ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT6 - **Problemes proposats**: **SÈRIES DE POTÈNCIES**

1. Analitza la convergència i troba la suma (on siguen convergents) de les sèries de potències:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^{3n+2}}{2^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1} (-1)^n \, x^{2n}$

2. Deriva i integra les sèries de potències:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

   b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^n}{n}$. Ara calcula també $f'(x)$, explícitament, així com $\int_0^1 f$.

3. A partir de la igualtat, vàlida per a $x \in \left]-1, 1\right[$: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0} x^n$ troba expressions explícites per a:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1} (-1)^n \, nx^n$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1} n^2 x^n$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1} (-1)^n \, \frac{x^n}{n}$

4. Considera la sèrie de potències $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n 2^n}$

   a) Troba la sèrie de potències que correspon a $f'(x)$ i suma-la on siga convergent

   b) Integrant la derivada, troba $f(x)$ explícitament.

5. Considera la sèrie $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$

   a) Integra, en primer lloc, terme a terme. Deriva després i troba $f(x)$ explícitament

   b) Dedueix el valor de la suma de les sèries: $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{3^n}$ i $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}$

6. Tenint en compte que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, per a $x \in \left]-1, 1\right[$:

   a) Integra terme a terme i troba una sèrie de potències per a $\log(1-x)$

   b) Considera $x = -\frac{1}{2}$ i troba una sèrie numèrica de suma $\log\left(\frac{3}{2}\right)$.

   c) Acota l'error comés en aproximar aquest valor mitjançant la suma dels sis primers termes de tal sèrie.

7. Tenint en compte que $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$:

   a) Analitza la convergència i troba la suma (on siga convergent) de la sèrie de potències $\sum_{n=1} \frac{x^n}{(n+3)!}$

   b) Considera la sèrie de potències $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} x^n$, troba $f(x)$ explícitament.

   c) Deriva la sèrie de potències $f(x) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ i calcula $f'(x)$ explícitament

8. Escriu els desenvolupaments en sèrie de potències de les funcions:

   a) $f(x) = \frac{d}{dx}(\sin(x) - x))$

   b) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

   y dedueix el valor de $g^{(15)}(0)$.

9. a) Troba el coeficient de x^{10} en la sèrie de McLaurin de $\sin(x)$.

   b) Si $h(x) = x^6 e^{x+1}$ i $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$, troba els valors de $h^{(10)}(0)$ i de $p^{(12)}(0)$.

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT6 - **Exercicis addicionals**: **SÈRIES DE POTÈNCIES**

1. Considera la sèrie de potències $f(x) = \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \dfrac{(x+1)^n}{n5^n}$

   a) A partir de la sèrie numèrica (alternada) $f(0)$ troba el valor de n necessari per tal d'aproximar, amb tres decimals exactes, la suma de la sèrie mitjançant la suma parcial s_n. Calcula l'aproximació en qüestió.

   b) Desenvolupa en sèrie de potèncias $f'(x)$. Observa que eixa sèrie és geomètrica i suma-la on siga convergent. Integra l'expressió obtinguda per a trobar $f(x)$, afegint una constant C d'integració. Troba la constant a partir del resultat conegut: $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$

   c) A la vista de b), quina és la suma exacta de la sèrie que defineix $f(0)$? S'obté en a) la precisió esperada?

2. Fes ús de la sèrie de potències que correspon a la funció $\arctan(x)$ per tal d'aproximar dues xifres decimals exactes del número π. Quin és el valor de $\arctan(1)$?

3. Desenvolupa en sèrie de potències $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$, prèvia descomposició en fraccions simples. On convergirà la sèrie?

4. Troba sèries de potències per a les funcions $\cosh(x)$ y $\sinh(x)$ y amb elles comprova que

$$\cosh(x)' = \sinh(x) \quad , \quad \sinh'(x) = \cosh(x) \ .$$

*5. Integrant dues vegades $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$, troba explicitament $f(x)$ i, com aplicació, calcula $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{(n+1)(n+2)}{n!}$.

6. Tenint en compte que $e^x = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$, calcula en forma explícita $f(x) = \sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{3n^2 - 1}{(n+1)!} x^n$ descomposant el numerador en la forma $a + b(n+1) + cn(n+1)$.

7. Fent ús de la sèrie de potències per a $\cos(x)$ trobada en classe, aproxima $\cos(0.05)$ amb set decimals exactes, almenys. Hauràs de tenir en compte la cota d'error que te proporciona el criteri de Leibniz per a sèries alternades. Verifica, amb DERIVE o mitjançant calculadora, que el resultat trobat és correcte.

8. A partir de la sèrie de potències trobada en classe per a l'exponencial e^x i substituïnt x per $-x^2$, troba el desenvolupament en sèrie de e^{-x^2}. Integra entre 0 i 1 i aplica la cota d'error de Leibniz per a sèries alternades per tal d'aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ amb dos decimals exactes, almenys. Comprova el resultat calculant la integral amb DERIVE en mode aproximat.

9. Escriu el desenvolupament en sèrie de potències de la funció $f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\right)$

*10. Determina el coeficient de x^6 en la sèrie de McLaurin de $f(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{x}$.

11. Resol l'*equació diferencial* $y' = 3y$ amb valor inicial $y(0) = 2$, suposant que $y = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$.