

PROBLEMES DE MATEMÀTICA DISCRETA

Tema 1. LÒGICA

1. Simbolitzeu lògicament les proposicions següents:

- (a) Ahir vam anar al cine i no vam estudiar.
- (b) Et vaig trucar per telèfon dimarts, però no eres a casa.
- (c) No tinc res
- (d) Si la carretera nacional està en obres, anirem per la comarcal, no per l'autopista.
- (e) No el compraré si tu no vols.
- (f) Ni Joan ni Pep vindran aquesta nit.
- (g) No havent-hi pressa, estem salvats.
- (h) Els animals, com les plantes, són essers vius.
- (i) Si has perdut el fitxer, aleshores, si no aconsegueixes recuperar les dades, tot el treball fet fins ara no servirà per a res.
- (j) Les proposicions p i q són equivalents si i només si l'expressió $p \leftrightarrow q$ és una tautologia.

2. Indiqueu quines de les següents expressions tenen sentit lògic i quines no. Aquelles que resulten ser fórmules lògiques correctes, expresseu-les fent servir el nombre mínim de parèntesis possible.

- | | |
|---|--|
| (a) $p \vee (p \wedge q) \wedge s$ | (d) $((\neg q \wedge p) \rightarrow (s \vee p)) \rightarrow q$ |
| (b) $(p \vee \neg q) \rightarrow r \vee p$ | (e) $[(((p \vee q) \vee r) \rightarrow p) \wedge (p \vee (r \wedge \neg q)))] \rightarrow r$ |
| (c) $p \rightarrow \neg r \rightarrow s \wedge p$ | (f) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r) \rightarrow q$ |

3. Feu la taula de veritat de les formes proposicionals següents, indicant si són tautologies, contradiccions o contingències.

- | | |
|---|---|
| (a) $\neg P \wedge \neg Q$ | (g) $\tau \rightarrow P$ |
| (b) $P \wedge Q \rightarrow R$ | (h) $\tau \rightarrow \phi$ |
| (c) $\neg(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ | (i) $\phi \rightarrow \tau$ |
| (d) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | (j) $P \wedge Q \rightarrow \phi \vee \tau$ |
| (e) $\neg P \wedge Q \rightarrow \neg Q \wedge R$ | |
| (f) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$ | |

4. Simplifiqueu les formes proposicionals següents:

(a) $(\neg P \wedge Q) \wedge P$

(d) $(\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee Q)) \rightarrow \neg P$

(b) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

(e) $(P \rightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge (\neg P \vee \neg R)$

(c) $\neg Q \wedge R \leftrightarrow Q$

5. Es diu que un sistema de premisses és *inconsistent* quan d'elles es dedueix una contradicció. Determineu si el següent sistema de premisses és inconsistent:

$$\text{P1: } \neg P \rightarrow Q \quad \text{P2: } R \rightarrow Q \quad \text{P3: } P \rightarrow R \quad \text{P4: } \neg Q$$

6. Demostreu que la conclusió es dedueix de les premisses en les següents deduccions:

(a) **P1:** $P \rightarrow Q$

(d) **P1:** $\neg(\neg P \vee Q)$

P2: $Q \rightarrow (\neg S \rightarrow R)$

P2: $\neg T \rightarrow \neg S$

P3: $P \wedge \neg R$

P2: $P \wedge \neg Q \rightarrow S$

C: S

P4: $\neg T \vee R$

C: R

(b) **P1:** $\neg P \rightarrow Q$

(e) **P1:** $R \rightarrow (S \rightarrow Q)$

P2: $R \rightarrow \neg Q$

P2: $\neg P \vee R$

P3: $R \vee S$

P3: S

P4: $\neg P$

C: $P \rightarrow Q$

C: $Q \wedge S$

(c) **P1:** $\neg R \rightarrow Q$

(f) **P1:** $R \rightarrow T$

P2: $T \rightarrow \neg Q$

P2: $T \rightarrow \neg S$

P3: $\neg S \rightarrow \neg Q$

P3: $(R \rightarrow \neg S) \rightarrow Q$

C: $T \vee \neg S \rightarrow R$

C: $P \rightarrow P \wedge Q$

7. Demostreu que la conclusió es dedueix de les premisses en la següent deducció:

P1: $\neg P \rightarrow Q \vee R$

P2: $\neg Q \rightarrow \neg P \wedge \neg S$

P2: $S \rightarrow \neg Q \vee R$

P4: $\neg P \wedge \neg R$

C: $\neg S$

Són necessàries totes les premisses? Justifiqueu la resposta.

8. Proveu que la següent implicació és una tautologia, fent servir els mètodes d'inferència lògica:

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow P) \implies \neg(R \wedge S)$$

9. Escriviu simbòlicament els següents enunciats i deduíu-ne en forma lògica la conclusió corresponent:

- (a) «Si no anem a Versalles, visitarem Venècia. Si anem a París, no visitarem Venècia. Si no anem a Itàlia, aleshores no visitarem Venècia. Per tant, si anem a París o no anem a Itàlia, visitarem Versalles.».
- (b) «Anirem al teatre o al cine d'estiu. Si plou, no anirem al cine d'estiu. No anem al teatre o plou. Per tant, no anirem al teatre si i només si anem al cine d'estiu.».
- (c) «Si ha embarrancat un vaixell i s'ha partit, hi haurà una pèrdua de carburant. Si hi ha una pèrdua de carburant i no es pot recollir, moriran molts peixos. Si no envien ajuda, es partirà el vaixell i no es podrà recollir el carburant. Ha embarrancat un vaixell i no han enviat ajuda. Per tant, moriran molts peixos.».

10. Es té el següent enunciat:

«Si el València CF no guanya la lliga, els aficionats del FC Barcelona ho celebraran i a l'entrenador del València CF no li renovaran el contracte. Si el València CF guanya la lliga, a València celebraran una gran festa. Els aficionats del FC Barcelona no ho celebraran.».

Demostreu directament i per reducció a l'absurd la següent conclusió:

«A València celebraran una gran festa.»

11. Demostreu que la conclusió es dedueix de les premisses en les següents deduccions:

- | | |
|--|---|
| (a) P1: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | (b) P1: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$ |
| P2: $\forall x(P(x) \vee R(x))$ | P2: $\forall x(P(x) \wedge S(x))$ |
| P3: $\forall xQ(x)$ | P3: $\neg(Q(a) \wedge S(a))$ |
| C: $\forall xR(x)$ | C: $P(a) \wedge R(a)$ |

12. Representeu formalment els següents arguments i deduíu en forma lògica les seues conclusions:

- (a) «Alguns gossos són de raça *setter*. Tots els gossos de raça *setter* saben caçar. Per tant, alguns gossos saben caçar.».
- (b) «Alguns atletes practiquen natació. Cap atleta no fuma. Per tant, alguns nadadors no fumen.».
- (c) «Tots els qui van a la platja volen estar morenos. No existeixen persones que vulguen estar morenes i no prenguen el sol. Pere no pren el sol. Per tant, existeixen persones que no van a la platja.».

- (d) «Tots els estafadors intenten estafar els altres. A tots els qui no són estafadors els molesten els enganys. Eva no intenta mai estafar els altres. Per tant, a Eva li molesten els enganys.».
- (e) «Cap espanyol no és ros. Tots els nòrdics són rossos. Per tant, cap espanyol no és nòrdic.».
- (f) «Tots els sospitosos del crim odiaven la víctima o treballaven amb ella. Cap dels sospitosos que treballaven amb la víctima no sabia que anaven a ascendir-la. La filla del cap, que és sospitosa del crim, sabia que anaven a ascendir la víctima. Per tant, la filla del cap odiava la víctima.».
- (g) «Tots els alumnes de Matemàtica Discreta saben Lògica. Tots els alumnes de Matemàtica Discreta que aproven l'assignatura saben Àlgebres de Boole. Rosanna és una alumna de Matemàtica Discreta i no sap Àlgebres de Boole. Agnès sap Àlgebres de Boole, però no Lògica. Per tant, Rosanna no aprova l'assignatura i Agnès no és alumna de Matemàtica Discreta.».
- (h) «A una assemblea de veïns, totes les persones de més de quaranta anys són homes sense permís de conduir o són dones. Tots els assistents tenen més de quaranta anys i permís de conduir. Per tant, a l'assemblea només hi ha dones.».
- (i) «Totes les postres són bones. Aquest plat és de postres. Cap cosa bona no és desagradable. Per tant, aquest plat no és desagradable.».

13. Demostreu per inducció les següents afirmacions:

- (a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- (b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (c) $2n + 1 \leq 2^n$, per a qualsevol nombre natural $n \geq 3$
- (d) $11^n - 1$ és un múltiple de 5, per a qualsevol natural n