

AMA - FORMULARI BÀSIC

VALOR ABSOLUT EN \mathbb{R} (UT1)

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad ; \quad |x| \geq b \Leftrightarrow (x \geq b \text{ o } x \leq -b) \quad ; \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

FUNCIONS REALS DE VARIABLE REAL (UT2)

Funció parella: $f(-x) = f(x)$, Funció senar: $f(-x) = -f(x)$

Funcions exponencials: $a^x > 0$, $a^0 = 1$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x / a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$

Funcions logarítmiques:

$$\begin{aligned} \log_a(1) &= 0, \quad \log(e) = 1, \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y), \\ \log_a(x^y) &= y \log_a(x), \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{aligned}$$

Funcions trigonomètriques: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1; \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x); \quad \cos(-x) = \cos(x); \quad \sin(-x) = -\sin(x) \\ \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b) \quad ; \quad \cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \end{aligned}$$

Propietats de les derivades:

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x), \quad (\alpha f)'(x) = \alpha f'(x), \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Derivades de funcions elementals:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1} \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \log'_a(x) &= \frac{1}{x \log(a)} \\ (a^x)' &= a^x \log(a) \\ \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Creixement/Decreixement: $f'(x) > / < 0 \Rightarrow f$ estrictament creixent/decreixent

Extrems relatius: $f'(x) = 0$ i $f''(x) > / < 0 \Rightarrow f$ té mínim/màxim relatiu en x

Concavitat/Convexitat: $f''(x) > / < 0 \Rightarrow f$ còncava/convexa

Punts d'inflexió: f té punt d'inflexió en $x \Rightarrow f''(x) = 0$

INTEGRACIÓ DE RIEMANN (UT3)

f monòtona en $[a, b] \Rightarrow f$ integrable en $[a, b]$, f contínua en $[a, b] \Rightarrow f$ integrable en $[a, b]$

f, g integrables en $[a, b] \Rightarrow \alpha f + \beta g$ i $f \cdot g$ integrables en $[a, b]$ però $\int_a^b f \cdot g \neq \left(\int_a^b f\right) \left(\int_a^b g\right)$

f, g integrables en $[a, b]$ i $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$; $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Àrea (plana) del recinte limitat per $y = f(x)$ i OX , entre $x = a$ i $x = b$: $A = \int_a^b |f|$

Regla de Barrow : f integrable en $[a, b]$ i $h' = f$ (h primitiva de f) en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f = h(b) - h(a)$

Primitives immediates:

$$\int k dx = kx + c$$

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, (p \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$$

$$\int u^p(x) u'(x) dx = \frac{u^{p+1}(x)}{p+1} + c, (p \neq -1)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + c$$

$$\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{u(x)} + c$$

$$\int a^{u(x)} u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln(a)} + c, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \cos(u(x)) u'(x) dx = \sin(u(x)) + c$$

$$\int \sin(u(x)) u'(x) dx = -\cos(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} dx = \tan(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} dx = -\cot(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} dx = \arcsin(u(x)) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = \arctan(u(x)) + c$$

Integració per parts : $\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f' \cdot g$

Integració per canvi de variable : $\int_{a=g(c)}^{b=g(d)} f = \int_c^d (f \circ g) g' ; x = g(t) \text{ cdv}$

INTEGRACIÓ APROXIMADA (UT3)

Fórmula de Trapezis: $T_n f = \frac{h}{2} (f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)) ; h = \frac{b-a}{n}$

Cota d'error: $E_n = \left| \int_a^b f - T_n f \right| \leq \frac{nh^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 ; M_2 \geq \max_{[a,b]} |f''|$

Fórmula de Simpson : $S_n f = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n/2-1} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(a + 2kh) + f(b) \right)$
(n parell)

Cota d'error: $E_n = \left| \int_a^b f - S_n f \right| \leq \frac{nh^5}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 ; M_4 \geq \max_{[a,b]} |f^{(iv)}|$

SUCCESSIONS (UT4)

$$a > 1 \Rightarrow \lim(a^n) = +\infty \quad ; \quad |a| < 1 \Rightarrow \lim(a^n) = 0$$

$$\text{Fórmula d'Euler: } (a_n) \rightarrow 1, (b_n) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = e^{\lim\{b_n(a_n-1)\}}$$

$$\text{Stolz (quotient): } (b_n) \text{ creixent, } (b_n) \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(a_{n+1} - a_n)}{(b_{n+1} - b_n)}$$

Ordres de magnitud (a_n i b_n de termes positius i divergents a $+\infty$):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} l \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a_n \in \Theta(b_n) \text{ i direm } a_n \approx b_n \text{ (del mateix ordre)} \\ 0 \Rightarrow a_n \in O(b_n) \text{ i direm } a_n \ll b_n \\ +\infty \Rightarrow a_n \in \Omega(b_n) \text{ i direm } a_n \gg b_n \end{cases}$$

Recurrències lineals (2^{on} ordre i coeficients constants; mètode aplicable a primer ordre):

$$\text{Cas homogeni: } a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0 \text{ ; eq. característica: } r^2 + pr + q \stackrel{r_1, r_2}{=} 0$$

$$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n^h = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \text{ ; } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n^h = c_1 r^n + c_2 n \cdot r^n \text{ ; } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$r_1 = \rho_\alpha, r_2 = \rho_{-\alpha} \in \mathbb{C} \Rightarrow a_n^h = \rho^n (c_1 \cos(n\alpha) + c_2 \sin(n\alpha)) \text{ ; } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Cas complet: } a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = t_n \text{ ; } (t_n = P(n), k^n, P(n)k^n)$$

$$a_n^c = a_n^h + u_n \text{ ; amb } u_n \text{ solució particular semblant a } t_n \text{ (coef. indeterminats)}$$

CONVERGÈNCIA DE SÈRIES NUMÈRIQUES (UT5)

$$\text{Condicció (criteri) del residu: } \sum a_n \text{ convergeix} \Rightarrow (a_n) \rightarrow 0$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ (harmònica generalitzada) convergeix} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\text{Criteri de Leibniz: } \sum (-1)^{n+1} a_n, a_n > 0; (a_n) \text{ decreixent i } (a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n \text{ C}$$

SUMA DE SÈRIES NUMÈRIQUES (UT5)

$$\text{Sèrie geomètrica (Suma exacta): } \sum_{n=p}^{\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r},$$

$$\text{Sumes aproximades: } \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = s \text{ (convergeix per Leibniz)} \Rightarrow E_n = |s - s_n| \leq a_{n+1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n = s, \text{ amb } |A_n| \leq cK^n \Rightarrow E_n = |s - s_n| \leq \frac{cK^{n+1}}{1-K} \end{cases}$$

SÈRIES DE POTÈNCIES (UT6)

Tota sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ és convergent en un interval de la forma $I =]-\rho, \rho[$, $\rho \in [0, +\infty]$

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, |x| < \rho \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, |x| < \rho. \text{ Per derivació successiva: } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ \int f = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C, |x| < \rho \end{cases}$$

$$\text{Fórmula de McLaurin: } f(x) = f(0) + f'(0)x + \overbrace{\frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}^{P_n f(x)} + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}}^{R_n f(x)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1 \quad ; \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$$