Tema 2: Conjunts i relacions (bloc 1)

1. Conjunts
2. Operacions
3. Recobriments i particions
4. Correspondències

Definició de conjunt

Definició

Un *conjunt* és una col·lecció d'objectes ben definida. Aquests objectes s'anomenen *elements* del conjunt.

NOTACIÓ:

- Els conjunts solen denotar-se amb lletres majúscules: $A, B, C, \ldots$
- Els elements (genèrics) d'un conjunt solen denotar-se amb lletres minúscules.
- Si C és un conjunt i a és un element de C, $a \in C$ significa «a pertany a C» i $a \notin C$ significa «a no pertany a C».

Definició

Dos conjunts A i B es diu que són *iguals* si tenen exactament els mateixos elements. Se simbolitza $A = B$.

El *conjunt buit* ($\emptyset$) és aquell que no té cap element.

Formes de definir un conjunt

- Per extensió: expressant, entre claus, tots els seus elements separats per comes. Exemple:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

- Per comprensió: Mitjançant una propietat que caracteritza als elements del conjunt. Per exemple, el conjunt A anterior podria definir-se per comprensió de la següent manera:

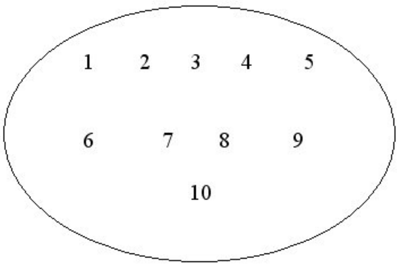
$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}.$$

  $\mathbb{N}$ és la manera usual de denotar el conjunt dels nombres naturals. Pot llegir-se «A és el conjunt dels elements x que pertanyen a $\mathbb{N}$ tals que són majors o iguals que 1 i menors o iguals que 10». En lloc del símbol $\mid$ per a representar «tal que», a vegades apareixen dos punts:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10\}.$$

Diagrames de Venn

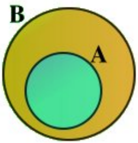
Una manera molt útil para visualitzar les propietats dels conjunts és mitjançant els anomenats *diagrames de Venn*:



Subconjunts

Definició

Donats dos conjunts A i B, es diu que A és un *subconjunt* de B o que *A està inclòs en B* si tots els elements de A pertanyen també a B. Es simbolitza $A \subseteq B$.



- Donat un conjunt C, $\emptyset$ i C són dos subconjunts de C.
- Donats dos conjunts A i B, es té que

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ i } B \subseteq A$$

Parts de un conjunt

Definició

Si C és un conjunt qualsevol, s'anomena *conjunt de les parts de C*, denotat per $\mathcal{P}(C)$, al conjunt que té per elements tots els subconjunts de C:

$$\mathcal{P}(C) = \{A \mid A \subseteq C\}.$$

Exemples:

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- Si $A = \{a, b, c\}$:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

1 Conjunts

2 Operacions

3 Recobriments i particions

4 Correspondències

Complementari d'un conjunt

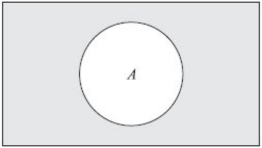
Suposarem que els conjunts amb què treballem són subconjunts d'un conjunt universal E (assenyalat, en els diagrames, amb un rectangle).

Definició

Donat un conjunt $A \subseteq E$ s'anomena *complementari de A* al conjunt:

$$A^c := \{x \in E \mid x \notin A\},$$

és a dir, aquell format per tots els elements del conjunt universal E que no pertanyen a A (zona ombrejada en el diagrama de Venn).



Complementari d'un conjunt

PROPIETATS

- $E^c = \emptyset$
- $\emptyset^c = E$
- $A = B \Leftrightarrow A^c = B^c$
- $B \subseteq A \Leftrightarrow A^c \subseteq B^c$
- $(A^c)^c = A$

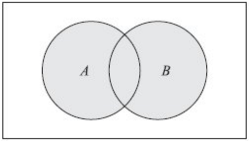
Unió de conjunts

Definició

Donats dos conjunts $A, B \subseteq E$ s'anomena *unió de A i B* al conjunt:

$$A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B\},$$

és a dir, aquell format per tots els elements del conjunt universal E que pertanyen, a A, a B, o a ambdós conjunts (zona ombrejada al diagrama de Venn).



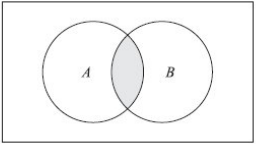
Intersecció de conjunts

Definició

Donats dos conjunts $A, B \subseteq E$ s'anomena *intersecció de A i B* al conjunt:

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \quad \wedge \quad x \in B\},$$

és a dir, aquell format per tots els elements del conjunt universal E que pertanyen alhora a A i a B (zona ombrejada al diagrama de Venn).



PROPIETATS

- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

Definició

Dos conjunts $A, B \subseteq E$ es diu que són *disjunts* si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple: Si $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ denoten, respectivament, els conjunts dels nombres racionals i irracionals, aleshores $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, és a dir, són disjunts.

Generalització de la unió i la intersecció

Els conceptes d'unió i intersecció es poden generalitzar per a una quantitat qualsevol de conjunts:

Definició

Considerem un conjunt no buit I (un conjunto d'índex) i siga A_i un conjunt per a cada $i \in I$. La *unió* i la *intersecció* de la col·lecció de conjunts $\{A_i \mid i \in I\}$ es defineixen com:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ per a algún } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ per a tot } i \in I\}$$

Si la col·lecció consta d'un nombre finit de conjunts $A_1, \ldots, A_n$, denotarem la seua unió i la seua intersecció per $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ i $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ respectivament.

Propietats booleanes

Siguen $A, B, C \subseteq E$.

1. Propietats associatives:
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
2. Propietats commutatives:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
3. Propietats distributives:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
4. Elements neutres:
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap E = A$$
5. Elements complementaris:
$$A \cup A^c = E$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

Comparació: conjunts-formes proposicionals

1. Propietats associatives:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2. Propietats commutatives:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3. Propietats distributives:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Elements neutres:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap E = A$$

5. Elements complementaris:

$$A \cup A^c = E$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

1. Propietats associatives:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

2. Propietats commutatives:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

3. Propietats distributives:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

4. Elements neutres:

$$p \vee \phi \equiv p$$
$$p \wedge \tau \equiv p$$

5. Elements complementaris:

$$p \vee \rceil p \equiv \tau$$
$$p \wedge \rceil p \equiv \phi$$

Altres propietats

Siguen $A, B \subseteq E$.

- Propietats d'absorció:

  $$E \cup A = E, \quad \emptyset \cap A = \emptyset$$

- Propietats simplificatives:

  $$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

- Propietats d'idempotència:

  $$A \cup A = A$$
  $$A \cap A = A$$

- Lleis de De Morgan:

  $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
  $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- Propietat del doble complementari:

  $$(A^c)^c = A$$

Comparació: conjunts-formes proposicionals

- Propietats d'absorció:

$$E \cup A = E, \quad \emptyset \cap A = \emptyset$$

- Propietats simplificatives:

$$A \cup (A \cap B) = A,$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

- Propietats d'idempotència:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

- Lleis de De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- Propietat del doble complementari:

$$(A^c)^c = A$$

- Propietats d'absorció:

$$\tau \vee p \equiv \tau, \quad \phi \wedge p \equiv \phi$$

- Propietats simplificatives:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

- Propietats d'idempotència:

$$p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge p \equiv p$$

- Lleis de De Morgan:

$$\rceil(p \vee q) \equiv \rceil p \wedge \rceil q$$
$$\rceil(p \wedge q) \equiv \rceil p \vee \rceil q$$

- Propietat de la doble negació:

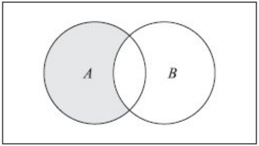
$$\rceil(\rceil p) \equiv p$$

Diferència de conjunts

Donats dos conjunts $A, B \subseteq E$ s'anomena *diferència de A i B* al conjunt:

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\},$$

és a dir, aquell format per tots els elements del conjunt universal E que pertanyen a A però no pertanyen a B.



De la definició s'obté de forma immediata que

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

Diferencia de conjuntos

PROPIETATS

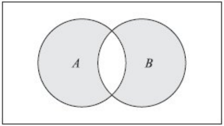
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Diferència simètrica de dos conjunts

Donats dos conjunts $A, B \subseteq E$ s'anomena *diferència simètrica de A i B* al conjunt:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

és a dir, aquell format per tots els elements del conjunt universal E que pertanyen a A però no pertanyen a B, o viceversa (zona ombrejada al diagrama de Venn).



Producte cartesià

Definició

Donats dos conjunts A i B, s'anomena *producte cartesià* de A i B, denotat per $A \times B$, al conjunt de parells ordenats (a, b) tals que $a \in A$ i $b \in B$. És a dir:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}.$$

Exemple: Si $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2\}$, aleshores
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ i
$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Producte cartesià de diversos conjunts

Definició

S'anomena *producte cartesià* de n conjunts $A_1, A_2, \dots, A_n$ al conjunt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ format per totes las n-tuples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on $x_i \in A_i$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$. És a dir:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i \ \ \forall\, i\}$$

Exemple: Si $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ i $C = \{6, 7\}$, aleshores $A \times B \times C = \{(a, 1, 6), (a, 2, 6), (b, 1, 6), (b, 2, 6), (c, 1, 6), (c, 2, 6), (a, 1, 7), (a, 2, 7), (b, 1, 7), (b, 2, 7), (c, 1, 7), (c, 2, 7)\}$

1 Conjunts

2 Operacions

3 Recobriments i particions

4 Correspondències

Recobriments

Definició

Direm que una col·lecció de conjunts $\{A_i \mid i \in I\}$ és un *recobriment* d'un conjunt B si

$$B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

En altres paraules, un recobriment de B és un *conjunt format per conjunts* la unió dels quals *conté* B.

Exemple: Siguen els conjunts $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ i $A_3 = \{4, 5, 6, 7\}$. Aleshores $\{A_1, A_2, A_3\}$ és un recobriment del conjunt $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$. No ho és del conjunt $C = \{1, 2, 3, 7, 8\}$.

Particions

Definició

Direm que una col·lecció de conjunts $\{A_i \mid i \in I\}$ és una *partició* d'un conjunt B si $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ i els conjunts A_i són disjunts dos a dos (és a dir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$).

Observeu que tota partició és un recobriment.

Exemple: Siguen els conjunts $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5, 6\}$ i $A_3 = \{7, 8, 9, 10\}$. Aleshores $\{A_1, A_2, A_3\}$ és una partició del conjunt $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$. No ho és del conjunt $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 8\}$.

1 Conjunts

2 Operacions

3 Recobriments i particions

4 **Correspondències**

Correspondència

Definició

Donats dos conjunts A i B, s'anomena *correspondència* entre A i B a una associació d'elements de A amb elements de B. A és el *conjunt inicial* i B el *conjunt final*.

Les correspondències solen denotar-se de la forma $f\colon A \to B$. Si a un element $a \in A$ se li associa un altre element $b \in B$, es diu que b és una *imatge* de a, o que a és una *anti-imatge* de b.

- $f(a)$: Conjunt de les imatges de a.
- $f^{-1}(b)$: Conjunt de las anti-imatges de b.
- *Domini* de f: $\mathrm{Dom}(f) := \{a \in A \mid f(a) \neq \emptyset\}$
- *Rang, codomini o imatge* de f:
  $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Im}(f) = f(A) := \{b \in B \mid f^{-1}(b) \neq \emptyset\}$.
- *Graf* de f: $\mathrm{Graf}(f) := \{(a, b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$.

Definició alternativa de correspondència

Observació important

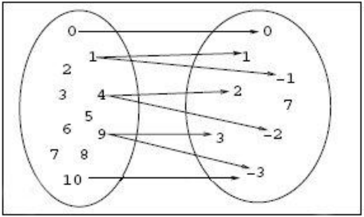
Una correspondència està unívocament determinada pel seu graf. Per tant, podem veure també una correspondència entre dos conjunts A i B com un subconjunt F del seu producte cartesià $A \times B$.

En molt textos s'utilitza aquesta definició alternativa de correspondència.

Exemple: Siguen

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ i } B = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 7\}.$$

Considerem la correspondència $f\colon A \to B$ donada per:



Aleshores:

$$f(1) = \{-1, 1\},\ f^{-1}(0) = \{0\},\ f^{-1}(-3) = \{9, 10\},\ f^{-1}(7) = \emptyset,\ f(3) = \emptyset,$$

$$Dom(f) = \{0, 1, 4, 9, 10\}, \quad Im(f) = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\} \text{ i}$$

$$Graf(f) = \{(0,0), (1,1), (1,-1), (4,2), (4,-2), (9,3), (9,-3)(10,-3)\}.$$

Correspondència inversa

Definició

Donada una correspondència $f\colon A \to B$ s'anomena *correspondència inversa de f* a aquella $f^{-1}\colon B \to A$ que té com a graf associat

$$\mathrm{Graf}(f^{-1}) = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathrm{Graf}(f)\}.$$

Exemple: La correspondència inversa de la del exemple anterior és la que té com a graf

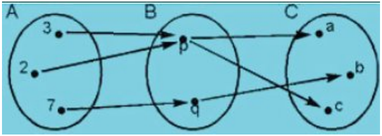
$$\mathrm{Graf}(f^{-1}) = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9), (-3, 10)\}.$$

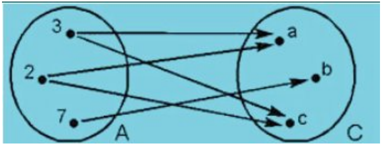
Composició de correspondències

Definició

Siguen $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ dues correspondències, amb grafs respectius $F \subseteq A \times B$ i $G \subseteq B \times C$. Es defineix la *composició de g i f* com aquella correspondència $g \circ f\colon A \to C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ per a tot $a \in A$. En altres paraules, és aquella correspondència que té com a graf:

$$\{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ amb } (a, b) \in F \ \wedge \ (b, c) \in G\}$$



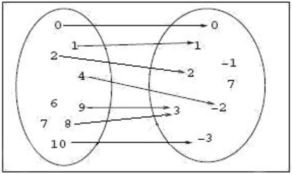


Funció

Definició

Es diu que una correspondència $f\colon A \to B$ és una *funció* si tot element de A té, com a molt, una imatge.

Exemple: La següent correspondència és una funció

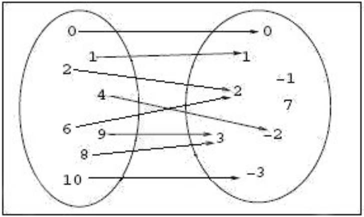


Aplicació

Definició

Es diu que una correspondència $f\colon A \to B$ és una *aplicació* si tot element de A té exactament una imatge (o, dit d'un altra forma, si f és una funció i $\mathrm{Dom}(f) = A$).

Exemple: La següent correspondència és una aplicació.



Aplicació injectiva

Definició

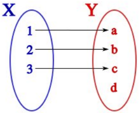
Una aplicació $f : A \to B$ es diu que és *injectiva* quan elements distints d'A tenen imatges distintes, és a dir, si es satisfà la condició

$$\forall a_1, a_2 \in A \;\; (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)),$$

o la condició equivalent

$$\forall a_1, a_2 \in A \;\; (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2).$$

Exemple: La següent aplicació entre X i Y és injectiva:



Aplicació suprajectiva o sobrejectiva

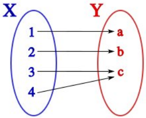
Definició

Una aplicació $f\colon A \to B$ es diu que és *suprajectiva o sobrejectiva* quan tots els elements de B tenen alguna anti-imatge, és a dir, si es satisfà la condició

$$\forall b \in B \;\; \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b,$$

o la condició equivalent $\mathrm{Im}(f) = B$.

Exemple: La següent aplicació entre X i Y és suprajectiva:

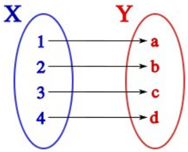


Aplicació bijectiva

Definició

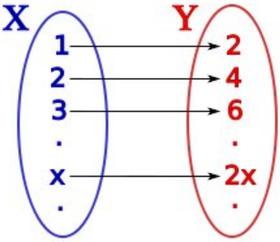
Una aplicació $f\colon A \to B$ es diu que és *bijectiva* (o que és una *bijecció*) quan és injectiva i suprajectiva.

Exemple: La següent aplicació entre X i Y és bijectiva:



Exemple: bijecció entre dos conjunts infinits

Considerem els conjunts $X = \mathbb{N}$ (nombres naturals) i $Y = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ (nombres naturals parells). Es verifica que $Y \subsetneq X$ (Y està *estrictament inclòs* en X, és a dir, està inclòs en Y però no és igual a Y). Tanmateix, existeix una bijecció entre X i Y!:

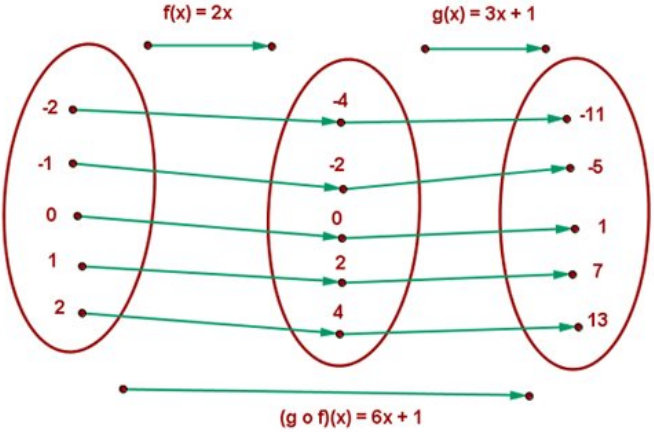


Composició d'aplicacions

Observació important

Si $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ són dues aplicacions, aleshores la composició $g \circ f\colon A \to C$ és també una aplicació.

Exemple: Composició de aplicacions



$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 3(2x) + 1 = 6x + 1$$

Correspondència inversa d'una aplicación

Definició

Si $f : A \to B$ és una aplicación, podem considerar sempre la seua correspondència inversa $f^{-1} : B \to A$. Quan aquesta correspondència és aplicació, s'anomena *aplicació inversa de f*. En aquest cas es cumpleix que

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b).$$

Exemple: En general la correspondència inversa d'una aplicació no té per qué ser aplicació.

Notem que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^2$ és una aplicació, però $f(2) = f(-2) = 4$, doncs $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$ i per tant la correspondència inversa no és aplicació.

Propietats de la composició d'aplicacions

Definició

Donat un conjunt A, es defineix la *aplicació identitat en A* com aquella aplicació $\mathrm{id}_A \colon A \to A$ tal que $\mathrm{id}_A(a) = a$ per a tot $a \in A$.

Proposició

Siguen $f \colon A \to B$ i $g \colon B \to C$ dues aplicacions.

1. Si f i g son injectives, aleshores $g \circ f$ també ho és.
2. Si f i g són suprajectives, aleshores $g \circ f$ també ho és.
3. Si f i g són bijectives aleshores $g \circ f$ també ho és.
4. f és bijectiva si i només si la seua correspondència inversa f^{-1} és una aplicació.
5. f és bijectiva si i només si existeix un altra aplicació $h \colon B \to A$ tal que $h \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ h = \mathrm{id}_B$. A més, en aquest cas, $h = f^{-1}$.