# *Anàlisi Matemàtica*

UT2 - Funcions reals de variable real

# Contingut

## Conceptes generals

- Domini i rang
- Funcions injectives. Funció inversa
- Funcions creixents, decreixent i acotades
- Funcions parelles, senars i periòdiques

## Repàs de Funcions Elementals

- Polinòmiques i racionals
- Irracionals
- Exponencials i logarítmiques
- Trigonomètriques i inverses

## Derivabilitat de funcions

- Concepte de derivada
- Funcions derivables. Càlcul de derivades
- Propietats geomètriques d'una funció a partir de la derivada

# Objectius

## Generalitats sobre funcions (1S)

- Recordar els conceptes bàsics: domini, rang, etc.
- Determinar si una función és o no acotada, monòtona, parella, senar,…
- Reconéixer simetries i periodicitat

## Funcions elementals (1S)

- Fer un ús correcte de les propietats bàsiques de les funcions
- Traçar i reconéixer la seua representació gràfica aproximada

## Derivades (1S)

- Recordar el concepte de derivada i la seua relació amb la recta tangent
- Calcular derivades en casos senzills
- Localitzar extrems relatius i determinar intervals de creixement

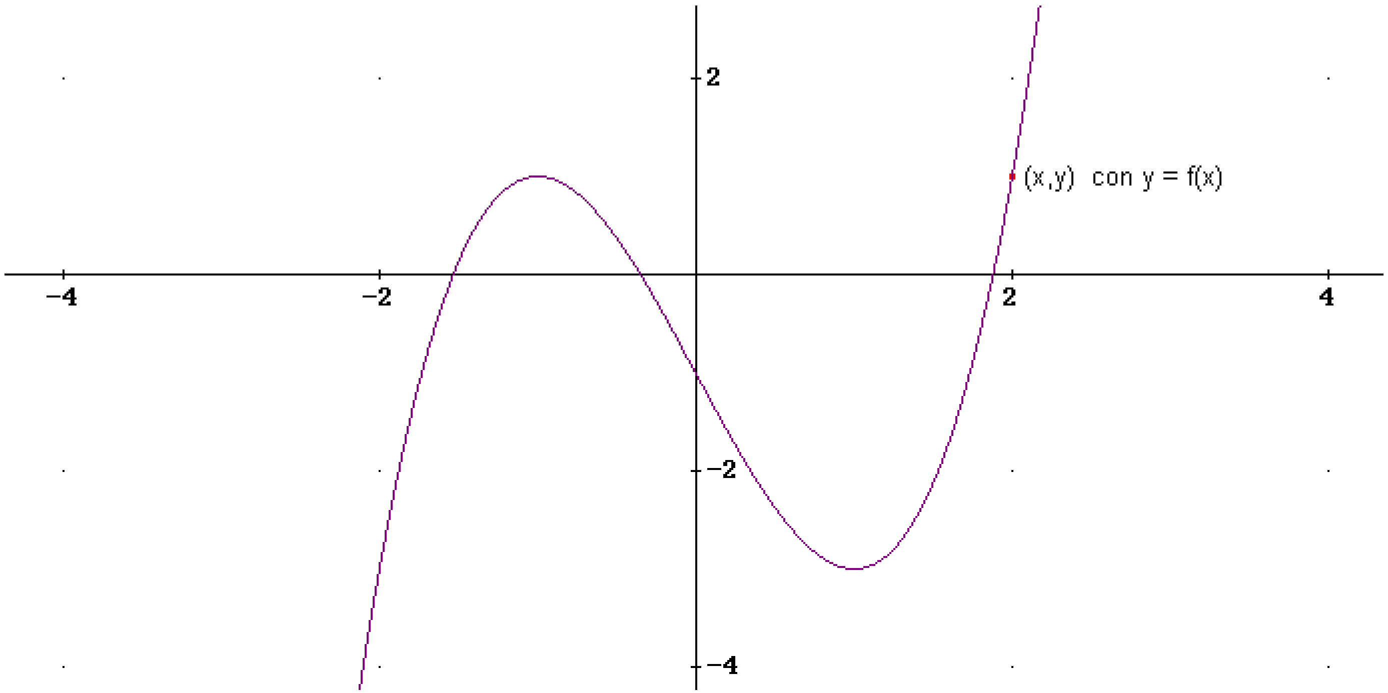
# Conceptes generals

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\quad x \qquad\quad y$$

Es una funció si $f(x)$ és únic (quan existeix)

$$Domini \equiv D(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \;|\; f(x) \text{ existeix} \,\}$$

$$Rang \equiv f(D) = R(f)$$



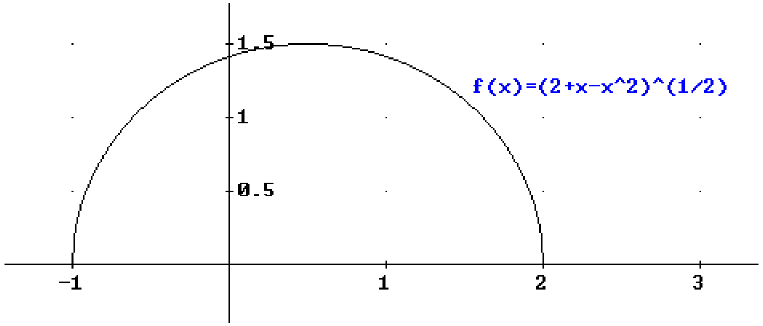
**Exercici:** Obtenir el domini de $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$

$x\in D(f)$ si existeix $f(x)$. En aquest cas, serà necessari que $\underbrace{2+x-x^2\geq 0}_{x^2-x-2\leq 0}$

La funció $y=x^2-x-2$ és una paràbola amb les branques cap a dalt

i s'anul.la en $x_1=-1$ , $x_2=2$. Així, $x^2-x-2\leq 0$ per a $x\in[-1,2]$

$$D(f)=[-1,2]$$




**Exercici:** Trobar el domini de $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

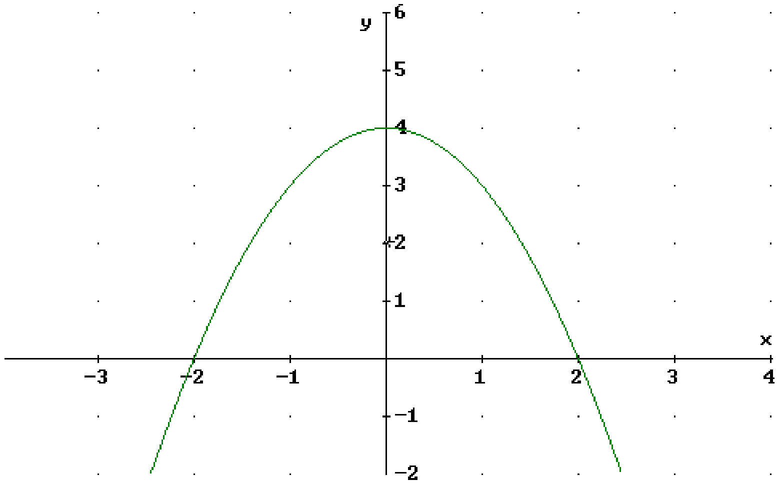
Ara serà necessari que $\underbrace{-x\geq 0}_{x\leq 0}$ i que $\underbrace{2x-1>0}_{x>\frac{1}{2}}$, simultàniament

$$D(f)=\left]-\infty,0\right]\cap\left]\frac{1}{2},+\infty\right[=\varnothing$$

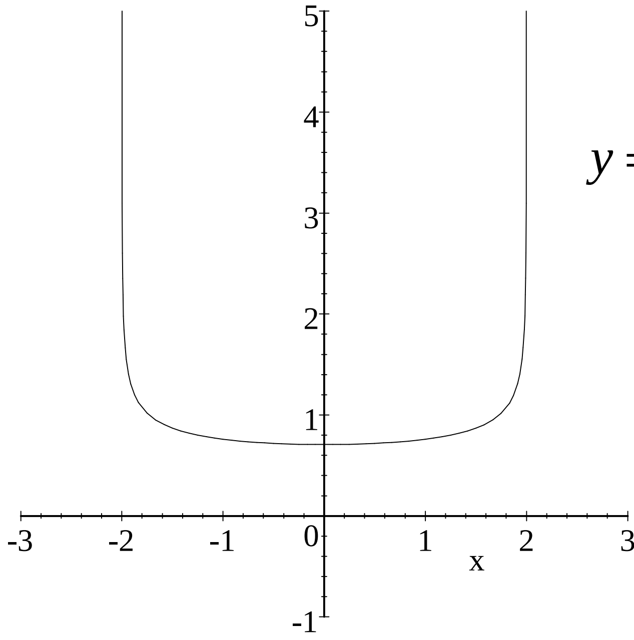
La funció no existeix!

**Exercici:** Obtenir el domini de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(2+x)(2-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$

$$x \in D(f) \iff \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{(2+x)(2-x)}^{4-x^2} \geq 0 \\ \sqrt[4]{(2+x)(2-x)} \neq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in [-2,2] \\ x \neq 2\,,\, x \neq -2 \end{array} \right\} \iff x \in \,]-2,2[$$




$y = 4 - x^2$




$y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$

**Funció inversa**

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad x \mapsto y$$

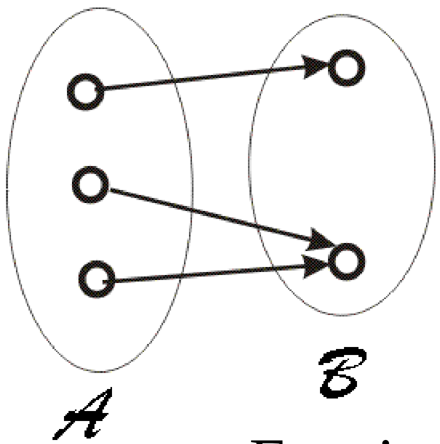
$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

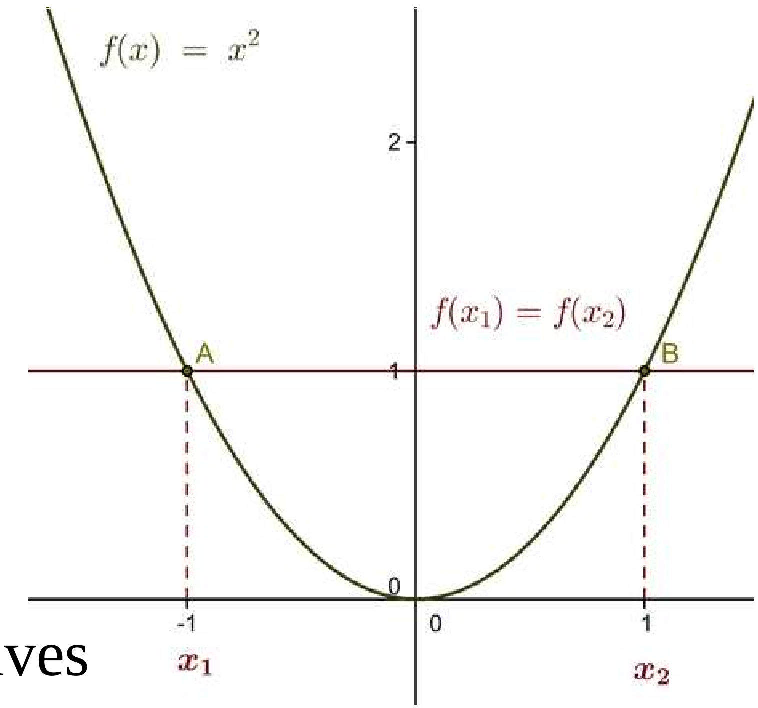
$$f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad y \mapsto x$$

$f^{-1}$ és una funció si $f$ és injectiva

$f$ és injectiva si per a $x_1,x_2 \in D(f)$ amb $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)\neq f(x_2)$

$D(f^{-1})=R(f)$ , $R(f^{-1})=D(f)$




Funcions **no** injectives

**Exemples:** $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ té inversa i $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

$$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}=R(f^{-1}) \quad ; \quad D(f^{-1})=\mathbb{R}-\{2\}=R(f)$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}=y$$

$$\Downarrow$$

$$y\cdot(x-1)=2x+3$$

$$xy-y=2x+3$$

$$xy-2x=y+3$$

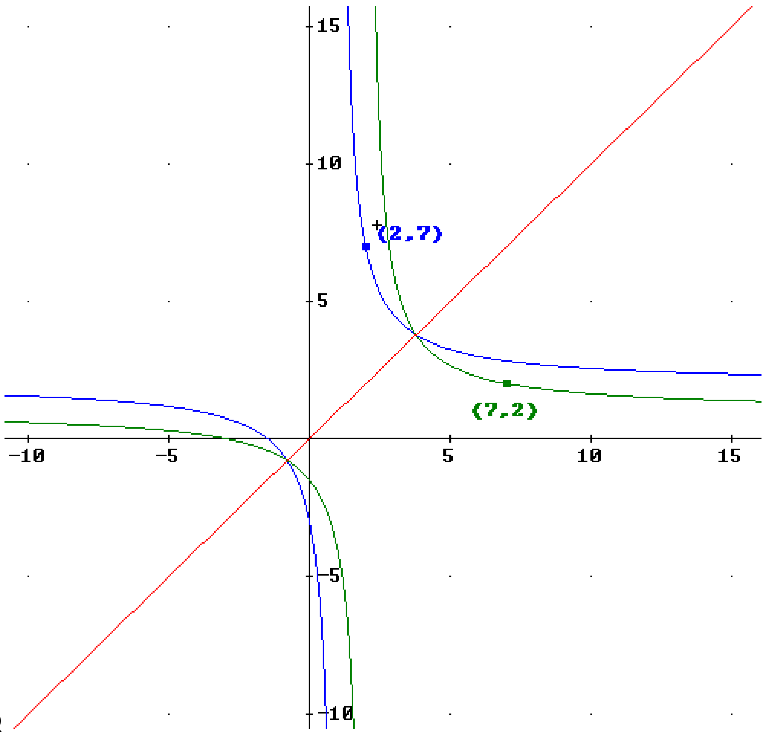
$$x(y-2)=y+3$$

$$x=\frac{y+3}{y-2}$$

$$\Downarrow$$

$f$ injectiva i $f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{y-2}$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$



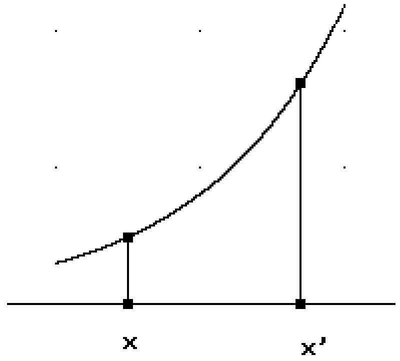

$f$ no injectiva

$(inversa\ \ local)$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=x^2=y \\ |x|=\sqrt{y} \\ \Downarrow \ (x\geq 0) \\ x=\sqrt{y}=f^{-1}(y) \end{array}}$$

*Les gràfiques d'una funció i de la seua inversa són simètriques respecte de la bisectriu del primer i tercer quadrant.*

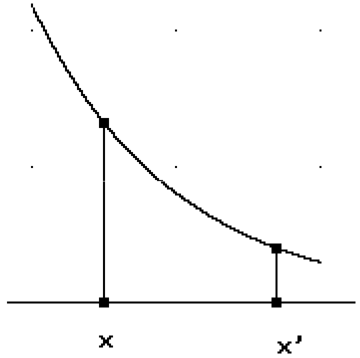
**Función creixent:**




$$f \textit{ creixent } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \,\right]$$

$$f \textit{ estrictament creixent } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \,\right]$$

**Funció decreixent:**




$$f \textit{ decreixent } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \,\right]$$

$$f \textit{ estrictament decreixent } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \,\right]$$

**Funció monòtona:** Funció creixent o decreixent

**Nota:** Les funcions constants són, al mateix temps, creixents i decreixents
**Nota:** Si $f$ és estrictament creixent/decreixent, aleshores $f$ és injectiva

**Exercici:** Verificar que $f(x)=5+\sqrt{9-x}$ és estrictament decreixent en $[0,9]$.

Trobar la funció inversa $f^{-1}$ sobre eixe interval

$$D(f)=\left]-\infty,9\right]$$

$$0\le x_1<x_2\le 9 \;\Rightarrow\; -x_1>-x_2 \Rightarrow\; 9-x_1>9-x_2 \;\Rightarrow\; \sqrt{9-x_1}>\sqrt{9-x_2} \;\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

$f$ és estrictament decreixent en tot el seu domini; en particular en $[0,9]$

(Veurem després que si $f$ és derivable, $f'>0\,(<0)\Rightarrow f$ és estrictament creixent (decreixent)

Fent ús del resultat podriem haver comprovat que $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}<0$ per a $x\in\left]-\infty,9\right[$ )

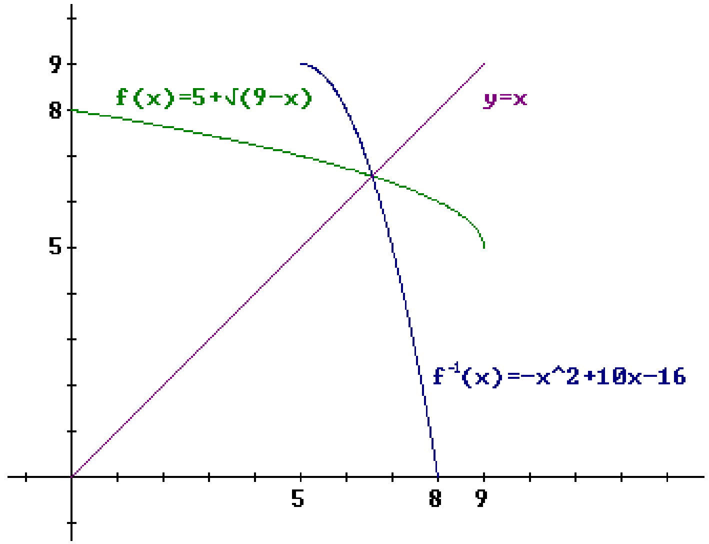
$$f:\underbrace{[0,9]}_{x}\to\underbrace{[5,8]}_{5+\sqrt{9-x}} \quad\Rightarrow\quad f^{-1}:\underbrace{[5,8]}_{x}\to\underbrace{[0,9]}_{-x^2+10x-16}$$

$$f(x)=5+\sqrt{9-x}=y$$

$$x=9-(y-5)^2$$

$$x=-y^2+10y-16=f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x)=-x^2+10x-16$$



**Funció acotada superiorment:**

$$f \text{ } \textit{acotada superiorment} \text{ (en } I\text{) per } K \iff \left[\ f(x) \le K \ , \forall x \in I\ \right]$$

$$\left(K \text{ és } \textit{cota superior} \text{ de } f\right)$$

**Funció acotada inferiorment:**

$$f \text{ } \textit{acotada inferiorment} \text{ (en } I\text{) per } L \iff \left[\ f(x) \ge L \ , \forall x \in I\ \right]$$

$$\left(L \text{ és } \textit{cota inferior} \text{ de } f\right)$$

**Funció acotada:**

$$f \text{ } \textit{acotada} \text{ (en } I\text{)} \iff \left[\ \left| f(x) \right| \le K \ , \forall x \in I\ \right] \iff \left[-K \le f(x) \le K\right]$$

$$\left(K \text{ és cota superior de } f \ ; \ -K \text{ és cota inferior de } f\right)$$

**Exercici:** Si $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$, troba el seu domini, valors màx i mín. Verifica que la funció representa una semicircumferència.

$$y = \sqrt{2 + x - x^2} \iff y^2 + (x - 0.5)^2 = (1.5)^2 \iff d\left((x, y), (0.5, 0)\right) = 1.5$$

- Acotada superiorment en $[-1,1]$ i en $]-\infty,-1]$

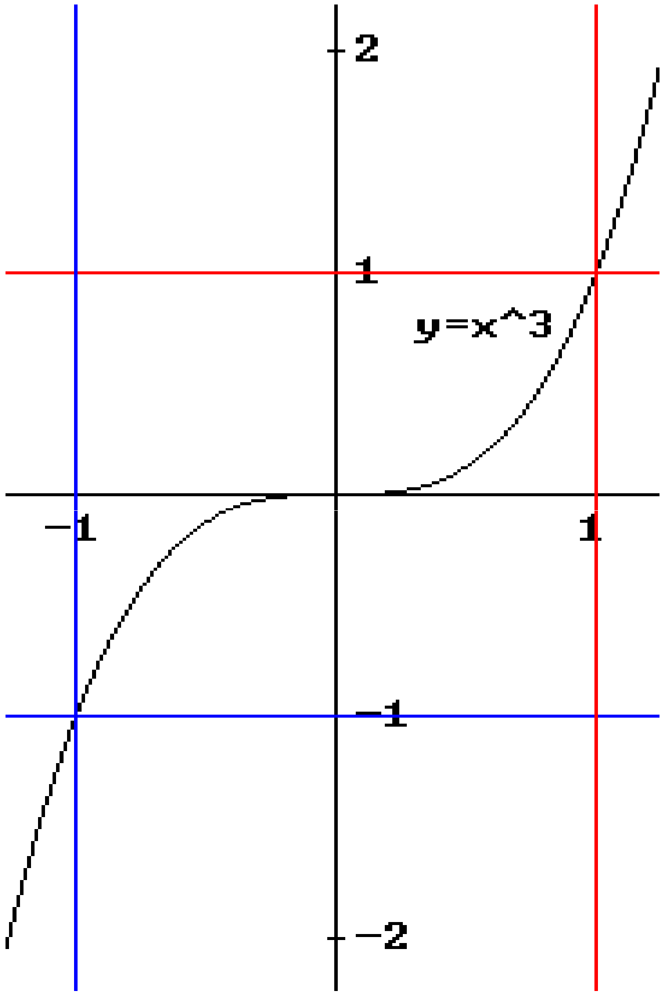
- No acotada superiorment en $[1,+\infty[$

- Acotada inferiorment en $[-1,1]$ i en $[1,+\infty[$

- No acotada inferiorment en $]-\infty,-1]$

- Acotada en $[-1,1]$

- No acotada en $]-\infty,-1]$ ni en $[1,+\infty[$



**Funció parella:** $f(-x) = f(x)$ per a $x \in D(f)$

Són simètriques respecte de l'eix $OY$

$f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f(x)$ és parella

Són parelles, per exemple: $x^2$ , $x^6 - x^2$ , $\dfrac{x^3 + x}{x^5 + x}$ , $|x|$

**Funció senar:** $f(-x) = -f(x)$ per a $x \in D(f)$

Són simètriques respecte de l'origen de coordenades

$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x)$ és senar

Són senars, per exemple: $x$ , $x^3 - x$ , $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 + x}$ , $\log\left(1 + \dfrac{2x}{1-x}\right)$

*No són parelles ni senars :* $\sqrt{1 + x - x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$ , $(x+1)^{2/3} + |x - 1|$

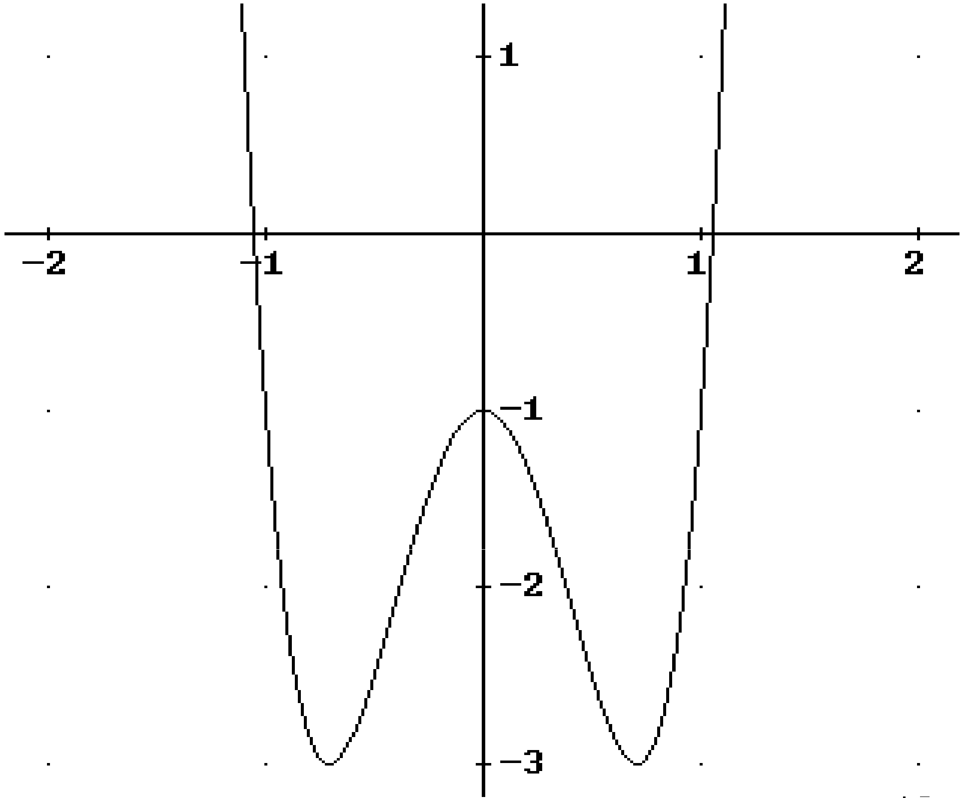
**Funció periòdica:** $f(x) = f(x + T)$ per a algun valor de T

(T és el periode, el menor possible)

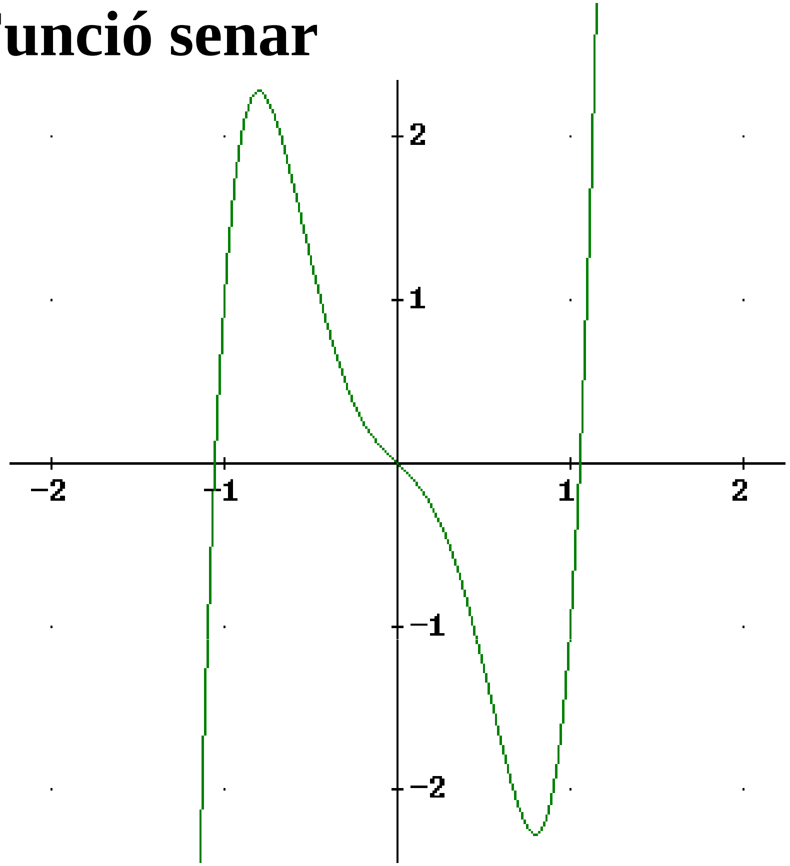
Són periòdiques: $\sin(x)$ , $\cos(x)$ , $\tan(x)$ , $7\sin(3x) - 5\cos(2x)$

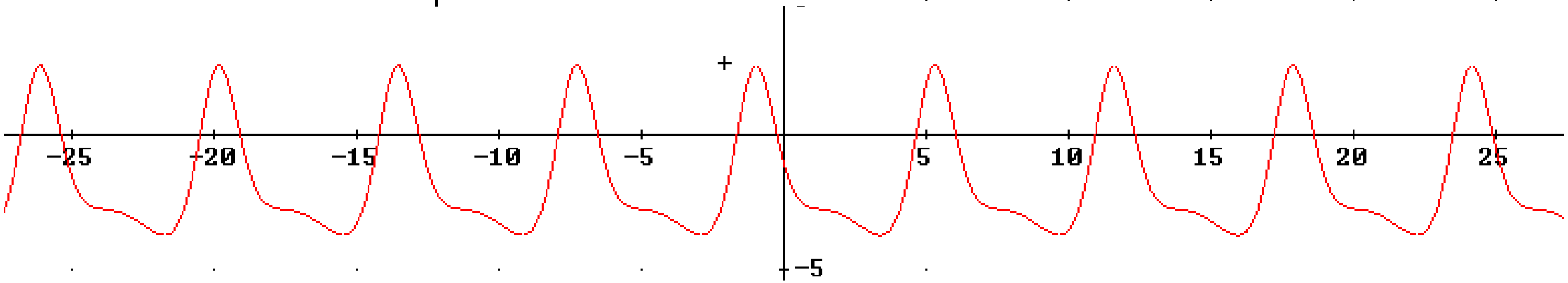
No són periòdiques: $\sin(\sqrt{x})$ , $x^2$ , $e^{-x}$

## Funció parella




## Funció senar

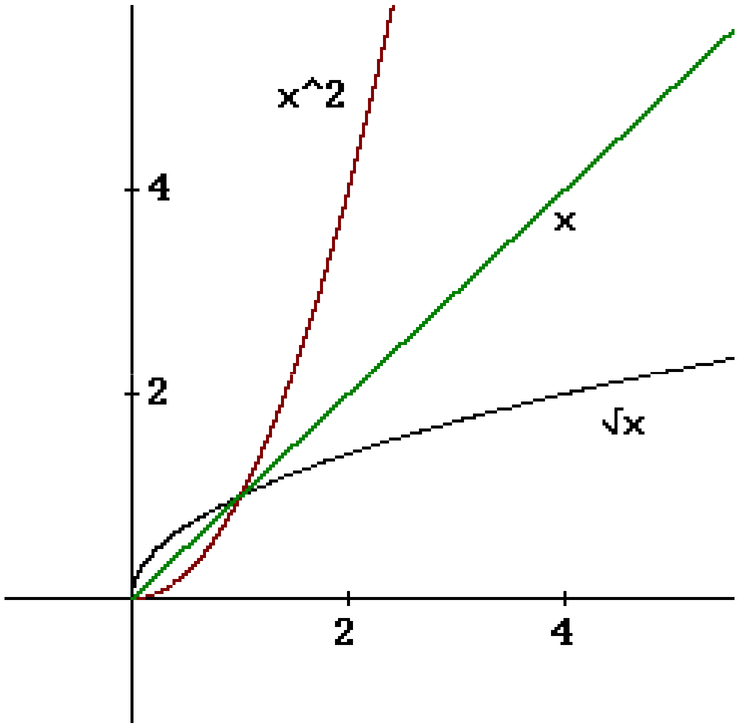


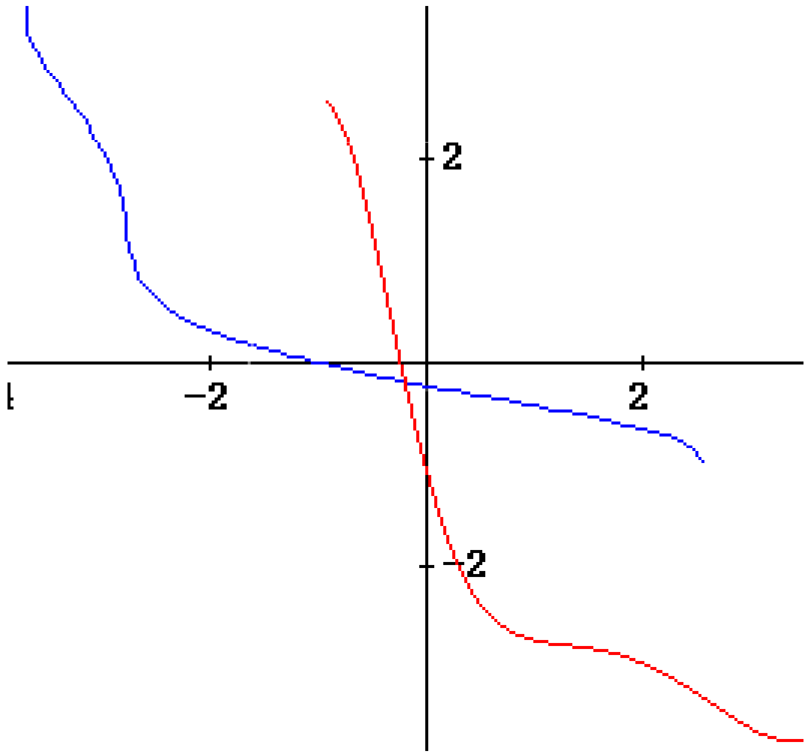




## Funció periòdica

## Altres simetries:

Una funció i la seua inversa són simètriques respecte de la bisectriu $y = x$

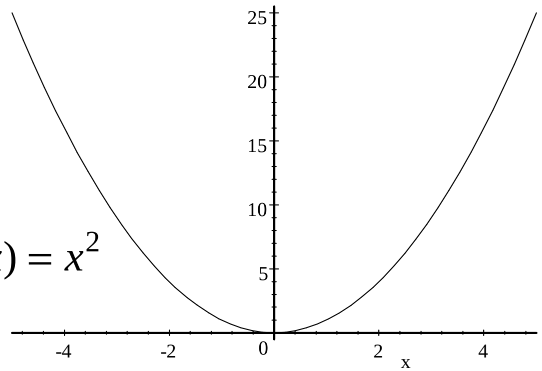


# *Repàs de funcions elementals*

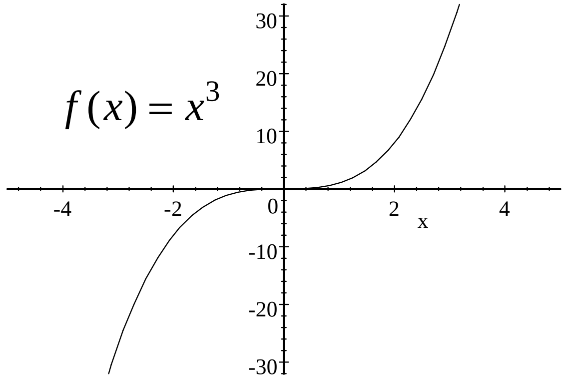
**Polinòmiques:** $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;,\; a_i \in \mathbb{R},\; i : 0,1,\ldots,n$

$f(x) = x^2$



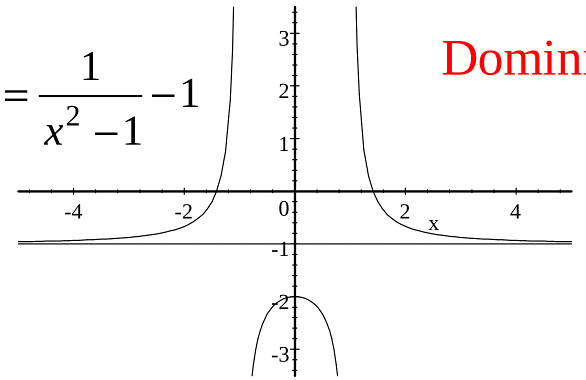

$D(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$

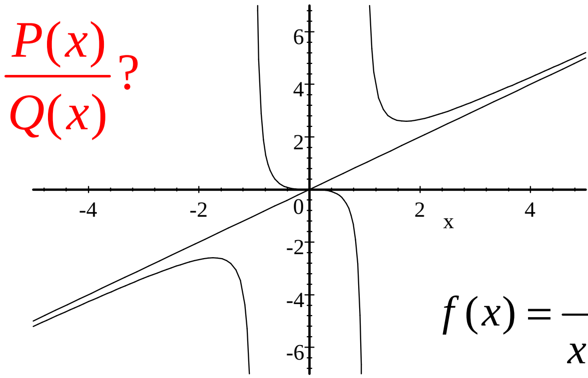



**Racionals** (quocient de funcions polinòmiques)**:**

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} - 1$




Domini de $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$?




$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

*Asímptota horitzontal :* $y = -1$

*Asímptotes verticals :* $x = \pm 1$

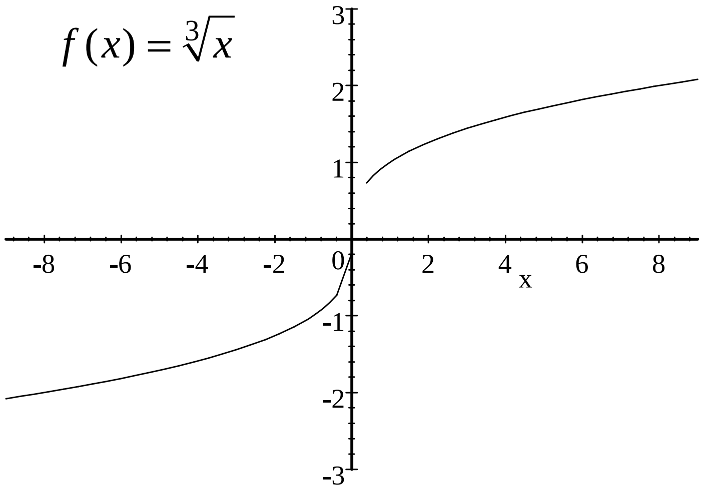
*Asímptota obliqua :* $y = x$

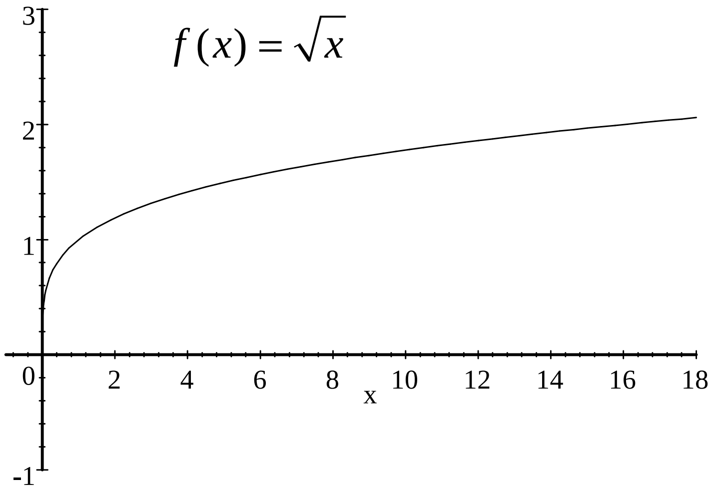
*Asímptotes verticals :* $x = \pm 1$

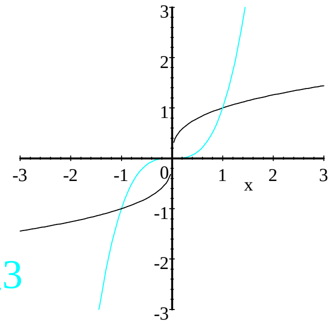
**Irracionals** (arrels): $f(x) = \sqrt[m]{x}\ ,\ m \in \mathbb{N}$

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \text{si } m \text{ és parell} \\ \mathbb{R} & \text{si } m \text{ és senar} \end{cases}$$

Domini de $F(x) = \sqrt[m]{f(x)}$ ?

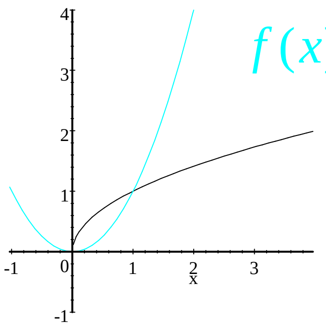


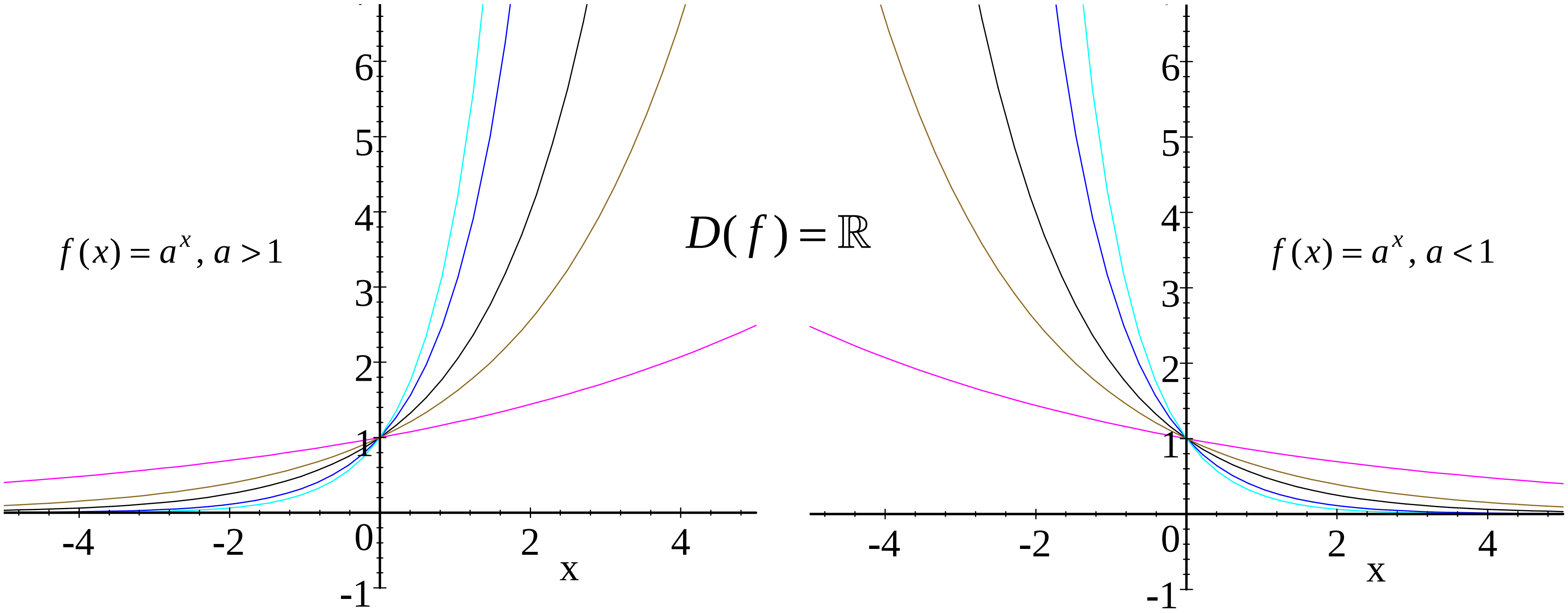
$f(x) = x^3$

Inverses



$f(x) = x^2$

**Exponencials:** $f(x) = a^x,\ a > 0$



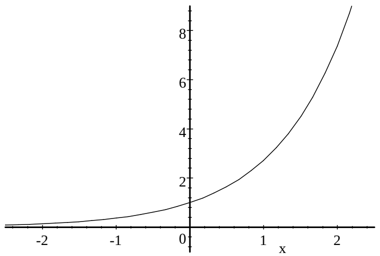

$$a^x > 0 \quad , \quad a^0 = 1$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad , \quad a^x / a^y = a^{x-y}$$

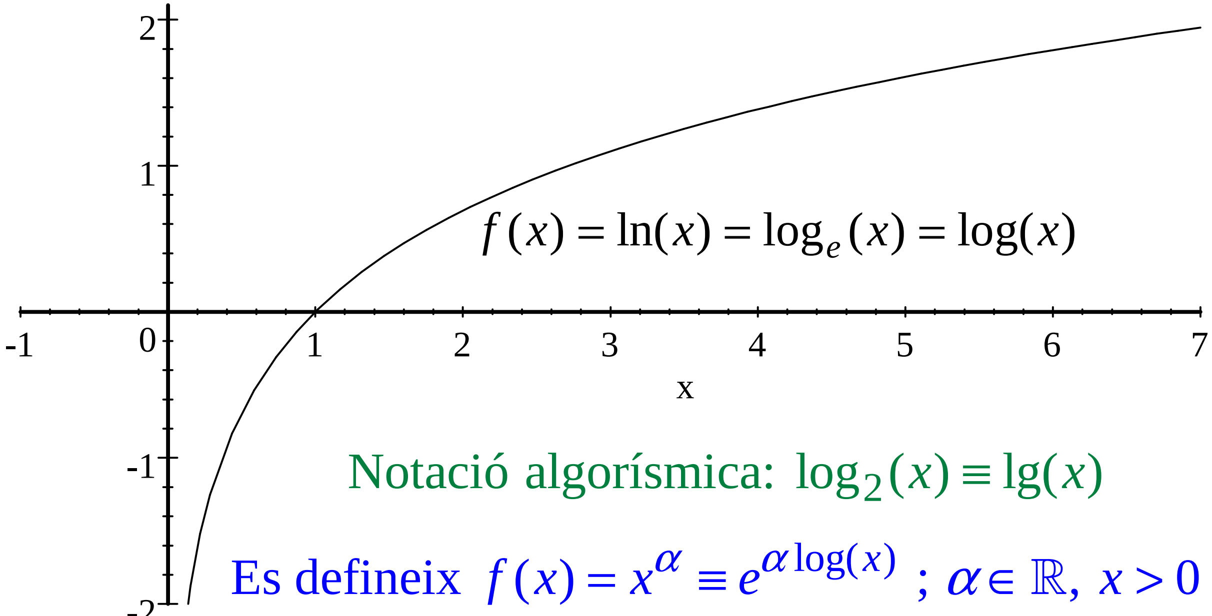
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

**Logarítmiques** (inverses d'exponencials**):** $f(x) = \log_a(x)\ ,\ \ a > 0$

$$\left( y = \log_a(x) \ \Leftrightarrow\ x = a^y \right) \qquad D(f) = \mathbb{R}^+$$




$f(x) = e^x = \exp(x)$




$f(x) = \ln(x) = \log_e(x) = \log(x)$

Notació algorísmica: $\log_2(x) \equiv \lg(x)$

Es defineix $f(x) = x^{\alpha} \equiv e^{\alpha \log(x)}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$

**(funció potencial)**

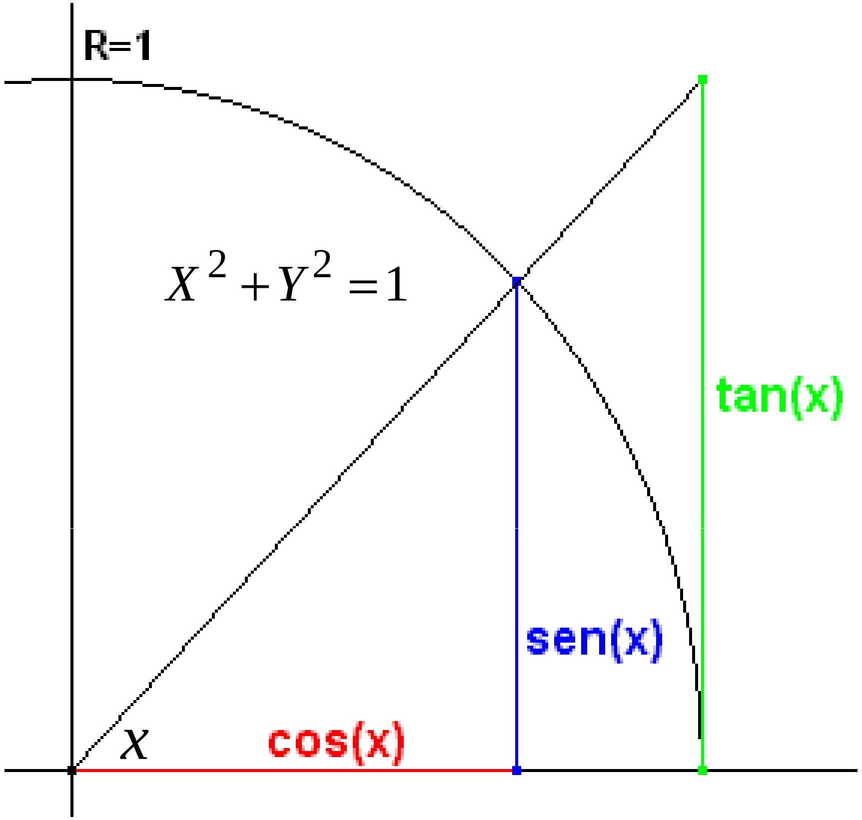
$$\log_a(1) = 0 \quad , \quad \log(e) = 1$$

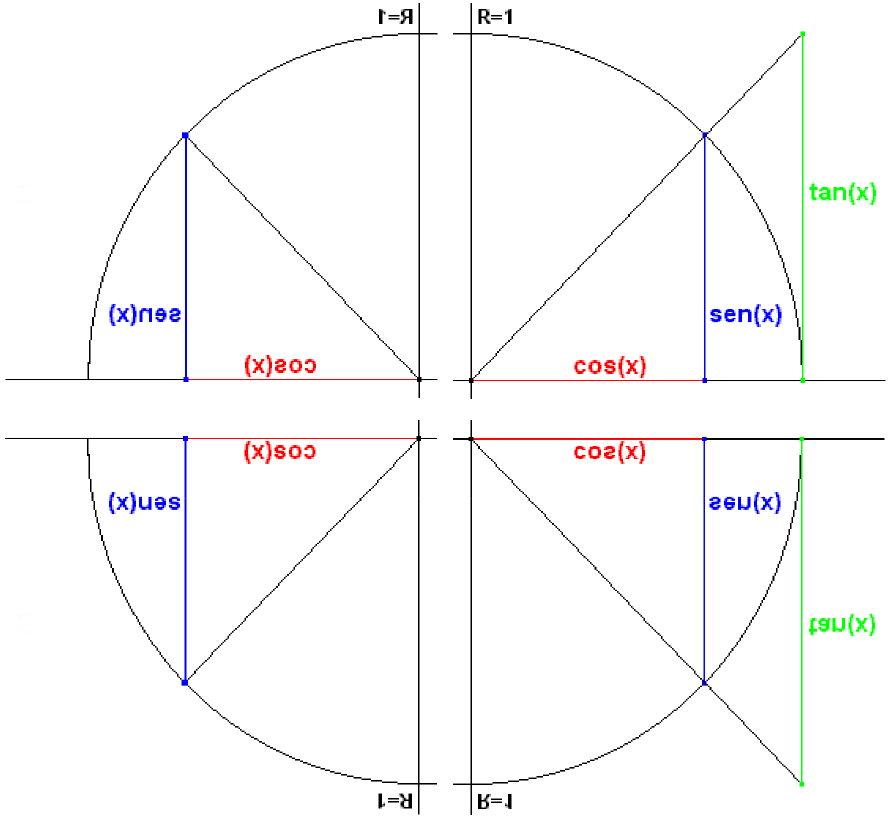
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad , \quad \log_a(x / y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \quad , \quad \log(e^k) = k$$

$$x^{\log_a(y)} = y^{\log_a(x)} \quad , \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} \cdot \log_b(x) = k \cdot \log_b(x)$$

**Trigonomètriques:** $\sin(x)\ ,\ \cos(x)\ ,\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ($x$ en radians)




$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

| $x$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\tan(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\pi/2$ | 1 | 0 | ? |

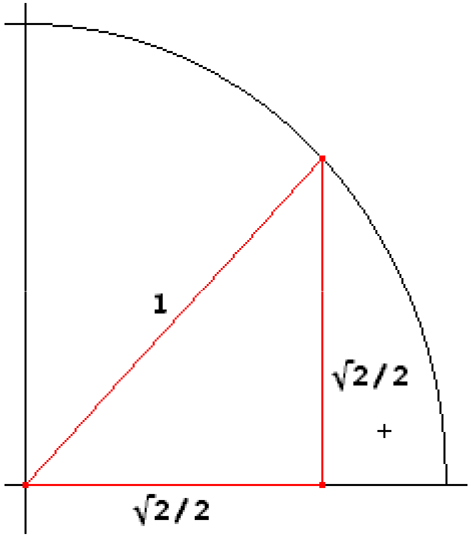
$$\overbrace{\sin(-x) = -\sin(x)}^{\textit{senar}}\ ,\ \overbrace{\cos(-x) = \cos(x)}^{\textit{parella}}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\ ,\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

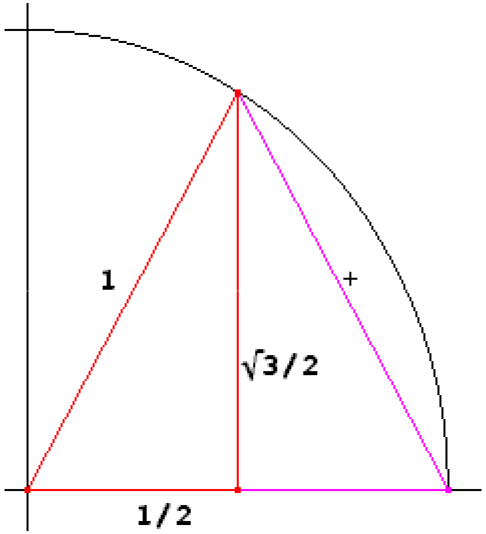
$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)\ ,\ \cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\tan(x)$ | $0$ | $\sqrt{3}/3$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | ? | $0$ | ? |

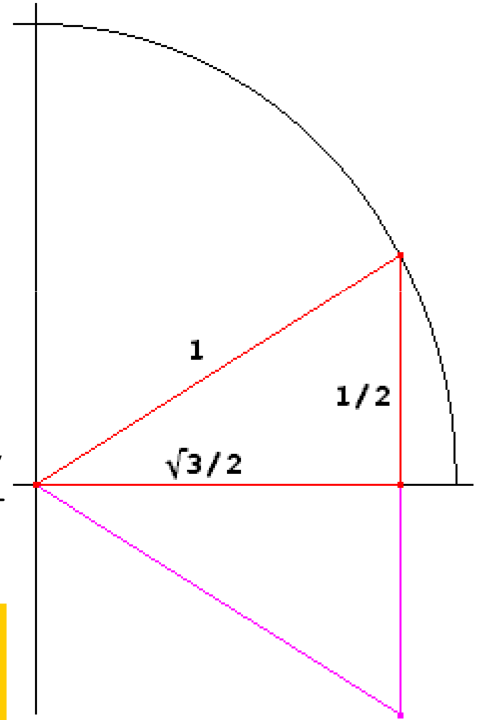
$\frac{\pi}{4}$




$\frac{\pi}{3}$




$\frac{\pi}{6}$

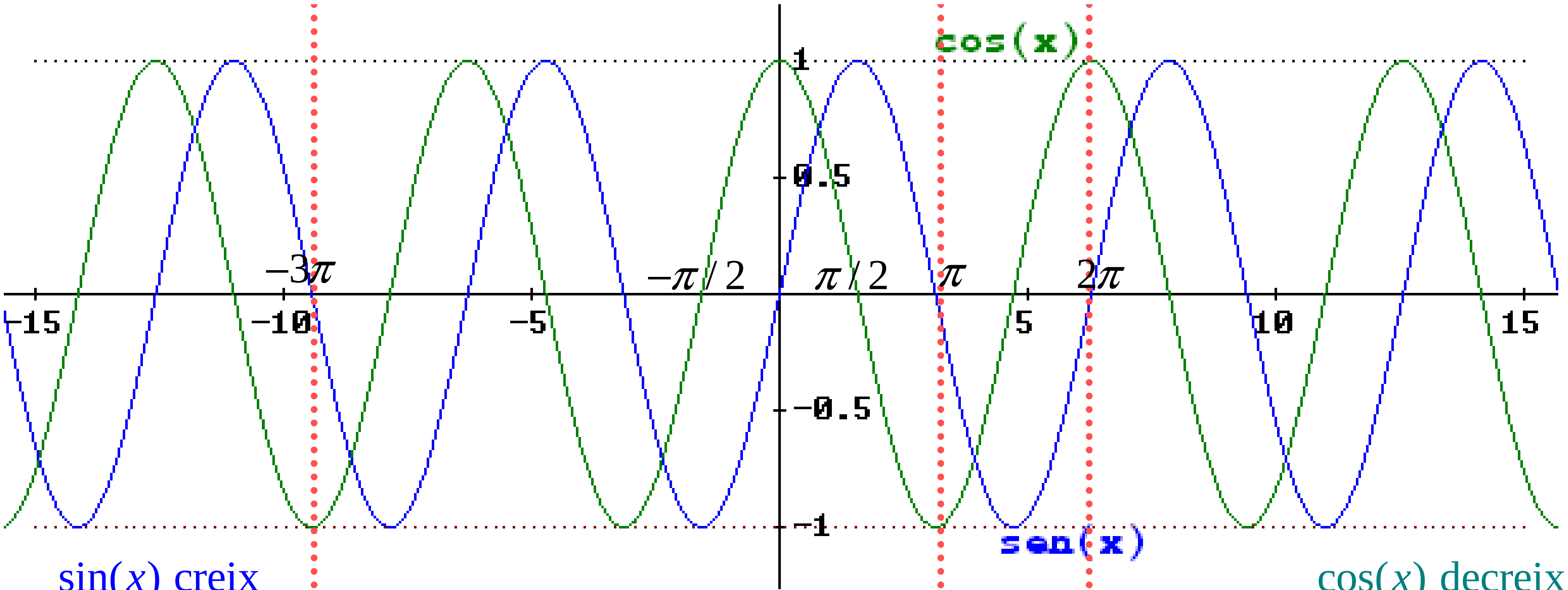



$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

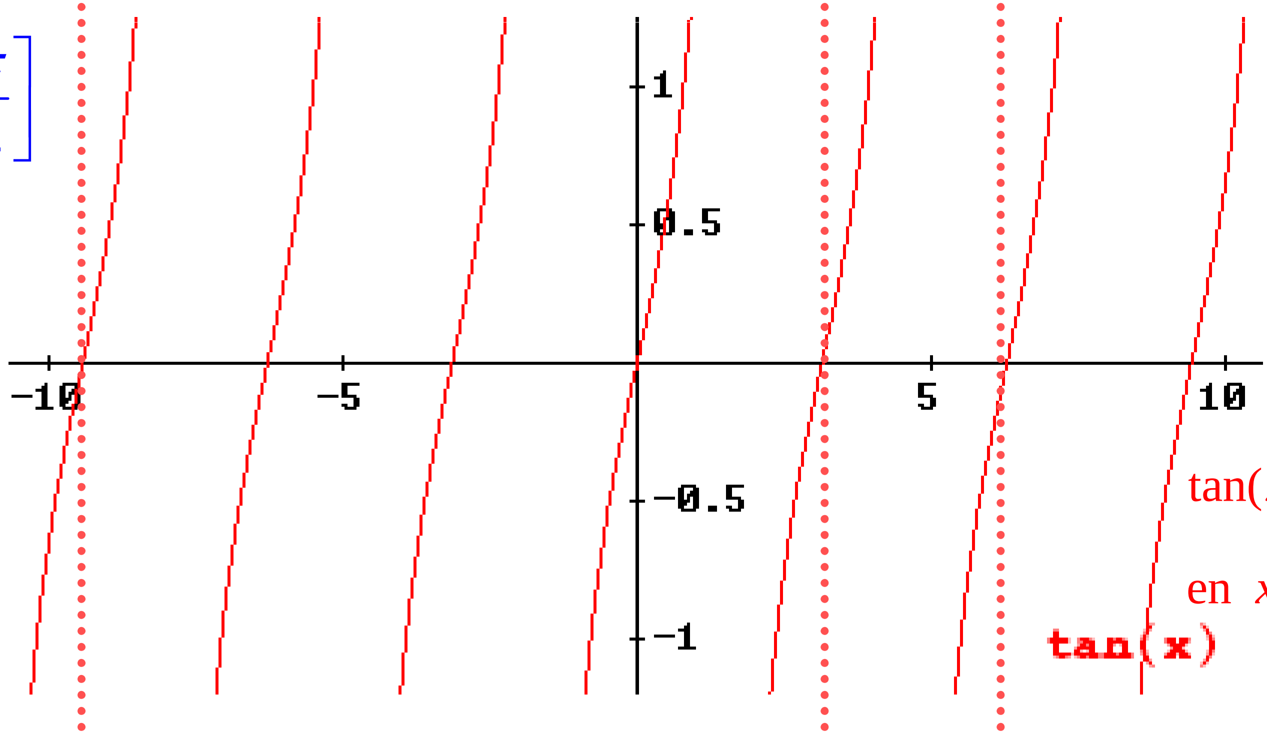
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$




$\sin(x)$ creix en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

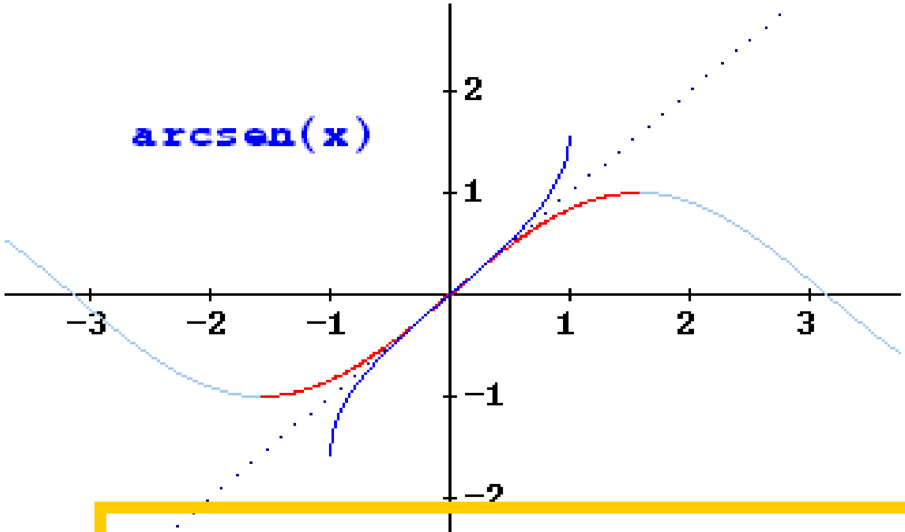
$\cos(x)$ decreix en $[0,\pi]$

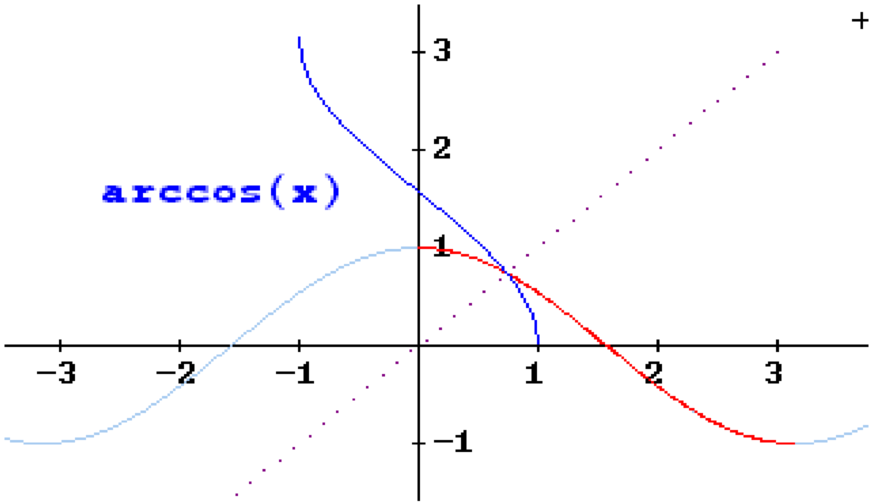



$\tan(x)$ creix en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

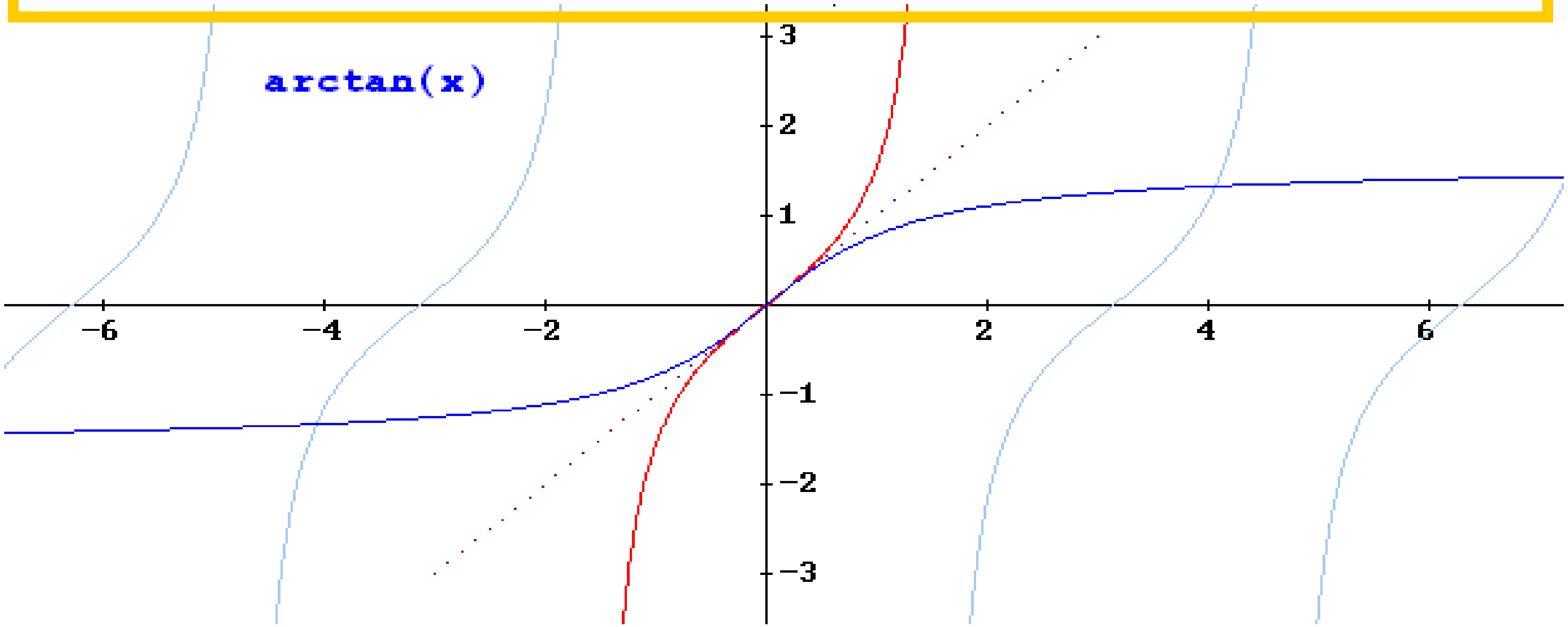
$\tan(x)$ no definida en $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ , $k\in\mathbb{Z}$

# Trigonomètriques inverses:




$$\arcsin:[-1,1]\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\quad,\quad \arccos:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]\quad,\quad \arctan:\mathbb{R}\rightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$



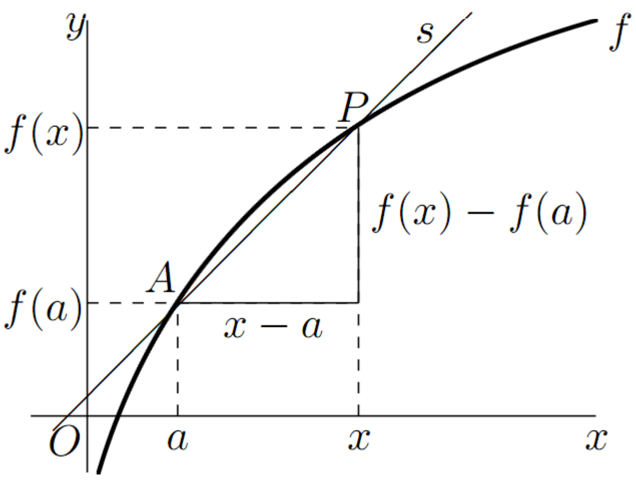
# Derivabilitat de funcions

## Derivada en un punt

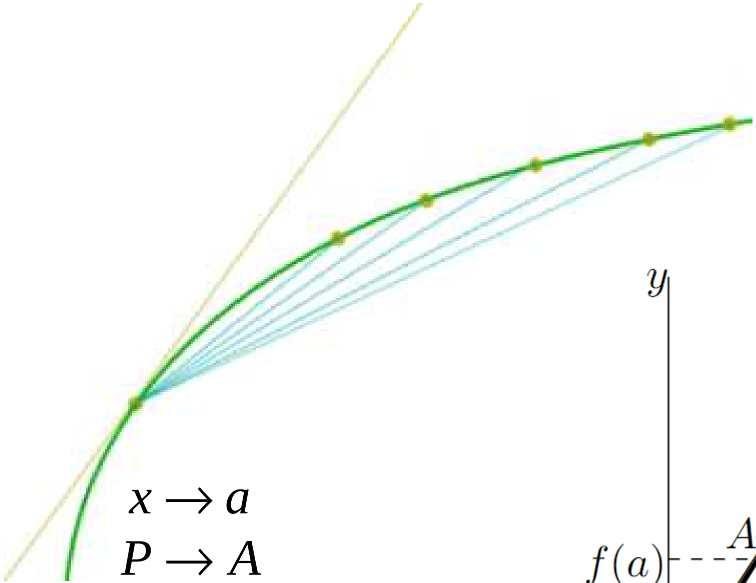
La derivada de $f(x)$ en $a$ es defineix com: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Es el valor del pendent de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $(a, f(a))$

(el límit dels pendents de les rectes secants)



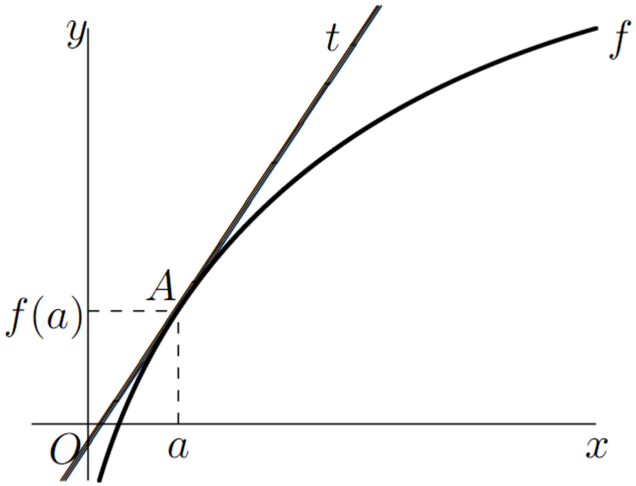

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$x \to a$

$P \to A$

secant $s$ $\to$ tangent $t$



## Funcions derivables

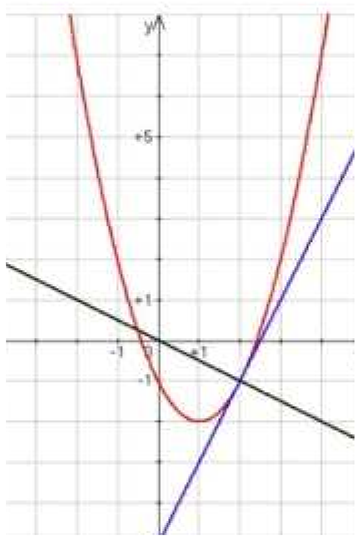
$f$ és derivable en $x_0 \in \left]a, b\right[$ si existeix $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$f$ és derivable en l'interval $\left]a, b\right[$ si és derivable en tots els seus punts

Funció derivada de $f$ és la funció definida per $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$

Tota funció derivable és contínua

## Recta tangent i recta normal




La recta tangent passa per $\left(a, f(a)\right)$ amb pendent $f'(a)$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

La recta normal passa per $\left(a, f(a)\right)$ amb pendent $\frac{-1}{f'(a)}$

$$y = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

# Derivades de funcions elementals

| | |
|---|---|
| $f(x)=k \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$ | |
| $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ | $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x)=\log(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$ | $f(x)=\log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\log(a)}$ |
| $f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^x$ | $f(x)=a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=a^x\log(a)$ |
| $f(x)=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$ | $f(x)=\tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $f(x)=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\sin(x)$ | |
| $f(x)=\arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ | $f(x)=\arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |

# Regles de derivació

| |
|---|
| $\left(\alpha f\right)'(x) = \alpha f'(x)$ |
| $\left(f+g\right)'(x) = f'(x) + g'(x)$ |
| $\left(f \cdot g\right)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ |
| $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ |
| $\left(f \circ g\right)'(x) = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ |

$$f(x) = \log(x) + 3\arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2+8} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{(3x^2-5)(x^2+8) - (x^3-5x)(2x)}{(x^2+8)^2}$$

$$h(x) = x^3 \cdot \sqrt{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{\sin(x)} + \frac{x^3}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos(x)$$

## Caracterizació de creixement i decreixement

$$f'(x) > 0 \text{ per a } x \in \, ]a,b[ \, \Rightarrow f \text{ estrictament creixent en } ]a,b[$$

$$f'(x) < 0 \text{ per a } x \in \, ]a,b[ \, \Rightarrow f \text{ estrictament decreixent en } ]a,b[$$

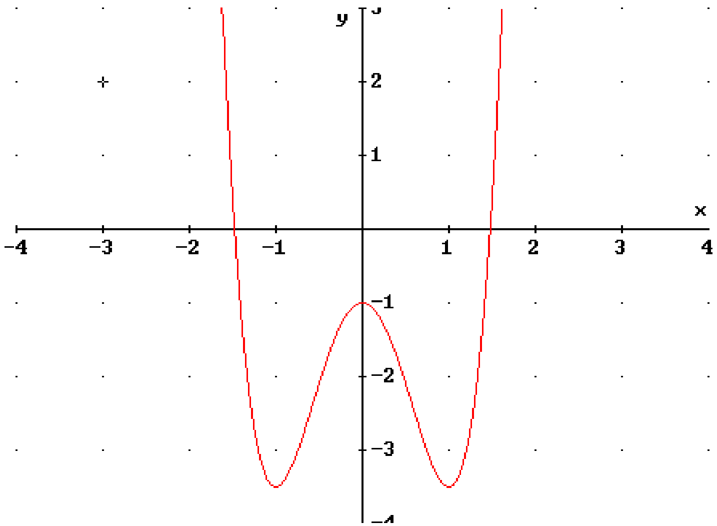
## Localització d'extrems relatius

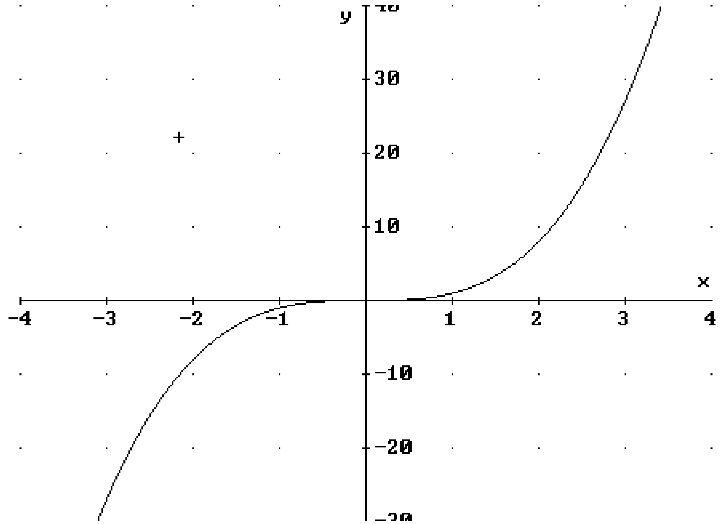
Si $f$ pren un extrem relatiu en $x = a,$ aleshores $f'(a) = 0$

(La recta tangent és horitzontal en $x = a$)

Els possibles extrems relatius es troben resolent $f'(x) = 0$

No totes les solucions de $f'(x) = 0$ són extrems relatius (punts d'inflexió)



## Concavitat i convexitat

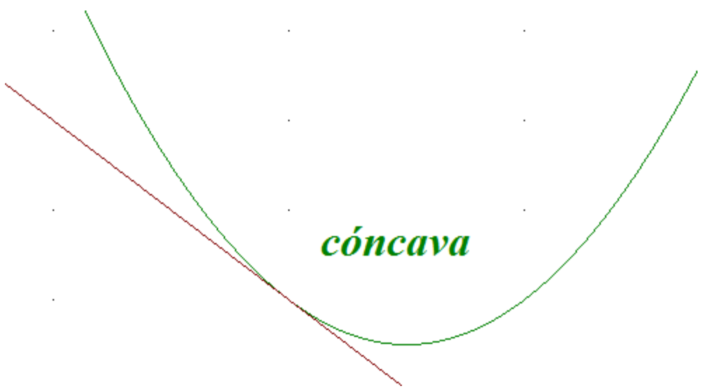
$f$ és còncava on la seua gràfica està per dalt de la tangent

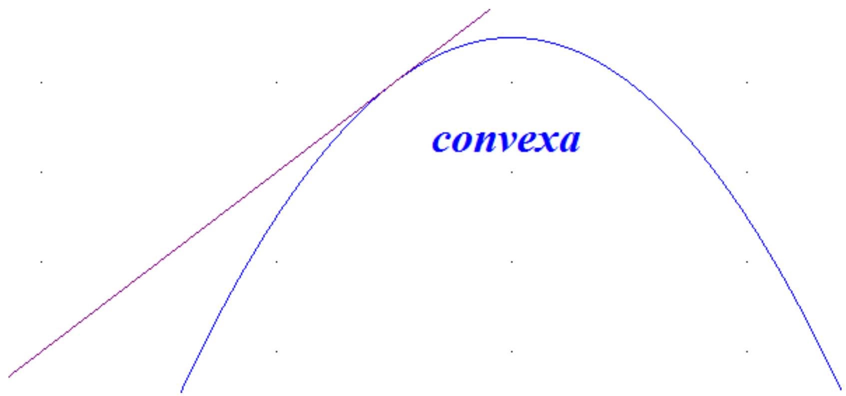
$f$ és convexa on la seu gràfica està per baix de la tangent

## Caracterizació de concavitat i convexitat

$$f''(x) > 0 \text{ per a } x \in \left]a,b\right[ \Rightarrow f \text{ còncava en } \left]a,b\right[ \;\; (f' \text{ creixent})$$

$$f''(x) < 0 \text{ per a } x \in \left]a,b\right[ \Rightarrow f \text{ convexa en } \left]a,b\right[ \;\; (f' \text{ decreixent})$$




La funció canvia de còncava a convexa en els punts d'inflexió

Els possibles punts de inflexió es troben resolent $f''(x) = 0$

No totes les solucions de $f''(x) = 0$ són punts d'inflexió.