

ANÀLISI MATEMÀTICA(AMA)

UT1 - Problemes proposats: NOMBRES REALS

1. Determina els valors de $x \in \mathbb{R}$ que satisfan les desigualtats que segueixen:

a) $2x + 3 < 3x - 8$

b) $(x + 2)(x - 2) \geq -3$

c) $\frac{2x - 1}{x + 1} \geq 1$

d) $(2x + 1)^4 (x - 2)(x + 3) \leq 0$

2. Troba els valors de $x \in \mathbb{R}$ que verifiquen:

a) $|x - 3| \leq 8$

b) $|x - 1| |x + 2| < 3$

c) $||x| + 4| \leq 5$

d) $(x - 2)^2 \geq 4$

e) $|2 - |x|| \geq 1$

f) $|x - 1| > \frac{2x + 1}{x + 1} \quad (\text{sug: } |x - a| > b)$

g) $\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| = \frac{x - 1}{x + 1}$

h) $|x| - |x + 1| > 1 \quad (\text{sug: } |x + 1| < |x| - 1; \text{ sol: } \emptyset)$

i) $|x^2 - 2| \leq 1$

j) $||x - 1| + 2| < 3$

k) $|2 - x^2| \leq 1 + 2x^2$.

ANÀLISI MATEMÀTICA(AMA)

UT1 - Exercicis addicionals: NOMBRES REALS

1. a) Comprova que $0.\overline{9} = 1$
b) Troba la representació decimal de $\frac{19}{8}$ i de $\frac{23}{29}$
c) Troba els nombres racionals amb representació decimal $0.\overline{917}$ i $2.3\overline{292}$, respectivament.
2. Troba els valors de $x \in \mathbb{R}$ que verifiquen $x^3 + 2x^2 - 5x > 6$
3. Prova la desigualtat: $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.
4. Si a , b i c són nombres reals, prova que:
a) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
b) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$. Què pots dir si $a > 1$?
5. Troba els valors de $x \in \mathbb{R}$ que verifiquen:
a) $|x^2 + 6x + 5| \geq 2|x - 3|$ (sug: dividir; $x \neq 3$)
b) $2 < |x| + |2x + 2| < 4$ (sug: considerar regions; $x < -1$, $-1 < x < 0$, $x > 0$; sol: $\left] -2, -\frac{4}{3} \right[\cup \left] 0, \frac{2}{3} \right[$)
- *6. a) Verifica que per a tot $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, resulta $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$
b) Comprova que si $x, y \in \mathbb{R}$, aleshores
$$\begin{aligned}\max(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \\ \min(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)\end{aligned}$$
- *7. a) Verifica que si $x, y \in \mathbb{R}$, aleshores $|xy| \leq x^2 + y^2$
b) En quines condicions és certa la igualtat $|x + y| = |x| + |y|$?
- *8. Determina —pots fer ús d'una gràfica com ajuda— el conjunt de parells $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verifiquen:
a) $|x| = |y|$
b) $|x \cdot y| = 2$
c) $|x| \leq |y|$
d) $|x| - |y| \geq 2$
e) $|x| + |y| \leq 1$
f) $\max(|x|, |y|) < 2$