
Analys av lindans

En systematisk analys av strängteori



David COMBLER
Samuel JOHANSSON
Sebastian RAGNARSSON
Jesper WRANG

22 maj 2017

Innehåll

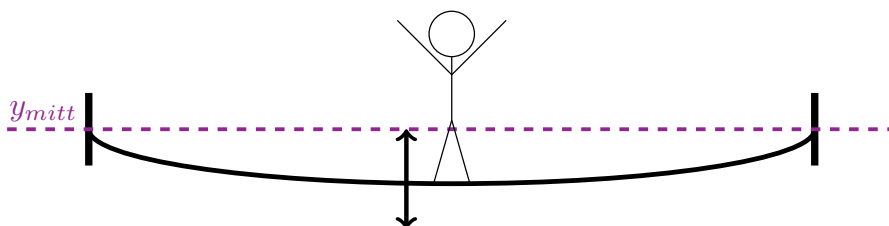
1	Inledning	2
1.1	Modell	3
1.2	Insignal och utsignal	3
1.3	Krafter	3
1.4	Differentialekvation	4
1.5	Linjäritet	5
1.6	Bevis av linjäritet	5
2	Systemanalys	6
2.1	Frekvensdomänen	7
2.2	Systemfunktion	8
2.2.1	Pol-nollställediagram	9
2.3	Impulssvar	12
2.3.1	Val av systemparametrar	13
2.3.2	Variation av impulssvaret	14
2.4	Stegsvar	18
2.4.1	Variation av stegsvaret	20
2.5	Stabilitet	24
2.6	Frekvensfunktion	24
2.7	Amplitudkaraktäristik	25
2.7.1	Variation av amplitudkaraktäristiken	26
2.8	Faskaraktäristik	29
2.9	Stationära sinussignaler	30
2.9.1	Gångtakt	30
2.9.2	Löptakt	32
3	Diskussion	34

1 Inledning

En person står på en lina som är uppspänd mellan två bergskanter. När personen påverkas av en kraft uppstår svängningar i linan. Man skulle exempelvis kunna påverka personen med krafter genom att ge denne vikter eller heliumballonger. Alternativt skulle personen kunna böja på sin ben vilket skulle skapa andra svängningar i linan. Hur linan kommer svänga beror på många variabler till exempel personens vikt, linans längd, var på linan personen står och materialet som linan är gjord av.

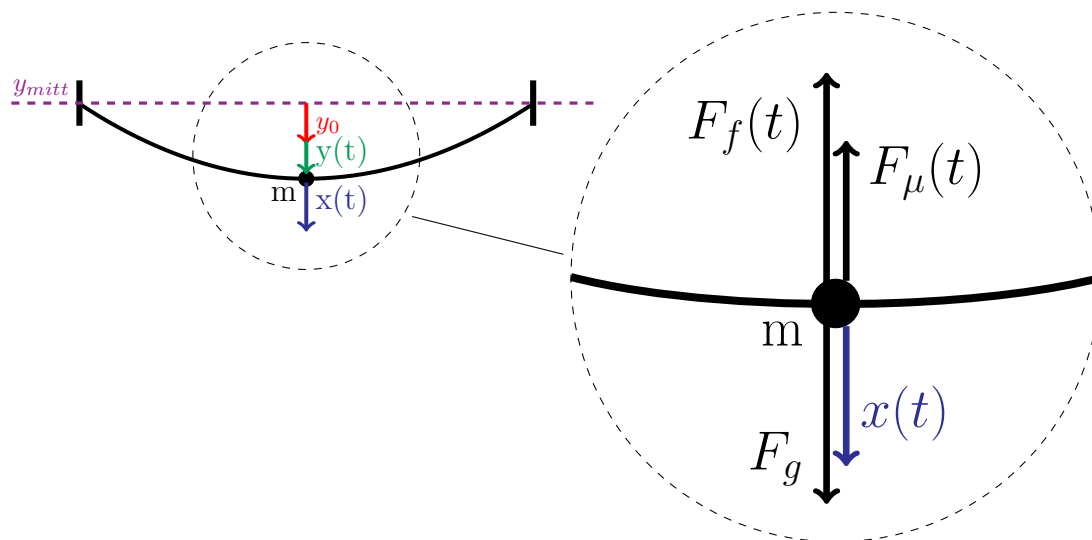
Det kan vara svårt säga hur linan kommer svänga beroende på vilka av de ovanstående händelserna som sker. För att kunna beskriva detta fysikaliskt kommer vi skapa en modell (se Figur 1) för svängningssystemet som ett linjärt tidsinvariant (LTI) system. Dessa system har egenskaper som kan användas för att analysera utsignaler beroende på olika insignaler. I detta fall är insignalen den kraft som verkar på personen. Utsignalen är linans mittpunkts avvikelse från dess jämviktsläge.

Innan vi skapar detta system måste några antaganden göras: linans vikt säger vi är försumbar samt personen och linan kommer inte påverkas av externa variabler som exempelvis väder och temperatur.



Figur 1: En person på en lina i jämviktsläge

1.1 Modell



Figur 2: Modell av systemet med utritade krafter och riktningar

Lindansaren modelleras som en punktformad massa m som sitter i mitten på linan (se Figur 2). Denna massa kommer då röra sig vertikalt när den påverkas av krafter. Den lila streckade horisontallinjen y_{mitt} är systemets referensnivå och utgör en linje mellan linans fästpunkter. y_0 är avståndet från referensnivån y_{mitt} då systemet är i vila.

1.2 Insignal och utsignal

Insignal $x(t)$: en kraft applicerad på massan m i lodrät riktning med positiv riktning nedåt.

Utsignal $y(t)$: en distansavvikelse från y_0 med positiv riktning nedåt.

1.3 Krafter

För att modellera systemet korrekt är det viktigt att beskriva alla involverade krafter som verkar på m (se Figur 2). Nedan följer dessa kraftbeskrivningar.

F_g är tyngdkraften och beskrivs enligt:

$$F_g = mg$$

där g är tyngdaccelerationen. Denna kraft beror inte på positionen av punktmassan och är tidsberoende.

$F_f(t)$ är systemets fjäderkraft. Linan påverkar massan m med $F_f(t)$ på grund av spänningskrafter i linan vars resultant pekar i vertikal riktning. Enligt Hookes lag är denna kraft

motriktad och proportionell mot massan m :s förflyttning från referensnivån y_{mitt} . Eftersom fjäderkraften är motriktad förflyttningen definierar vi positiv riktning för $F_f(t)$ uppåt. Massan m :s förflyttning från y_{mitt} kan beskrivas som $y_0 + y(t)$. Fjäderkraften kan alltså beskrivas som:

$$F_f(t) = k(y_0 + y(t))$$

där k är någon fjäderkonstant.

$F_\mu(t)$ är en friktionskraft som uppkommer på grund av friktion i linan samt luftmotståndet. Denna kraft kan modelleras som en viskös dämpningskraft. En viskös dämpningskraft motverkar hastigheten. Eftersom hastigheten är förstaderivatet av positionen kan denna kraft beskrivas enligt:

$$F_\mu(t) = c \frac{dy(t)}{dt}$$

där c är någon friktionskonstant och positiv riktning för $F_\mu(t)$ är uppåt.

1.4 Differentialekvation

Den resulterande kraften som verkar på m kan skrivas som summan av alla krafter som verkar på m . Vi summerar krafterna med positiv riktning nedåt. Detta gör att krafter definierade med positiv riktning uppåt (se Figur 2) subtraheras. Enligt Newtons andra lag kan den resulterande kraften även skrivas som massan multiplicerat med accelerationen, varpå accelerationen kan uttryckas som lägets andraderivata. Då dessa är ekvivalenta kan vi skriva:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - F_\mu(t) - F_f(t) + F_g$$

Med insättning av uttrycken för $F_\mu(t)$, $F_f(t)$ och F_g samt omflyttning av ekvationen så att alla termer som innehåller $y(t)$ finns i vänsterled och $x(t)$ finns i högerled fås:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + k(y_0 + y(t)) - mg = x(t) \quad (1)$$

I viloläget gäller:

$$x(t) = y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$$

Vid insättning av dessa värden i (1) fås:

$$ky_0 - mg = 0$$

vilket ger följande differentialekvation:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = x(t)$$

Differentialekvationen ovan beskriver förhållandet mellan insignalen $x(t)$ och utsignalen $y(t)$. Denna differentialekvation kommer längre fram i rapporten tillsammans med Laplacetransformen användas för att beskriva diverse systemegenskaper.

1.5 Linjäritet

För att systemet som vi har valt ska vara ett LTI system måste det vara linjärt och tidsinvariant. I denna rapport kommer vi inte visa att systemet är tidsinvariant men vi kommer visa att systemet är linjärt. För att kunna visa detta behöver vi först definiera vad som menas med att system är linjärt. Detta innebär att den ska uppfylla två kriterier: systemet ska vara additivt och det ska vara homogent.

Betrakta ett system där godtyckliga insignaler $x_1(t)$ och $x_2(t)$ ger upphov till utsignalerna $y_1(t)$ respektive $y_2(t)$. För att ett sådant system ska vara additivt måste den sammansatta insignalen $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ge upphov till utsignalen $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Att ett system är homogent innebär att en insignal till systemet multiplicerat med en konstant ger upphov till en utsignal multiplicerat med samma konstant. Det vill säga om en insignal $x(t)$ till systemet ger upphov till en utsignal $y(t)$, ger insignalen $ax(t)$ upphov till utsignalen $ay(t)$, där a är en godtycklig konstant.

1.6 Bevis av linjäritet

För att visa att ett system är linjärt behöver man visa att det uppfyller båda kriterierna som presenterats ovan. Givet att insignalerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ ger utsignalerna $y_1(t)$ respektive $y_2(t)$ så kan man bevisa att båda kriterierna uppfylls genom att visa att insignalen $ax_1(t) + bx_2(t)$ ger utsignalen $ay_1(t) + by_2(t)$, där a och b är godtyckliga konstanter.

Här utnyttjas att $x(t)$ kan bytas ut till differentialekvationen ovan samt det faktum att derivator är linjära.

$$\begin{aligned} x(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ &= a \left(m \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + c \frac{dy_1(t)}{dt} + ky_1(t) \right) + b \left(m \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c \frac{dy_2(t)}{dt} + ky_2(t) \right) \\ &= m \frac{d^2 (ay_1(t) + by_2(t))}{dt^2} + c \frac{d(ay_1(t) + by_2(t))}{dt} + k(ay_1(t) + by_2(t)) \\ &= m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) \end{aligned}$$

där $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. ■

Man ser att insignaler kan slås ihop så att de bildar en ihopslagen utsignal av systemet. Exempelvis är det helt ekvivalent att slänga två 5 kg vikter samtidigt till lindansare som att slänga en vikt på 10 kg.

2 Systemanalys

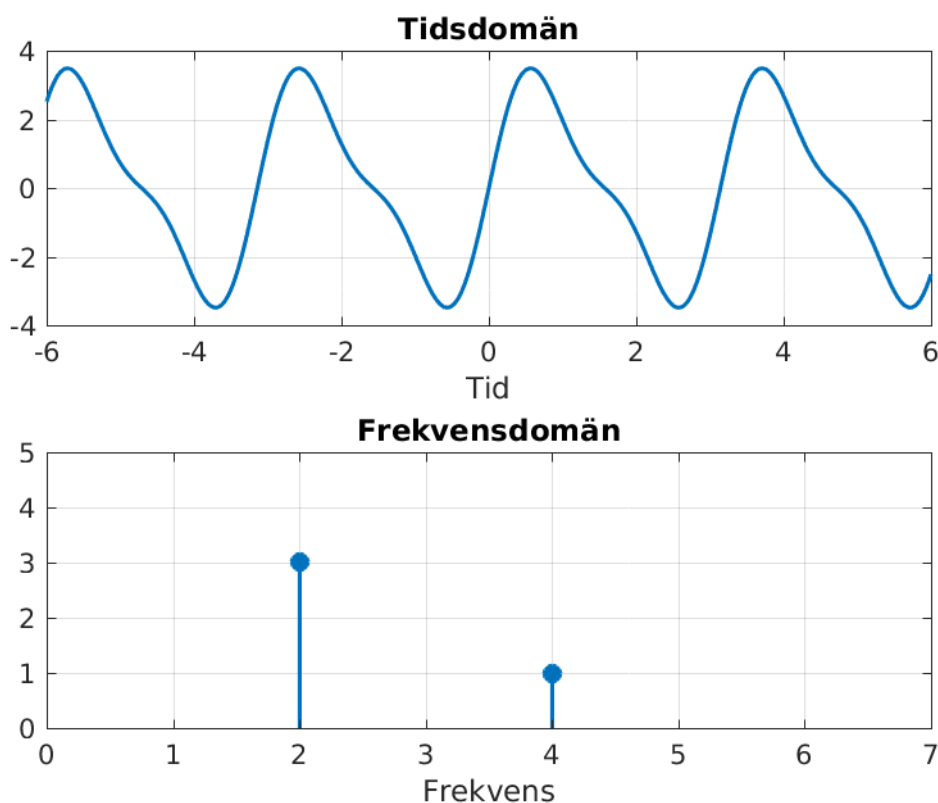
I förra kapitlet togs en differentialekvation fram som beskriver vårt system som en relation mellan insignalen och utsignalen. Utifrån denna differentialekvation kan nu olika systemegenskaper tas fram som gör det möjligt att analysera systemet. Vi kommer få olika system med olika egenskaper beroende på vilka systemparametrar som väljs. Systemparametrarna i vårt fall är massan m , fjäderkonstanten k och dämpningskonstanten c . Exempelvis kommer linan svänga olika beroende på personens vikt.

Systemanalysen kommer titta närmare på följande funktioner: systemfunktionen, impulssvaret, stegsvaret, frekvensfunktionen samt amplitud- och faskaraktärstiken. Vissa av dessa är funktioner som existerar i tidsdomänen och andra i frekvensdomänen. Eftersom det är grundläggande att förstå hur dessa domäner förhåller sig till varandra kommer detta diskuteras kort i nästa kapitel.

2.1 Frekvensdomänen

Tidigare i rapporten har vi betraktat insignalen och utsignalen som funktioner av tid. Vi kommer nu även betrakta hur signalerna beter sig i frekvensdomänen där man istället undersöker vilka frekvenser en signal är uppbyggd av.

Exempelvis kan signalen $x(t) = 3\sin(2t) + \sin(4t)$ ses som summan av två amplituder i tidsdomänen. I frekvensdomänen skulle den dock vara uppdelad i dess frekvenskomponenter, i detta fall två komponenter vid frekvenserna 2 respektive 4 rad/s. Detta visas grafiskt i figuren nedan.



Figur 3: Tidsdomänen och frekvensdomänen av signalen $x(t) = 3\sin(2t) + \sin(4t)$

För systemanalysen kommer vi använda oss av transformer som överför funktioner från tidsdomänen till frekvensdomänen, nämligen Laplacetransformen och Fouriertransformen. Laplacetransformen är ett vanligt verktyg för att lösa differentialekvationer. För att ta sig tillbaka till tidsdomänen från frekvensdomänen kan inverstransformer appliceras.

2.2 Systemfunktion

Systemfunktionen $H(s)$ beskriver förhållandet mellan utsignalen och insignalen i frekvensdomänen. Detta innebär att det går att räkna ut en utsignal om man vet insignalen i frekvensdomänen och systemfunktionen. Det går även att utföra detta i tidsdomänen med faltning men det är oftast enklare att utföra beräkningen i frekvensdomänen.

För att beräkna systemfunktionen kommer hela differentialekvationen för systemet att Laplacetransformeras till frekvensdomänen. Det finns då två versioner av Laplacetransformen som kan användas: den enkelsidiga och den dubbelsidiga. Eftersom vårt system är kausalt, det vill säga att utsignalen inte beror på framtida insignaler, kommer den enkelsidiga transformen att användas. Den enkelsidiga Laplacetransformen för en funktion $x(t)$ definieras som:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

där s är en komplexvärd frekvens vanligtvis betecknad $s = \sigma + j\omega$. Här används versaler för att beteckna funktioner i frekvensdomänen. Denna transform behöver inte vara definierad för alla s utan kan divergera i vissa fall. Därför är det viktigt att ange var den transformerade funktionen är definierad.

Eftersom dessa integralberäkningar kan bli både långa och krångliga kommer vi i denna rapport använda tabellerna i häftet *Formler & Tabeller*¹ för att beräkna Laplacetransformerna. För att transformera differentialekvationen kommer följande samband för derivering i tidsdomänen att användas enligt tabell 18.7:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0-)$$

Då vårt system är energifritt kommer alla $y(0-)$ -termer vara lika med noll. Vår differentialekvation kan alltså Laplacetransformeras enligt:

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t)\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$\Longleftrightarrow \left/ \begin{array}{c} \text{Tabell 18.7, 18.8} \end{array} \right/$$

$$\Longleftrightarrow ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = X(s)$$

Från ekvationen ovan kan nu systemfunktionen $H(s)$ bestämmas då den definieras som kvoten mellan utsignalen och insignalen i frekvensdomänen. Genom att bryta ut termen $Y(s)$ i vänsterledet och sedan dela med $X(s)$ och s -polynomet i båda led ges följande:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

¹Sune Söderkvist, *Formler & Tabeller*, 4:e upplagan (2007)

2.2.1 Pol-nollställediagram

Utifrån systemfunktionen kan nu flera egenskaper om systemet tas fram. Oftast är det intressant att studera nollställena för polynomen i systemfunktionen. Täljarpolynomets rötter kallas systemfunktionens nollställen medan nämnarpolynomets rötter kallas systemfunktionens poler. Man kan direkt se att systemfunktionen inte har några nollställen då täljarpolynomets rötter inte har några rötter. För att hitta polerna måste först rötterna till nämnarpolynomets hittas, detta kan till exempel göras med pq-formeln:

$$ms^2 + cs + k = 0$$
$$\iff s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Här uppstår tre potentiella fall för poler beroende på uttrycket i kvadratroten, den så kallade diskriminanten.

- Om diskriminanten är positiv bildas två skilda reella poler. Kravet är då:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0 \iff \frac{c^2}{4m} > k$$

- Om diskriminanten är noll bildas en reell dubbelpol. Kravet för dubbelpolen är:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \iff \frac{c^2}{4m} = k$$

- Om diskriminanten är negativ bildas två komplexkonjugerade poler. Kravet för komplexa poler är:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0 \iff \frac{c^2}{4m} < k$$

Som nämnts innan behöver inte Laplacetransformen vara definierad för alla s . Var transformen konvergerar i det komplexa planet bestäms av den reella delen av s och kallas konvergensområdet. För kausala system får man högersidiga konvergensområden i det komplexa planet. Då bestäms konvergensområdets vänstra gräns av den pol som är längst till höger. För vårt system får vi två fall för detta beroende på var polerna är placerade.

- Om vi har en reell dubbelpol eller komplexkonjugerade poler är konvergensområdet:

$$\operatorname{Re}\{s\} > -\frac{c}{2m}$$

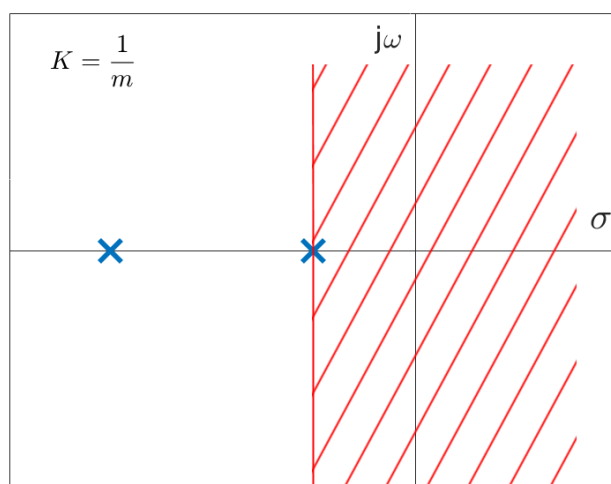
- Om vi har två skilda reella poler blir konvergensområdet:

$$\operatorname{Re}\{s\} > -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

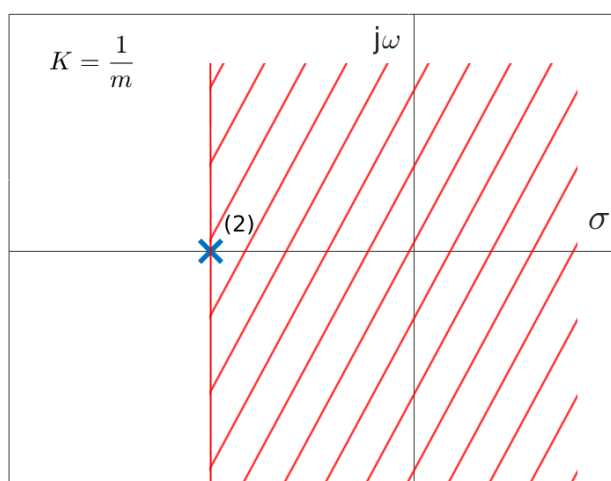
För att få en bättre förståelse av systemfunktionen kommer poler, nollställen och konvergensområdet visas grafiskt i ett pol-nollställediagram. För detta behöver även nivåkonstanten K bestämmas. Denna fås genom att bryta ut koefficienterna för den högsta graden av s i täljar- och nämnarpolynomet. I vårt fall är denna alltid:

$$K = \frac{1}{m}$$

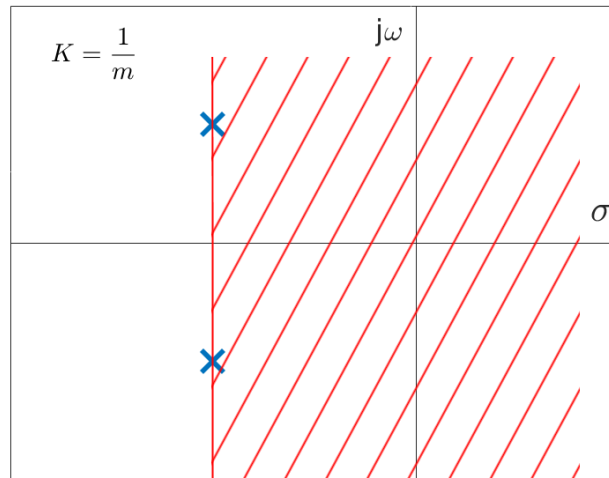
Nedan visas pol-nollställediagramen för de tre olika fallen för polerna. Enligt standardnotation representerar kryssen poler och cirkclar nollställen, dock uppstod inga nollställen. Det rödsträckade området är konvergensområdet.



Figur 4: Pol-nollställediagram för två skilda reella poler



Figur 5: Pol-nollställediagram för en reell dubbelpol



Figur 6: Pol-nollställediagram för två komplexkonjugerade poler

2.3 Impulssvar

Vi ska nu se hur vårt system reagerar på olika typer av insignal. En vanligt signal som studeras är enhetsimpulsen, också kallad Dirac-pulsen, $\delta(t)$. Enhetsimpulsen är noll för alla $t \neq 0$. Vid $t = 0$ är den oändligt stor så att dess area är lika med 1. Det är svårt att föreställa hur detta skulle representera sig fysikalisk i vår modell. Ett ungefärligt exempel skulle vara då man släpper en tennisboll från en hög höjd som träffar personen på huvudet och studsar bort.

Impulssvaret $h(t)$ är utsignalen då ett system tar emot en enhetsimpuls som insignal. Denna kan räknas ut genom att inverstransformera systemfunktionen $H(s)$. Vi kommer återigen att använda tabeller för dessa beräkningar då integralerna är jobbiga att räkna ut. Man får istället problemet att skriva om uttrycken så att de matchar något i tabellen. Då det finns tre uppsättningar av poler kommer impulssvaret för dessa räknas ut separat.

- Vid två skilda reella poler kan vi faktorisera rötterna i nämnarpolynomet och partialbråksuppdelas för att hitta en lämplig inverstransform.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}} = \left/ \alpha = \frac{c}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \right/ \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s + \alpha - \omega_0)(s + \alpha + \omega_0)} = \frac{1}{2m\omega_0} \left(\frac{1}{s + \alpha - \omega_0} - \frac{1}{s + \alpha + \omega_0} \right) \\ &\iff \left/ \text{Tabell 19.12} \right/ \iff h(t) = \frac{1}{2m\omega_0} \left(e^{-(\alpha - \omega_0)t} - e^{-(\alpha + \omega_0)t} \right) u(t) \end{aligned}$$

- Vid reell dubbelpol kvadratkompletteras nämnarpolynomet och utnyttjas att $\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2} = 0$.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{c}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{c}{2m}\right)^2} \\ &\iff \left/ \alpha = \frac{c}{2m}, \text{Tabell 19.15} \right/ \iff h(t) = \frac{1}{m} \cdot t e^{-\alpha t} u(t) \end{aligned}$$

- För komplexkonjugerade poler kvadratkompletteras nämnarpolynomet precis som innan. Sedan anpassas uttrycket med hjälp av förlängning för att överensstämma med tabellen.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{c}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)} = \left/ \alpha = \frac{c}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \right/ \\ &= \frac{1}{m\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \iff \left/ \text{Tabell 19.23} \right/ \iff h(t) = \frac{1}{m\omega_0} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) \end{aligned}$$

2.3.1 Val av systemparametrar

För att kunna visualisera och analysera impulssvaren måste först systemparametrarna bestämmas. Dessa bestämmer hur systemen beter sig och är i vårt fall de tre hittills obestämda konstanterna massan m , fjäderkonstanten k och dämpningskonstanten c . Vi bestämmer en standarduppsättning för systemparametrarna. För att se hur system med olika parameteruppsättningar skiljer sig åt kommer en parameter i taget varieras medan de andra två hålls konstanta.

Valet av systemparametrar baseras på scenariot som beskrivs i inledningen. Den första parametern som kommer bestämmas är massan. Denna bestäms vara 75 kg, vilket är den ungefärliga medelvikten hos svenska män och kvinnor enligt Statistiska centralbyrån. Nästa parameter är fjäderkonstanten som härleds från differentialekvationen i viloläget, där konstanten k kan skrivas som:

$$k = \frac{mg}{y_0}$$

Vi måste därför bestämma en rimlig utdragning av linan i viloläget för att sedan räkna ut k . Vi anser att en rimligt utdragning av linan är 0.5 m efter att studerat bilder och filmklipp av riktiga lindansare. Vi antar att jordens tyngdacceleration g kan approximeras till 9.82 m/s^2 . Då beräknas fjäderkonstanten till:

$$k = \frac{75 \cdot 9.82}{0.5} = 1473 \text{ N/m}$$

Sist har vi dämpningskonstanten c som är svår att bestämma. Denna kan bestämmas till exempel experimentellt genom att mäta hur mycket systemet dämpar en insignal. Detta är inte möjligt i vårt fall och vi behöver därför resonera oss fram till ett rimligt värde. Dämpningskonstanten kommer bestämma typen av system alltså vilken typ av poler som bildas. Vi vill att systemet dämpar signaler så lindansaren har lättare att balansera sig på linan. Man vill fortfarande ha lite gung i linan men det ska vara väldigt begränsat. Vi får denna effekt då vi har två skilda reella poler och kravet för det var:

$$\frac{c^2}{4m} > k$$

Löser vi ut c och stoppar in värdena från innan får vi:

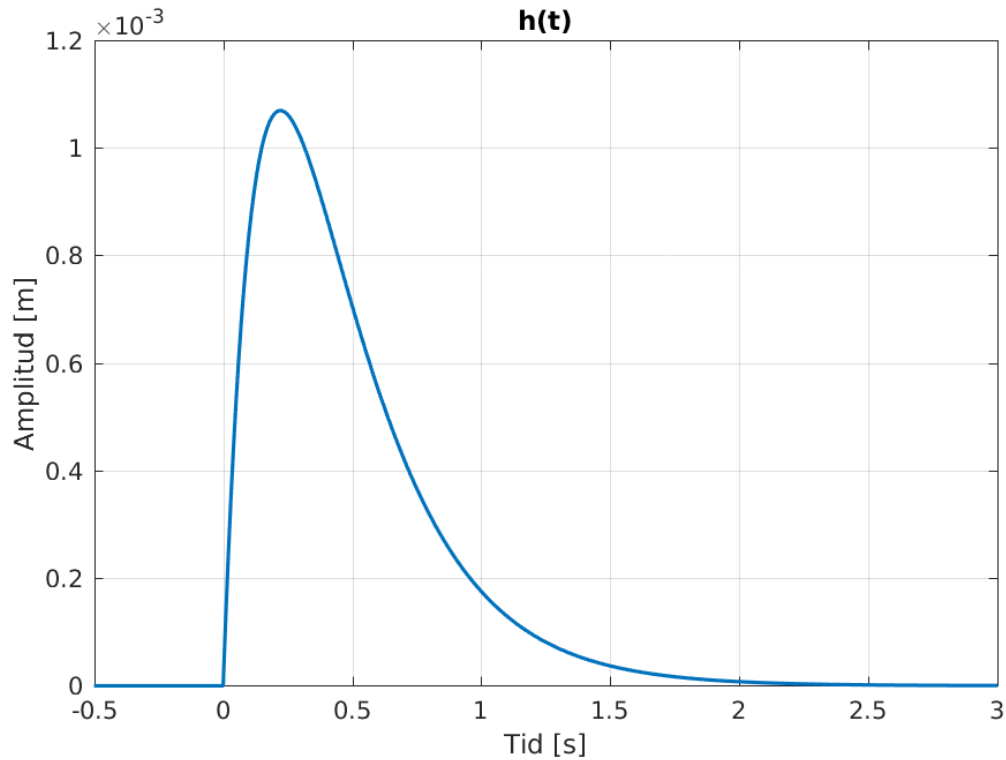
$$c > \sqrt{4km} = \sqrt{4 \cdot 1473 \cdot 75} \approx 665$$

Vi väljer att $c = 700 \text{ kg/s}$ för att skapa trevliga värden när vi utför beräkningar på systemet. Standardparameteruppsättningen sammanställs då som:

$$\begin{cases} m = 75 \text{ kg} \\ k = 1473 \text{ N/m} \\ c = 700 \text{ kg/s} \end{cases}$$

2.3.2 Variation av impulssvaret

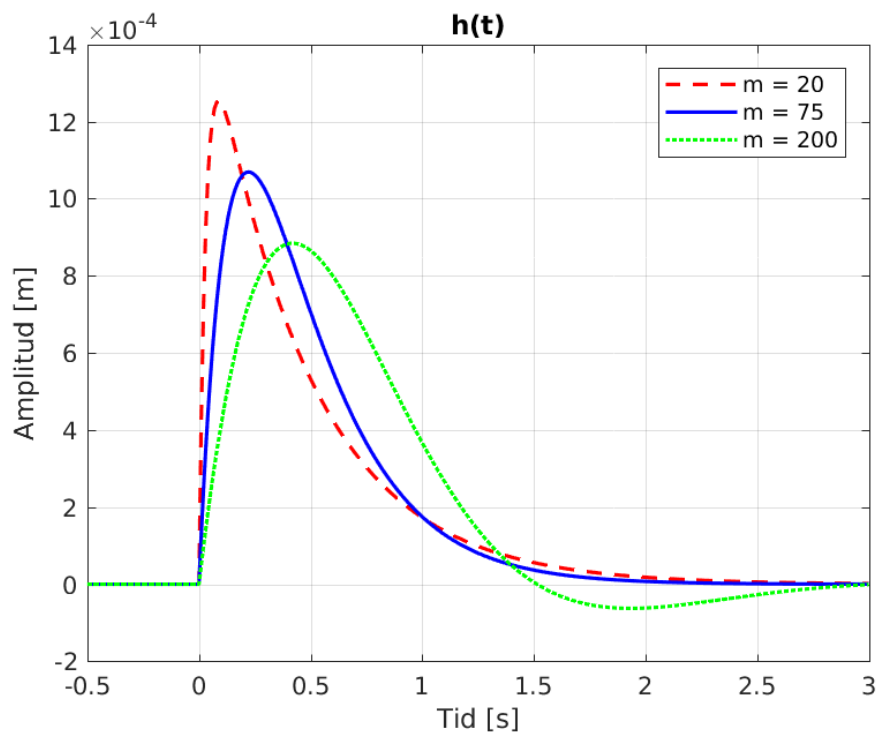
Vi ska nu undersöka impulssvaret grafiskt för de parametrar vi har valt och vad som händer om vi ändrar på dessa. Först är vi intresserad av hur impulssvaret beter sig med vår standardparameteruppsättning alltså att $m = 75$ kg, $k = 1473$ N/m och $c = 700$ kg/s. Detta visas i figuren nedan.



Figur 7: Impulssvar med standardparameteruppsättning

Vi ser att impulssvaret snabbt avtar och efter cirka två sekunder är linan ungefär tillbaka till den position där den startade. Den oscillerar inte kring viloläget vilket var den effekt vi ville åt.

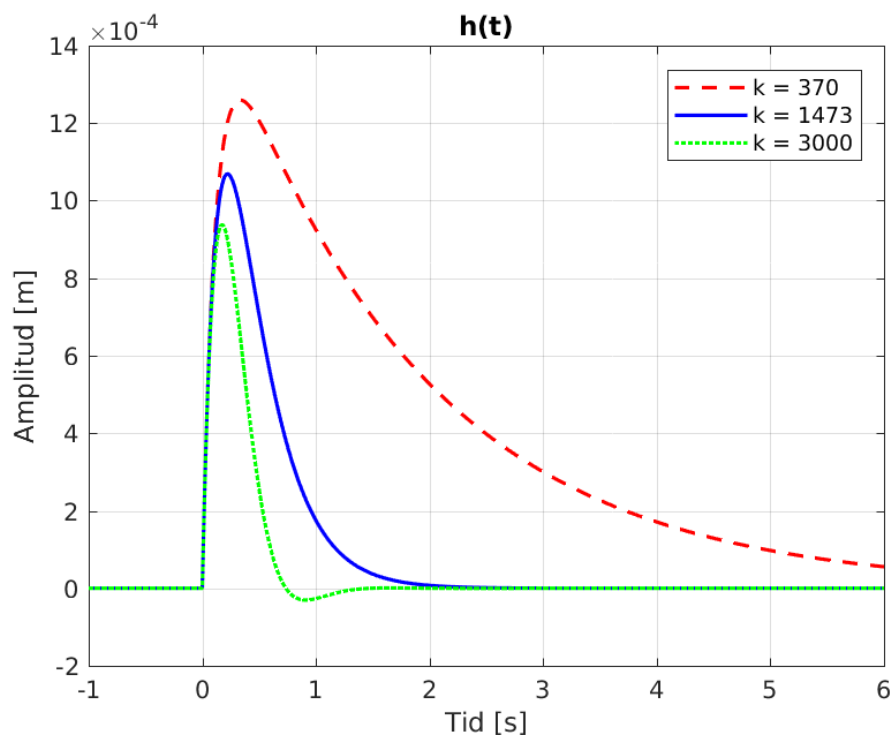
Följande figur illustrerar vad som händer då massan m varierar. För att lätt kunna se vad som skiljer sig åt jämförs standardmassan med massorna 20 kg och 200 kg. I verkligheten skulle detta vara att personer med olika vikt står på linan.



Figur 8: Impulssvar med varierande massa

Vi ser att lättare personer når en högre amplitud och gör det snabbare än tyngre personer. Detta är rimligt eftersom tröghet gör att tyngre personer accelereras mindre av en lika stor kraft än lättare personer. Däremot innebär också trögheten att tyngre personer kräver mer motstånd för att stanna.

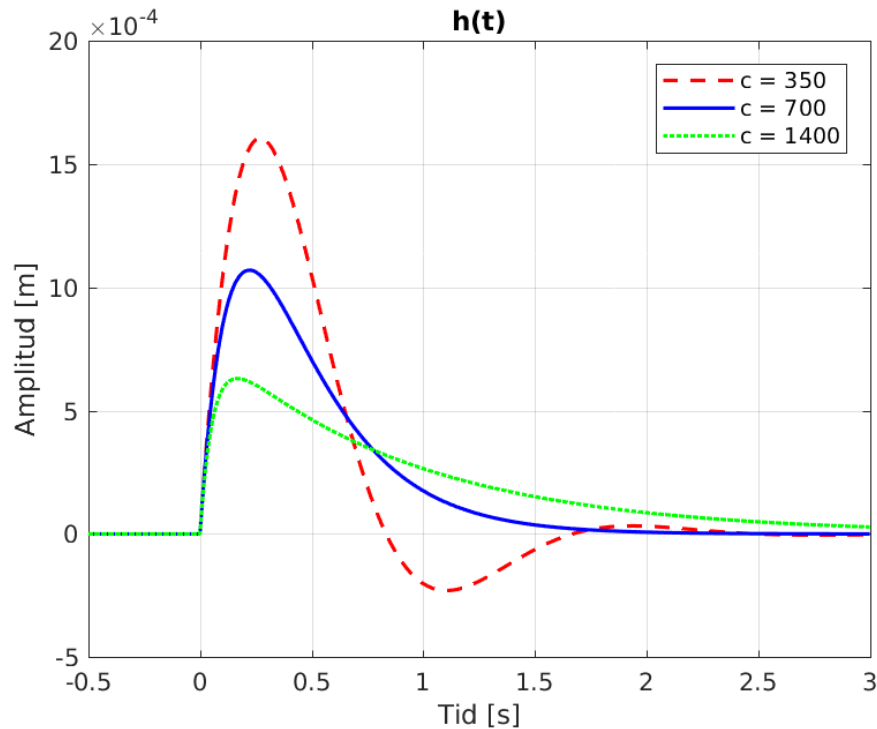
För att få rimliga värden på k betraktas linans utdragslängd y_0 från mittpunkten i olika lägen. Vi studerar utdragslängerna 2 m och 0.25 m. Detta ger fjäderkonstanen 370 N/m respektive 3000 N/m. I verkligheten kan man få liknande effekt genom att spänna linan olika hårt eller flytta ändpunkterna närmre eller längre bort från varandra. Figuren nedan visar impulssvaret för de olika fjäderkonstanterna.



Figur 9: Impulssvar med varierande fjäderkonstant

Här ser vi tydligt att en lägre fjäderkonstant gör att massan tar mycket längre tid att ta sig tillbaka till viloläget. Tänker man det som hur hårt linan är spänd känns det rimligt då en hårdare spänd lina snabbare tar sig tillbaka till utgångsläget.

Nedan undersöks vad som händer då dämpningskonstanten c ändras. I verkligheten skulle liknande effekt fås om man ändrar linans materialet, till exempel från ett rep till en vajer. I figuren nedan visas impulssvaret då dämpningskonstanten halveras samt fördubblas.



Figur 10: Impulssvar med varierande dämpningskonstant

Vid lägre dämpningskonstant så dämpar systemet mindre och vi får en högre amplitud. Vid låg dämpning så går den också över viloläget då den inte har hunnit dämpa signalen tillräckligt. I de andra två fallen minskar den utan oscillation och med en lägre toppamplitud desto högre dämpningskonstanten är.

2.4 Stegsvär

En annan insignal vi ska studera är enhetssteget $u(t)$. Detta är en plötslig förändring av insignalen från 0 till 1 enligt:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t \geq 0 \\ 0, & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

När ett system matas med ett enhetssteg får man stegsvaret $g(t)$ som utsignal. Detta kan i vårt system representeras av att en vikt kastas till personen på linan. Eftersom vårt system är linjärt kan denna utsignal beräknas genom att falta enhetssteget med impulssvaret som har beräknats innan. Denna uträkning kan sedan förenklas till en integral över bara impulssvaret enligt:

$$g(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

Våra tre typer av generella system ger upphov till tre olika impulssvar och kommer därför även ge upphov till tre olika stegsvar. För att förenkla beräkningen av dessa tre stegsvar behåller vi variabelbytena som valdes då impulssvaren beräknades. Eftersom alla impulssvar har en faktor av enhetssteget ges inget bidrag till faltningsintegralen då $t < 0$. Nedan beräknas vad som händer då $t \geq 0$.

- Vid två skilda reella poler kan vi direkt integrera exponentialfunktionerna.

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{2m\omega_0} \left(e^{-(\alpha-\omega_0)\tau} - e^{-(\alpha+\omega_0)\tau} \right) u(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2m\omega_0} \int_0^t \left(e^{-(\alpha-\omega_0)\tau} - e^{-(\alpha+\omega_0)\tau} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2m\omega_0} \left[\frac{e^{-(\alpha+\omega_0)\tau}}{(\alpha+\omega_0)} - \frac{e^{-(\alpha-\omega_0)\tau}}{(\alpha-\omega_0)} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{1}{2m\omega_0(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left((\alpha - \omega_0)e^{-(\alpha+\omega_0)t} - (\alpha + \omega_0)e^{-(\alpha-\omega_0)t} + 2\omega_0 \right) \end{aligned}$$

- Vid dubbelpol används en partiell integration för att lösa integralen.

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{1}{m} \int_0^t \tau e^{-\alpha\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{m} \left[\frac{\tau e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{1}{m\alpha} \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{m\alpha^2} \alpha t e^{-\alpha t} + \frac{1}{m\alpha} \left[\frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{1}{m\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha t}(\alpha t + 1) \right) \end{aligned}$$

- Vid komplexkonjugerade poler används upprepad partiell integration tills man får tillbaka uttrycket man hade från början och kan på så sätt lösa ut stegsvaret.

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{m\omega_0} \left[\frac{e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau)}{-\alpha} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{1}{m\alpha} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0\tau) d\tau \\
&= -\frac{e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)}{m\omega_0 \alpha} + \frac{1}{m\alpha} \left[\frac{e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0\tau)}{-\alpha} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{\omega_0}{m\alpha^2} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau) d\tau \\
&= -\frac{e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)}{m\omega_0 \alpha} + \frac{1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)}{m\alpha^2} - \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} g_1(t) \\
\iff g_1(t) &= \frac{\omega_0 - e^{-\alpha t}(\alpha \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t))}{m\omega_0(\alpha^2 + \omega_0^2)}
\end{aligned}$$

Eftersom dessa tre stegsvar bara gäller då $t \geq 0$ kommer de multipliceras med enhetssteget för ett fullständigt stegsvar enligt:

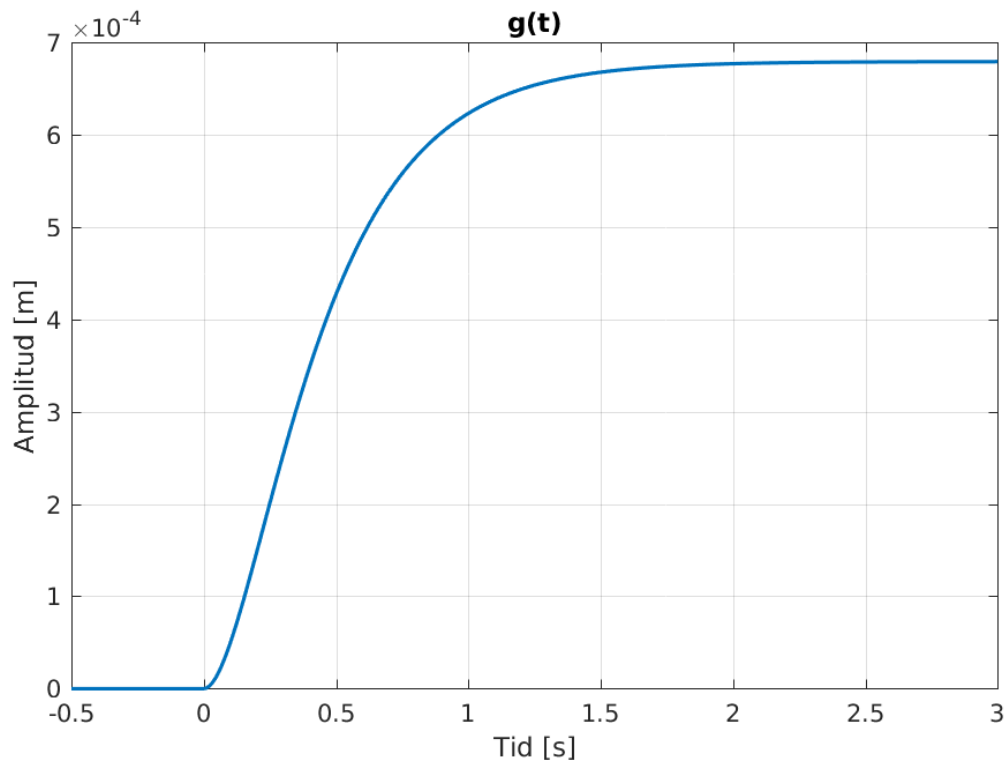
$$g(t) = g_1(t) \cdot u(t)$$

Detta ger att stegsvaren för reella poler, dubbelpol respektive komplexa polerna blir:

$$\left\{ \begin{aligned} g(t) &= \frac{(\alpha - \omega_0)e^{-(\alpha+\omega_0)t} - (\alpha + \omega_0)e^{-(\alpha-\omega_0)t} + 2\omega_0}{2m\omega_0(\alpha^2 - \omega_0^2)} u(t) \\ g(t) &= \frac{1 - e^{-\alpha t}(\alpha t + 1)}{m\alpha^2} u(t) \\ g(t) &= \frac{\omega_0 - e^{-\alpha t}(\alpha \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t))}{m\omega_0(\alpha^2 + \omega_0^2)} u(t) \end{aligned} \right.$$

2.4.1 Variation av stegsvaret

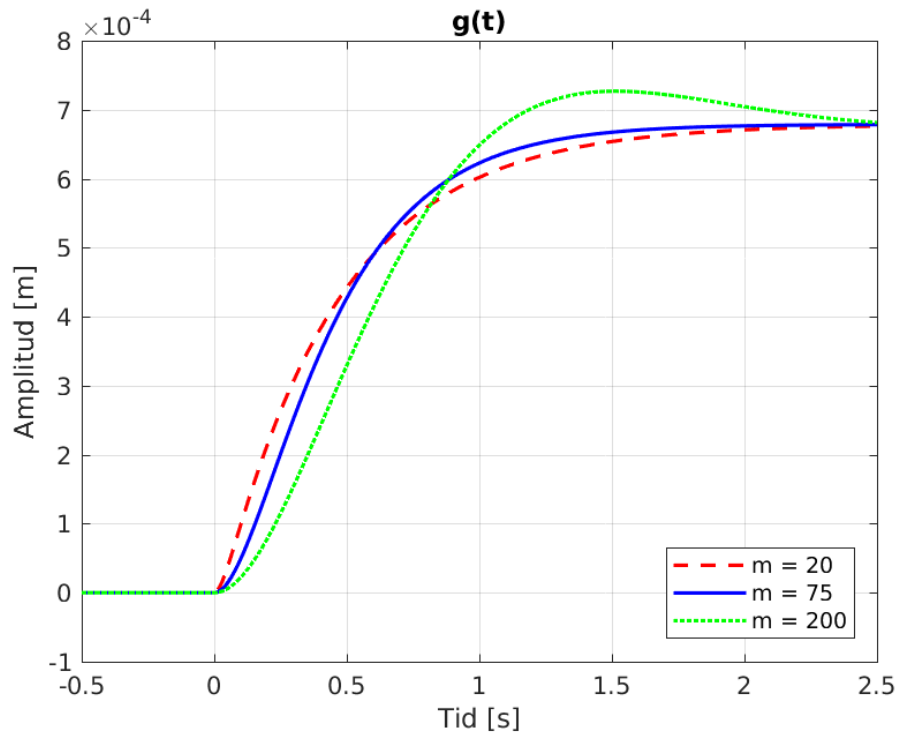
Vi vill nu se hur stegsvaret beter sig för olika parameteruppsättningar. För att se hur impulssvaret och stegsvaret relaterar till varandra kommer vi använda samma parametrar som vi gjorde för variationen av impulssvaret. Återigen betraktar vi först vad som händer med vårt system med standardparameteruppsättningen, alltså då $m = 75$ kg, $k = 1473$ N/m och $c = 700$ kg/s. Detta görs nedan i figuren.



Figur 11: Stegsvar med standardparameteruppsättningen

Vi ser att efter cirka 1.5 sekunder har den nått ett nytt läge längre ned. Detta görs utan oscillation kring de nya viloläget. Detta skulle i verkligheten vara som att kasta en vikt på ungefär 0.1 kg till lindansaren.

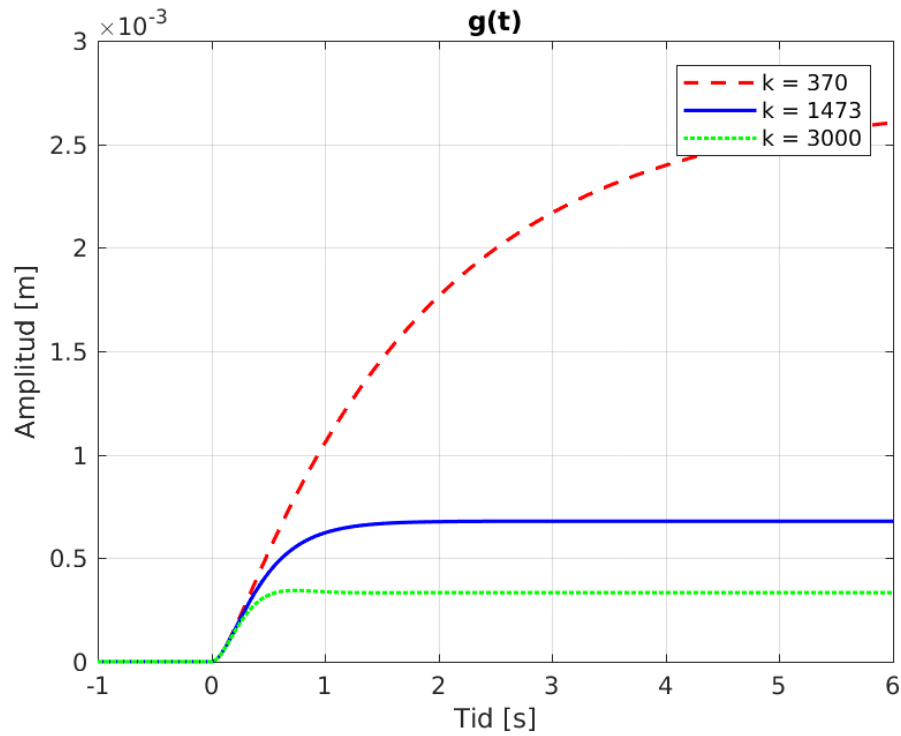
Nu vill vi kolla vad som händer då massan förändras. Återigen används massorna 20 kg och 200 kg som representerar en lättare och tyngre person på linan. I figuren nedan ser vi hur stegsvaret beter sig då massan ändras.



Figur 12: Stegsvär med varierande massa

Här syns inte så stor skillnad på de tre olika massorna, de närmar sig det nya höjdläget vid ungefär samma tidpunkt. Den tyngre massan tar längre tid på sig att börja röra sig men kommer även längre ned än de andra två samt skapar oscillation. Vi kan också notera att massan inte påverkar nivåkonstanten då dessa går mot samma jämviktsläge.

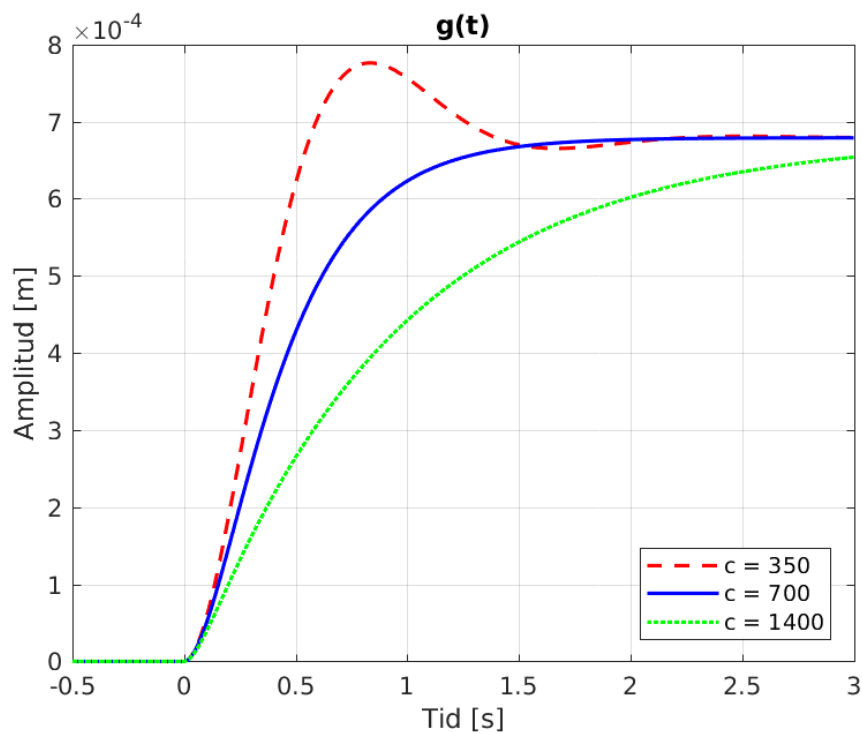
Härnäst ska fjäderkonstanen variera mellan 370 N/m, 1473 N/m och 3000 N/m, vilket gäller då linan är utdragen 2 m, 0.5 m respektive 0.25 m från mittpunkten. Figuren nedan visar hur stegsvaret beter sig vid dessa värden.



Figur 13: Stegsvär med varierande fjäderkonstant

Vi ser direkt att fjäderkonstanten påverkar det läge som personen svänger mot. Som för impulssvaret innebär en lägre fjäderkonstant att det tar längre tid att komma till ett nytt jämviktsläge. Detta är rimligt då man kan se på fjäderkonstanten som att den beskriver hur hårt linan är spänd.

Sist varierar vi dämpningskonstanten c med att både halvera och dubblara den. Denna graf visas nedan.



Figur 14: Stegsvär med varierande dämpningskonstant

Likt impulssvaret leder en hög dämpningskonstant till en kraftigare dämpning. Intressant nog kommer stegsvaret för de lägre dämpningskonstanterna snabbare till det nya läget än för den höga konstanten.

2.5 Stabilitet

För att bestämma systemets frekvensfunktion måste impulssvaret vara fouriertransformerbart vilket kräver att systemet är stabilt. Ett stabilt system är ett system där begränsade insignaler alltid ger begränsade utsignaler. För att bestämma om ett system är stabilt eller inte finns olika tillvägagångssätt. Ett sätt att bestämma detta är att titta på impulssvaret. Om impulssvaret är absolutintegrerbart så är systemet stabilt. Att impulssvaret är absolutintegrerbart innebär att:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Ett annat sätt att bestämma om systemet är stabilt är att kolla på konvergensområdet för systemfunktionen. Om den imaginära axeln, $j\omega$ -axeln, är i konvergensområdet så är systemet stabilt. Detta gäller alltid för vårt system vilket kan ses i pol-nollställediagrammen för systemfunktionen i kapitel 2.2.1. Egentligen krävs också att $m, k, c > 0$ men detta har antagits för att modellen ens ska vara meningsfull.

2.6 Frekvensfunktion

För att se hur vårt system påverkar signaler av olika frekvenser kommer vi betrakta systemets frekvensfunktion $H(\omega)$. Frekvensfunktionen är Fouriertransformen av impulssvaret $h(t)$. För att Fouriertransformen ska existera krävs att systemet är stabilt vilket visades i föregående kapitel. Vidare är Fouriertransformen ett specialfall av Laplacetransformen där variabeln $s = j\omega$. Frekvensfunktionen har alltså bara den reella vinkelfrekvensen ω som argument. Med insättning av $s = j\omega$ i systemfunktionen $H(s)$ fås:

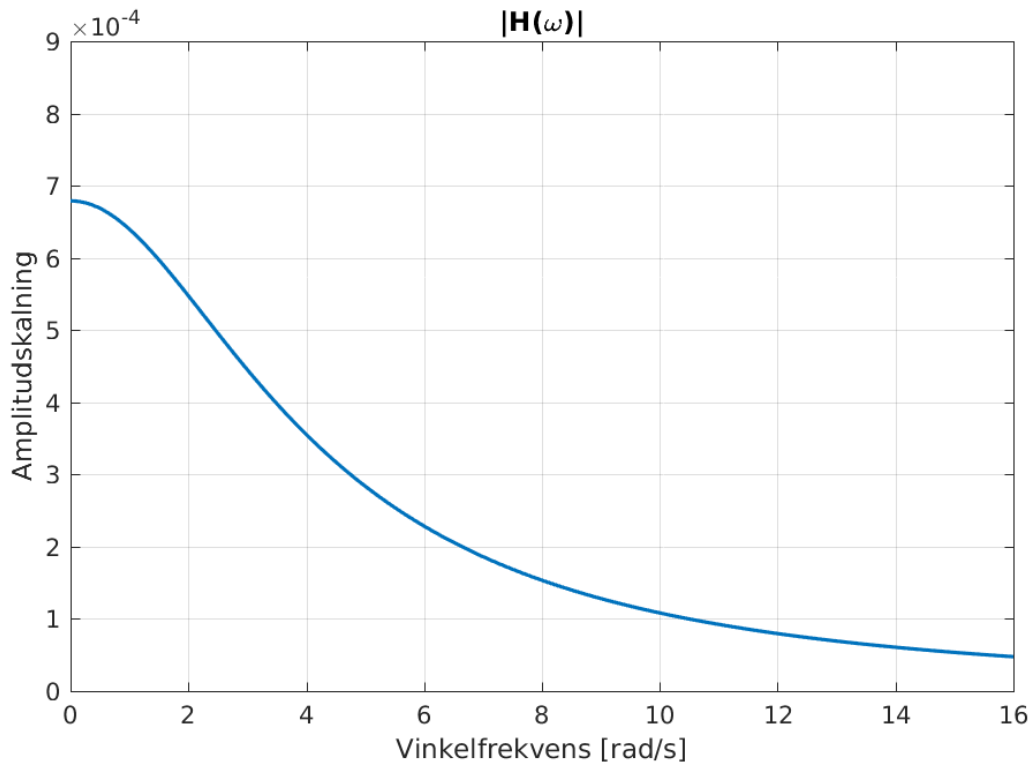
$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{m(j\omega)^2 + cj\omega + k}$$

2.7 Amplitudkaraktäristik

Vi kommer nu undersöka hur systemet påverkar utsignalens amplitud beroende på frekvensens insignalen. Amplitudkaraktäristiken är absolutbelopet av frekvensfunktionen och visar hur systemet dämpar och förstärker vissa signaler.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|m(j\omega)^2 + cj\omega + k|} = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

Det allra första som kommer undersökas är vad som händer med amplituderna för vår standardparameteruppsättning, alltså då $m = 75$ kg, $k = 1473$ N/m och $c = 700$ kg/s. Detta visas i figuren nedan.



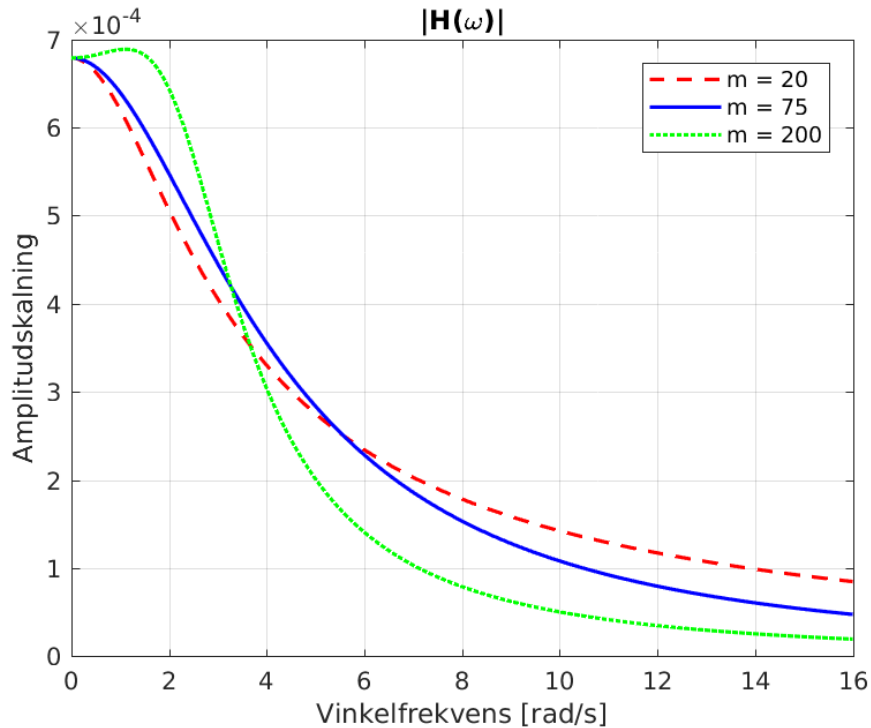
Figur 15: Amplitudkaraktäristik med standardparameteruppsättning

Vi ser att systemet släpper igenom låga frekvenser och dämpar höga frekvenser. Detta system beter sig som ett lågpasfilter. Då vi har olika enheter på insignal och utsignal, en kraft respektive en längd, är det svårt att tolka hur mycket som faktiskt förstärks eller dämpas vid en viss vinkelfrekvens. Vi kan utifrån grafen se att gränsvinkelfrekvensen är ungefär 2.5 rad/s, det vill säga då:

$$|H(\omega)| = \frac{\max\{|H(\omega)|\}}{\sqrt{2}} \approx \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 5$$

2.7.1 Variation av amplitudkaraktäristiken

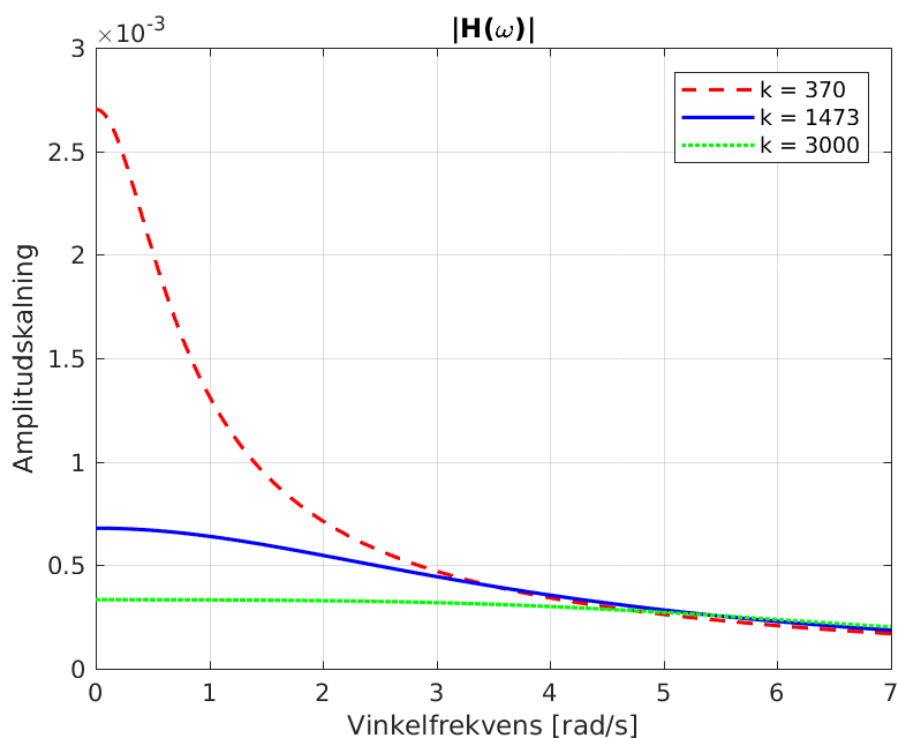
Vi ska nu undersöka hur amplitudkaraktäristiken beter sig med olika parameteruppsättningar. Först kollar vi vad som händer då massan ändras, vilket görs i figuren nedan.



Figur 16: Amplitudkaraktäristik med varierande massa

Vi ser att en tyngre massa ger en skarpare kurva. Vill man ha högre amplituder vid låga frekvenser ska man ha en stor vikt. Detta verkar rimligt då en större person är svårare att accelerera men svänger mer då den får upp fart. Betraktar vi pol-nollställediagrammet för systemen ger $m = 200$ komplexkonjugerade poler, medan $m = 20$ och $m = 75$ båda har två reellvärda poler. För en reell dubbelpol och för två reellvärda poler är amplitudkaraktäristikens topp vid $\omega = 0$, medan komplexkonjugerade poler innebär att toppen hamnar vid en nollskild vinkelfrekvens.

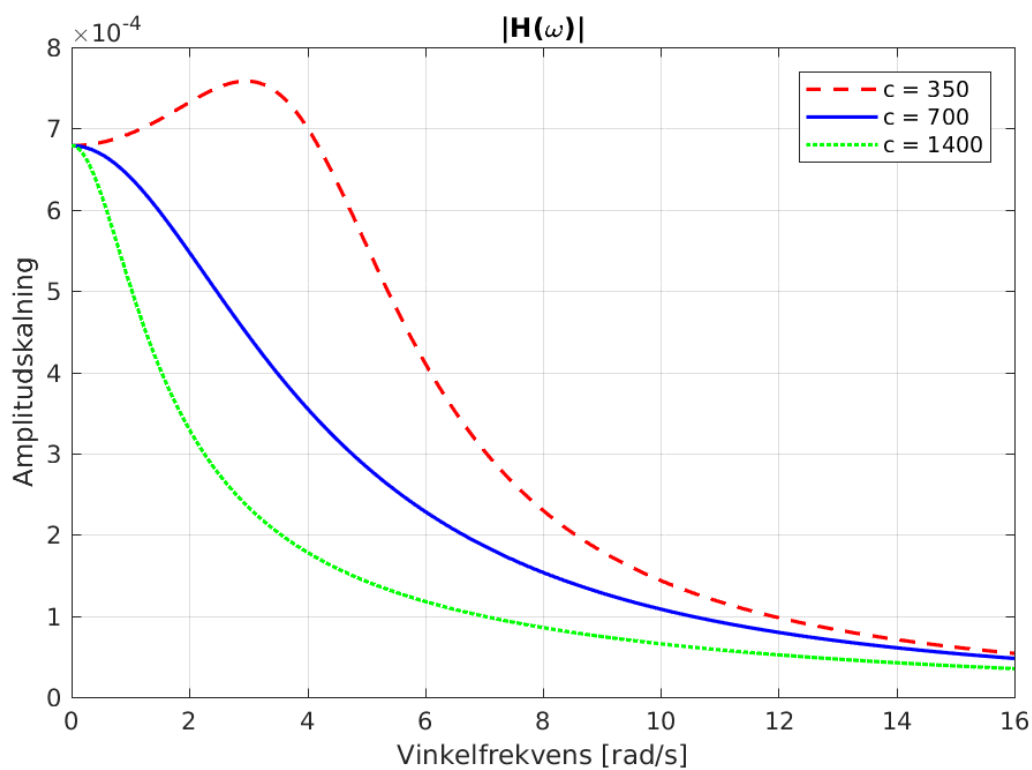
I figuren nedan betraktas vad som händer med amplitudkaraktärstiken då fjäderkonstanten ändras mellan låga och högra värden.



Figur 17: Amplitudkaraktärstik med varierande fjäderkonstant

Här ser vi hur fjäderkonstanten har en direkt koppling till amplituden vid låga frekvenser. Ju lösare linan är spänd desto högre vill linan svänga. Detta jämnas ut vid cirka 5 rad/s då fjäderkonstantens påverkan drastiskt minskar. Detta är på grund av att lägesförändringen blir mycket liten vid hög frekvens och fjäderkraften motverkar läget.

Härnäst kommer vi se hur amplitudkaraktärstiken beter sig när dämpningskonstanten ändras. Igen väljer vi att halvera och dubblera konstanten vilket visas i figuren nedan.



Figur 18: Amplitudkaraktärstik med varierende dämpningskonstant

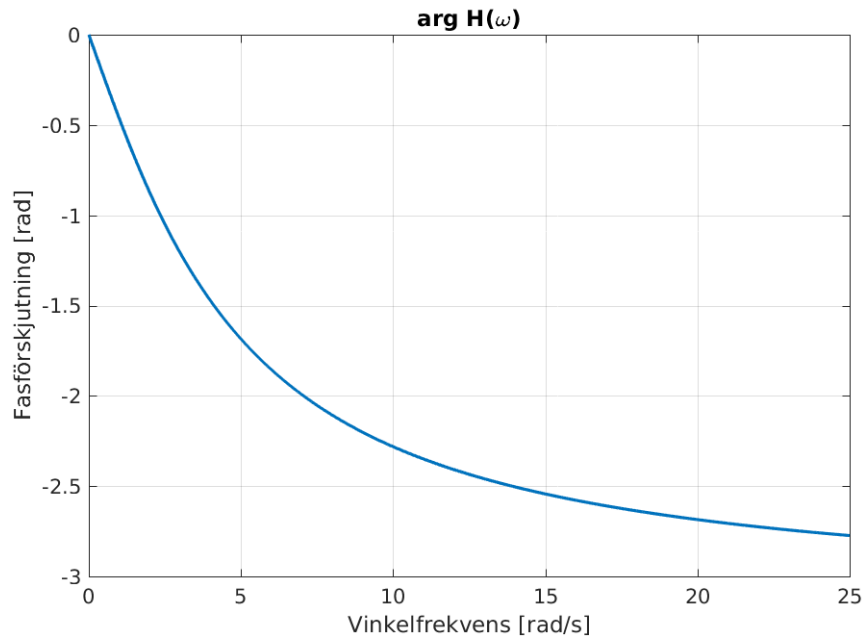
Vi ser generellt att en högre dämpningskonstant dämpar mer för alla frekvenser. Vid en lägre dämpningskonstant bildas komplexkonjugerade poler i frekvensdomänen vilket betyder att toppen av amplitudkaraktärstiken flyttas åt höger. I det fallet får vi en nollskild resonansfrekvens, vilket i grafen kan avläsas vara ungefär 3 rad/s.

2.8 Faskaraktäristik

Faskaraktäristiken beskriver hur mycket systemet förskjuter en signal i fas beroende på frekvensen. Denna kan tas fram genom att ta argumentet för frekvensfunktionen enligt:

$$\arg\{H(w)\} = \arg\{1\} - \arg\{k - m\omega^2 + jc\omega\} = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right), & \text{om } k - m\omega^2 > 0 \\ -\arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) - \pi, & \text{om } k - m\omega^2 < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{om } k - m\omega^2 = 0 \end{cases}$$

I grafen nedan visas faskaraktäristiken för vår standardparameteruppsättning.



Figur 19: Faskaraktäristik med standardparameteruppsättning

Vi ser att vårt system fastförskjuter signaler med högre frekvenser mer än lägre. Man kan alltså säga att systemet reagerar bättre på långsamma förändringar än snabba. Argumentet kommer i detta fall gå mot $-\pi$ då frekvensen går mot oändligheten. Detta kan bevisas då det för stora ω gäller att:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} -\arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) - \pi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\arctan\left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{c}{\frac{k}{\omega^2} - m}\right) - \pi = -\arctan(0) - \pi = -\pi$$

Då faskaraktäristiken inte är intressant för vårt system kommer vi inte analysera den något ytterligare.

2.9 Stationära sinussignaler

När ett LTI-system matas med en godtycklig sinusfunktion som insignal får vi en utsignal $y(t)$ som kan beräknas med hjälp av frekvensfunktionen $H(\omega)$. Om vi till exempel matar systemet med insignalen:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

får vi en utsignal som kan beräknas med hjälp av frekvensfunktionen enligt:

$$y(t) = A |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg\{H(\omega_0)\})$$

Vi ser att utsignalen är en amplitudskalad och fastförskjuten version av insignalen. Detta gör det enkelt att beräkna utsignalen om insignalen är en sinusfunktion och frekvensfunktion är bestämd. Vi ska nu se hur vårt system reagerar på olika typer av sinusfunktioner med olika frekvenser.

2.9.1 Gångtakt

Den första frekvensen som kommer analyseras är en som liknar takten en riktig lindansare skulle gå i. Detta för att få en ungefärlig känsla över hur systemet svänger i ett verkligt scenario. Kraften en person påverkar linan med då denne går i jämn takt kan modelleras som en sinusvåg. När personen böjer sitt ben minskas tillfälligt kraften personer påverkar linan med och när personen sträcker ut sitt ben ökar kraften tillfälligt.

Kraften personen påverkar linan med och vinkelfrekvensen måste approximeras. Kraften kan approximeras genom experiment då en person står på en våg och upprepat böjer på sina ben. Det visar sig att denna kraft är ungefär 200 N. Vinkelfrekvensen kan också approximeras via experiment. Då vi prövade att gå i normaltakt fick vi en periodtid på cirka 1 sekund. Genom vidare observationer av videoklipp av lindansare såg vi att detta stämde bra överens med det vi kom fram till innan. Periodtiden kan användas för att bestämma vinkelfrekvensen enligt:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \iff \omega_0 = 2\pi$$

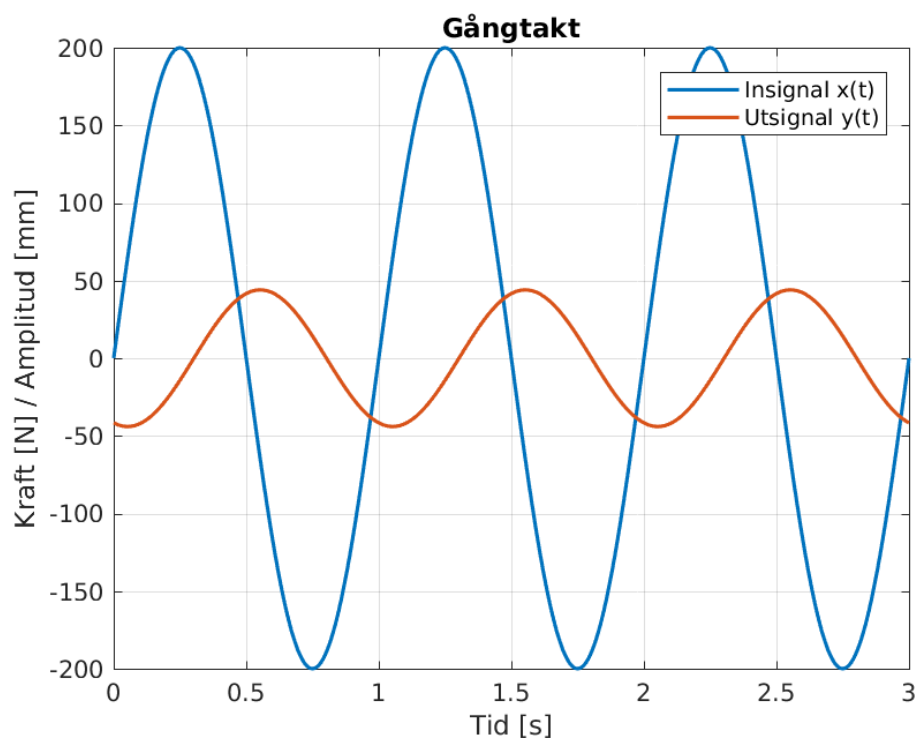
Insignalen kan då skrivas som:

$$x(t) = 200 \sin(2\pi t)$$

Detta ger följande amplitudskalade och fasförskjutna utsignal:

$$\begin{aligned} y(t) &= 200 |H(2\pi)| \sin(2\pi t + \arg\{H(2\pi)\}) \\ &= \left/ |H(2\pi)| \approx 0.00022, \arg\{H(2\pi)\} \approx -1.90 \right/ \\ &\approx 0.044 \sin(2\pi t - 1.90) \end{aligned}$$

Här nedan ses insignalen och utsignalen då personen går på linan. Notera att den blå insignalen har enheten newton och röda utsignalen är i millimeter.



Figur 20: Insignal och utsignal för gångtakten. $x(t)$ mäts i N och $y(t)$ i mm

Vi ser att systemet släpper igenom den lågfrekventa signalen och bildar stora svängningar i linan. Toppamplituden är ungefär 5 cm, alltså en positiv lägesförändring på 5 cm då man går och bildar en maximal förändring på 10 cm. Detta är en ganska stor förändring och det skulle förmodligen vara svårt att balansera sig på denna lina då man går.

2.9.2 Löptakt

Det är vanligt att lindansare inte bara går utan även springer fram på linan. Därför betraktar vi även hur vårt system beter sig vid löptakt. Precis som för gången kan kraften personen påverkar linan med modelleras som en sinusfunktion. Då man springer trycker man ifrån linan mer än då man går så amplituden kommer att vara något högre. En rimlig approximation på sinusfunktionens amplitud är 250 N. Dessutom kommer frekvensen att vara högre. Videoklipp där lindansare springer fram på linan visar att en vanlig takt är tre till fyra steg per sekund. Vi väljer att betrakta fallet då personen tar tre steg per sekund. Periodtiden blir då $1/3$ sekund.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 6\pi$$

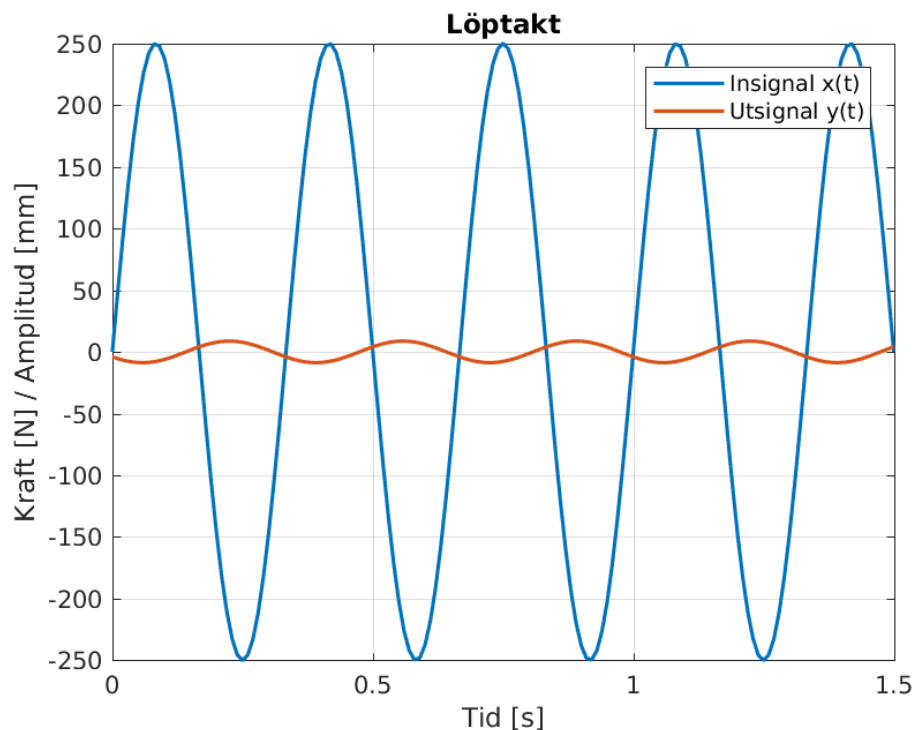
Vilket ger den sinusformade insignalen:

$$x(t) = 250 \sin(6\pi t)$$

Likt innan blir utsignalen amplitudskalad och fasförskjuten. Utsignalen blir:

$$\begin{aligned} y(t) &= 250 |H(6\pi)| \sin(6\pi t + \arg\{H(6\pi)\}) \\ &= \left/ |H(6\pi)| \approx 0.000035, \arg\{H(6\pi)\} \approx -2.66 \right/ \\ &\approx 0.00875 \sin(6\pi t - 2.66) \end{aligned}$$

Sist betrakar vi hur insignalen och utsignalen för löptakten förhåller sig till varandra i följande figur.



Figur 21: Insignal och utsignal för löptakten. $x(t)$ mäts i N och $y(t)$ i mm

Vi ser att amplituden blir mycket lägre då man springer på linan än då man går trots att man påverkar linan med en något större kraft då man springer. Detta stämmer bra överens med den amplitudkaraktäristiken som vi betraktade tidigare. Det går alltså att springa på linan för att undvika stora svängningar och på så sätt få bättre balans. I verkligheten görs detta så klart bara då man inte dör av ett eventuellt fall då man förlorar viss kontroll av att springa. Så precis som det oftast är i livet är en gyllene medelväg att föredra.

3 Diskussion

För att skapa en hanterlig modell krävdes vissa förenklingar. En sådan förenkling var att vi endast betraktade längsriktningen och höjdriktning. I verkligheten är svängningar i sidriktning betydligt svårare att hantera för en lindansare, men uppstår i något mindre grad än svängningar i höjdriktningen. Några andra förenklingar var att vi såg personen som en punktmassa med endast en kontaktpunkt med linan och vi bortsåg från vind, temperatur och linans egna vikt. Betraktar man videoklipp av riktiga lindansare tycks vår modell stämma bra överens med verkligheten trots alla förenklingar. För att faktiskt testa hur väl vår modell stämmer överens skulle vi behöva experimentera med en verklig lina och lindansare. Vi hade dock inte resursers nog att genomföra detta.

Då rampsvar inte kändes relevant för vårt system valdes analysen av denna insignal bort. Att lindansaren påverkas av en linjärt växande kraft är inte en realistisk situation. Till skillnad från impulssvaret ger inte rampsaret någon vidare förståelse för systemets fundamentala egenskaper och är inte nödvändigt för beräkandet av andra systembeskrivande funktioner.