# Tema 3: Reticles o àlgebres de Boole

1. Reticles o àlgebres de Boole
2. Funcions booleanes. Formes canòniques
3. Mètode de Quine-McCluskey

# Reticles o àlgebres de Boole

## Definició

- Un conjunt ordenat $(A, \preceq)$ es un reticle si tot subconjunt de dos elements de $A$ té suprem i ínfim, és a dir, $\forall a, b \in A$

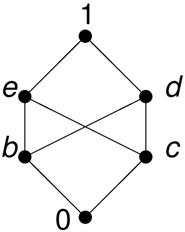
$$\exists\, \text{suprem}_A(\{a, b\}) = a + b, \qquad \exists\, \text{ínfim}_A(\{a, b\}) = a \cdot b.$$

- Un reticle $(A, \preceq)$ es diu distributiu, si $\forall a, b, c \in A$

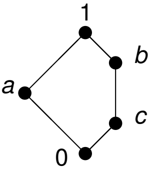
$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c), \qquad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

- Un reticle es diu *acotat* o *fitat* si té màxim (denotat habitualment per 1) i mínim (denotat habitualment per 0).
- Un reticle acotat amb màxim 1 i mínim 0 es diu complementat si per a tot $a \in A$ existeix $\bar{a} \in A$ (anomenat *complementari* de $a$) tal que $a + \bar{a} = 1$ i $a \cdot \bar{a} = 0$.
- Un reticle es diu reticle de Boole o àlgebra de Boole si és distributiu i complementat.

# Exemples

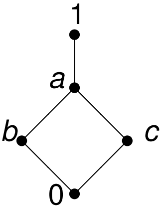
1. 


No és un reticle: $\neg\exists\,\mathrm{suprem}(\{b, c\})$.

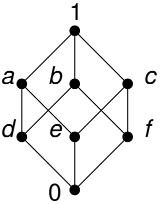
2. 


És reticle acotat i complementat, però no és de Boole, no és distributiu i $a$ té dos complementaris.

# Exemples

3. 

És reticle acotat i distributiu, però *a*, *b* i *c* no tenen complementari.

4. 

És reticle de Boole.

## Exemple 1

Donat $\mathbb{N}^*$ amb la relació de divisibilitat, és un reticle que no és de Boole, ja que no té màxim. En aquest cas, si $a, b \in \mathbb{N}^*$

$$\text{suprem}_{\mathbb{N}^*}(\{a, b\}) = \text{mcm}(a, b), \qquad \text{ínfim}_{\mathbb{N}^*}(\{a, b\}) = \text{mcd}(a, b)$$

## Exemple 2

Per a tot natural $n$, denotem per $D_n$ el conjunt dels seus divisors naturals i considerem en $D_n$ la relació de divisibilitat.

- $D_n$ és un reticle distributiu, i
$$\text{suprem}\{a, b\} = \text{mcm}(a, b), \qquad \text{ínfim}\{a, b\} = \text{mcd}(a, b).$$
- $D_n$ té màxim ($n$) i mínim (1).
- Per tant: $D_n$ serà un reticle de Boole si i només si cada element $a \in D_n$ admet *complementari*, és a dir, si existeix $\bar{a} \in D_n$ tal que $\text{mcm}(a, \bar{a}) = n$ i $\text{mcd}(a, \bar{a}) = 1$.

És fàcil comprovar que $D_6$ és reticle de Boole, però $D_{12}$ no ho és.

# Propietats

Si $A$ és una àlgebra o reticle de Boole, les operacions $+$ i $\cdot$ satisfan les següents propietats $\forall\ a, b, c \in A$:

| | | |
|---|---|---|
| **Commutativa** | $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| **Distributiva** | $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ |
| **Neutre** | $a + 0 = a$ | $a \cdot 1 = a$ |
| **Complementari** | $a + \bar{a} = 1$ | $a \cdot \bar{a} = 0$ |
| **Associativa** | $a + (b + c) = (a + b) + c$ | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |

# Propietats addicionals

Si $A$ és una àlgebra o reticle de Boole, les operacions $+$ i $\cdot$ satisfan les següents propietats $\forall\ a, b, c \in A$:

| | | |
|---|---|---|
| **Lleis d'absorció (simplificatives)** | $a + (a \cdot b) = a$ | $a \cdot (a + b) = a$ |
| **Idempotents** | $a + a = a$ | $a \cdot a = a$ |
| **Absorbents** | $a + 1 = 1$ | $a \cdot 0 = 0$ |
| **Neutres complementaris** | $0 + 1 = 1$ | $0 \cdot 1 = 0$ |

**El complementari de cada element és únic.**

**Involució (o doble complement)** $\overline{(\bar{a})} = a$

**Si $A$ no és trivial, aleshores** $0 \neq 1$ **i** $a \neq \bar{a}$

**Lleis de De Morgan** $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$

# Exemples

1. El conjunt $A = \{0, 1\}$ amb la relació d'ordre «ser menor o igual que» és un reticle o àlgebra de Boole anomenada àlgebra de Boole binària o *dels interruptors*.
2. El conjunt quocient de les formes proposicionals respecte de la relació d'equivalència lògica (que és una relació binària d'equivalència) és una àlgebra de Boole amb les operacions $\vee$ i $\wedge$.
3. Donat un conjunt $E$, $\mathcal{P}(E)$ és un reticle o àlgebra de Boole amb la relació d'ordre *inclusió* de conjunts. En aquest cas, si $X$ i $Y$ són subconjunts de $E$, es té que

$$\text{suprem}_E(\{X, Y\}) = X \cup Y, \qquad \text{ínfim}_E(\{X, Y\}) = X \cap Y.$$

1. Reticles o àlgebres de Boole
2. Funcions booleanes. Formes canòniques
3. Mètode de Quine-McCluskey

# Funcions booleanes

**Definició**

*Si A és una àlgebra de Boole, s'anomena funció booleana d'ordre n sobre A a qualsevol aplicació $f:\ A^n \longrightarrow A$ tal que la imatge d'una n-tupla*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*s'obté aplicant un nombre finit de vegades les operacions de l'àlgebra de Boole, suma, producte i complementació, als elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Exemple:

Si $A$ és un àlgebra de Boole qualsevol, l'aplicació $f : A^3 \to A$ donada per:

$$f(x, y, z) = x + x \cdot y + \overline{y} \cdot z$$

és una función booleana d'ordre 3.

Si $A$ és l'àlgebra de Boole de les parts d'un conjunt $E$, aquesta funció es correspon amb l'operació:

$$X \cup (X \cap Y) \cup (Y^c \cap Z)$$

Si $A$ és l'àlgebra de Boole de les formas proposicionals, aquesta funció es correspon amb la forma proposicional:

$$P \vee (P \wedge Q) \vee (\rceil Q \wedge R).$$

# Objectius

Una mateixa funció booleana admet diferents expressions. Per exemple, si apliquem la llei d'absorció a la funció booleana de l'exemple anterior, $f(x, y, z) = x + x \cdot y + \overline{y} \cdot z$, obtenim $f(x, y, z) = x + \overline{y} \cdot z$. Tenint en compte aquesta situació, resulta lògic plantejar-se els següents problemes:

- Com esbrinar, d'una manera sistemàtica, si dues expressions diferents corresponen a la mateixa funció booleana?
- Com obtenir expressions que representin a una funció booleana, però que siguen "el més senzilles possible"?

Per a resoldre la primera qüestió anem a veure que tota funció booleana admet dues expressions (anomenades formes canòniques) que la caracteritzen. A més, aquesta forma d'expressar les funcions booleanes, ens va a permetre simplificar-les (el que respondrà a la segona qüestió).

# Termes minimals i maximals

**Definició**

Un terme minimal (o miniterme) d'ordre $n$ és una funció booleana de la forma:

$$m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n,$$

on $b_i = x_i$ o $b_i = \overline{x}_i$ per a tot $i = 1, 2, \ldots, n$

Exemples: $m(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot z$ és un terme minimal d'ordre 3, $m(x, y, z, t) = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot t$ és un terme minimal d'ordre 4.

**Definició**

Un terme maximal (o maxiterme) d'ordre $n$ és una funció booleana de la forma:

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

on $b_i = x_i$ o $b_i = \overline{x}_i$ per a tot $i = 1, 2, \ldots, n$

Exemples: $M(x, y, z) = \overline{x} + y + z$ és un terme maximal d'ordre 3, $M(x, y, z, t) = x + \overline{y} + \overline{z} + t$ és un terme maximal d'ordre 4.

# Termes minimals i expressions binàries

**Propietat**

Si $m$ és un terme minimal d'ordre$n$ sobre un àlgebra de Boole, aleshores existeix una única $n$-tupla de zeros i uns en la que $m$ val 1 ($m$ té valor 0 en la resta de $n$-tuples binàries).

Exemple:

El miniterme d'ordre 3, $m(x, y, z) = x \cdot \overline{y} \cdot z$ pren el valor 1 en la 3-tupla $(1, 0, 1)$:

$$m(1, 0, 1) = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

però si substituïm les variables per qualsevol altra combinació de zeros i unis, el resultat sempre és 0.

Se sol denotar $m_{101}$ a aquest terme minimal, o bé $m_5$ (el subíndex binari expresat en base 10).

Per a trobar la $n$-tupla binària associada a un terme minimal cal adonar-se que el producte sols serà 1 si tots els factors valen 1, i per tant, les variables no complementades hauran de valdre 1 i les complementades 0.

# Termes maximals i expressions binàries

**Propietat**

Si $M$ és un terme maximal d'ordre $n$ sobre un àlgebra de Boole, aleshores existeix una única $n$-tupla de zeros i uns en la que $M$ val 0 ($M$ té valor 1 en la resta de $n$-tuplas binarias).

Exemple:

El maxiterme d'ordre 3, $M(x, y, z) = \overline{x} + \overline{y} + z$ pren el valor 0 en la 3-tupla $(1, 1, 0)$:

$$M(1, 1, 0) = \overline{1} + \overline{1} + 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

però si substituïm les variables per qualsevol altra combinació de zeros i unis, el resultat sempre és 1.

Se sol denotar $M_{110}$ a aquest terme maximal, o bé $M_6$ (el subíndex binari expresat en base 10).

Per a trobar la $n$-tupla binària associada a un terme maximal cal adonar-se que la suma sols serà 0 si tots els factors valen 0, i per tant, les variables no complementades hauran de valdre 0 i les complementades 1.

# Forma canònica disjuntiva

**Propietat**

*Tota funció booleana $f$ diferent de la funció nul·la pot ser expressada en forma única (excepte l'ordre) com a suma de minitermes diferents, expressió coneguda com forma canònica disjuntiva de la funció $f$.*

*En concret, els termes minimals que apareixen en la forma canònica disjuntiva d'una funció boolena $f$ són* ***els associats a aquelles $n$-tuples binàries per a les quals $f$ val 1****.*

Per tant, per a obtenir la forma canònica disjuntiva d'una funció booleana $f$ d'ordre n sobre un àlgebra de Boole $A$, bastarà amb calcular els valors de $f$ sobre els elements de $\{0, 1\}^n \subseteq A^n$ (és a dir, sobre les $n$-tuples de zeros i uns). És a dir, calcular el que es coneix com a *taula de veritat* de $f$.

# Càlcul de la forma canònica disjuntiva a partir de la «taula de veritat»

Siga la funció booleana d'ordre 2 donada per $f(x, y) = x \cdot y + \overline{x}$. Considerem la seua «taula de veritat»:

| $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Fent servir aquesta taula, segons la fórmula donada en el teorema anterior, la forma canònica disjuntiva de $f$ serà:

$$f(x, y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y + x \cdot y$$

# Forma canònica conjuntiva

**Propietat**

*Tota funció booleana $f$ diferent de la funció constant igual a $1$ pot expressar-se en forma única (excepte l'ordre) com a producte de maxitermes diferents, expressió coneguda com forma canònica conjuntiva de la funció $f$.*

*En concret, els termes maximals que apareixen en la forma canònica conjuntiva d'una funció booleana $f$ d'ordre $n$ són* ***els associats a aquelles $n$-tuples binàries per a les quals $f$ vale 0****.*

# Càlcul de la forma canònica conjuntiva a partir de la «taula de veritat»

Considerem la funció booleana de l'exemple anterior, la taula de veritat de la qual era la següent:

| $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Fent servir la taula, segons la fórmula donada en el teorema anterior, la forma canònica conjuntiva de $f$ serà:

$$f(x,y) = \overline{x} + y$$

# Objectiu

Es tracta d'un mètode de simplificació de funcions booleanes, basat en l'aplicació reiterada de la regla

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a.$$

Mitjançant el mètode de Quine es troben de forma sistemàtica els anomenats *implicants primers* de la funció booleana, que són aquelles expressions booleanes resultants d'eliminar el nombre més gran possible de variables en els minitermes de la funció, segons la regla anterior.
Seguidament, mitjançant l'anomenada *quadrícula* o *graella de McCluskey* es tracta de determinar un (o uns) conjunt(s) mínimal(s) d'implicants primers la suma dels quals represente la funció donada.

# Mètode de Quine

1. S'expressa la funció donada en forma canònica disjuntiva.
2. Es representa cada miniterme per la seua expressió binària.
3. Es classifiquen els minitermes segons el nombre d'uns (*índex*) de la seua expressió binària, ordenant-los en columna per grups del mateix índex.
4. Es comparen els termes que estan en seccions contigües, és a dir, que els seus índex diferisquen en una única posició (tenen intercanviats només un 0 i un 1).

# Mètode de Quine

5. Com a resultat de la comparació anterior, s'eliminarà la variable en què difereixen aquests termes, substituint-la per un guió. Es construeix així una nova columna, designant els termes comparats pel seu número decimal.
6. Si s'escau, es repeteix el procés anterior, comparant aquells termes que difereixen en una sola posició i que, a més, tenen el guió en el mateix lloc.
7. El procés continua mentre siga possible, és a dir, fins que no queden més termes per comparar.

Com a resultat del procés anterior s'obtenen els *implicants primers* de la funció, que són les expressions booleanes corresponents als termes de la darrera columna i tots aquells d'anteriors columnes que no hagen sigut objecte de simplificació posterior.

# Graella de McCluskey

Per construir la graella de McCluskey es procedeix així:

1. Les columnes corresponen als minitermes de la forma canònica disjuntiva de la funció, i les files, als seus implicants primers, calculats amb el mètode de Quine.
2. Es col·loca una marca en la fila i columna corresponent quan el miniterme en qüestió conté l'implicant primer que correspon a aquesta fila (l'implicant primer cobreix el miniterme).
3. Quan una columna conté una única marca, aquesta s'envolta amb un cercle, per indicar que l'implicant primer associat no és redundant, ha d'aparèixer en qualsevol simplificació de la funció.
4. D'entre els altres implicants primers, es troba un conjunt minimal de forma que estiguen representats tots els minitermes de la funció.

# Descripció de la primera fase (1)

Considerem la següent funció booleana d'ordre 4, expressada en la seua forma canónica disjuntiva:

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{t}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot t+\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{t}+\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot t+$$

$$x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot t+x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}+x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot t+x\cdot y\cdot z\cdot\overline{t}+x\cdot y\cdot z\cdot t$$

Les expressions binàries associades respectives serien:

$$0000, 0010, 0011, 0110, 0111, 1000, 1001, 1100, 1101, 1110 \; y \; 1111$$

# Descripció de la primera fase (2)

0000

0010
1000

0011
0110
1001
1100

0111
1101
1110

1111

S'escriuen en una columna, a l'esquerra, els subíndexs binaris dels termes minimals de $f$. Estaran separats per blocs de manera que els nombres del primer bloc no contenen cap 1, els de el segon bloc contenen exactament un 1, els de el tercer contenen dos 1's, etc.

# Descripció de la primera fase (3)

| | |
|---|---|
| 0000 * | 00-0 |
| 0010 * | -000 |
| 1000 * | 001- |
| 0011 * | 0-10 |
| 0110 * | 100- |
| 1001 * | 1-00 |
| 1100 * | 0-11 |
| 0111 * | 011- |
| 1101 * | -110 |
| 1110 * | 1-01 |
| 1111 * | 110- |
| | 11-0 |
| | -111 |
| | 11-1 |
| | 111- |

Es consideren tots els parells de nombres binaris pertanyents a blocs contigus que es diferencien només en un dígit, es marquen amb un $*$ i s'escriu, en una altra columna a la dreta, l'expressió resultant de substituir el dígit diferent per un guió $-$. Per exemple, el terme 0000 (pertanyent al primer bloc) i el terme 0010 (pertanyent al segon) es diferencien només en un dígit; per tant, han de "marcar-se" i s'ha d'afegir el terme $00-0$ en la columna de la dreta.

# Descripció de la primera fase (4)

| | | |
|---|---|---|
| 0000 * | 00-0 | 0-1- |
| 0010 * | -000 | 1-0- |
| 1000 * | 001- * | -11- |
| 0011 * | 0-10 * | 11-- |
| 0110 * | 100- * | |
| 1001 * | 1-00 * | |
| 1100 * | 0-11 * | |
| 0111 * | 011- * | |
| 1101 * | -110* | |
| 1110 * | 1-01 * | |
| 1111 * | 110- * | |
| | 11-0 * | |
| | -111* | |
| | 11-1 * | |
| | 111- * | |

Es procedeix igual que abans amb els nous blocs, “combinant” aquells termes corresponents a blocs contigus amb exactament un dígit diferent. Observem que no podem combinar cap element del primer bloc amb elements del segon. També, per exemple, el terme $001-$ pot combinar-se amb $011-$ donant lloc a $0-1-$. Seguiríem el procés fins que no puguen “combinar-se més termes”. En el nostre exemple, hem arribat ja a aquesta situació.

S’anomenen implicants primers als termes que queden sense “marcar”. En el nostre cas serien: $\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{t}$, $\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}$, $\overline{x}\cdot z$, $x\cdot\overline{z}$, $y\cdot z$ y $x\cdot y$.

# Descripció de la primera fase (5)

Deduïm que la funció booleana original s' expressa com a suma dels implicants primers:

$$f(x, y, z, t) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{t} + \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{t} + \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + y \cdot z + x \cdot y$$

Hem arribat, així, a una expressió “més simple” de la funció $f$. En la segona part veurem com obtenir expressions encara més simples, eliminant alguns implicants primers “sobrants”.

# Descripció de la segona fase (1)

**Definició**

Direm que un terme $r$ cobreix a un cert miniterme $m$ si totes les variables (complementades o no) que apareixen en $r$ també apareixen en $m$.

Per exemple, el terme $\overline{y} \cdot t$ cobreix al miniterme $x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot t$.

El següent pas consistirà en determinar a quin miniterme de la forma canònica disjuntiva de $f$ cobreix cadascun dels implicants primers que apareixen en l'expressió "simplificada" de $f$ que hem obtingut.

# Descripció de la segona fase (2)

| | 0000 | 0010 | 0011 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $00-0$ | $X$ | $X$ | | | | | | | | | |
| $-000$ | $X$ | | | | | $X$ | | | | | |
| $0-1-$ | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | | | | | | |
| $1-0-$ | | | | | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | | |
| $-11-$ | | | | $X$ | $X$ | | | | | $X$ | $X$ |
| $11--$ | | | | | | | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |

Construïm una taula de manera que cada fila correspon a un implicant primer i cada columna correspon a un miniterme de la forma canònica disjuntiva de $f$.

Marquem amb una creu aquelles caselles en les quals el implicant primer (associat a la seua fila) cobrisca al miniterme (associat a la seua columna).

# Descripció de la segona fase (3)

| | 0000 | 0010 | 0011 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $00-0$ | $X$ | $X$ | | | | | | | | | |
| $-000$ | $X$ | | | | | $X$ | | | | | |
| $0-1-$ | | $X$ | $\otimes$ | $X$ | $X$ | | | | | | |
| $1-0-$ | | | | | | $X$ | $\otimes$ | $X$ | $X$ | | |
| $-11-$ | | | | $X$ | $X$ | | | | | $X$ | $X$ |
| $11--$ | | | | | | | | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |

Cerquem les columnes que només continguen una creu i tanquem en un cercle aquestes creus. Açò vol dir que els corresponents minitermes són coberts només per un implicant primer. Aquests són els implicants primers essencials (assenyalats en verd), i hauran d'aparèixer necessàriament en qualsevol expressió minimal de $f$ (ja que, en cas contrari, hi hauria minitermes que no quedarien "coberts"):

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\cdot z + x\cdot\overline{z} + \cdots$$

# Descripció de la segona fase (4)

| | 0000 | 0010 | 0011 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 – 0 | X | X | | | | | | | | | |
| –000 | X | | | | | X | | | | | |
| 0 – 1– | | X | ⊗ | X | X | | | | | | |
| 1 – 0– | | | | | | X | ⊗ | X | X | | |
| –11– | | | | X | X | | | | | X | X |
| 11 – – | | | | | | | | X | X | X | X |

Assenyalem d'alguna manera tots els minitermes que són coberts pels implicants primers essencials (els escrits en roig, en la taula). Així doncs, l'expressió:

$$\overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z}$$

ja "cobreix" a tots els minitermes escrits en roig. Només "falten per cobrir" els escrits en blau.

# Descripció de la segona fase (5)

| | 0000 | 0010 | 0011 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 – 0 | X | X | | | | | | | | | |
| –000 | X | | | | | X | | | | | |
| 0 – 1– | | X | ⊗ | X | X | | | | | | |
| 1 – 0– | | | | | | X | ⊗ | X | X | | |
| –11– | | | | X | X | | | | | X | X |
| 11 – – | | | | | | | | X | X | X | X |

Els minitermes que “falten por cobrir” són coberts únicament pels implicants primers assenyalats també en blau. Per tant:

Les expressions minimals de $f$ s’obtindran sumant, als implicants primers essencials (que han d’aparèixer necessàriament en totes les expressions minimals), una quantitat mínima de implicants primers no essencials de manera que es “cobrisquen” tots els minitermes.

# Descripció de la segona fase (6)

| | 0000 | 0010 | 0011 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 − 0 | X | X | | | | | | | | | |
| −000 | X | | | | | X | | | | | |
| 0 − 1− | | X | $\otimes$ | X | X | | | | | | |
| 1 − 0− | | | | | | X | $\otimes$ | X | X | | |
| −11− | | | | X | X | | | | | X | X |
| 11 − − | | | | | | | | X | X | X | X |

En el nostre cas podem obtenir 4 expressions minimals de $f$ ("jugant" amb els 4 implicants primers no essencials):

- $f(x, y, z, t) = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{t} + y \cdot z$
- $f(x, y, z, t) = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{t} + x \cdot y$
- $f(x, y, z, t) = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{t} + y \cdot z$
- $f(x, y, z, t) = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{t} + x \cdot y$