Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessió 8

Definició de graf dirigit

Es diu graf dirigit (o digraf) a una terna (V, A, φ) on:

1. V és un conjunt finit no buit els elements del qual es denominen vèrtexs.
2. A és un conjunt finit els elements del qual es denominen arestes (o arcs).
3. $\varphi : A \rightarrow V \times V$ és una assignació (anomenada aplicació d'incidencia) que a cada aresta de A li assigna un element de $V \times V$, a dir, un parell ordenat de vèrtexs.

Exemple de graf dirigit

Considerem el graf donat per la terna $G = (V, A, \varphi)$, on

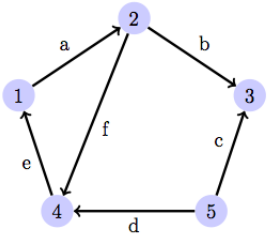
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \quad A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

i l'aplicació d'incidència φ està definida de la següent manera:

$$\varphi(a) = (1, 2), \;\; \varphi(b) = (2, 3), \;\; \varphi(c) = (5, 3),$$

$$\varphi(d) = (5, 4), \;\; \varphi(e) = (4, 1), \;\; \varphi(f) = (2, 4)$$

Este graf pot representar-se mitjançant el següent diagrama:



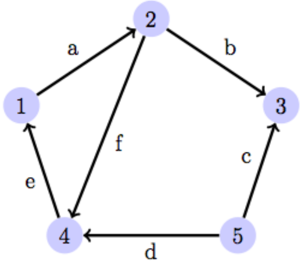
Conceptes bàsics

- Si a una aresta se li assigna una parella de vèrtexs (u, v), direm que u és *l'extrem inicial* i que v és *l'extrem final* d'aquesta aresta.
- Direm que un graf és *simètric* si sempre que hi ha una aresta d'un vèrtex u a un vèrtex v, també hi ha una aresta de v a u.
- El *graf* (no dirigit) *subjacent* d'un graf dirigit és aquell que resulta d'ignorar l'orientació de les arestes.

Conceptes bàsics

- S'anomena grau d'eixida d'un vèrtex v al nombre d'arestes que ixen de v. El denotarem per $deg^+(v)$.
- Es diu grau d'entrada d'un vèrtex v al nombre d'arestes que arriben a v. El denotarem per $deg^-(v)$.
- El grau d'un vèrtex v, $deg(v)$, és el nombre d'arestes que incideixen en v, és a dir, $deg(v) = deg^+(v) + deg^-(v)$.
- Un pou és un vèrtex amb grau d'eixida 0 (és a dir, no ix cap aresta d'ell).
- Una font és un vèrtex amb grau d'entrada 0 (és a dir, no arriba cap aresta a ell).

Exemple



- Els graus d'eixida són:
  $deg^+(v_1) = 1$, $deg^+(v_2) = 2$, $deg^+(v_3) = 0$,
  $deg^+(v_4) = 1$, $deg^+(v_5) = 2$
- Els graus d'entrada són:
  $deg^-(v_1) = 1$, $deg^-(v_2) = 1$, $deg^-(v_3) = 2$,
  $deg^-(v_4) = 2$, $deg^-(v_5) = 0$
- Els graus són:
  $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 2$,
  $deg(v_4) = 3$, $deg(v_5) = 2$
- El vèrtex 3 és un pou.
- El vèrtex 5 és una font.

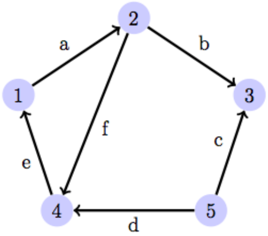
Graus d'entrada i eixida

Propietat

Si $G = (V, A, \varphi)$ és un graf dirigit, aleshores

$$\sum_{v \in V} deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \text{nombre d'arestes}$$

Ejemplo:



$\sum_{v \in V} deg^{+}(v) = 1 + 2 + 0 + 1 + 2 = 6$

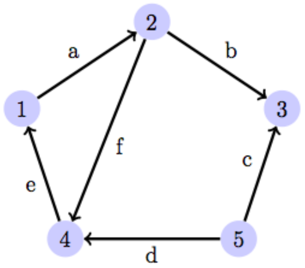
$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = 1 + 1 + 2 + 2 + 0 = 6$

nombre d'arestes $= 6$

Matriu d'adjacència d'un graf dirigit

Siga $G = (V, A, \varphi)$ un graf dirigit tal que el seu conjunt de vèrtexs és $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La matriu d'adjacència d'és G la matriu quadrada $M_A = (m_{ij})$ de grandària $n \times n$ tal que m_{ij} és el nombre d'arestes de v_i a v_j.

Ejemplo:



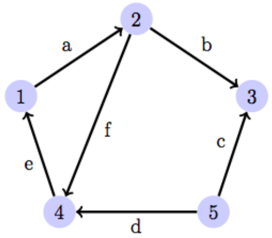
$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu d'incidència d'un graf dirigit

Siga G un graf dirigit sense bucles, amb conjunt de vèrtexs $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ i conjunt d'arestes $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. La matriu d'incidència de G es defineix com la matriu $M_I = (m_{ij})$, de grandària $m \times n$ donada per:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ és l'extrem inicial de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ és l'extrem final de } e_j, \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Ejemplo:

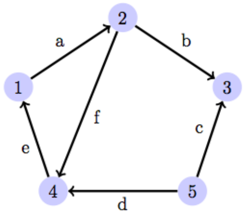


$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Camins i accessibilitat

- Un camí dirigit en un graf dirigit és una successió finita de vèrtexs i arestes
$$v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ \dots\ e_n\ v_n$$
on cada aresta e_i té com a extrem inicial a v_{i-1} i com a extrem final a v_i. Es diu que el camí va des de v_0 fins a v_n.
- Un vèrtex v es diu que és accesible des d'un vèrtex u si existeix un camí dirigit des de u fins a v.

Ejemplo:



En aquest graf el vèrtex 3 és accessible des del 4 ja que existeix un camí dirigit de 4 a 3:

$$v_4\ e\ v_1\ a\ v_2\ b\ v_3,$$

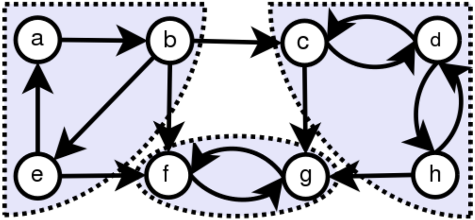
però el vèrtex 4 no és accessible des del 3 ja que no existeix cap camí dirigit de 3 a 4.

Connexió feble i forta

- Un graf dirigit es diu que és feblement connex si el seu graf subjacent és connex.
- Els components feblement connexos d'un graf dirigit són els components connexos del graf subjacent.
- En un graf dirigit, un vèrtex u està fortament connectat amb un vèrtex v si u és accessible des de v v és accessible des de u.
- Un graf dirigit es diu que és fortment connex si qualsevol parell de vèrtexs del graf estan fortament connectats.
- Donat un vèrtex v d'un graf dirigit, els vèrtexs que estan fortament connectats amb v determinen un subgraf fortament connex. Cadascun d'aquests subgrafs fortament connexos són els components fortament connexos del graf.

Exemples

- El graf de l'exemple anterior és feblement connex (ja que el seu graf subjacent es connex), però no és fortament connex (existeix un camí dirigit des del vèrtex 4 al 3, però no del 3 al 4). Té 3 components fortament connexos que corresponen als 3 subgrafs fortament connexos determinats pels següents conjunts de vèrtexs: $\{1, 2, 4\}$, $\{3\}$ i $\{5\}$.
- El següent graf és feblement connex però no és fortament connex. S'han ombrejat els seus components connexos:



Grafs dirigits eulerians

Un graf dirigit és eulerià si conté un camí dirigit eulerià tancat, és a dir, un camí dirigit simple, tancat i que conté a totes les arestes de graf.

Teorema

Si G és un graf dirigit feblement connex, aleshores G és eulerià si i només si el grau d'entrada i el grau d'eixida de cada vèrtex coincideixen.

Corol·lari

Si G és un graf dirigit feblement connex no eulerià, aleshores entre dos vèrtexs u i v hi ha un camí eulerià obert si i només si, en tots els vèrtexs diferents de u i v, el grau d'entrada i el d'eixida coincideixen, mentre que en u i en v es té

$$deg^{+}(u) = deg^{-}(u) + 1 \;\text{ y }\; deg^{+}(v) = deg^{-}(v) - 1$$