Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessió 7

1. Camí de pes mínim

2. Algorisme de Dijkstra

Camí de pes mínim

Definició

Si $C = v_0 e_1 v_1, \dots e_n v_n$ és un camí d'un graf G, es defineix el *pes* de C, $w(C)$, com la suma dels pesos de totes les seues arestes. És a dir:

$$w(C) = \sum_{i=1}^{n} w(e_i).$$

Problema

Donats dos vèrtexs v_1 i v_2 d'un graf, trobar un camí C de vèrtex inicial v_1 i vèrtex final v_2 tal que el seu pes $w(C)$ siga el menor possible (és a dir, un *camí de pes mínim*).

1. Camí de pes mínim

2. Algorisme de Dijkstra

Algorisme de Dijkstra (idea)

- Requisit: Existeix, almenys, un camí que connecta els vèrtexs v_1 i v_2.
- La idea de l'algorisme de Dijkstra consisteix a començar pel vèrtex inicial v_1 i moure's a través del graf assignant una *etiqueta* $E(u)$ a cada vèrtex u que representa el pes del camí més curt descobert fins al moment entre v i u.
- Els valors $E(u)$ són considerats, inicialment, com a temporals, i poden canviar si descobrim un camí de v_1 a u que tinga un pes menor que el valor actual de $E(u)$.
- L'algorisme construeix un subgraf, que és un arbre, i que conté als vèrtexs v_1 i v_2.
- Un dels camins de pes mínim entre v_1 i v_2 és l'únic camí simple del arbre obtingut que connecta v_1 amb v_2.

Algorisme de Dijkstra (descripció)

1) Si v_1 denota el vèrtex inicial, asignem $E(v_1) = 0$ i direm que v_1 ha sigut *etiquetat* amb el valor 0. A més, aquesta etiqueta és *permanent*, ja que no canviarem més el seu valor. Com hem de construir una seqüència d'arbres, comencem amb l'arbre T consistent només en el vèrtex v_1 (sense cap aresta).

2) Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

   a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la arista que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

   b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com en l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.

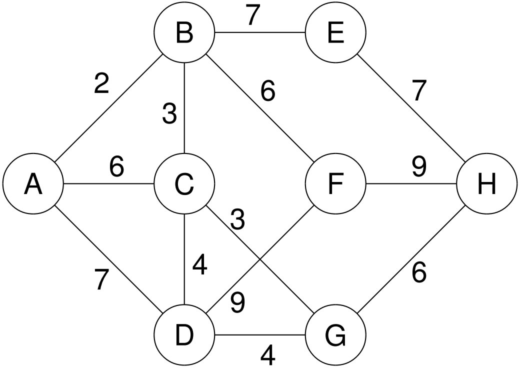
Algorisme de Dijkstra (descripció)

3) Elegim un vèrtice a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

4) Repetim els passos 2 i 3 fins que el vèrtex final v_2 haja rebut una *etiqueta permanent*. Un *camí de pes mínim* entre v_1 i v_2 és l'únic camí simple de l'arbre T que uneix v_1 i v_2; el seu pes (el *pes mínim*) és $E(v_2)$.

Exemple

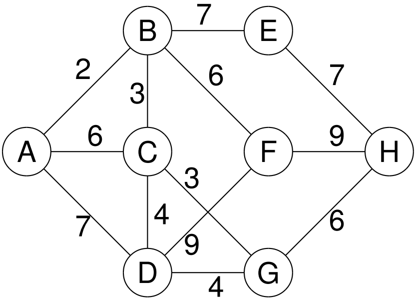
Volem calcular un camí de pes mínim entre els vèrtexs A i H del següent graf:



Pas 1)

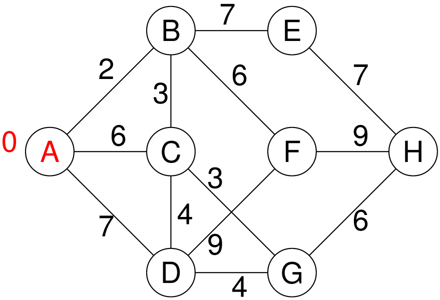
Si v_1 denota el vèrtex inicial, asignarem $E(v_1) = 0$ (etiqueta permanent).

T: àrbre consistent solament del vèrtex v_1 (sense cap aresta).



Pas 1)

Si v_1 denota el vèrtex inicial, asignarem $E(v_1) = 0$ (etiqueta permanent).
T: àrbre consistent solament del vèrtex v_1 (sense cap aresta).

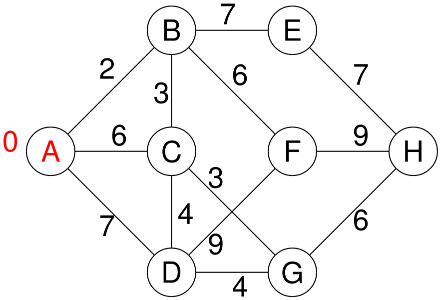


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.

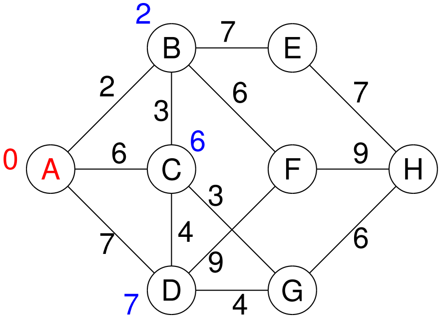


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

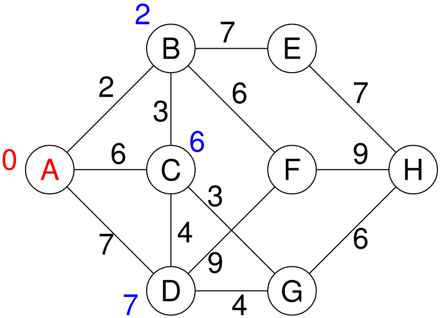
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



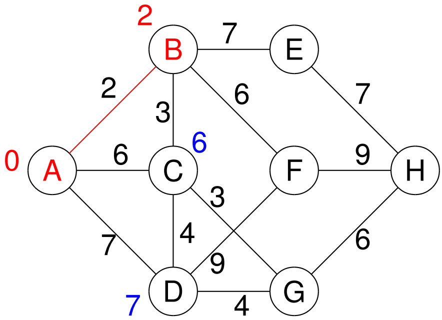
Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



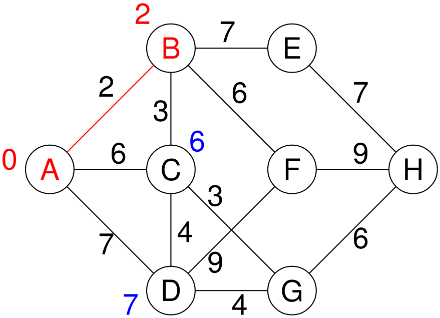
Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Pas 4)

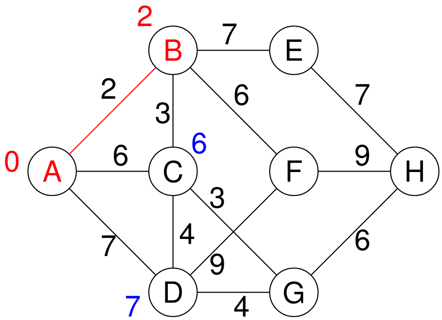
Repetim els passos 2 i 3 fins que el vèrtex final v_2 haja rebut una *etiqueta permanent*.



Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

- **a)** Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).
- **b)** Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.

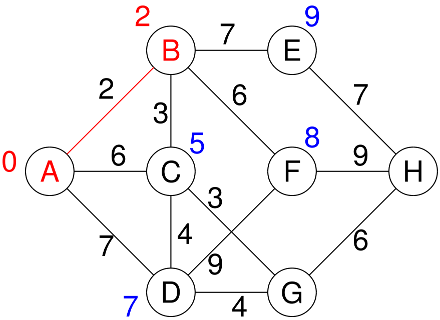


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

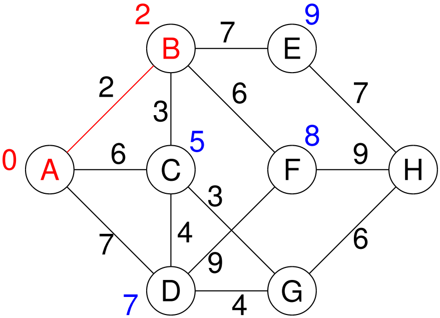
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



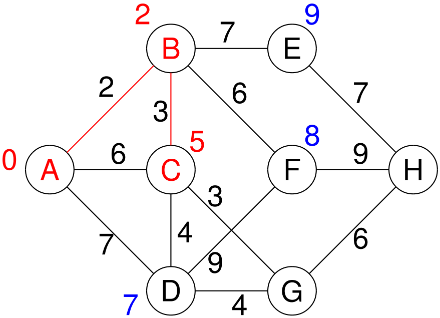
Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre *T* l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

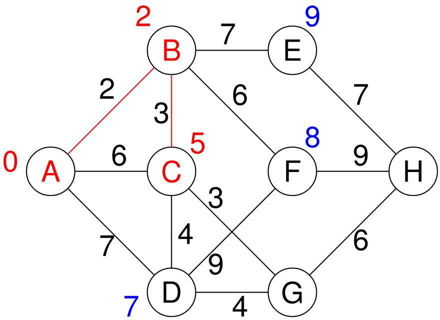


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat a). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.

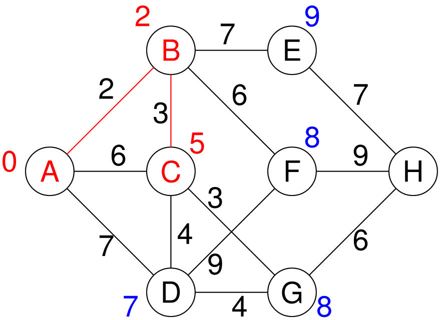


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

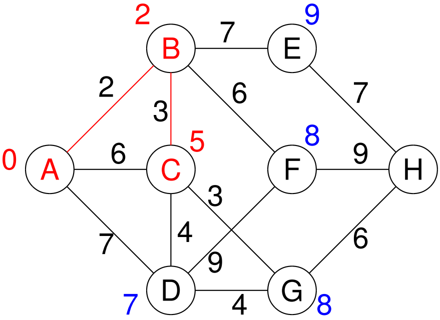
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



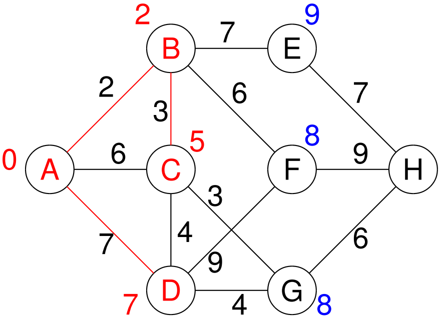
Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

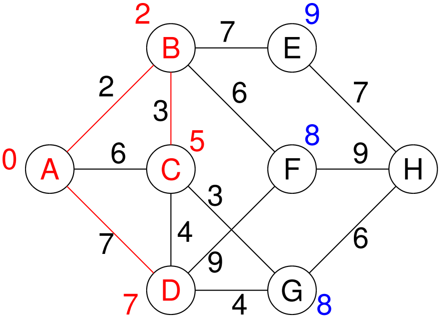


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

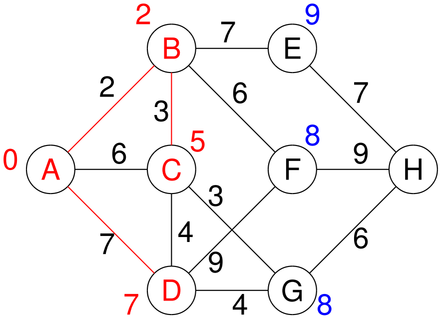
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



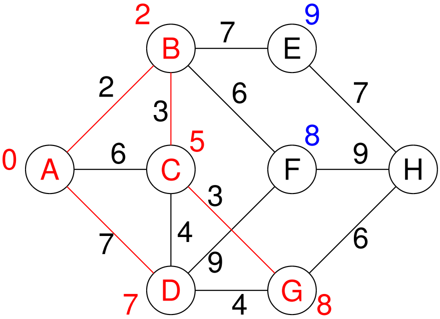
Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre *T* l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

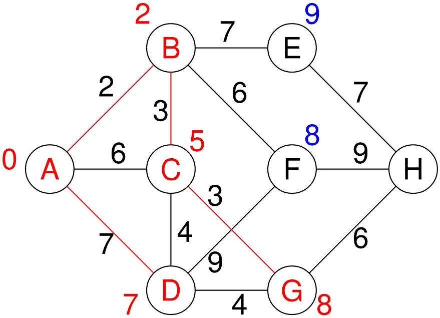


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.

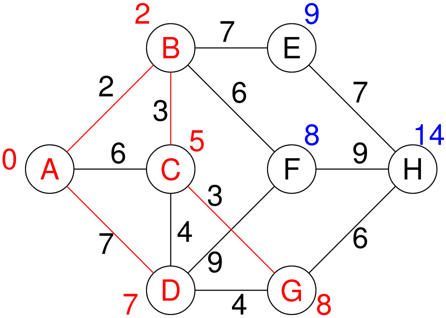


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

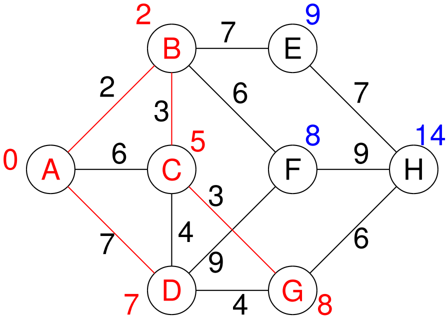
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



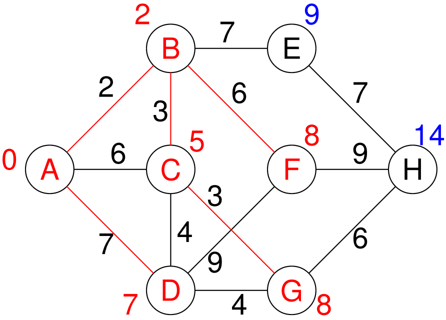
Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre *T* l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

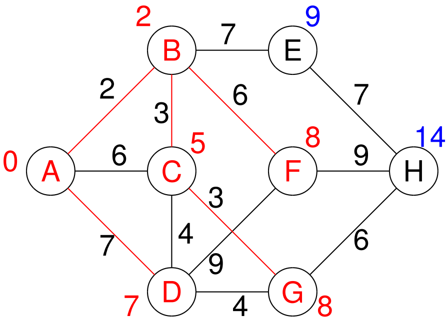


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

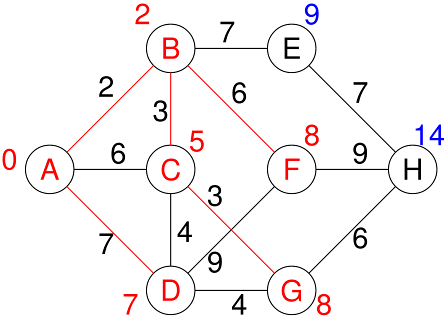
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



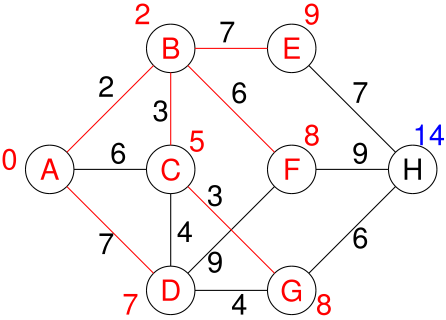
Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

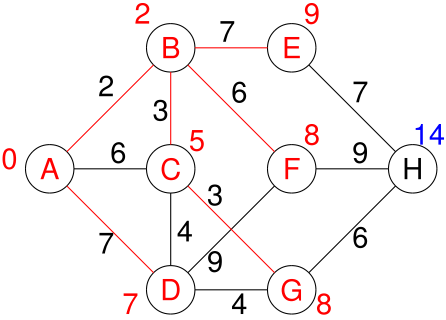


Pas 2)

Siga u el vèrtex que més recentment ha sigut etiquetat de forma *permanent*. Considerem cada vèrtex u' adjacent a u (i sense etiqueta permanent) i li assignem una *etiqueta temporal* de la següent manera:

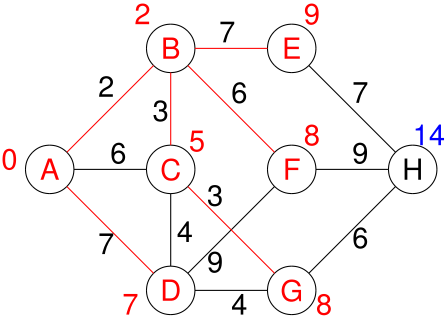
a) Si u' no té etiqueta, aleshores definim $E(u') = E(u) + w(e)$, on e és la aresta que uneix u i u'. (Si hi ha més d'una aresta unint u i u', elegim aquella que tinga el menor pes).

b) Si u' ja té etiqueta, aleshores calculem $E(u) + w(e)$ com a l'apartat *a*). Si aquest nombre és menor que $E(u')$, aleshores cambiem el valor de $E(u')$ per $E(u) + w(e)$; de lo contrari, $E(u')$ no canvia.



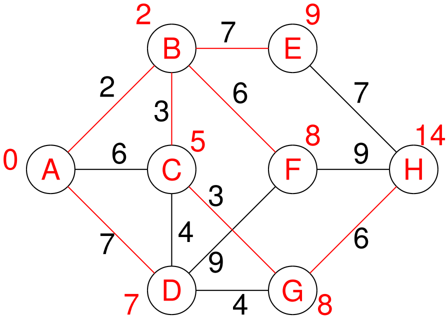
Pas 3)

Elegim un vèrtex a amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.

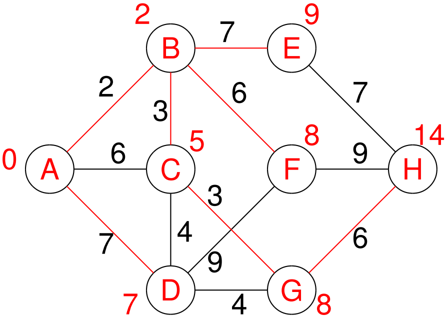


Pas 3)

Elegim un vèrtex *a* amb *etiqueta temporal mínima* (no necessàriament adjacent al vèrtex etiquetat més recentment) i convertim en *permanent* la seua etiqueta. Afegim a l'arbre T l'aresta que ha donat lloc al valor $E(a)$.



Un *camí de pes mínim* entre v_1 i v_2 és l'únic camí simple de l'arbre T que uneix $v_1 = A$ i $v_2 = H$; el seu pes (el *pes mínim*) és $E(v_2)$.



Un *camí de pes mínim* entre v_1 i v_2 és l'únic camí simple de l'arbre T que uneix $v_1 = A$ i $v_2 = H$; el seu pes (el *pes mínim*) és $E(v_2)$.