

Anàlisi Matemàtica

UT3 - Integració



Introducció

La integral de Riemann. Concepte d'àrea

- Classes de funcions integrables
- Propietats: àlgebra i desigualtats

Càlcul exacte d'integrals

- Regla de Barrow
- Integració per parts i per canvi de variable (substitució)

Càlcul aproximat d'integrals de Riemann

- Mètodes de trapezis i de Simpson

Objectius

Generalitats sobre integrals i àrees (1S)

- Entendre la definició de funció integrable i d'integral
- Fer ús correcte de la integral per al càlcul d'àrees

Càlcul exacte d'integrals (1S)

- Fer ús de la regla de Barrow per al càlcul exacte d'integrals
- Aplicar el mètode d'integració per parts
- Realitzar canvis de variable en casos senzills

Càlcul aproximat d'integrals (2S)

- Aproximar integrals amb els mètodes de trapezis o de Simpson
- Acotar l'error comés en les aproximacions
- Determinar el nombre de nodes necessari per a aproximar

Aplicacions (1S)

Introducció

Càlcul d'àrees planes:

Unitat de mesura



Rectangles/Triangles



Triangulació de Polígons



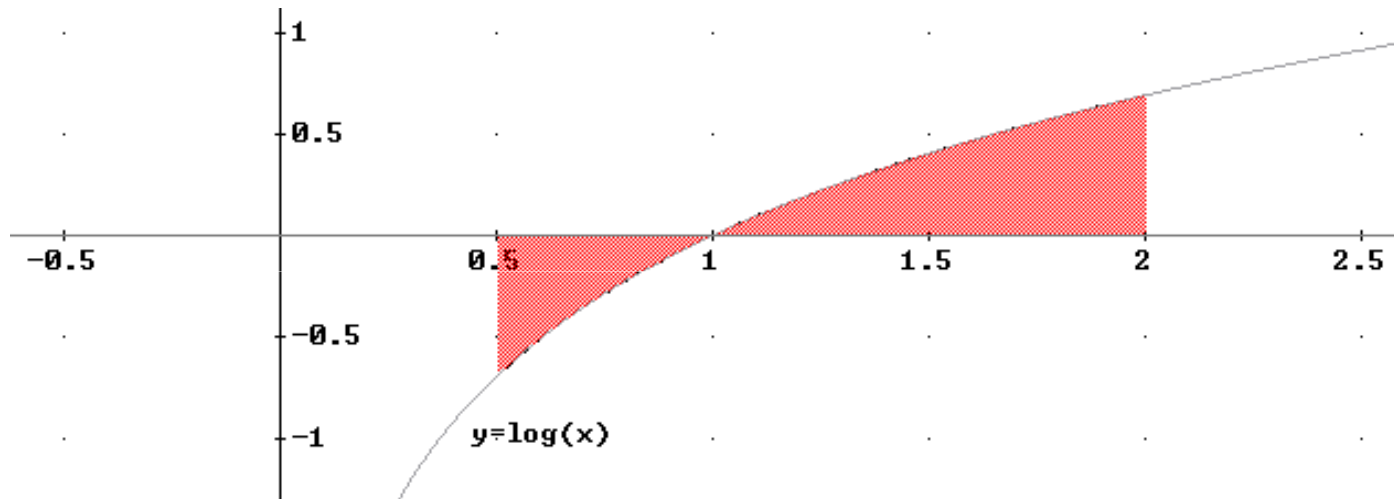
Problema (recintes més generals):



Problemes tipus en integració:

Problema 1 (àrea com integral de Riemann):

Trobar l'àrea que determina $y = \log(x)$ entre $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ i l'eix OX

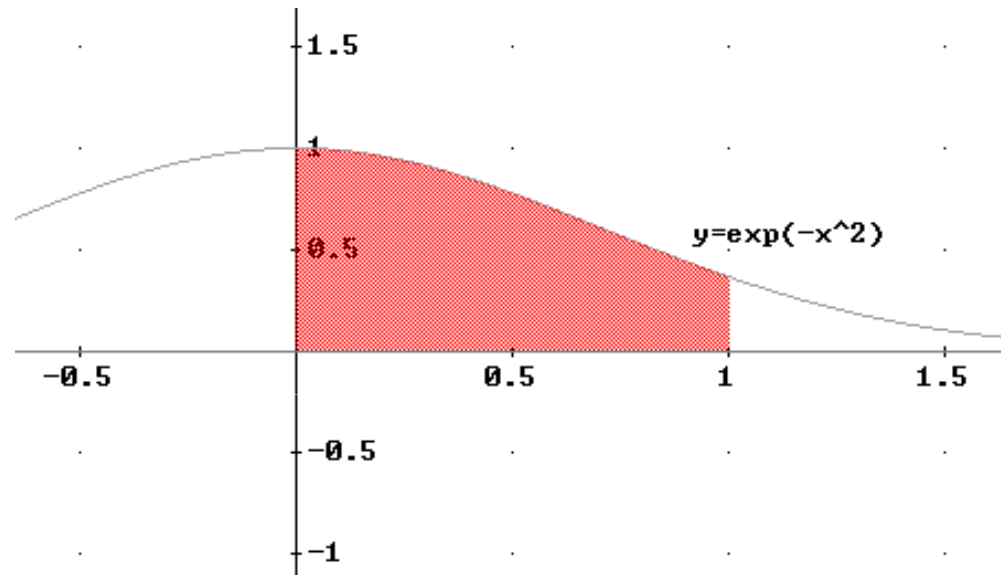


Solució: $A = \int_{1/2}^2 |\log(x)| dx = - \int_{1/2}^1 \log(x) dx + \int_1^2 \log(x) dx$ Regla de Barrow

$$= x - x \log(x) \Big|_{1/2}^1 + x \log(x) - x \Big|_1^2 = \frac{3 \log(2) - 1}{2}$$

Problema 2 (àrea com integral de Riemann aproximada):

Trobar l'àrea que determina $y = e^{-x^2}$ entre $x = 0$, $x = 1$ i l'eix OX



Solució: $A = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ no és possible aplicar la regla de Barrow

Regla de Simpson $\approx \frac{1}{30} \left[1 + 4(e^{-1/100} + e^{-9/100} + \dots + e^{-81/100}) + 2(e^{-4/100} + e^{-16/100} + \dots + e^{-64/100}) + \frac{1}{e} \right] = 0.7468\dots$

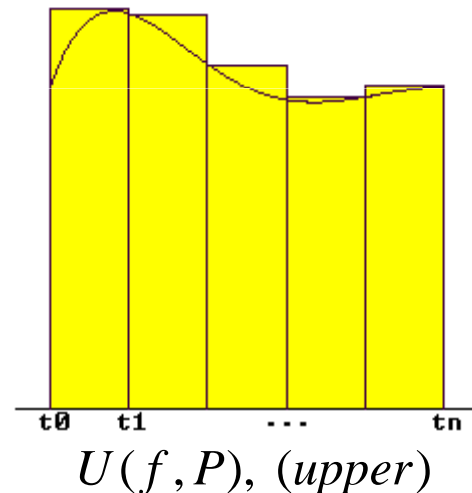
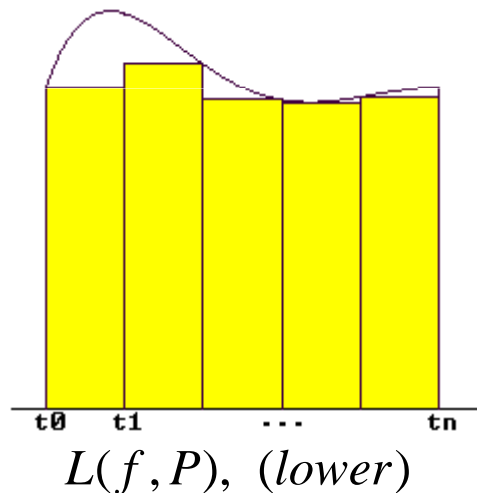
La integral de Riemann. Concepte d'àrea

Classes de funcions integrables:

Considerem $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, acotada,

$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ una *partició* de $[a, b]$

i definim les *sumes inferior i superior* associades a f i a P :



Si f és positiva, L i U representen sumes d'àrees de rectangles que acoten per baix i per dalt, respectivament, l' "àrea" del recinte que determinen la gràfica de $y = f(x)$, l'eix OX , $x = a$, $x = b$

Caracterització successional d'integrabilitat

Una funció f és integrable Riemann en $[a,b]$ si i només si existeix una successió de particions $\{P_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$\lim_n (U(f, P_n) - L(f, P_n)) = 0$$

A més a més, en aquest cas, $\int_a^b f = \lim_n U(f, P_n) = \lim_n L(f, P_n)$

$\int_a^b f$ és l'únic valor entre $U(f, P)$ i $L(f, P)$ per a qualsevol partició.

Exemple: $f(x) = x$ és integrable en $[0,1]$

Considerem la successió de particions que divideix l'interval $[0,1]$ en n parts

iguals, de mida $h = \frac{1}{n}$: $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ (nodes)

En cada subinterval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ (per a $k = 1, 2, \dots, n$) considerem els rectangles d'àrees

$$\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) \quad \text{i} \quad \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (\text{base} \times \text{altura})$$

que acoten per baix i per dalt, respectivament, l'àrea del recinte que determina

la funció $f(x) = x$, l'eix OX , $x = \frac{k-1}{n}$ i $x = \frac{k}{n}$.

La suma d'aquestes àrees de rectangles associades a f i a P_n són:

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{0+1+\dots+(n-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

$$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Així, f és integrable en $[0,1]$ i, $\int_0^1 f = \lim_n L(f, P_n) = \lim_n U(f, P_n) = \frac{1}{2}$

Algunes funcions integrables:

- f monòtona en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$
- f contínua en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$

Les funcions contínues en $[a,b]$ excepte en un conjunt finit de punts també són integrables. El resultat pot estendre's inclús a casos molt més generals

Exemples: $f(x) = k$ (*constant*) és integrable en qualsevol $[a,b]$

$f(x) = x$ (*creixent, contínua*) és integrable en qualsevol $[a,b]$

$f(x) = x^2$ (*contínua*) és integrable en qualsevol $[a,b]$

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,2] - \{1\} \\ 2, & \text{si } x = 1 \end{cases}$ (*contínua excepte en $x = 1$*) és integrable en $[0,2]$

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (*discontínua en cada punt de $[0,1]$*) **no** és integrable

Dues definicions necessàries: $\int_a^a f = 0$ i $\int_a^b f = -\int_b^a f$

Propietats: àlgebra i desigualtats:

1) f, g integrables en $[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ integrable en $[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

2) f, g integrables en $[a, b] \Rightarrow f \cdot g$ integrable en $[a, b]$

$$\int_a^b (f \cdot g) \neq \left(\int_a^b f \right) \cdot \left(\int_a^b g \right) \quad (f(x) = k, g(x) = x, a = 0, b = 2)$$

3) f integrable en $[a, c]$ i en $[c, b] \Rightarrow f$ integrable en $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (\text{inclús si } c \notin [a, b])$$

4) *Monotonia*: f, g integrables en $[a, b]$ i $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

5) f integrable en $[a, b] \Rightarrow |f|$ integrable en $[a, b]$ i $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

6) $\underbrace{f \text{ integrable en } [a, b]}_{m = \inf_{[a, b]}(f) ; M = \sup_{[a, b]}(f)} \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

f contínua $\Rightarrow \exists \alpha \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f = f(\alpha)(b-a)$

Exemple: Si f és integrable en $[0,1]$ i $x \leq f(x) \leq x^2$, per a $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 x dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{3}$$

(es fa ús de 4) i d'exemples precedents)

Exemple:

$$\left| \int_0^1 \frac{\cos(nx)}{x+1} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\cos(nx)}{x+1} \right| dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \leq \int_0^1 dx = 1$$

(es fa ús de 4) i 5) i d'exemples precedents)

Pot millorar-se?

Àrea plana:

Si f és integrable en $[a,b]$, definim l'**àrea** del recinte limitat per:

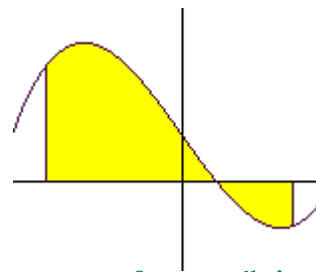
$$\begin{cases} \text{la gràfica de } y = f(x) \\ \text{l'eix } OX \\ \text{les rectes verticals } x = a, x = b \end{cases}$$

mitjançant:

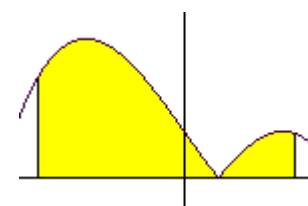
$$A = \int_a^b |f|$$



f positiva en $[a,b]$

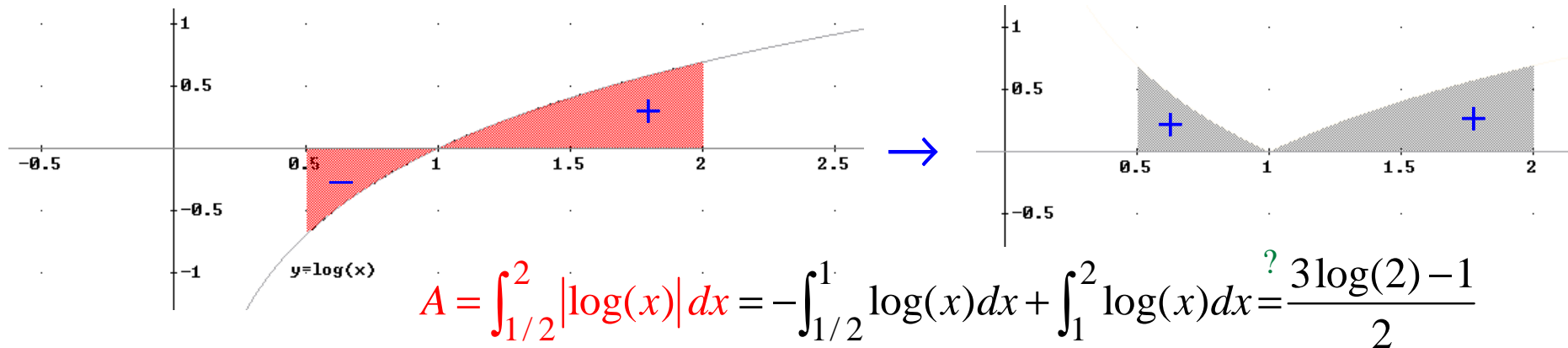


f canvia de signo en $[a,b]$

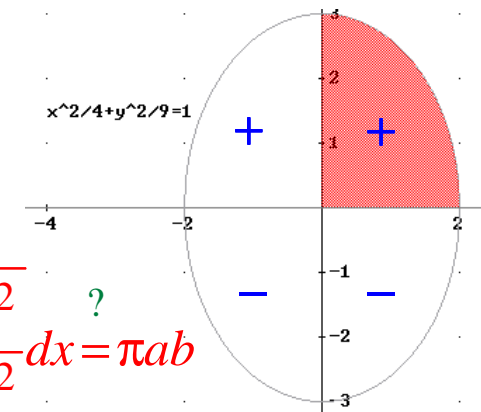
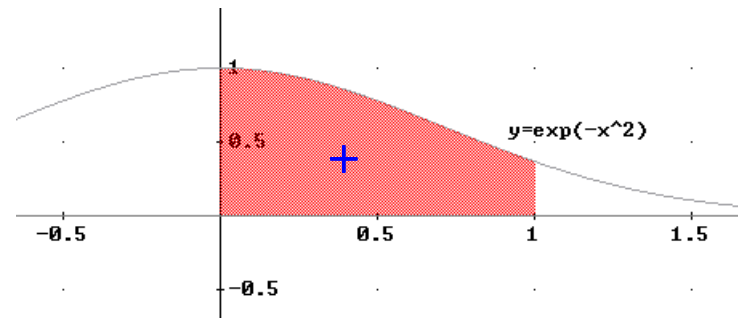


L'àrea entre corbes s'obté per diferència: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|$

Exemple: L'àrea que limiten $y = \log(x)$ (contínua), $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ i l'eix OX és



Exemple: L'àrea que limiten $y = e^{-x^2}$, $x = 0$, $x = 1$ i OX és $A = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7468$



Exemple: L'àrea de l'el.lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ és $A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \pi ab$

En general, és precis conèixer mètodes de càlcul que permeten obtenir les integrals en qüestió, en forma exacta o amb la precisió desitjada

Càlcul exacte d'integrals

Regla de Barrow:

Si $h(x)$ és una primitiva de $f(x)$, definida en $[a,b]$ i integrable, aleshores

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = h(x) \Big|_a^b \equiv h(b) - h(a) \quad (h'(x) = f(x))$$

Exemples:

$$\int_a^b x^p dx \underset{(p \neq -1)}{=} \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

Què tenim si $p = -1$ ($a, b > 0$)?

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

Si trobar la primitiva no és evident, disposem de dues tècniques

Integració per parts: $\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g$

$$\left(\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du \right)$$

Canvi de variable

(substitució): $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \left(\begin{array}{c} \underbrace{x=g(t)} \\ \leftarrow \text{cdv} \rightarrow \end{array} \right) = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt$

Exemple (parts): $\int_0^1 x \cdot \cos(x) dx = \left(\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \cos(x) dx & v = \sin(x) \end{array} \right)$

$$= x \cdot \sin(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(x) dx$$
$$= x \cdot \sin(x) \Big|_0^1 - \left(-\cos(x) \Big|_0^1 \right)$$
$$= \sin(1) + \cos(1) - 1$$

Exemples (parts):

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^2 \log(x) dx &= \int_{1/2}^2 \log(x) \cdot 1 dx = \left(\begin{array}{ll} u = \log(x) & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right) \\ &= x \log(x) \Big|_{1/2}^2 - \int_{1/2}^2 \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = x \log(x) \Big|_{1/2}^2 - \int_{1/2}^2 dx \\ &= 2 \log(2) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) - \left(x \Big|_{1/2}^2 \right) = \frac{5 \log(2) - 3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(x) dx &= \int_0^1 \arctan(x) \cdot 1 dx = \left(\begin{array}{ll} u = \arctan(x) & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right) \\ &= x \arctan(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{1+x^2} = x \arctan(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}\end{aligned}$$

Exemples (cdv):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx \stackrel{\leftarrow}{=} \left(\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \left(t^{3/2} \right]_1^2 \Big) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x-1} dx &\stackrel{\rightarrow}{=} \left(\begin{array}{l} x-1 = t^3 \\ x = t^3 + 1 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=-1 \end{array} \right) \\ &= \int_{-1}^0 (t^3 + 1) \cdot t \cdot 3t^2 dt \\ &= 3 \int_{-1}^0 (t^6 + t^3) dt = 3 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right]_{-1}^0 \Big) = -\frac{9}{28}\end{aligned}$$

Exemple (cdv, en els dos sentits)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \left(\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{array} \right) \\ &= 2 \int_1^2 \sqrt{1+t} dt = 2 \left[\frac{2}{3} (1+t)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \left(\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{array} \right) \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t}}{t} 2t dt = 2 \left[\frac{2}{3} (1+t)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Exercici (cdv): Fes ús del canvi de variable $x = -t$ per a simplificar l'expressió

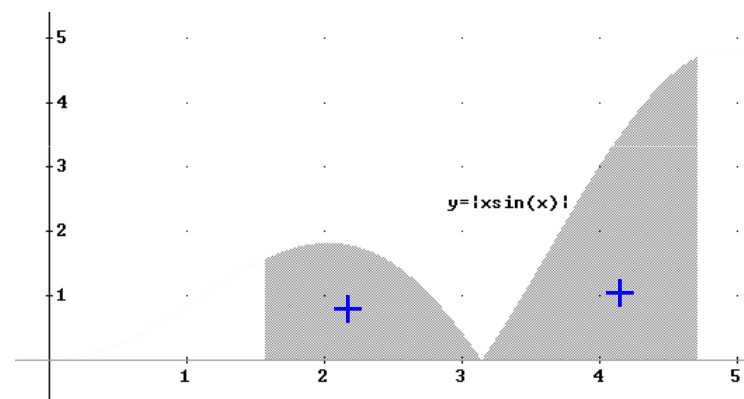
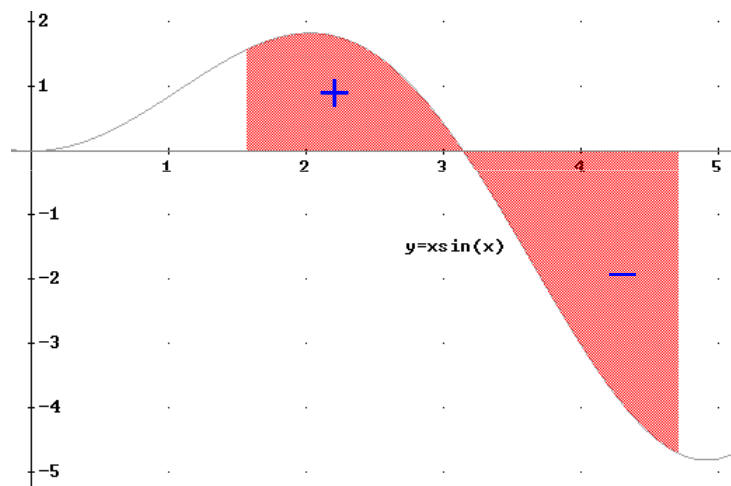
$$\int_{-b}^b f(x) dx = \int_{-b}^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$$

quan f siga una funció parella. Què tindrem si f és senar?

Exemple (àrea plana):

Trobar l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $y = x \sin(x)$, les verticals $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ i l'eix OX

Per definició, $A = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |x \sin(x)| dx$; és a dir, $A = \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin(x) dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} x \sin(x) dx$



Integrant per parts cada una de les dues integrals $\left(\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin(x), v = -\cos(x) \end{array} \right)$,

$$A = (\sin(x) - x \cos(x)) \Big|_{\pi/2}^{\pi} + (\sin(x) - x \cos(x)) \Big|_{\pi}^{3\pi/2} = 2\pi$$

Exemple (àrea plana):

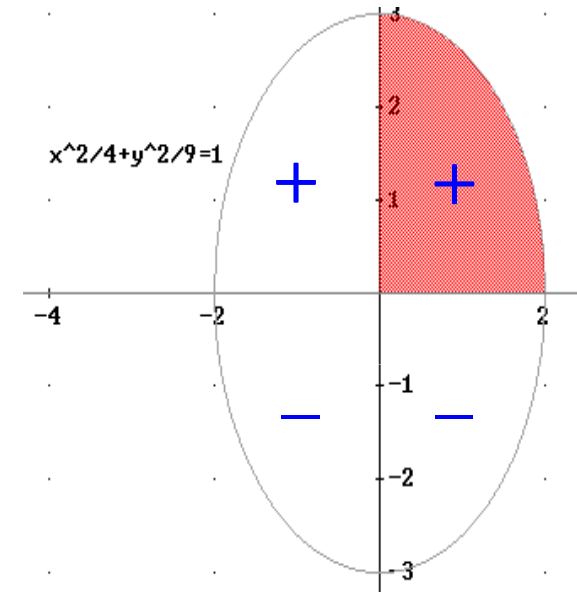
Trobar l'àrea del recinte interior a l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Tal i com va definir-se, } A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Proposem un cdv trigonomètric, $x = a \cos(t)$:

$$\begin{pmatrix} x = a \cos(t) \\ dx = -a \sin(t) dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x = 0 \Rightarrow t = \pi/2 \\ x = a \Rightarrow t = 0 \end{pmatrix}$$

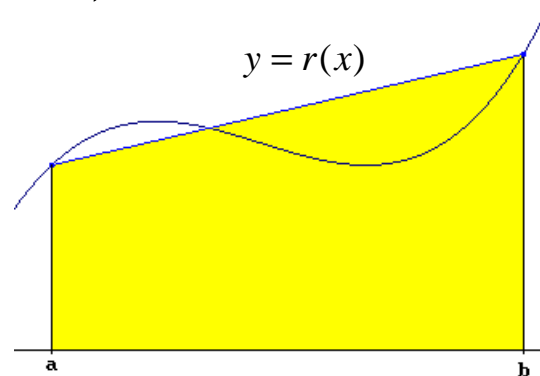
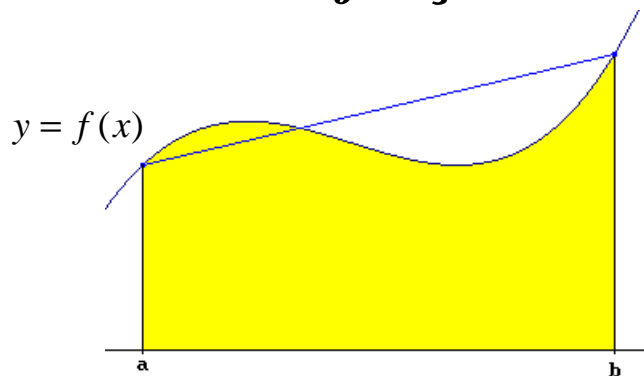
$$\text{Així, } \underset{\text{cdv}}{A} \overset{?}{=} 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt \overset{?}{=} 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2t)) dt = \pi ab$$



Àrea del cercle?

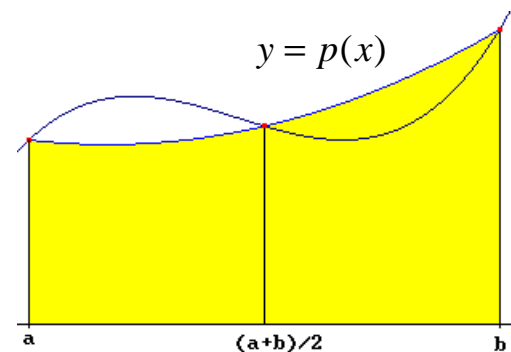
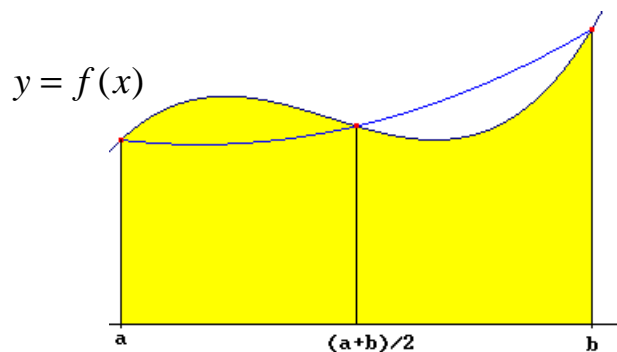
Càlcul aproximat d'integrals

Aproximació mitjançant una recta (trapezi)



$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b r(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

Aproximació mitjançant una paràbola



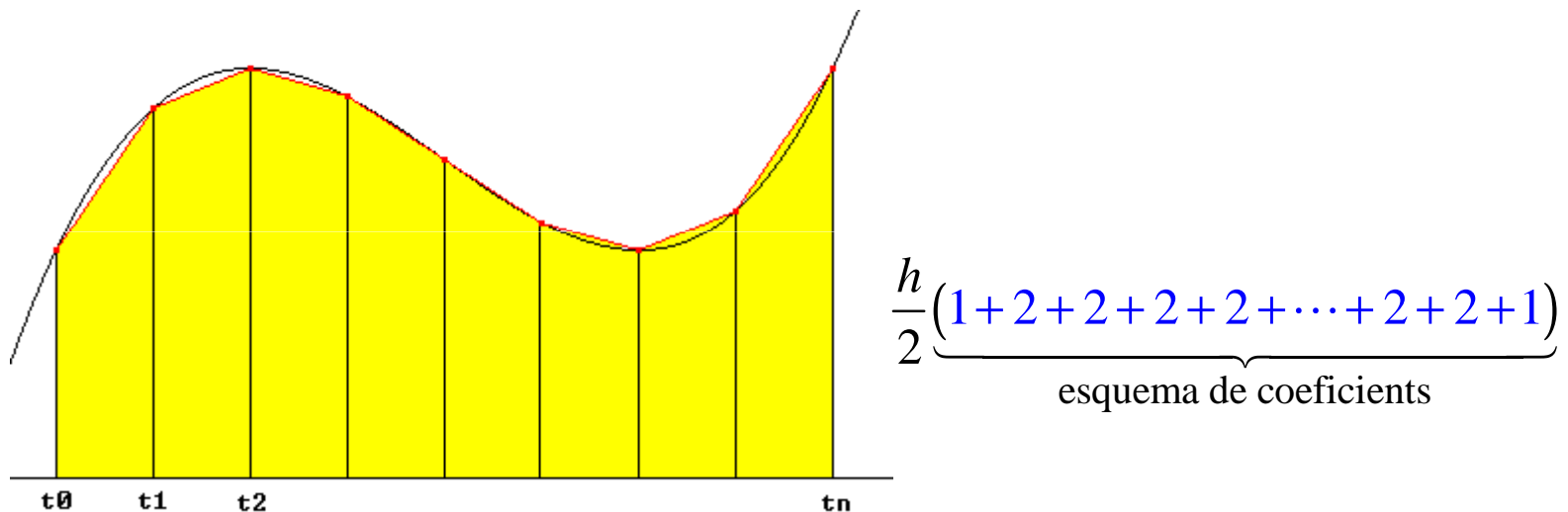
$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Mètode de trapezis. Cota d'error:

Dividim $[a,b]$ en n parts iguals, de mida $h = \frac{b-a}{n}$

$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\} = \{a, a+h, a+2h, \dots, a+nh = b\}$ partició de $[a,b]$

En cada subinterval aproximem $f(x)$ mitjançant una recta

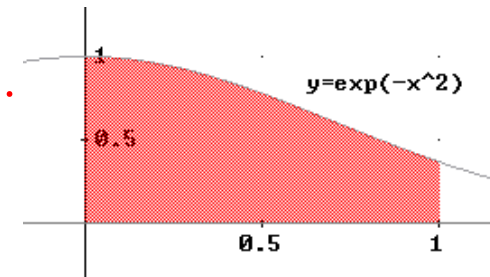


$$\int_a^b f(x) dx \cong T_n f = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right)$$

$$E_n = \left| \int_a^b f(x) dx - T_n f \right| \leq \frac{n \cdot h^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \text{ on } M_2 \geq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Exemple: Aproximació de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ mitjançant trapezis

Valor real de la integral (DERIVE): 0.7468241328...



Efectuant 10 subdivisions de l'interval:

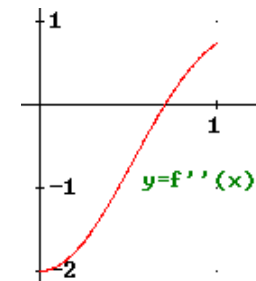
Si $n = 10$, $h = \frac{1}{10}$ i la partició de $[0, 1]$: $P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\right\}$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong T_{10}f = \frac{1}{20} \left(1 + 2(e^{-1/100} + e^{-4/100} + \dots + e^{-81/100}) + \frac{1}{e} \right) = 0.\underline{746}2107961\dots$$

A la vista del valor real, l'aproximació assegura 3 decimals exactes

Per a veure què prediu la cota d'error acotem la segona derivada de e^{-x^2} en $[0, 1]$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = 2e^{-x^2} (2x^2 - 1) \Rightarrow |f''(x)| \leq 6 \stackrel{\text{es pot millorar}}{=} M_2$$



$$\text{D'ací, } E_{10} \leq \frac{6}{12 \cdot 10^2} = \frac{1}{200} = 0.005 \text{ (pràcticament dos decimals exactes)}$$

Garantint 5 decimals exactes (almenys):

Es tracta d'imposar $E_n < 10^{-6}$ i trobar el nombre (n) de subdivisions necessari

A la vista del valor de la cota $M_2 = 6$,

$$E_n \leq \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2} < 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 > 5 \cdot 10^5 \Rightarrow n \geq 708$$

i, en conseqüència, **efectuant 708 subdivisions** de $[0,1]$, $h = \frac{1}{708}$ i

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong T_{708}f = \frac{1}{1416} \left(f(0) + 2 \sum_{k=1}^{707} f\left(\frac{k}{708}\right) + f(1) \right) \stackrel{?}{=} \text{DERIVE} \underline{0.746824}0104\dots$$

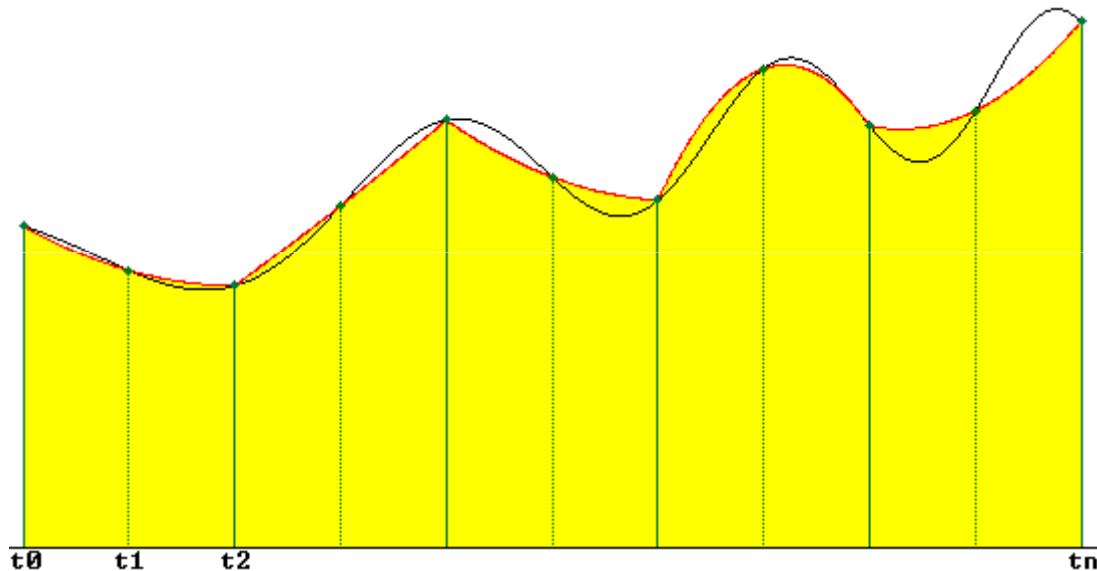
que, tenint en compte el resultat $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.7468241328\dots$, ens proporciona realment sis decimals correctes (millor del que esperàvem)

Mètode de Simpson. Cota d'error:

Dividim $[a, b]$ en n (**parell**) parts iguals, de mida $h = \frac{b-a}{n}$

$$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\} = \{a, a+h, a+2h, \dots, a+nh = b\} \text{ partició de } [a, b]$$

En cada subinterval **doble** aproximem $f(x)$ mitjançant una paràbola



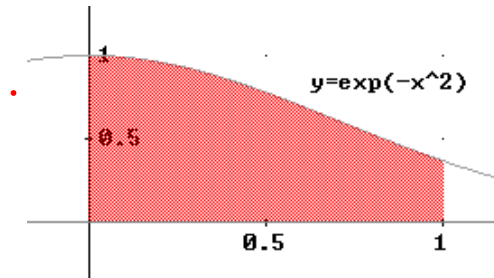
$$\frac{h}{3} \underbrace{(1 + 4 + 2 + 4 + 2 + \dots + 2 + 4 + 1)}_{\text{esquema de coeficients}}$$

$$\int_a^b f(x) dx \cong S_n f = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n/2-1} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(a + 2kh) + f(b) \right)$$

$$E_n = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n f \right| \leq \frac{n \cdot h^5}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \text{ on } M_4 \geq \max_{x \in [a, b]} |f^{(iv)}(x)|$$

Exemple: Aproximació de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ mitjançant Simpson

Valor real de la integral (DERIVE): 0.7468241328...



Efectuant 10 subdivisions de l'interval:

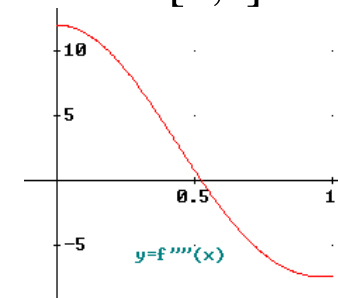
Si $n = 10$, $h = \frac{1}{10}$ i la partició de $[0, 1]$: $P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\right\}$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong S_{10}f = \frac{1}{30} \left(1 + 4(e^{-1/100} + e^{-9/100} + \dots + e^{-81/100}) + 2(e^{-4/100} + e^{-16/100} + \dots + e^{-64/100}) + \frac{1}{e} \right) = 0.\underline{746824}9482\dots$$

A la vista del valor real, la aproximació assegura ja 6 decimals exactes

Per a veure què prediu la cota d'error acotarem la quarta derivada de e^{-x^2} en $[0, 1]$

$$f^{(iv)}(x) = 4e^{-x^2} (4x^4 - 12x^2 + 3) \Rightarrow |f^{(iv)}(x)| \leq 76 \overset{?}{\underset{\text{millorar}}{\text{es pot}}} M_4$$



$$\text{D'ací, } E_{10} \leq \frac{76}{180 \cdot 10^4} < 0.000043 \text{ (quatre decimals exactes, almenys)}$$

Garantint 8 decimals exactes (almenys):

Es tracta d'imposar $E_n < 10^{-9}$ i trobar el nombre (n) de subdivisions necessari

A la vista del valor de la cota $M_4 = 76$,

$$E_n \leq \frac{76}{180n^4} < 10^{-9} \Leftrightarrow n^4 > \frac{38}{9} \cdot 10^8 \Rightarrow n \geq 144$$

i, en conseqüència, **efectuant 144 subdivisions** de $[0,1]$, $h = \frac{1}{144}$ i

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong S_{144}f = \frac{1}{432} \left(f(0) + 4 \sum_{k=0}^{71} f\left(\frac{2k+1}{144}\right) + 2 \sum_{k=1}^{71} f\left(\frac{2k}{144}\right) + f(1) \right)$$

?
= **0.7468241328**31439...
DERIVE

que, tenint en compte el resultat $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746824132812427\dots$, ens proporciona realment deu decimals correctes (millor del què esperàvem)

L'avantatge del mètode de Simpson sobre el de trapezis sembla clar.
En general, Simpson quasi sempre millora trapezis.

Exemple: Aproximació de $\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x} dx$ mitjançant trapezis i Simpson,
amb 10 subdivisions i garantint cada vegada 6 decimals exactes

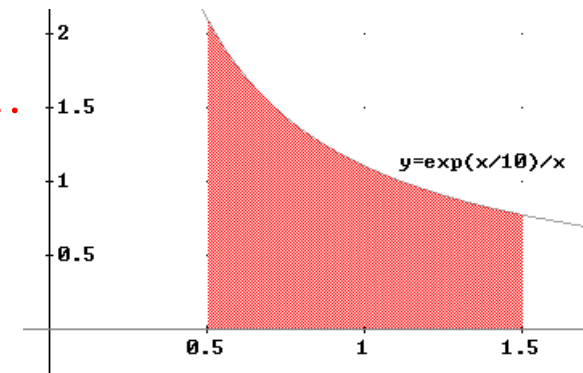
Valor real de la integral (DERIVE): 1.203798181...

Trapezis ($n=10$):

$$h = 0.1 \text{ i } P = \{0.5, 0.6, 0.7, \dots, 1.4, 1.5\}$$

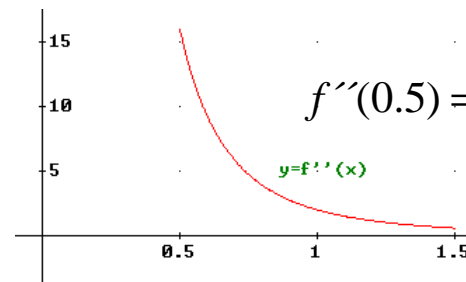
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x} dx \cong T_{10}f = \frac{1}{20} (f(0.5) + 2(f(0.6) + f(0.7) + \dots + f(1.4)) + f(1.5))$$

$$= 1.\underline{20}6748518\dots \text{ (dos decimals exactes)}$$



Per a veure què prediu la cota d'error acotem (gràficament) f'' en $[0.5, 1.5]$

$$f''(x) = \frac{\exp(x/10)}{x} (x^2 - 20x + 200)$$



$$f''(0.5) = 16.000346\dots < 17 = M_2$$

Acotació manual

$$M_2 = 22$$

$$\text{D'ací, } E_{10} \leq \frac{17}{12 \cdot 10^2} < 0.02 \text{ (un decimal exacte, almenys)}$$

Trapezis (6 decimals exactes):

$$\text{Per a } M_2 = 17, \quad E_n \leq \frac{17}{12n^2} < 10^{-7} \Leftrightarrow n^2 > \frac{17}{12} \cdot 10^7 \Rightarrow n \geq 3764$$

i, en conseqüència, **efectuant 3764 subdivisions** de $[0.5, 1.5]$, $h = \frac{1}{3764}$ i

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x} dx &\cong T_{3764} f = \frac{1}{7528} \left(f(0.5) + 2 \sum_{k=1}^{3763} f\left(0.5 + \frac{k}{3764}\right) + f(1.5) \right) \\ &\stackrel{?}{=} \text{DERIVE} \underline{1.203798}202 \end{aligned}$$

que, a la vista de $\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x} dx = 1.203798181\dots$, proporciona la precisió esperada

Simpson (n=10):

De nou, $h = 0.1$ i $P = \{0.5, 0.6, 0.7, \dots, 1.4, 1.5\}$ i

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x} dx &\cong S_{10} f = \frac{1}{30} \left(f(0.5) + 4(f(0.6) + f(0.8) + \dots + f(1.4)) \right. \\ &\quad \left. + 2(f(0.7) + f(0.9) + \dots + f(1.3)) + f(1.5) \right) \\ &= \underline{1.203}846491\dots \quad (\text{tres decimals exactes}) \end{aligned}$$

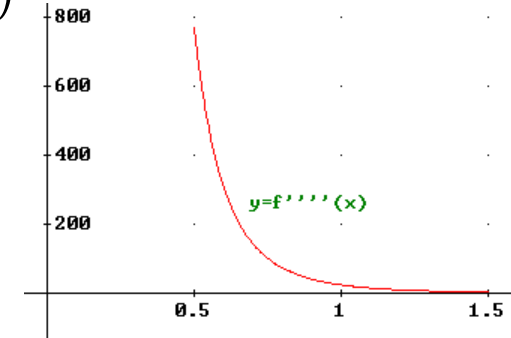
Per a veure què prediu la cota d'error acotarem (gràficament) $f^{(iv)}$ en $[0.5, 1.5]$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{\exp(x/10)}{10^4 x^5} (x^4 - 40x^3 + 1200x^2 - 24000x + 240000)$$

$$f^{(iv)}(0.5) = 768.000002... < 769 = M_4$$

Acotació manual: $M_4 = 1037$

$$\text{D'ací, } E_{10} \leq \frac{769}{180 \cdot 10^4} < 0.00045 \text{ (tres decimals exactes)}$$



Simpson (6 decimals exactes):

$$\text{Amb } M_4 = 769, E_n \leq \frac{769}{180n^4} < 10^{-7} \Leftrightarrow n^4 > \frac{769}{18} \cdot 10^6 \Rightarrow n \geq 82 \text{ (n parell)}$$

Efectuant 82 subdivisions de $[0.5, 1.5]$, $h = \frac{1}{82}$ i

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x} dx \cong S_{82}f = \frac{1}{246} \left(f(0.5) + 4 \sum_{k=0}^{40} f\left(0.5 + \frac{2k+1}{82}\right) + 2 \sum_{k=1}^{40} f\left(0.5 + \frac{2k}{82}\right) + f(1.5) \right)$$

$$\stackrel{?}{=} \text{DERIVE } \underline{1.2037981}92... \text{ (set decimals exactes)}$$