

ANEXO 3

TEORÍA DE ERRORES

Muchas de las decisiones tomadas en ingeniería se basa en resultados de medidas experimentales, por lo tanto es muy importante expresar dichos resultados con claridad y precisión. Los conceptos de magnitud física, unidades y medida se estudia en la primera lección de Fundamentos Físicos de la Informática y, como complemento, en este capítulo se pretende aprender a estimar los posibles errores en las medidas, así como la propagación de estos errores a través de los cálculos a los resultados, a expresar los resultados y a analizarlos. Dado que los contenidos de esta asignatura son fundamentalmente electricidad y magnetismo, se hace más hincapié en las medidas de magnitudes eléctricas.

Hay otros parámetros para cuantificar errores y expresar resultados de las medidas, basados en conceptos estadísticos, que no se tratará en esta asignatura, pero que son igualmente importantes.

1. INTRODUCCIÓN. VALOR ESTIMADO Y ERROR ASOCIADO EN MEDIDAS DIRECTAS

Medir es comparar dos cantidades de la misma magnitud. Por ejemplo, si se mide la anchura del laboratorio poniendo un pie delante de otro, se podrá decir que la anchura del laboratorio es 18 pies, habiéndose considerado como unidad de medida o patrón “un pie”. Ahora bien, una medida nunca puede ser exacta, es decir, siempre se comete un error, por lo que la medida no será completa sin la estimación del error cometido. Unas veces ese error será debido a los instrumentos de medida, otras a la propia percepción del operador, etc. Los errores al medir son inevitables.

En función de la naturaleza del error se define dos tipos de error:

- **Errores sistemáticos:** Son debidos a problemas en el funcionamiento de los aparatos de medida o al hecho de que al introducir el aparato de medida en el sistema, éste se altera y se modifica, por lo tanto, la magnitud que se mide cambia su valor. *Normalmente actúan en el mismo sentido.*
- **Errores accidentales:** Son debidos a causas imponderables que alteran *aleatoriamente* las medidas. Al producirse aleatoriamente las medidas se distribuyen alrededor del valor real, por lo que un tratamiento estadístico permite estimar su valor.

Debido a la existencia de errores es imposible conocer el valor real de la magnitud a medir. Siendo cuidadoso se puede controlar los errores sistemáticos, en cuanto a los errores accidentales se puede reducir tomando un conjunto de medidas y calculando su valor medio. *Se toma como valor estimado de la medida el valor medio de las distintas medidas realizadas.*

Como ejemplo, supóngase que se pretende medir la longitud L de una barra y se obtiene dos conjuntos de medidas:

Grupo a : 146 cm, 146 cm, 146 cm

Grupo b : 140 cm, 152 cm, 146 cm

En ambos casos el valor estimado es el mismo (146 cm). Sin embargo, la precisión de las medidas no es la misma. ¿Cómo se puede diferenciar la precisión de dos medidas? Mediante el concepto de error o incertidumbre que se definirá más adelante.

A la hora de expresar una medida siempre se ha de indicar el valor observado junto con su error y la/s unidad/es correspondiente/s. El valor verdadero de la medida se encuentra con una alta probabilidad en un intervalo cuyos límites son la estimación de la medida más/menos el error estimado.

$$\text{Medida} = \text{Valor observado} \pm \text{Error} \quad \text{Unidad}$$

En el ejemplo anterior, una vez estimado el error se escribiría: $L = 146 \pm 4 \text{ cm}$

2. NOTACIÓN: CIFRAS SIGNIFICATIVAS

A la hora de expresar el resultado de una medida junto con su error asociado se ha de observar ciertas consideraciones:

1. En primer lugar se ha de escribir correctamente el error. Dado que su valor es aproximado, no tiene sentido dar más allá de una cifra significativa excepto en el caso en que al quitar la segunda cifra significativa se modifique de forma considerable su valor. Por ello se establece la norma de que el error se expresa con una cifra significativa, excepto cuando esa cifra sea un 1 o cuando sea un 2 seguida de un número menor que 5, en este caso se puede expresar con dos cifras significativas.

	Error de V	Error de V	Error de L
BIEN	0,12 V	0,08 V	30 cm
MAL	0,1203 V	0,078 V	35 cm

2. En segundo lugar se ha de escribir correctamente el valor de la medida. Tampoco tiene sentido que la precisión del valor medido sea mayor que la precisión de su error. El orden decimal de la última cifra significativa de la medida y de la última cifra significativa del error deben coincidir. Para ello se redondea el valor de la medida, si hace falta.

	Medida de V	Medida de V	Medida de L
BIEN	$48,72 \pm 0,12 \text{ V}$	$4,678 \pm 0,012 \text{ V}$	$560 \pm 10 \text{ cm}$
MAL	$48,721 \pm 0,12 \text{ V}$	$4,6 \pm 0,012 \text{ V}$	$563 \pm 10 \text{ cm}$

También hay que tener en cuenta cuando se trabaja con números grandes o pequeños utilizando la notación científica de potencias de 10, que conviene escribir valor y error acompañados de la misma potencia de 10.

BIEN	$8,72 \cdot 10^{-4} \pm 0,12 \cdot 10^{-4} \text{ N}$	$(4,678 \pm 0,012) \cdot 10^{-8} \text{ A}$
MAL	$872 \cdot 10^{-6} \pm 0,12 \cdot 10^{-4} \text{ N}$	$4,678 \cdot 10^{-8} \pm 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ A}$

3. ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

El *error absoluto* es la diferencia entre el valor exacto y el valor obtenido en la medida. El error absoluto no puede ser conocido ya que se desconoce el valor exacto de la medida. Por eso, se utiliza una estimación del intervalo en el que se puede encontrar el error absoluto. A esta estimación se la denomina *error* o *incertidumbre*, y en este libro se llamará simplemente error y se denotará mediante el símbolo ϵ .

Por ejemplo, si se mide la anchura de un papel con una regla, la medida es 22,5 cm. ¿Cuál es el error absoluto cometido? Hay que estimarlo. Si la regla está dividida en inter-

valos de un milímetro, ésta puede ser una cota superior aceptable del error absoluto. De esta forma, el valor real debería estar comprendido en un intervalo entre 22,4 y 22,6 cm. La medida se denota entonces como $22,5 \pm 0,1$ cm, donde 0,1 cm es el error de la medida.

El *error relativo* ε_r es el cociente entre el error y el valor medido. Se suele expresar en tanto por ciento. Esta forma de expresar el error es útil a la hora de comparar la calidad de dos medidas.

Por ejemplo, si se mide la distancia que separa Valencia de Castellón y el resultado es 75 ± 2 Km, y la longitud del aula resultando 8 ± 2 m. ¿Qué medida es mejor? El error relativo de la primera es $\varepsilon_{r1} = 2/75 \times 100 = 2,7 \%$ y el de la segunda es $\varepsilon_{r2} = 2/8 \times 100 = 25 \%$. Por lo tanto, la primera medida es mejor, a pesar de que el error de la segunda medida es menor.

4. ERRORES ACCIDENTALES

Como se ha dicho, estos errores son debidos a causas imponderables que alteran aleatoriamente las medidas, tanto al alza como a la baja. Son de difícil evaluación, ésta se consigue a partir de las características del sistema de medida y realizando medidas repetitivas junto con un posterior tratamiento estadístico. De esta forma, a partir de las medidas repetitivas se debe calcular la desviación típica σ , y a partir de las características del aparato de medida se evaluará el error debido al aparato, Δ . El error de la medida se tomará como el máximo de estas dos cantidades

$$\varepsilon = \max\{\sigma, \Delta\}$$

Cuando la repetición de las medidas da prácticamente el mismo resultado, como ocurre normalmente con los aparatos de medida utilizados en el laboratorio de FFI, sólo se evaluará el error Δ debido al aparato, pues σ es despreciable frente a Δ . De esta forma, pasamos a describir únicamente la forma de evaluar el error debido al aparato.

4.1. ERROR DEBIDO AL APARATO

Existen diferencias entre la forma de evaluar los errores debidos a los aparatos. Se ha de distinguir entre aparatos analógicos y digitales. Pueden estimarse estos errores a partir de las características técnicas de los aparatos, como se verá a continuación. Estas características aparecen en las hojas de especificaciones del aparato, o vienen indicadas en el propio aparato. En la Figura 30 se muestra como ejemplo la hoja de especificaciones del multímetro digital *Demestres 3801A*.

VOLTIOS CC			VOLTIOS CA		
RANGO	PRECISION	RESOLUCION	RANGO	PRECISION	RESOLUCION
200 mV		100 μ V	200 mV	$\pm 1,2\%$ lect. + 5 dig.	100 μ V
2 V		1 mV	2 V		1 mV
20 V	$\pm 0,5\%$ lect. + 1 dígito	10 mV	20 V	$\pm 0,8\%$ lect. + 3 dig	10 mV
200 V		100 mV	200 V		100 mV
1000 V		1V	700V	$\pm 1,2\%$ lect. + 3 dig	1 V

Impedancia de entrada: 10M Ω en todos los rangos.
Sobrecarga: 1000V cc o pico ca en todos los rangos.

INTENSIDAD CC			INTENSIDAD CA		
RANGO	PRECISION	RESOLUCION	RANGO	PRECISION	RESOLUCION
200 μ A		0,1 μ A	200 μ A	± 1 lect. + 3 dig.	0,1 μ A
2 mA	$\pm 0,5\%$ lect. + 1 dig	1 μ A	2 mA		1 μ A
20 mA		10 μ A	20 mA	$\pm 1,8\%$ lect. + 3 dig	10 μ A
200 mA		100 μ A	200 mA		100 μ A
2 A	$\pm 1,2\%$ lect. + 1 dig.	1 mA	2 A		1 mA
20 A, 20 μ A	$\pm 2\%$ lect. + 5 dig	10 mA, 10 nA	20 A, 20 μ A	$\pm 3\%$ lect. + 7 dig	10 mA, 10 nA

Protección de sobrecarga: fusible 2A/250V (rango 20A sin fusible)
En 20 A máxima entrada de corriente 20A durante 15 segundos.
Caída de tensión: 200mV.

Protección de sobrecarga: Fusible 2A/250V (rango 20A sin fusible).
Máxima entrada de tensión: 200mV
Frecuencia de trabajo: 40Hz a 1KHz.
Indicación: Promedio RMS de onda senoidal.

Figura 30: hoja de especificaciones del multímetro digital Demestres 3801A.

Aparatos digitales

El error accidental que se comete en un aparato digital es la suma del error de precisión y el error de lectura.

- **Error de precisión:** Es un porcentaje del valor leído en pantalla. Ejemplo:
Error de precisión: 1%
Medida: 4,56 V
Error de precisión: $4,56 \cdot 1/100 = 0,05$ V



Figura 31: medida de tensión en un aparato digital.

- **Error de lectura:** La salida en pantalla se realiza con un número limitado de dígitos por lo que, aunque el aparato pueda medir con mayor precisión, sólo podrá mostrar una medida limitada al número de dígitos de que dispone. El error de lectura equivale a N unidades del último dígito. Ejemplo:
Error de lectura: 3d (tres unidades)
Medida: 4,56 V
Error de lectura: $0,01 \cdot 3 = 0,03$ V
- El **error debido al aparato** será la suma $\square\square 0,05 + 0,03 = 0,08$ V

Ejemplo: Al medir una tensión en un circuito de corriente continua con un multímetro Demestres 3801A cuyas características aparecen en la Figura 30, el error de precisión es el 0,5% de la medida en cualquier escala y el error de lectura es de un dígito, lo que equivale a 0,01V en la escala de 20V puesto que en esta escala aparecen dos decimales en la pantalla.

Aparatos analógicos

El error debido a un aparato analógico es la suma del error de clase y el error de lectura. El error de clase viene indicado en las especificaciones del aparato, normalmente mediante la palabra CLASE o el vocablo inglés CLASS.

- **Error de clase:** Es un porcentaje del fondo de escala. El fondo de escala es el máximo valor medible del aparato. Ejemplo:

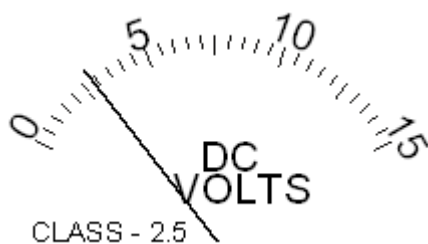


Figura 32: medida de tensión en un voltímetro analógico de clase 2,5.

Error de clase: 2,5

Medida: 3 V

Fondo de escala: 15 V

Error de clase: $15 \cdot 2,5 / 100 = 0,375$ V

El error de clase es independiente del valor obtenido en la medida.

que realice la medida y se expresa como la porción de la división mínima que el operador es capaz de diferenciar. Ejemplo:

Error de lectura: 1/2 división

Voltios/división: 0,5 V

Error de lectura: $0,5 \cdot 1/2 = 0,25$ V

- El **error debido al aparato** será la suma del error de clase y el de lectura: $0,375 + 0,25 = 0,6$ V, donde se ha efectuado ya el redondeo adecuado.

- **Error de lectura:** Es el error cometido en la lectura de las divisiones de la escala. Lo evalúa el operador. Esa cantidad varía según la persona

5. ERRORES SISTEMÁTICOS

Los errores sistemáticos son debidos a defectos en los aparatos de medida o al método de trabajo. Normalmente actúan en el mismo sentido, no son aleatorios, siguiendo unas leyes físicas determinadas, de tal forma que en ocasiones se podrá calcular y compensar matemáticamente tras la medida. Un ejemplo podría ser el de una regla graduada mal calibrada, de modo esa regla diera como resultado longitudes siempre menores que las reales. Otro ejemplo sería la medida de la corriente eléctrica que circula por un conductor mediante un amperímetro. Al introducir el amperímetro en el circuito éste se modifica, de manera que la corriente medida no es exactamente igual a la corriente que circulaba antes de colocar el amperímetro. En este ejemplo el propio aparato de medida modifica el resultado.

Los métodos para corregir estos errores sistemáticos son variados. En el caso de la regla habría que confeccionar una curva de calibrado, tal y como se describe en el próximo apartado. En el segundo caso se podría averiguar la resistencia del amperímetro y calcular con ella el error sistemático producido mediante el análisis del circuito.

5.1. CURVA DE CALIBRADO

Una forma de corregir los errores sistemáticos es realizando una curva de calibrado, que es una gráfica que relaciona los valores medidos con los valores reales. Para ello hay que disponer de algún patrón o magnitud cuyo valor es conocido. En el ejemplo de la regla bastaría con medir con ella uno o más patrones de longitudes conocidas para trazar una recta (o curva) de calibrado.

Una vez se dispone de la curva de calibrado, cualquier medida realizada con el sistema se puede transformar en un resultado libre del error sistemático sin más que consultar la curva de calibrado que relaciona los valores medidos con los reales.

Ejemplo: Durante un largo viaje de vacaciones se observa que las medidas del cuentakilómetros de un coche no coinciden exactamente con las señales kilométricas de las carreteras. Parece que el cuentakilómetros siempre marca una distancia mayor, existiendo un error sistemático en las medidas. Confiando en la exactitud de la señalización de la carretera, se decide realizar una calibración del cuentakilómetros, anotando su lectura cada vez que se alcanza una de las señales. El resultado aparece en la tabla siguiente.