ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Problemes proposats: RESOLUCIÓ DE RECURRÈNCIES

1. Resol, directament, la recurrència lineal corresponent per a calcular la forma explícita de la successió definida per

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3} \quad , \quad n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

2. Resol el problema de les torres d'Hanoi: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$, a partir de l'equació característica corresponent i verifica que trobes el mateix resultat que per resolució directa.

3. Resol la recurrència lineal (no homogènia) de primer ordre: $a_{n+1} = a_n + 3n$, a partir de l'equació característica. Comprova que trobes el mateix resultat que per resolució directa.

4. Resol la recurrència lineal (no homogènia) de segon ordre: $a_{n+2} = 2a_n + 3$, a partir de l'equació característica.

5. Considera la successió definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 3 \end{cases}$$

   a) Troba el valor de a_5

   b) Resol la recurrència corresponent i troba una expressió explícita per a a_n

6. Resol la recurrència lineal homogènia de segon ordre definida per

$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad , \quad \text{amb} \quad a_1 = -6 \quad \text{i} \quad a_2 = 20.$$

7. a) Troba la solució general de la recurrència lineal homogènia de segon ordre definida mitjançant

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+2} + 9a_n}{6}$$

   b) Determina els valors de les constants per a $a_1 = -3$ i $a_2 = 9$.

8. Considera la successió definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} = -a_{n+1} - \dfrac{1}{4}a_n \\ a_1 = 1 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

   a) Troba el valor de a_5

   b) Resol la recurrència per a expressar a_n en forma explícita.

   c) Calcula el límit de la successió $\{a_n\}$

9. Determina la solució general de la recurrència de segon orden definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \\ a_1 = 4 \quad , \quad a_2 = 20 \end{cases}$$

10. Determina la solució general de la recurrència de segon ordre definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_n \\ a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4 \end{cases}$$

11. Determina la forma explícita de la successió definida mitjançant

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

12. Considera la succesió recurrent definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) Resol la recurrència i expressa a_n explícitament.

b) Compara els ordres de magnitud de $\{a_n\}$ i de $\{b_n\} = \{\log(n)\}$. Justifica la teua resposta.

c) Torna a resoldre els apartats a) i b) considerant el problema no homogeni, amb segon membre 2^n.

13. Considera la successió definida per

$$\begin{cases} 2a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) Escriu els cinc primers termes de la successió.

b) Troba l'expressió explícita de a_n resolent la recurrència corresponent.

c) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $6n$.

14. Determina la solució particular de la recurrència de segon ordre definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1 \end{cases}$$

15. Considera la recurrència lineal homogènia de segon ordre:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$$

a) Resol-la a partir de l'equació característica

b) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $t_n = 2$

c) Troba la solució particular de la recurrència lineal no homogènia (apartat b) amb $a_1 = a_2 = 1$

d) Determina el ordre de magnitud de la solució obtinguda en el apartat anterior.

16. Considera la recurrència lineal homogènia de segon ordre:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \ , \ \text{amb } a_1 = 2 \ , \ a_2 = 8$$

a) Resol-la a partir de l'equació característica

b) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $t_n = n - n^2$

c) Troba la solució particular de la recurrència lineal no homogènia (apartat b) amb $a_1 = 2$, $a_2 = 8$

d) Determina el ordre de magnitud de la solució obtinguda en el apartat anterior.

17. Ens regalen tres segells i decidim començar una col·lecció. L'any següent la incrementem amb tres segells més. Si cada any comprem un nombre de segells igual al doble dels què comprem l'any anterior, al cap de quants anys haurem superat el milió de segells?

18. Considera a_n com el nombre d'instruccions d'un determinat algorisme que treballa sobre n dades d'entrada. El problema que genera l'algorisme es resol mitjançant dues instruccions per a una única entrada. Si existeixen $n + 1$ dades, el problema es redueix a altre amb n dades, després d'executar n^2 instruccions. Si es coneix que la complexitat de l'algorsme és cúbica; és a dir, que $a_n \in \Theta(n^3)$, troba una expressió explícita per a a_n sense fer-ne ús del mètode de l'equació característica.

19. Troba les solucions generales de les recurrències d'ordre superior a dos:

a) $t_{n+3} = t_{n+2} + 2t_{n+1} - 2t_n$ (homogènia)

b) $t_{n+4} = 4t_{n+3} + 3t_{n+2} + 4t_{n+1} - 4t_n$ (homogènia)

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Exercicis addicionals: RESOLUCIÓ DE RECURRÈNCIES

1. La recurrència donada per: $a_n = 2a_{n/2} + n$, $a_1 = 1$, apareix en aplicar un algorisme conegut com "dividir per a vèncer" a un problema d'ordenació (*quicksort*).

   a) Considera el canvi de variable $n = 2^k$ per tal de reduir el problema a una recurrència lineal (no homogènia) de primer ordre

   b) Resol el problema de forma directa, sense fer-ne ús de l'equació característica

   c) Resol ara el problema a partir de l'equació característica corresponent. Verifica que els dos resultats coincideixen.

2. Considera la recurrència lineal homogènia de segon ordre:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$$

   a) Resol-la a partir de l'equació característica

   b) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $t_n = 3^n$.

   c) Troba la solució particular de la recurrència lineal no homogènia (apartat b) amb $a_1 = a_2 = 1$

*3. Troba les solucions generales de les recurrències d'ordre superior a dos:

   a) $t_{n+3} = t_{n+2} + 2t_{n+1} - 2t_n + 2^n$ (no homogènia).

   b) $t_{n+4} - 4t_{n+3} - 3t_{n+2} - 4t_{n+1} + 4t_n = 3n^2 - 5$ (no homogènia).

4. Amb els valors inicials $a_1 = a > 0$ i $a_2 = b > a$, prova que la successió $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right)$ és convergent i que el seu límit és $\frac{1}{3}\left(a + b\right)$.

*5. Suposem que disposem en una reserva natural d'una població composta per depredadors i preses. Ambdues poblacions van a reproduir-se i els primers es van a alimentar dels segons. Si d_n i p_n simbolitzen les poblacions respectives de depredadors i de preses després de n anys, en la reserva es verifica la llei de recurrència

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_{n+1} &=& \alpha\cdot d_n + \beta\cdot p_n \\ p_{n+1} &=& \mu\cdot p_n - \delta\cdot d_n \end{array}\right. \qquad \alpha > 0\ ,\ \beta > 0\ ,\ \mu > 0\ ,\ \delta > 0$$

   a) Comprova que les poblacions considerades satisfan les recurrències de segon ordre

$$\begin{array}{rcl} d_{n+2} - (\alpha+\mu)\,d_{n+1} + (\alpha\mu + \beta\delta)\,d_n &=& 0 \\ p_{n+2} - (\alpha+\mu)\,p_{n+1} + (\alpha\mu + \beta\delta)\,p_n &=& 0 \end{array}$$

   b) Per als valors $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{4}{3}$, $\delta = \frac{1}{3}$ resol l'equació i verifica que ambdues successions convergeixen.

   c) Per a valors inicials de $p_0 = 300$ i $d_0 = 30$, quin és el valor límit en què s'estabilitzaria cada una de les dues poblacions?

   d) Per als valors $\alpha = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{1}{8}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{3}$ comprova que les dues poblacions s'extingiran, independentment dels valors inicials que tinguen.