Anàlisi Matemàtica

UT4 - Successions de Nombres Reals

Contingut

Conceptes generals

- Formes explícita i recurrent d’una successió
- Successions monòtones i successions acotades
- Successions convergents i divergents
- Àlgebra de límits. Casos d’indeterminació

Càlcul de Límits

- Límits de quocients
- Fórmula d’ Euler
- Criteri de Stolz

Ordres de Magnitud

Resolució de recurrències lineals

- Resolució directa en casos de primer ordre
- Segon ordre: Mètode de l’equació característica
- Cas no homogeni

Objectius

Generalitats (1S)

- Calcular termes de successions en forma explícita o recurrent
- Comprovar la monotonia i obtenir cotes
- Distingir entre successions convergents i divergents

Càlcul de límits (1S)

- Conéixer les manipulacions algèbriques usuals en el càlcul de límits
- Aplicar correctament les fórmules d'Euler i de Stolz

Ordres de magnitud (1S)

- Identificar l'ordre de magnitud d'una successió divergent
- Comparar ordres de magnitud entre successions

Recurrències lineals (2S)

- Resoldre recurrències lineales homogènies de primer i segon ordre
- Comprovar solucions particulars en equacions completes

Conceptes generals

Una successió és una aplicació:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad f(n) = a_n \quad \text{(terme general de la successió)}$$

Representem una successió amb les notacions: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{a_n\}$

Forma explícita: $a_n = f(n)$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\geq 1} \ , \ \{n!\}_{n\geq 0} \ , \ \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$$

Forma recurrent: $a_n = f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, n)$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n} \\ a_1 = 1 \end{cases} \ , \quad \begin{cases} a_n = n \cdot a_{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases} \ , \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases} \ \text{(Fibonacci)}$$

Exercici: Escriure cinc termes de les successions anteriors

Forma explícita : $a_n = f(n)$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\dots\right\}$$

$$\{n!\}_{n\geq 0} = \{0!,1!,2!,3!,4!,\dots.\} = \{1,1,2,6,24,\dots.\}$$

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\dots\right\} = \left\{1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{25}{12},\frac{137}{60},\dots\right\}$$

Forma recurrent : $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n)$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$a_5 = a_4 + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

$$\begin{cases} a_n = n \cdot a_{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$a_1 = 1 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

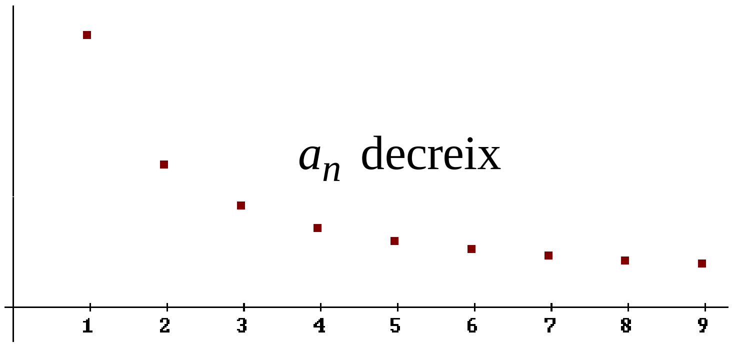
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

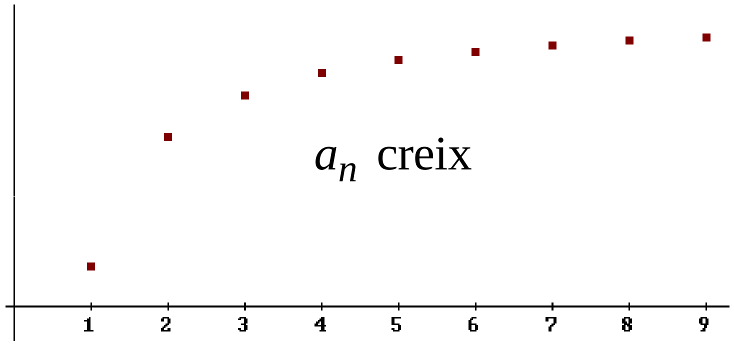
$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

Successions monòtones:

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \ \textit{decreixent} \ \Leftrightarrow \ a_n \geq a_{n+1} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \ \textit{creixent} \ \Leftrightarrow \ a_n \leq a_{n+1} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$





Exemples: $\{n^2+1\}_{n\geq 1}$ és creixent , $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$ és creixent

$\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n\geq 1}$ és decreixent , $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$ no creix ni decreix

Exercici: Verificar que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $a_n = \dfrac{2n+4}{1-3n}$ és creixent

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{2n+4}{1-3n} \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+4}{1-3(n+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+4}{1-3(n+1)} - \frac{2n+4}{1-3n} = \cdots = \frac{14}{9n^2+3n-2} > 0$$

Exercici: Demostrar que la successió $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$ decreix

Fem ús d'un argument d'inducció:

$(n=1)$ $\quad a_1 \geq a_2$ ja que $a_1 = 7$, $a_2 = \sqrt{2+7} = 3$

(H.I.) $\quad$ Suposem que $a_n \geq a_{n+1}$ per a un cert valor de n

En el pas següent,

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \underset{\text{(HI)}}{\geq} \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Successions acotades:

$$\{a_n\}_{n\geq 1}\ \textit{acotada superiorment} \iff a_n \leq K\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\{a_n\}_{n\geq 1}\ \textit{acotada inferiorment} \iff a_n \geq K\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

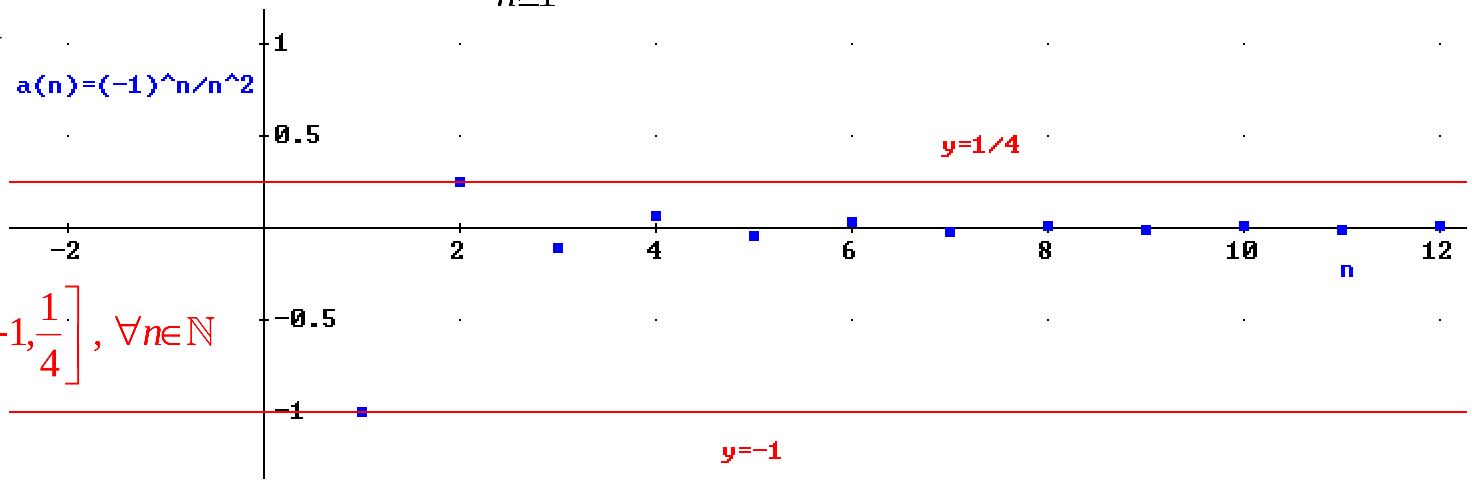
$$\{a_n\}_{n\geq 1}\ \textit{acotada} \iff \{|a_n|\}_{n\geq 1}\ \text{acotada superiorment}$$

Exemples:

$\{n^2+1\}_{n\geq 1}$ és acotada inferiorment pero no superiorment (no és acotada)

$\{\sin(n)-n\}_{n\geq 1}$ és acotada superiorment pero no inferiorment (no és acotada)

$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n\geq 1}$ és acotada ; $\{(-n)^n\}_{n\geq 1}$ no és acotada (ni superior ni inferiorment)



$$\frac{(-1)^n}{n^2}\in\left[-1,\frac{1}{4}\right],\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Exercici: Demostrar que $\left\{\dfrac{2n+4}{1-3n}\right\}_{n\geq 1}$ és acotada superiorment per $-\dfrac{2}{3}$

$$\frac{2n+4}{1-3n} \leq \frac{-2}{3} \iff 3(2n+4) \geq -2(1-3n) \iff 6n+12 \geq -2+6n \iff 14 \geq 0$$

(és evident que és acotada superiorment per zero)

Exercici: Verificar que $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$ és acotada inferiorment per 2

Fem ús d'un argument d'inducció:

$(n=1)$ $a_1 \geq 2$ ja que $a_1 = 7 \geq 2$

(H.I.) Suposem que $a_n \geq 2$ per a un cert valor de n

En el pas següent,

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \underset{\text{(HI)}}{\geq} \sqrt{2+2} = 2$$

(també és evident que és acotada inferiorment per zero)

Succesions convergents:

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ *convergeix* a $\alpha \in \mathbb{R}$ si, per a qualsevol $\varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

El nombre α, cas d'existir, es únic. Es diu límit de la successió $\{a_n\}$

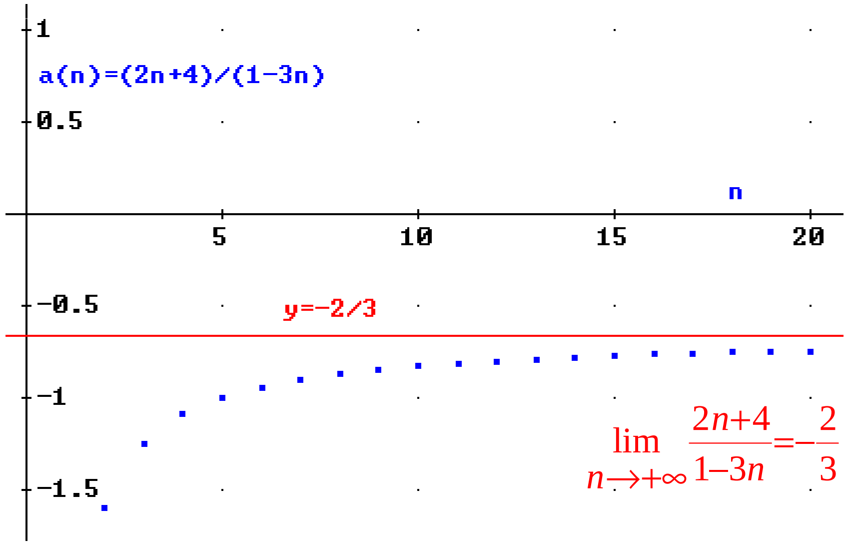
Farem servir la notació: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n} a_n = \alpha$, $\lim a_n = \alpha$, $\{a_n\} \to \alpha$

Exemples:

$a_n = c \;\Rightarrow\; \{a_n\} \to c$

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \to 0$

$0 < a < 1 \;\Rightarrow\; \{a^n\} \to 0$



Exercici:

$$\left\{\frac{2n+4}{1-3n}\right\} \to -\frac{2}{3}$$

$$|a_n - \alpha| = \left|\frac{2n+4}{1-3n} + \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{14}{3(1-3n)}\right| = \frac{14}{3(3n-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{14+3\varepsilon}{9\varepsilon}$$

Successions divergents:

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \textit{ divergeix} \text{ quan no convergeix}$$

- $\{a_n\} \to +\infty$ si, per a $K > 0$, existeix n_0 tal que $a_n > K$, si $n \geq n_0$
- $\{a_n\} \to -\infty$ si $\{-a_n\} \to +\infty$
- $\{a_n\} \to \infty$ si $\{|a_n|\} \to +\infty$

$$\text{Sucessions divergents} \begin{cases} \text{divergents a } \infty \ (+\infty, -\infty) \\ \text{oscil.lants} \begin{cases} \text{acotades} \\ \text{no acotades} \end{cases} \end{cases}$$

Exemples:

$\{n!\} \to +\infty$; $\{-n\} \to -\infty$; $\{(-n)^n\} \to \infty$

$\{(-1)^n\}$ és oscil.lant i acotada

$\{n + (-1)^n n\}$ és oscil.lant, no acotada i no divergeix a ∞

$a > 1 \Rightarrow \{a^n\} \to +\infty$

Notació: $\lim a_n \in \overline{\mathbb{R}} \iff \{a_n\}$ convergeix o divergeix a $\pm\infty$

Teorema de Convergència Monòtona

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ és creixent i acotada superiorment, aleshores

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ és convergent $\left(\exists \lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}\right)$

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}\, a_n$ és decreixent i acotada inferiorment, aleshores

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ és convergent $\left(\exists \lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}\right)$

Conseqüència:

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ és creixent i **no** és acotada (sup), divergeix a $+\infty$

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ és decreixent i **no** és acotada (inf), divergeix a $-\infty$

Exercici: Demostrar que la successió $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$ convergeix

Calcular el seu límit

***Decreixent*:**

$$a_n = \{\ 7\ ,\ 3\ ,\ 2.2\ ,\ 2.05\ ,\ ....\}$$

$a_1 \geq a_2$ ja que $a_1 = 7\ ,\ a_2 = \sqrt{2+7} = 3$

Suposem que $a_n \geq a_{n+1}$

En el pas següent

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \underset{\text{(HI)}}{\geq} \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Acotada inferiorment per 0

***Per aplicació del* TCM,** $\{a_n\}$ convergeix. Si $\alpha = \lim a_n \in \mathbb{R}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \;\Rightarrow\; \alpha = \sqrt{2+\alpha} \;\Rightarrow\; \alpha^2 = 2+\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 2 \;\vee\; \cancel{\alpha = -1}$$

Àlgebra de límits:

Si $\lim a_n = \mathrm{a} \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\lim b_n = \mathrm{b} \in \overline{\mathbb{R}}$,

- $\lim\left(a_n + b_n\right) = \lim a_n + \lim b_n = \mathrm{a} + \mathrm{b}$
- $\lim\left(\lambda \cdot a_n\right) = \lambda \cdot \lim a_n = \lambda \cdot \mathrm{a}$
- $\lim\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim a_n \cdot \lim b_n = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$
- $\lim\left(a_n / b_n\right) = \lim a_n / \lim b_n = \mathrm{a/b}$
- $\lim\left(\left(a_n\right)^{b_n}\right) = \left(\lim a_n\right)^{\lim b_n} = \mathrm{a}^{\mathrm{b}}$
- Si f és continua (en un entorn d'a), $\lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(\mathrm{a})$
- $\left\{a_n\right\}$ acotada i $\lim b_n = 0 \;\Rightarrow\; \lim\left(a_n \cdot b_n\right) = 0$
- $\lim\left|a_n\right| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim a_n = 0$,

sempre que no es donen casos d'indeterminació

Indeterminacions : $\infty - \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ , $\cancel{0^\infty}$, $\cancel{\infty^\infty}$

Exemples:

$$\lim \frac{6n^2+3n-5}{3n^2-1} = \lim \frac{\dfrac{6n^2+3n-5}{n^2}}{\dfrac{3n^2-1}{n^2}} = \lim \frac{6+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{6+0-0}{3-0} = 2$$

$$\lim \frac{n^3+3n^2-5}{3n^2+2} = \lim \frac{\dfrac{n^3+3n^2-5}{n^3}}{\dfrac{3n^2+2}{n^3}} = \lim \frac{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^3}}{\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}} = \frac{1+0-0}{0+0} = \infty \text{ (amb signe +)}$$

$$\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \lim \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0$$

$$\lim\left(\log(2n+1)-\log(n)\right) = \lim\left(\log\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right) = \log(2)$$

Càlcul de límits

Límits de quocients:

$$\boxed{\lim \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0} = \lim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} \ ; \ a_p, b_q \neq 0}$$

Exemples:

$$\lim \frac{6n^2 + 3n - 5}{3n^2 - 1} = \lim \frac{6n^2}{3n^2} = 2$$

$$\lim \frac{n^3 + 3n^2 - 5}{3n^2 + 2} = \lim \frac{n^3}{3n^2} = \lim \frac{n}{3} = +\infty$$

(i similars)

$$\lim \frac{n^2\sqrt{n} + 3n^2 - 5\sqrt{n^2+1}}{3\sqrt{n^5+n} - 2\sqrt{n+1}} = \lim \frac{n^2\sqrt{n}}{3\sqrt{n^5}} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim \frac{3^{n+1} + 2^n}{5^{n+2} - 8 \cdot 3^n} = \lim \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = 0$$

Fórmula d'Euler:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\quad;\quad e=2.718281828...$$

$$\boxed{\lim a_n=1\ \text{ i }\ \lim b_n=\pm\infty\ \Rightarrow\ \lim\left(a_n\right)^{b_n}=e^{\lim\ b_n\left(a_n-1\right)}}$$

Exemples:

$$\lim\left(\frac{3n-5}{3n+2}\right)^{n-1}=\cancel{\left(1^{\infty}\right)}=e^{\lim(n-1)\left(\frac{3n-5}{3n+2}-1\right)}=e^{\lim(n-1)\left(\frac{-7}{3n+2}\right)}=e^{-\frac{7}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^{7}}}$$

$$\lim\left(\frac{3n^2+3n-5}{3n^2+2}\right)^{\sqrt{n^2-3n}}=\cancel{\left(1^{\infty}\right)}=e^{\lim\sqrt{n^2-3n}\cdot\left(\frac{3n^2+3n-5}{3n^2+2}-1\right)}=e^{\lim\sqrt{n^2-3n}\cdot\left(\frac{3n-7}{3n^2+2}\right)}=e$$

Nota: $\lim\left(\frac{6n^2+3n-5}{3n^2-1}\right)^{n+3}=\left(\frac{6}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$ $\quad\lim\left(\frac{n^2+3n-5}{3n^2+2}\right)^{n^2-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0$

Criteri d'Stolz (quocient):

$$\boxed{b_n \text{ creixent },\ b_n \to +\infty \text{ i } \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda}$$

$$\textbf{Nota:} \quad \nexists \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \quad \not\Rightarrow \quad \nexists \lim \frac{a_n}{b_n} \quad \left(\textbf{Exemple:} \ \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Exemples:

$$\lim \frac{\log(n)}{n} = \lim \frac{\log(n+1)-\log(n)}{(n+1)-n} = \lim \big(\log(n+1)-\log(n)\big) = \lim \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(1) = 0$$

$$\lim \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim \frac{\big(1+2+3+\cdots+(n+1)\big)-\big(1+2+3+\cdots+n\big)}{(n+1)^2-n^2} = \lim \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{1+2+3+\cdots+2n}{n^2} = \lim \frac{\big(1+2+\cdots+2(n+1)\big)-\big(1+2+\cdots+2n\big)}{(n+1)^2-n^2} = \lim \frac{4n+3}{2n+1} = 2$$

Ordres de magnitud

$\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ successions de termes positius que tendeixen a $+\infty$

Notació O:

$$\left[\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0 \;\Rightarrow\; a_n \in O(b_n)\right] \quad \text{i escriurem } a_n \ll b_n$$

Notació Ω:

$$\left[\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=+\infty \;\Rightarrow\; a_n \in \Omega(b_n)\right] \quad \text{i escriurem } a_n \gg b_n$$

Notació Θ:

$$\left[\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\alpha>0 \;\Rightarrow\; a_n \in \Theta(b_n)\right] \quad \text{i escriurem } a_n \approx b_n$$

Propietats:

$$a_n \in O(b_n) \;\Leftrightarrow\; b_n \in \Omega(a_n)$$

$$a_n \in \Theta(b_n) \;\Leftrightarrow\; a_n \in O(b_n) \;\wedge\; a_n \in \Omega(b_n)$$

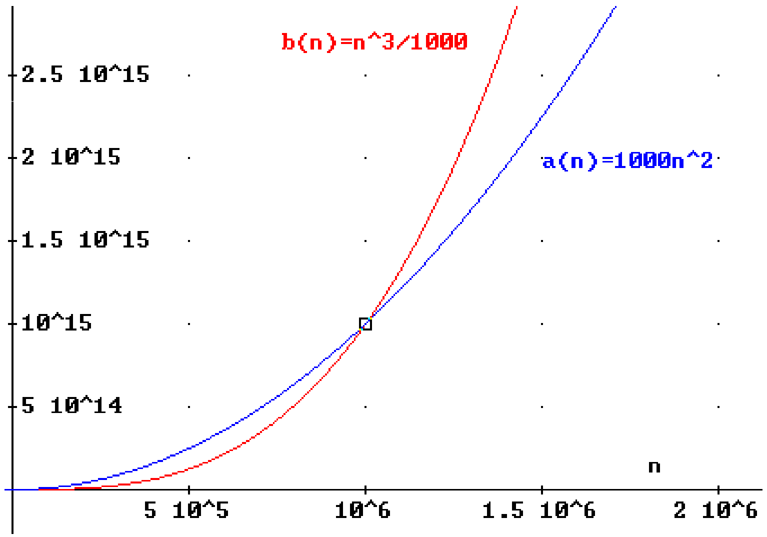
$$\Theta(a_n + b_n) = \Theta(\max(a_n, b_n))$$

Exemples:

$$27n^2 + \frac{355}{113}n + 12 \;\in\; \Theta(n^2)$$

$$\sqrt{n} \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$1000n^2 \in O\left(\frac{n^3}{1000}\right)$$



$$\boxed{\log(n) \;\ll\; \sqrt{n} \;\ll\; n \;\ll\; n\log(n) \;\ll\; n^2 \;\ll\; e^n \;\ll\; n! \;\ll\; n^n}$$

Resolució de recurrències lineals

$$s_n^{(k)} \cdot a_{n+k} + s_n^{(k-1)} \cdot a_{n+k-1} + \cdots + s_n^{(1)} \cdot a_{n+1} + s_n^{(0)} \cdot a_n + t_n \;,\; n \in \mathbb{N} \text{ (ordre } k\text{)}$$

Recurrències lineals de primer ordre

$$\boxed{a_{n+1} = s_n \cdot a_n + t_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$$

Casos més interesants: $s_n = c \;,\; t_n = c \cdot n \;,\; t_n = \text{c} \cdot k^n$

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 5n + 2 \quad ; \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \cdot 5^{n-1}$$

Exemples

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + k \\ a_1 = k \end{cases} \Rightarrow \quad a_n = n \cdot k$$

```
#1:   a(n) := ITERATE(x + k, x, k, n - 1)
#2:   a(n) := IF(n = 1, k, a(n - 1) + k)
#3:   VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#4:   [k, 2·k, 3·k, 4·k, 5·k, 6·k, 7·k, 8·k, 9·k, 10·k]
```

$$\begin{cases} a_{n+1} = k \cdot a_n \\ a_1 = k \end{cases} \Rightarrow \quad a_n = k^n$$

```
#1:   a(n) := ITERATE(k·x, x, k, n - 1)
#2:   a(n) := IF(n = 1, k, k*a(n - 1))
#3:   VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#4:   [k, k^2, k^3, k^4, k^5, k^6, k^7, k^8, k^9, k^10]
```

$$\begin{cases} a_n = n \cdot a_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a_n = n!$$

```
#1:   a(n) := IF(n = 1, 1, n*a(n - 1))
#2:   VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#3:   [1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800]
```

Resolució directa per a les de primer ordre (*algorisme recursiu*)

a) $$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (Torres\ d'Hanoi) \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma d'una progressió geomètrica} \\ 1 + r + r^2 + \cdots + r^m = \dfrac{r^{m+1} - 1}{r - 1} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 \\
a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot (2+1) + 1 = 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1) + 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{1 - 2^{n-1} \cdot 2}{1 - 2} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

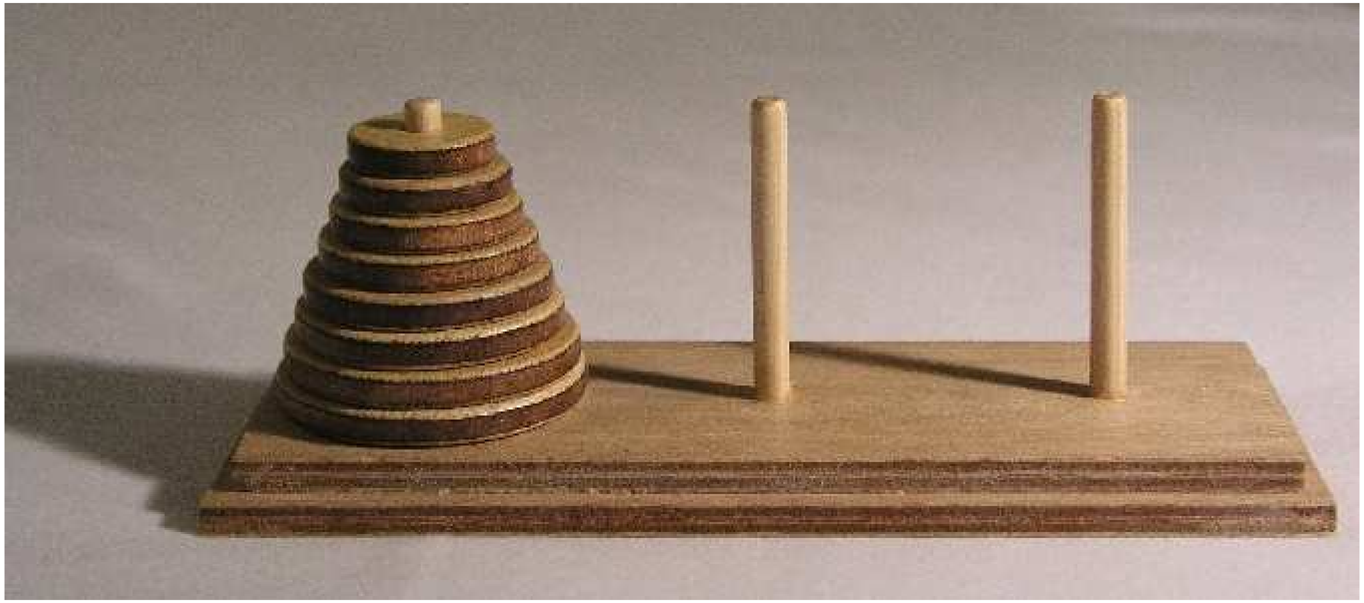
$$a_n \in \Theta(2^n)$$

b) $$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma d'una progressió aritmètica} \\ 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \dfrac{m \cdot (m+1)}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1 + 3 \cdot 1 \\
a_3 &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\
a_4 &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\
&\vdots \\
a_n &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot (n-1) = 1 + 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 1 + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}
\end{aligned}$$

$$a_n \in \Theta(n^2)$$



$$a(8) = 2^8 - 1 = 255$$

$$a(4) = 2^4 - 1 = 15$$

$$a(64) = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

(500.000 milions d'anys si cada moviment es fa en un segon)

LA LLGENDA DE LES TORRES D'HANOI

Quan va crear el món, Déu disposà sobre la Terra tres varetes de diamant i seixanta quatre discos d'or. Els discos són tots de tamany diferent i, inicialment, van ser col.locats en ordre decreixent de diàmetres sobre la primera de les varetes. També creà Déu un monestir els monjos del qual tenen la tasca de traslladar tots els discos des de la primera vareta a la tercera. La única operació permesa és moure un disc d'una vareta a una altra qualsevol, però amb la condició de què no es pot col.locar un disc per damunt d'altre de major diàmetre. La llegenda diu també que quan els monjos finalitzen la seua tasca, el món acabarà…

Recurrències lineals de segon ordre i coeficients constants

$$\boxed{a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = t_n \quad ; \quad p, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}}$$

(Casos més interesants: $t_n = P(n)$, $t_n = k^n$, $t_n = P(n) \cdot k^n$)

L'equació homogènia associada a l'equació completa és

$$\boxed{a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0}$$

Estructura de les solucions

$$\boxed{a_n = a_n^P + a_n^H}$$

a_n és la solució general de l'equació completa (depén de dues constants)

a_n^P és una solució particular de l'equació completa (qualsevol)

a_n^H és la solució general de l'equació homogènia (depén de dues constants)

$a_n = a_n^H$ en equacions homogènies (ara la completa i la homogènia són la mateixa)

Propietat 1

Qualsevol solució de l'equació homogènia (solució general) pot escriure's com una combinació lineal de dues solucions particulars que siguen linealment independents

$$a_n^H = c_1 \cdot a_n^{H(1)} + c_2 \cdot a_n^{H(2)}$$

Propietat 2

Si $a_n = r^n$ $(r \neq 0)$ satisfà $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$, aleshores

$$r^2 + p \cdot r + q = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} P(r) = r^2 + p \cdot r + q \ \text{ es coneix com polinomi característic} \\ r^2 + p \cdot r + q = 0 \ \text{ es coneix com equació característica} \end{array} \right)$$

Propietat 3

Si a_n i u_n són dues solucions de l'equació completa, aleshores $a_n - u_n$ és solució de la homogènia.

$$a_n = u_n + (a_n - u_n) = a_n^P + a_n^H$$

Mètode de l'equació característica per a l'equació homogènia:

$$a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$$

$$P(r) = r^2 + pr + q = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \;,\quad r_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Cas 1 $(r_1 \neq r_2$, arrels reals de $P(r))$**:**

Solucions particulars linealment independents: $r_1^{\,n}$, $r_2^{\,n}$

Solució general: $a_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n}$

Cas 2 $(r_1 = r_2 = r$, arrel real doble$)$**:**

Comprovar

Solucions particulars linealment independents: r^n , $n \cdot r^n$

Solució general: $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$

Cas 3 $(r_1 = \rho_\alpha, r_2 = \rho_{-\alpha}$ arrels complexes conjugades$)$**:**

Solucions particulars (reals) linealment independents: $\rho^n \cos(n\alpha)$, $\rho^n \sin(n\alpha)$

Solució general: $a_n = \rho^n \left(c_1 \cos(n\alpha) + c_2 \sin(n\alpha)\right)$

Exemple: Resoldre la recurrència $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1,\ a_2 = 1 \end{cases}$ (*Successió de Fibonacci*)

Reescribim la recurrència en la forma $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

L'equació característica és $r^2 - r - 1 = 0$ amb arrels $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Correspon al Cas 1 (arrels reales distintes)

$$Solució\,(general):\quad a_n = a_n^H = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A partir dels dos valors inicials, determinem les constants

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \;\Rightarrow\; c_1 \cdot (1+\sqrt{5}) + c_2 (1-\sqrt{5}) = 2 \\ a_2 = 1 \;\Rightarrow\; c_1 \cdot (1+\sqrt{5})^2 + c_2 \cdot (1-\sqrt{5})^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \Theta(a_n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exemple: Resoldre la recurrència $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

L'equació reordenada seria $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$

L'equació característica és $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, amb arrel doble $r = 1$

$$\textit{Solució general (Cas 2)}: \quad a_n = a_n^H = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot n \cdot 1^n = c_1 + c_2 \cdot n$$

$$\Theta(a_n) = n$$

Exemple: Resoldre la recurrència $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

L'equació característica és $r^2 - r + 1 = 0$, amb solucions complexes (Cas 3)

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{\pi/3}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{-3}}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{-\pi/3}$$

Solució general:

$$a_n = a_n^H = 1^n \left(c_1 \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right) + c_2 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right) = c_1 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right)$$

Generalització: Extensió a recurrències de primer ordre.

Les recurrències de primer ordre

$$a_{n+1} = p \cdot a_n + t_n$$

poden tractar-se de forma anàloga a les de segon ordre.

Equació homogènia associada: $a_{n+1} - p \cdot a_n = 0$

Equació característica: r - $p = 0$ (Solució $r = p$)

Solució particular de la homogènia: p^n

Solució general de la homogènia: $a_n^H = c \cdot p^n$

Solució particular: a_n^P que haurem de trobar

Solució general: $a_n = a_n^P + a_n^H$

Exercici: Resoldre la recurrència $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2^n \\ a_1 = 5 \end{cases}$

Solució : $a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2^n$

Generalització: Extensió a recurrències d'ordre superior.

Resoldre la recurrència $\begin{cases} a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \ , \ a_3 = 2 \end{cases}$

Aquest cas correspondria a un problema homogeni de tercer ordre, de la forma

$$a_{n+3} + m \cdot a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0 \quad (\text{ací, } m = -5, \ p = 8, \ q = -4)$$

Equació característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = (r-1)(r-2)^2 = 0$

amb solucions $r_1 = 1, \ r_2 = 2$ (doble)

$$\textit{Solució general :} \quad a_n^H = c_1 + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n$$

A partir dels valors inicials,

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \\ a_2 = 1 \ \Rightarrow \ c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 1 \\ a_3 = 2 \ \Rightarrow \ c_1 + 8c_2 + 24c_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ c_1 = -2 \ , \ c_2 = \frac{5}{4} \ , \ c_3 = -\frac{1}{4}$$

$$\textit{Solució :} \quad a_n = -2 + (5-n)\,2^{n-2}$$

Solucions particulars amb coeficients indeterminats

Com a norma general, cercarem una successió amb estructura similar a la del terme independent i triarem els coeficients que siguen necessaris per a trobar una solució.

Exemple: Resoldre la recurrència completa $\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 \\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = -1 \end{cases}$

Fent ús del mètode de l'equació característica,

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \ \Rightarrow\ r \in \{2,3\} \text{ (Cas 1)} \ \Rightarrow\ a_n^H = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

Per a la solució particular provarem amb solucions del tipus $u_n = k$ (similar a t_n)

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2 \ \Rightarrow\ k - 5k + 6k = 2 \ \Rightarrow\ 2k = 2 \ \Rightarrow\ k = 1$$

de manera que $a_n^P = 1$ és una solució particular.

$$a_n = a_n^P + a_n^P = 1 + c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

I, a partir de les condicions inicials, trobarem les constants

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \ \Rightarrow\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \\ a_2 = -1 \ \Rightarrow\ 4c_1 + 9c_2 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ c_1 = 1\ ,\ c_2 = -\frac{2}{3}$$

$$a_n = 1 + 2^n - 2 \cdot 3^{n-1}$$

Exemple: Resoldre la recurrència completa $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = -n^2$

Fent ús del mètode de l'equació característica,

$$r^2 - r - 1 = 0 \;\Rightarrow\; r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (Cas 1)} \;\Rightarrow\; a_n^H = c_1 \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Per a la solució particular provem amb un polinomi de segon grau (similar a t_n)

$$u_n = an^2 + bn + c \;\Rightarrow\; \begin{cases} u_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c) \\ u_{n+2} = a(n+2)^2 + b(n+2) + c = an^2 + (4a+b)n + (4a+2b+c) \end{cases}$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = -n^2 \;\Rightarrow\; -an^2 + (2a-b)n + (3+b-c) = -n^2 \;\Rightarrow\; a = 1 \,,\; b = 2 \,,\; c = 5$$

de manera que $a_n^P = n^2 + 2n + 5$ és una solució particular.

$$\textit{Solució general :}\quad a_n = a_n^H + a_n^P = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + n^2 + 2n + 5$$

si tinguérem condicions addicionals, fariem ús d'elles per a determinar c_1 i c_2

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$$

#1: LIN2_CCF(-5, 6, 2, n, c1, c2)

#2: $3^n \cdot c1 + 2^n \cdot c2 + 1$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 \\ a_1 = 1\,,\ a_2 = -1 \end{cases}$$

#1: LIN2_CCF_BV(-5, 6, 2, n, 1, 1, 2, -1)

#2: $-2 \cdot 3^{n-1} + 2^n + 1$

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1 \end{cases}$$

#1: LIN2_CCF_BV(-1, -1, 0, n, 1, 1, 2, 1)

#2: $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^n}{5} - \dfrac{\sqrt{5} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n}{5}$

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = -n^2 \\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1 \end{cases}$$

#1: LIN2_CCF(-1, -1, 0, n, c1, c2)

#2: $c1 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^n - c2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n$

#3: $u(n) := a \cdot n^2 + b \cdot n + c$

#4: $u(n + 2) - u(n + 1) - u(n) = n^2$

#5: $-a \cdot n^2 + n \cdot (2 \cdot a - b) + 3 \cdot a + b - c = n^2$

#6: SOLVE([-a = 1, 2·a - b = 0, 3·a + b - c = 0], [a, b, c])

#7: $[a = -1 \wedge b = -2 \wedge c = -5]$