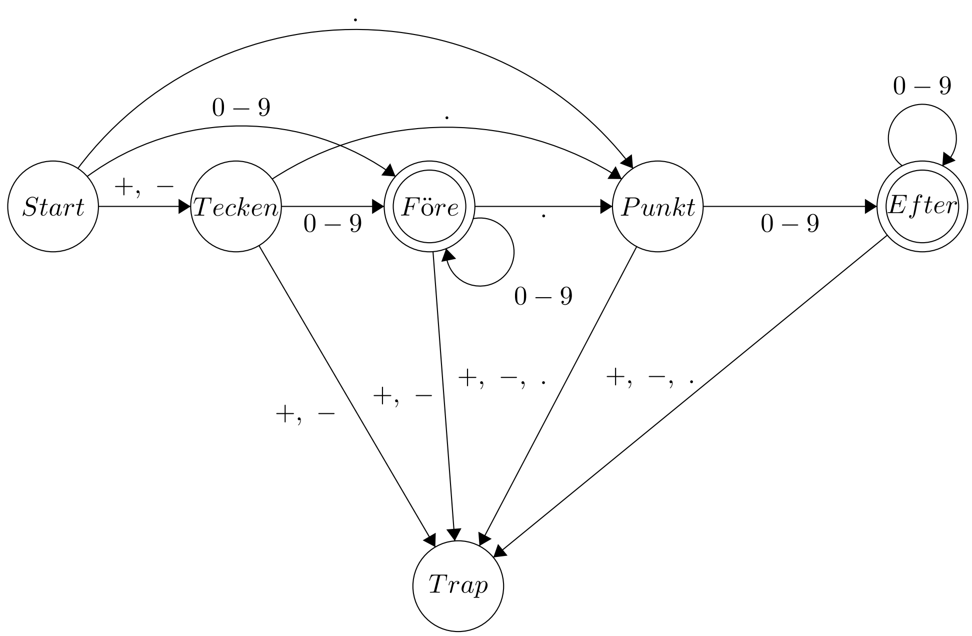
(d) $(0^* + 1)(0 + 1^*)$ - första parentesen är att du möta börja på antingen ett godtyckligt antal nollor eller på en etta. Andra parentesen är att du måste sluta på antingen en nolla eller ett godtyckligt antal ettor. a), d) och e) uppfyller dessa villkor.

Svar: a, d och e

(e) $(0^* + 1^*)^*$ - godtyckligt med ettor eller nollor, upprepat godtyckligt med gånger. Matchar allt.

Svar: a, b, c, d och e

2

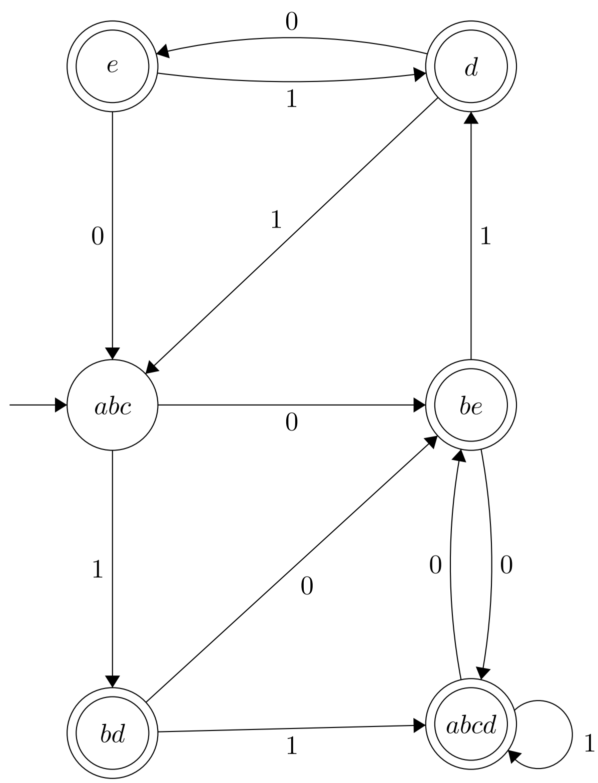


3

Metoden ger följande tabell:

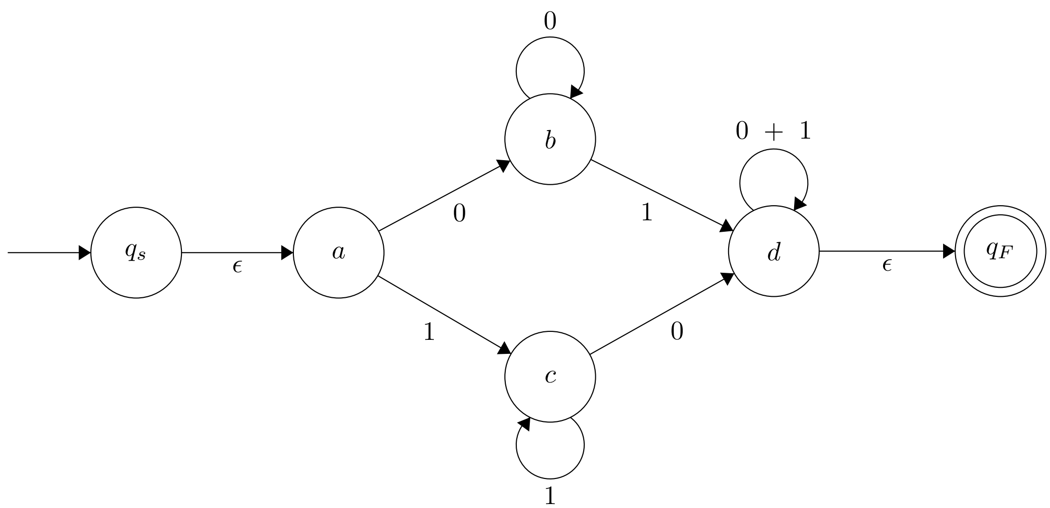
state	**0**	**1**
$\rightarrow \{a,b,c\}$	$\{b,e\}$	$\{b,d\}$
$F\ \{b,e\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{d\}$
$F\ \{b,d\}$	$\{b,e\}$	$\{a,b,c,d\}$
$F\ \{a,b,c,d\}$	$\{b,e\}$	$\{a,b,c,d\}$
$F\ \{d\}$	$\{e\}$	$\{a,b,c\}$
$F\ \{e\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d\}$

Vilket i sin tur ger denna DFA:

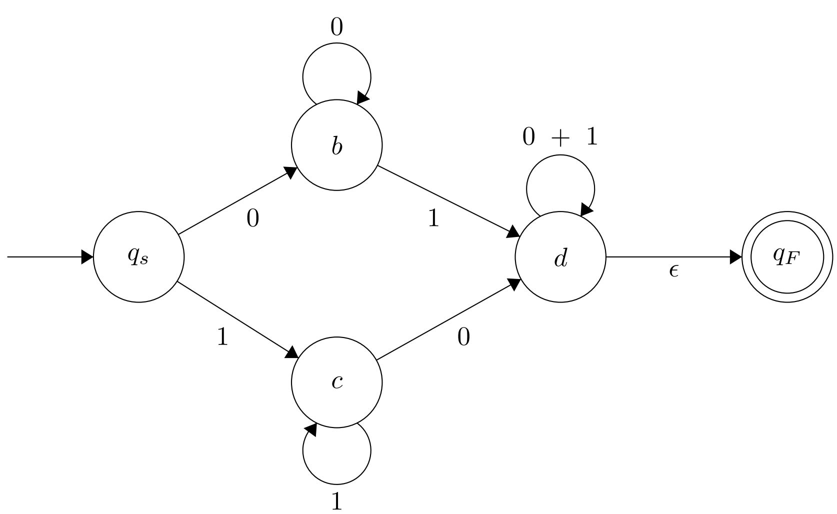


4

Lägg till en startnod q_s och en slutnod q_F till grafen: Börja med att eliminera något state, t.ex. a:

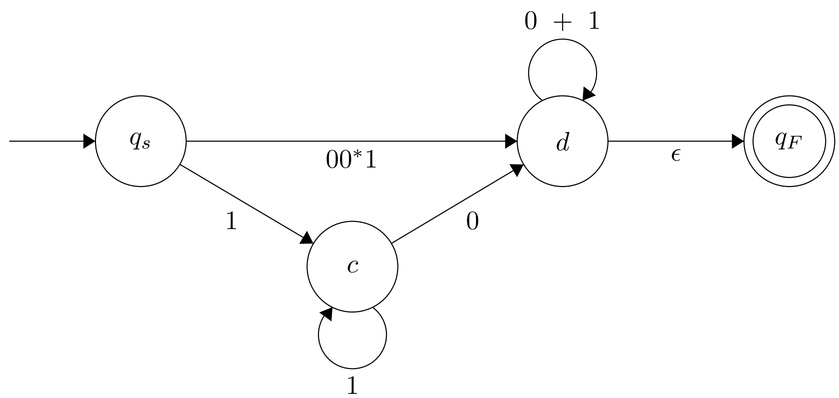


$$q_s \to a \to b: \quad R_1 R_2^* R_3 + R_4 = \varepsilon \emptyset^* 0 + \emptyset = 0$$
$$q_s \to a \to c: \quad R_1 R_2^* R_3 + R_4 = \varepsilon \emptyset^* 1 + \emptyset = 1$$



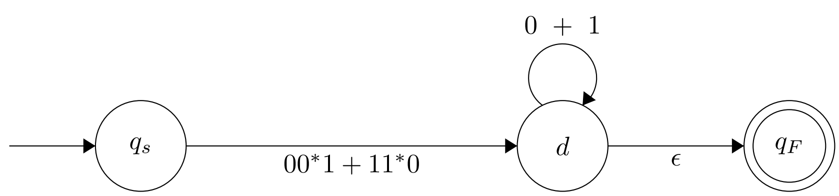
Forsätt med att ta bort state b:

$$q_s \to b \to d: \quad R_1 R_2^* R_3 + R_4 = 00^*1$$



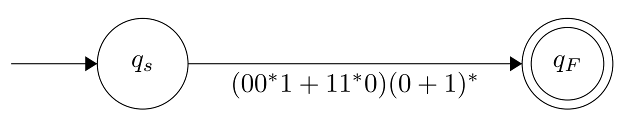
Ta bort c:

$$q_s \to c \to d: \quad R_1 R_2^* R_3 + R_4 = 11^*0$$



Sist ta bort d:

$$q_s \to d \to q_F: \quad R_1 R_2^* R_3 + R_4 = (00^*1 + 11^*0)(0+1)^*$$



Svar: $(00^*1 + 11^*0)(0+1)^*$

5

Vi börjar med att markera alla par av tillstånd där ena är accept och den andra är reject:

a				
0	**b**			
0		**c**		
0			**d**	
0				**e**

Första iterationen:

$$
\begin{aligned}
\{b,c\} &: \{\delta(b,0),\delta(c,0)\} = \{a,e\} \text{ är markerad, markera } \{b,c\}\\
\{b,d\} &: \{\delta(b,0),\delta(d,0)\} = \{a,e\} \text{ är markerad, markera } \{b,d\}\\
\{b,e\} &: \{\delta(b,0),\delta(e,0)\} = \{a\} \text{ är inte markerad, kolla 1}\\
\{b,e\} &: \{\delta(b,1),\delta(e,1)\} = \{d\} \text{ är inte markerad, markera inte}\\
\{c,d\} &: \{\delta(c,0),\delta(d,0)\} = \{e\} \text{ är inte markerad, kolla 1}\\
\{c,d\} &: \{\delta(c,1),\delta(d,1)\} = \{a\} \text{ är inte markerad, markera inte}\\
\{c,e\} &: \{\delta(c,0),\delta(e,0)\} = \{a,d\} \text{ är markerad, så markera } \{c,e\}\\
\{d,e\} &: \{\delta(d,0),\delta(e,0)\} = \{a,e\} \text{ är markerad, så markera } \{d,e\}
\end{aligned}
$$

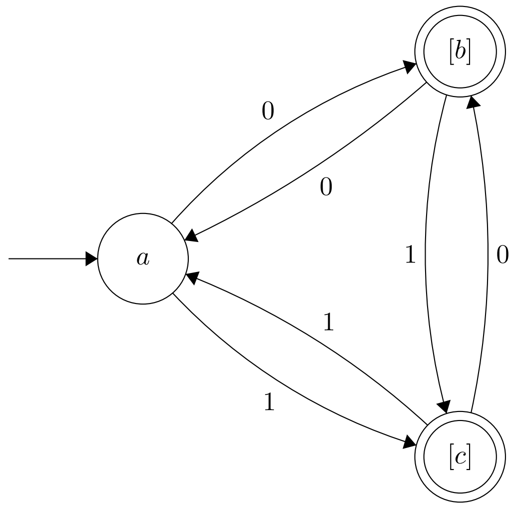
a				
0	**b**			
0	1	**c**		
0	1		**d**	
0		1	1	**e**

Andra iterationen:

$$
\begin{aligned}
\{b,e\} &: \{\delta(b,0),\delta(e,0)\} = \{a\} \text{ är inte markerad, kolla 1}\\
\{b,e\} &: \{\delta(b,1),\delta(e,1)\} = \{d\} \text{ är inte markerad, markera inte}\\
\{c,d\} &: \{\delta(c,0),\delta(d,0)\} = \{e\} \text{ är inte markerad, kolla 1}\\
\{c,d\} &: \{\delta(c,1),\delta(d,1)\} = \{a\} \text{ är inte markerad, markera inte}
\end{aligned}
$$

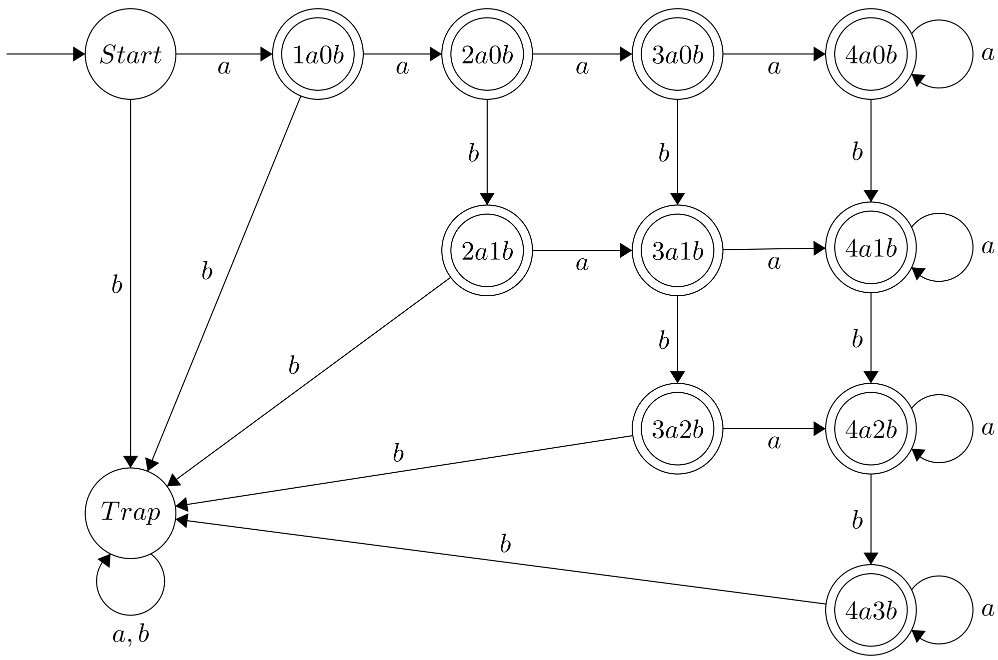
a				
0	**b**			
0	1	**c**		
0	1		**d**	
0		1	1	**e**

Inga ändringar skedde i andra iterationen vilket betyder att vi är färdiga. Vi får att $b \approx e$ och $c \approx d$. Den minimala DFA blir då:



6

(a) Här kan vi skapa en automat som räknar hur många a:s man har i x-led och hur många b:s man har i y-led. Skulle det någonsin hända att $\#a(w) \leq \#b(w)$ så går vi till ett trap-tillstånd.



(b) Välj $s = a^{p+5}\, b^{p+4}$

$s \in L_2$ då det uppfyller det första kravet (dock inte det andra). Vi kan nu välja x, y och z så att $s = xyz$ enligt:

$$
\begin{aligned}
&x = a^k, \quad k > 0 \\
&y = a^m, \quad m > 0, \quad k + m \leq p \\
&z = a^{p-m-k+5}\ b^{p+4}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu pumpa y neråt:

$$xy^0z = a^k a^{p-m-k+5}\, b^{p+4} = a^{p-m+5}\, b^{p+4}$$

Men nu ser vi att mängden a:s är mindre än eller lika med mängden b:s då:

$$p - m + 5 \leq p + 4$$

alltså tillhör inte denna strängen L_2, vilket leder till att pumplemmat inte håller och att L_2 inte är reguljärt.

7

(a) Välj s så att $s \in T$ och att $|s| = 2^p$. Vi kan nu välja x, y och z så att $s = xyz$ enligt:

$$|x] = k, \quad k > 0$$
$$|y| = 1, \quad k + 1 \leq p$$
$$|z| = 2^p - k - 1$$

Om vi nu pumpar y uppåt får vi:

$$|xy^2z| = k + 2 + 2^p - 1 - k = 2^p - 1$$

vilket uppenbart har udda längd och alltså inte tillhör T, och då leder till att T inte är reguljärt enligt pumplemmat.

(b) Definiera $\equiv_T$ så att:

$$x \equiv_T y \text{ omm för varje } z \in \Sigma^*(xz \in T \iff yz \in T)$$

Sedan gör vi ett motsägelsebevis. Antag att:

$$x \equiv_T y \text{ där } |x| = 2^i \text{ och } |y| = 2^k, \quad i \neq k, \quad i, k \in \mathbb{N}$$

Välj $z = \bar{x}$, alltså att $|z| = 2^i$. Då får vi att:

$$xz \in T \text{ då } xz = x\bar{x} \text{ och } |xz| = 2^{i+1}$$

Dock så är:

$$yz \notin T \text{ då } |yz| = 2^k + 2^i \neq 2^{k+1} \text{ då } k \neq i$$

Det är alltså omöjligt för yz att vara ett Thue-Morse-tal då det längden inte kan skrivas som en enda 2-potens.

Vi skulle alltså behöva en unik ekvivalensklass för varje i, vilket innebär ett oändligt antal klasser, alltså kan inte T vara reguljär.