

# PROBLEMES DE MATEMÀTICA DISCRETA

## Tema 2. CONJUNTS I RELACIONS (Bloc 2)

1. Siguen  $A = \{a, b, c, d\}$  i  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , i considerem la relació  $R$  entre  $A$  i  $B$  següent:

$$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 5), (d, 1), (d, 4), (d, 5)\}$$

- a) Trobeu la matriu de  $R$
  - b) Trobeu el domini i la imatge de  $R$
  - c) Obteniu la relació inversa  $R^{-1}$
  - d) Obteniu  $R \circ R^{-1}$  i  $R^{-1} \circ R$
2. Siguen  $A$  i  $B$  els conjunts del problema anterior. Siga  $S$  la relació de  $B$  en  $A$  la matriu de la qual és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- a) Obteniu la relació  $S$ , el seu domini i la seua imatge
  - b) Obteniu les relacions  $R \circ S$  i  $S \circ R$ , sent  $R$  la relació del problema 1
3. Siga  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ . S'estableix la relació binària  $R$  en  $X$  donada per

$$xRy \Leftrightarrow y = x^2$$

- a) Escriviu per extensió la relació  $R$
  - b) Obteniu les relacions  $R \circ R$  i  $R^{-1} \circ R^{-1}$
4. En el conjunt  $A = \{a, b, c, d\}$  es consideren les següents relacions binàries:

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, a)\}$$

$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\}$$

$$R_3 = \{(a, a), (c, c), (a, c), (c, b), (a, b)\}$$

$$R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

Representeu-les gràficament i matricialment, i indiqueu quines propietats compleixen.

5. Siga  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Obteniu explícitament cadascuna de les següents relacions en  $A$  i determineu quines propietats compleixen.

- a)  $aRb \Leftrightarrow b$  és múltiple de  $a$
- b)  $aRb \Leftrightarrow a + b \leq 7$
- c)  $aRb \Leftrightarrow |a - b| = 2$

6. Siga  $A = \{a, b, c, d, e\}$  i siga  $R$  la relació binària en  $A$  la matriu de la qual és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) Proveu que  $R$  és una relació binària d'ordre. És un ordre total?
  - b) Representeu  $R$  mitjançant un diagrama de Hasse.
7. Siga  $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, 72\}$  amb la relació de divisibilitat.
- a) Representeu el conjunt ordenat  $A$  mitjançant un diagrama de Hasse
  - b) Trobeu els elements notables de  $A$
  - c) Trobeu els elements notables dels subconjunts  $B = \{2, 3, 6, 12, 18\}$ ,  $C = \{4, 9, 12, 36\}$ ,  $D = \{3, 12, 18\}$ ,  $E = \{4, 6\}$  i les seues cotes respecte de  $A$
8. Siga  $A = \{a, b, c\}$  i considerem el conjunt  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ , sent  $\mathcal{P}(A)$  el conjunt de parts de  $A$ . Dibuxeu el diagrama de Hasse d'aquesta relació i trobeu els elements notables del conjunt  $\{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  com a subconjunt de  $\mathcal{P}(A)$ .
9. Doneu un exemple d'un conjunt ordenat que tinga un subconjunt de dos elements acotat superiorment però que no tinga suprem.
10. El conjunt quocient d'una relació d'equivalència en el conjunt  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  és  $A/R = \{\{2\}, \{1, 3, 6\}, \{4, 5\}\}$ . Obteniu la matriu associada a aquesta relació.
11. En el conjunt  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  s'estableix la següent relació:  $xRy$  si i sols si  $x$  i  $y$  tenen el mateix nombre de divisors. Demostreu que  $R$  és d'equivalència i calculeu el conjunt quocient.
12. En el conjunt  $\mathbb{Z}$  dels nombres enters es defineix la relació:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

Proveu que  $R$  és d'equivalència i calculeu les classes d'equivalència de 0 i 3. Determineu la classe d'equivalència d'un nombre enter  $a$ .

13. En el conjunt  $\mathbb{R}$  dels nombres reals es defineix la relació:

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

Proveu que  $R$  és d'equivalència i calculeu les classes d'equivalència de 0 i  $1/2$ .