Anàlisi Matemàtica

UT6 - Sèries de Potències

AMA

Contingut

Conceptes generals

- Definició de sèrie de potències
- La sèrie geomètrica
- Radi i interval de convergència

Derivació i integració de sèries de potències

- Càlcul de derivades i primitives
- Obtenció de sèries de potències a partir de la geomètrica
- Aplicació a la suma de sèries numèriques

Desenvolupament en sèrie de Taylor (McLaurin)

- Polinomis de McLaurin.
- Pas al límit en els polinomis de McLaurin
- Obtenció de les sèries exponencial, sinus i cosinus

Objectius

Conceptes generals (1S)

- Reconéixer una sèrie de potències
- Trobar el seu radi i l'interval de convergència

Derivar i integrar sèries de potenciès (1S)

- Derivar i integrar correctament les sèries de potències
- Manipular correctament la sèrie geomètrica
- Identificar noves sèries de potències
- Fer ús d'aquestes tècniques per a sumar sèries numèriques

Desenvolupament en sèrie de Taylor (McLaurin) (1S)

- Obtenir sèries de potències a partir de polinomis de McLaurin
- Desenvolupar en sèrie l'exponencial, sinus i cosinus

Aplicacions (1S)

Conceptes generals

Sèrie de potències:

Una sèrie de potències (centrada en $a = 0$) és una funció de la forma

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots ,$$

definida on la sèrie numèrica siga convergent.

Es considera centrada en a si és de la forma

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$$

En ambdós casos la sèrie representa un polinomi de grau infinit

Exemple (Sèrie geomètrica)

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \ , \ \text{solo si } |x| < 1$$

Radi i interval de convergència:

Qualsevol sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \begin{cases} \text{convergeix si } |x| < \rho \iff x \in I =]-\rho, \rho[\\ \text{divergeix si } |x| > \rho \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} I =]-\rho, \rho[\text{ és l'interval de convergència} \\ \rho \text{ és el radi de convergència} \end{array}}$$

En els altres dos punts, $x = \pm\rho$, la sèrie pot ser convergent o no. Depén del cas.

Quin seria el radi i interval de convergència d'una sèrie de potències centrada en a?

Exemple (Sèrie geomètrica):

$$\sum_{n\geq 0} x^n \;,\; a_n = 1. \qquad \begin{cases} \text{Radi de convergència: } \rho = 1 \\ \text{Interval de convergència: } I =]-1,1[\end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \text{convergeix si } |x| < 1 \\ \text{divergeix si } |x| > 1 \\ \text{en } x = 1 \text{ divergeix} \\ \text{en } x = -1 \text{ divergeix} \end{pmatrix}$$

Quin seria el radi i interval de convergència de $\sum_{n\geq 0} n^k x^n$ per als valors de $k \in \mathbb{N}$?

Derivació i integració

La sèrie de potències

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \,, \; x \in I$$

pot derivar-se i integrar-se terme a terme en el seu interval de convergència:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + k a_k x^{k-1} + \cdots = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \,, \; x \in I$$

$$\int f = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C \,, \; x \in I$$

Exemple (Sèrie geomètrica):

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Derivant: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n \cdot x^{n-1}$

Integrant: $\log\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = C + \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \;\; \Rightarrow \;\; \log\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Exemple:

Sumar les sèries $\sum_{n\geq 1} n\cdot x^n$ i $\sum_{n\geq 1} n^2\cdot x^n$, per a $|x|<1$

Partim de la sèrie geomètrica, $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, si $|x|<1$.

Derivant tindrem

$$\sum_{n\geq 1} n\cdot x^{n-1} = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sèrie aritmètico-geomètrica} \\ \text{(Prob add, UT5)} \end{array} \right.$$

i multiplicant per x,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} n\cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

Derivant de nou, $\sum_{n\geq 1} n^2\cdot x^{n-1} = \left(\sum_{n\geq 1} n\cdot x^n\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

d'on, $\boxed{\sum_{n\geq 1} n^2\cdot x^n = \frac{x\cdot(1+x)}{(1-x)^3}} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sèrie aritmètico-geomètrica} \\ \text{generalitzada} \end{array} \right.$

Exercici:

Integrant la sèrie de potències $f(x) = \sum_{n\geq 1} (n+1)x^n$ troba:

a) Una expressió explícita per a $f(x)$

b) El resultat de la suma infinita $s = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots + \frac{n+1}{2^n} + \cdots$

Integrant i derivant després, $\int f = C + \sum_{n\geq 1} x^{n+1} = C + \frac{x^2}{1-x} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}}$

La suma infinita demanada és

$$s = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots + \frac{n+1}{2^n} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \boxed{3}$$

Desenvolupament en sèrie de log i arctan:

A partir de la sèrie geomètrica, $\boxed{\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0} x^n \ , \ |x|<1}$, es dedueix $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$

Integrant, $\boxed{\log(1+x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \ = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots, \ |x|<1}$

(La sèrie anterior convergeix (Leibniz) si $x=1$. Es pot veure que

$$\log(2)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

resultat comentat en la UT5 en aproximar la suma d'aquesta sèrie numèrica.)

Substituint x per $-x^2$ a la sèrie geomètrica, tenim $\dfrac{1}{1+x^2} \ = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$

Integrant, $\boxed{\arctan(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \ = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots \ , \ |x|<1}$

Exercici: Desenvolupar en sèrie de potències la funció $\log\left(x^2+3x+2\right)$

$$f(x)=\log\left(x^2+3x+2\right)=\log\left((x+1)(x+2)\right)=\log(x+1)+\log(x+2)$$

Podriem fer ús de la sèrie de potències del logaritme per a trobar la sèrie però la seu derivada sembla més manejable: $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

A partir de la sèrie geomètrica,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1+x}&=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n\geq 0}(-x)^n=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n\\ \frac{1}{x+2}&=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(x)\underset{\overbrace{|x|<1}}{=}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

Integrant, tindrem $\boxed{f(x)=\log(2)+\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\ ,\ |x|<1}$

Exercici: A partir del valor de arctan(1), aproxima π amb sis xifres decimals correctes fent servir la sèrie de $\arctan(x)$ i el criteri de Leibniz per acotar l'error.

Desenvolupament en sèrie de Taylor

Desenvolupament de McLaurin d'ordre *n* d'una funció:

Siga f derivable fins a l'ordre $n+1$ en $\overbrace{]-h,h[}^{I}$. Per a $x\in I$ i cert $\alpha\in\,]0,1[$,

$$f(x)=\underbrace{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Polinomi de McLaurin, } P_n f(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Residu de Lagrange, } R_n f(x)}$$

(Existeix un desenvolupament més general -Taylor- amb centre en $a\in\mathbb{R}$)

Exemple:

La funció exponencial, $y=f(x)=e^x$ és derivable indefinidament en $\mathbb{R}$

Totes les seues derivades coincideixen amb ella: $f^{(n)}(x)=e^x$. D'ací,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\alpha x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha\in\,]0,1[$$

Pas al límit:

Prenent límits ($n \to \infty$) en el desenvolupament de McLaurin d'ordre n de e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha x} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

El límit anterior és 0. D'ací,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\textit{desenvolupament en sèrie de McLaurin} \text{ de } e^x \right)$$

Aplicació: Prenent $x = \pm 1$ s'arriba als desenvolupaments en sèrie infinita:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$$

$\leftarrow$ En la UT5 s'aproxima el número e a partir d'aquesta sèrie

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$\leftarrow$ Com s'aproximaria $1/e$ amb 6 decimals exactes?

La sèrie exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \ , \ x \in \mathbb{R}$$

En aquest cas, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $\begin{cases} \text{Interval de convergència: } I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \\ \text{Radi de convergència: } \rho = +\infty \end{cases}$

Exercici

Deriva i integra per a provar que

$$e^x = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$e^x = 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercici

Què suma la sèrie numérica

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!2^{n+1}} \ ?$$

Desenvolupament en sèrie de sinus i cosinus:

Calculant les derivades successives, en forma similar a la exponencial, escribint els corresponents polinomis de McLaurin i aplicant límits s'obtenen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ , \ \ x \in \mathbb{R} \\ \\ \sin(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ , \ \ x \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Exercici: Troba la sèrie del cosinus derivant la sèrie del sinus.

Exercici: A partir del desenvolupament en sèrie de $\cos(x)$, aproxima $\cos(1)$ amb 4 decimals correctes. Fes servir la cota d'error de Leibniz.

Derivades successives d'una sèrie de potències:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \;\Rightarrow\; a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Derivant successivament, per a $k : 0,1,2,\ldots\ ;\ x \in I$,

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)k\cdots 2a_{k+1}x + \cdots = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

I substituint en $x = 0$

$$f^{(k)}(0) = k!a_k + 0 = k!a_k \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

Conseqüència:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Tota sèrie de potències és la sèrie de Taylor (o McLaurin) de la funció que representa.

El desenvolupament en sèrie de potències és únic.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \;\Rightarrow\; P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$ és el polinomi de McLaurin de $f(x)$

Exercici:

Si $f(x) = \sum_{n\geq 1} (n+1)x^n$, observa que $a_n = n+1$ i troba $f^{(12)}(0)$

Verifica el resultat fent ús de DERIVE, a partir de l'expressió explícita per a $f(x)$, obtinguda prèviament.

Exercici:

Si $f(x) = \log\left(x^2 + 3x + 2\right)$, fes ús de DERIVE per a trobar $f^{(11)}(0)$.

Verifica el resultat a partir del desenvolupament en sèrie de $f(x)$, trobat prèviament, i la fórmula $f^{(n)}(0) = n!a_n$.