# *Anàlisi Matemàtica*

UT5 - Sèries Numèriques

AMA

# *Contingut*

## Conceptes generals

- Sumes parcials. Convergència i divergència
- La sèrie harmònica. Generalització

## Sèries numèriques de suma exacta

- Geomètriques (Sumes finites i infinites)
- Telescòpiques i reductibles a telescòpiques

## Criteris de Convergència

- Condició del residu
- Criteri de Leibniz per a sèries alternades

## Obtenció d'algunes sumes aproximades

# *Objectius*

## Conceptes generals (1S)

- Identificar la successió de sumes parcials associada a una sèrie
- Distingir entre sèries convergents i divergents

## Sèries numèriques de suma exacta (1S)

- Trobar la suma parcial de geomètriques
- Sumar geomètriques i telescòpiques

## Obtenció de sumes aproximades (1S)

- Conéixer el criteri de Leibniz per a sèries alternades
- Aproximar la suma d’algunes sèries

# *Conceptes generals*

**Problema:** Donada la successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} + a_{101} + \cdots = ? \qquad \text{(suma de \textbf{tots} els seus termes)}$$

La solució no és evident: $s = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ?$

$$s = \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \big(1 + (-1)\big) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$s = 1 + \big((-1) + 1\big) + \big((-1) + 1\big) + \big((-1) + 1\big) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

$$s - 1 = (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots = -s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$$

Associativitat, commutabilitat, etc... no són (en general) vàlides

- Quan podem sumar?
- Com sumem quan és possible?

$1 + 2 + 3 + \cdots = ?$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = ?$$

## Sumes parcials. Convergència i divergència:

A partir de la successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definim la de *sumes parcials*

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Recurrentment, $\begin{cases} s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \\ s_1 = a_1 \end{cases}$

Definim la *sèrie numèrica de terme general* $a_n$ per

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n = \lim s_n = \sum a_n \text{ (notació simplificada)}$$

La serie convergeix/divergeix quan ho fa la successió $\{s_n\}$

La sèrie suma $s = \lim s_n$ (quan existeix $s$ i és real)

Casos de divergència interessants: $\sum_{n\geq 1} a_n = \pm\infty$, segons siga $s_n \to \pm\infty$

**Exemple:** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} = 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

$\{s_n\}=\{1,0,1,0,1,0,1,0,...\}$ (divergent)

La sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ és divergent (oscil.lant, no parlem de suma)

**Exemple:** $\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1) = 1+3+5+7+9+11+\cdots$

$\{s_n\}=\{1,4,9,16,25,36,...\}=\{n^2\}$ (divergent a $+\infty$)

La sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)$ divergeix a $+\infty$ (podem dir que suma $+\infty$)

**Exemple:** $\sum_{n=1}^{+\infty}0 = 0+0+0+0+\cdots$

$\{s_n\}=\{0,0,0,0,0,...\}=\{0\}$ (convergeix a 0)

La sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty}0$ convergeix i la seua suma és 0

**Exemple:** $\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots$

$$s_1 = \log\left(\frac{2}{1}\right) = \log(2) \;\; , \;\; s_2 = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\right) = \log(3) \;\; , \;\; ...$$

$$s_n = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \text{ divergeix a } +\infty$$

**Exemple:** $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$

$$\{s_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \to 1$$

La sèrie $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ convergeix i la seua suma és 1

**Propietats:**

- $\sum_{n\geq p} a_n$ té el mateix caràcter que $\sum_{n\geq 1} a_n$

  (encara que diferent suma)

- $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ ; $\sum (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \left(\sum a_n\right)$ , $\alpha \neq 0$

- En sèries convergents podem agrupar termes

  (posar claus, no reordenar)

- $\sum |a_n|$ convergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ convergent

## Sèrie harmónica (divergent)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_n \text{ és creixent } \left(s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} > 0\right) \\ s_n \text{ no està acotada superiorment} \end{array}\right\} \Rightarrow \{s_n\} \to +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergeix (a } +\infty)$$

Justificació: $\lim \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)} = 1 \Rightarrow s_n \approx \log(n) \Rightarrow \{s_n\} \to +\infty$
(UT5)

## Sèrie harmònica generalitzada ($\alpha > 0$)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{divergeix si } \alpha \leq 1 \\ \text{convergeix si } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[7]{n^4}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{4/7}} \;;\; \alpha = \frac{4}{7} < 1 \;;\; \text{divergent}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[4]{n^7}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{7/4}} \;;\; \alpha = \frac{7}{4} > 1 \;;\; \text{convergent}$$

# *Sèries numèriques de suma exacta*

Sumarem (en forma exacta) dues tipus de sèries:

(A més de les que siguen reductibles a elles aplicant propietats generals)

- Geomètriques: $\sum_{n\geq p} a_n$ quan $\{a_n\}$ és una progressió geomètrica

  Estudiarem $\sum_{n\geq p} r^n = r^p + r^{p+1} + \cdots + r^{p+k} + \cdots = r^p \cdot \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^k + \cdots\right)$

- Telescòpiques: $\sum_{n\geq p} a_n$ si podem expressar $a_n$ com $a_n = \pm(b_{n+1} - b_n)$

**Sèrie geomètrica:** $\sum_{n\geq p} r^n = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^{p+k} + \cdots \quad (r = \text{raó})$

$$s_n = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots + r^{p+n-1}$$

$$r \cdot s_n = r^{p+1} + r^{p+2} + r^{p+3} + \cdots + r^{p+n}$$

Restant, $\left.\begin{array}{r} s_n - r\cdot s_n = r^p - r^{p+n} \\ (1-r)\cdot s_n = r^p - r^{p+n} \end{array}\right\} \Rightarrow s_n = \begin{cases} \dfrac{r^p - r^{p+n}}{1-r}, \text{ si } r \neq 1 \\ n, \text{ si } r = 1 \end{cases}$

Prenent límits, $\lim s_n = s = \dfrac{r^p}{1-r}$ si i només si $|r| < 1$

En consequència,

$$\boxed{\text{La sèrie convergeix si i només si } |r| < 1 \text{ i } s = \frac{r^p}{1-r}}$$

**Exemple :** $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{6^n}{2\cdot 5^{n+1}}=\frac{1}{10}\sum_{n\geq 3}\left(\frac{6}{5}\right)^n$, geomètrica amb $r=\frac{6}{5}>1$ (divergeix)

**Exemple :** $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-2)^{n+1}}{5\cdot 3^{n-1}} = -\frac{6}{5}\sum_{n\geq 2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, geomètrica amb $r=-\frac{2}{3}$ (convergeix)

$$s=-\frac{6}{5}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{8}{25}$$

**Exemple :** $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{2^{3n+1}}{5\cdot 3^{2n-1}} = \frac{6}{5}\sum_{n\geq 3}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n$, geomètrica amb $r=\frac{8}{9}$ (convergeix)

$$s=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^3}{1-\frac{8}{9}}=\frac{1024}{135}$$

**Exercici :** Classificar (i sumar, en el seu cas) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cdot (\alpha+1)^n}{6^{n+1}}$ , $(\alpha \in \mathbb{R})$

Podem reescriure la sèrie en la forma $\frac{1}{6}\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{(\alpha+1)}{6}\right)^n$

En conseqüència, és geomètrica de raó $r = -\frac{(\alpha+1)}{6}$

D'ací, la sèrie convergeix si i només si $\frac{|\alpha+1|}{6} < 1 \Leftrightarrow$ $\alpha \in \left]-7,5\right[$ i suma

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cdot (\alpha+1)^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6}\left(\frac{-\frac{(\alpha+1)}{6}}{1+\frac{(\alpha+1)}{6}}\right) = -\frac{(\alpha+1)}{6(\alpha+7)}$$

Exemple: Corba de Koch (floc de neu)

**Sèries Telescòpiques:** $\sum_{n\geq p} a_n$ amb $a_n = b_{n+1} - b_n$ ó $a_n = b_n - b_{n+1}$

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n = \pm(b_{n+1} - b_p)$$

$$s = \lim s_n = \pm \lim(b_{n+1} - b_p)$$

**Exemple:** $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ convergeix i suma $\frac{1}{2}$

$$s_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right\} \to \frac{1}{2} = s$$

**Exemple:** $\sum_{n\geq 4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ convergeix i suma $\frac{1}{5}$

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{n+2}\right\} \to \frac{1}{5} = s$$

# Sèries reductibles a Telescòpiques

Algunes sèries del tipus $\sum_{n\geq p}\frac{P(n)}{Q(n)}$ amb $grad(Q(n))\geq grad(P(n))+2$

poden transformar-se en telescòpiques, prèvia descomposició en fraccions simples

**Exemple:** $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{4n^2-1}\right)$ convergeix i suma 2

$$\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$$

$$s_n=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)=2-\frac{2}{2n+1}$$

$$\{s_n\}=\left\{2-\frac{2}{2n+1}\right\}\to 2=s$$

# Criteris de convergència

**1) Condició del residu:** $\sum a_n$ convergent $\Rightarrow$ $\lim a_n = 0$

$\boxed{\lim a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum a_n \text{ divergent}}$. La sèrie $\sum \dfrac{3^n}{2^n+1}$ divergeix ja que $\lim \dfrac{3^n}{2^n+1} = +\infty$

$\lim a_n = 0 \;\not\Rightarrow\; \sum a_n$ convergent. $\left\{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right\} \to 0$ i $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty$ (divergeix)

$\lim a_n = 0 \;\not\Rightarrow\; \sum a_n$ divergent. $\left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right\} \to 0$ i $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ (convergeix)

**2) Sèries harmòniques:** $\displaystyle\sum_{n\geq p} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{divergeix si } \alpha \leq 1 \\ \text{convergeix si } \alpha > 1 \end{cases}$

**3) Sèries geomètriques:** $\displaystyle\sum_{n\geq p} r^n \begin{cases} \text{convergeix si } |r| < 1 \\ \text{divergeix si } |r| \geq 1 \end{cases}$

## 4) Criteri de Leibniz per a sèries alternades:

Una *serie* és *alternada* si té la forma $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ o $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n}\cdot a_n$ $\left(a_n>0\right)$

$$(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots) \text{ o } (-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6+\cdots)$$

$$\sum(-1)^{n+1}\cdot a_n=-\sum(-1)^{n}\cdot a_n$$

**Criteri de Leibniz :**

$\{a_n\}$ decreix i tendeix a zero $\Rightarrow \sum(-1)^{n+1}\cdot a_n$ convergeix

$\left(\text{A més a més, } 0<s_2<s_4<s_6<s_8<\cdots<s<\cdots<s_7<s_5<s_3<s_1\right)$

**Exemples :** $\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergeix $\left(\text{alternada, } a_n=\dfrac{1}{n}\right)$

$\sum\dfrac{(-1)^{n}}{n^2}$ convergeix $\left(\text{alternada, } a_n=\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\sum\dfrac{(-1)^{n}\cdot\sqrt{n}}{2n+5}$ convergeix $\left(\text{alternada, } a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2n+5}\right)$

# *Obtenció d'algunes sumes aproximades*

Si $\sum_{n\geq 1} A_n$ convergeix i suma $s = \underbrace{A_1 + A_2 + \cdots + A_N}_{s_N} + \underbrace{A_{N+1} + \cdots}_{s-s_N \text{ (cua)}}$

***Aproximació :*** $s \cong s_N$ (per a $N$ "prou gran")

***Cota d'error :***

$$E_N = \left|s - s_N\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} A_n - \sum_{n=1}^{N} A_n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} A_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left|A_n\right| \leq ?$$

Cas 1:

$A_n = (-1)^{n+1} a_n$ en les condicions de Leibniz $\quad E_N \leq a_{N+1}$

Cas 2:

$\left|A_n\right| \leq c \cdot K^n,\ K < 1$ (geomètrica convergent) $\quad E_N \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} c \cdot K^n = \dfrac{c \cdot K^{N+1}}{1-K}$

**Exemple:** Aproximar $s = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ amb dos decimals exactes, almenys

La sèrie és alternada, amb $A_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{N+1} < 10^{-3} \Rightarrow N \geq 1000$$

$s = \log(2) = 0.69314718\ldots$

$$s \cong s_{1000} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1000} = 0.\underline{69}264743\ldots$$

**Exemple:** Aproximar $s = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$ amb tres decimals exactes, almenys

La sèrie és alternada, amb $A_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n \cdot 2^n}$

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)\,2^{N+1}} < 10^{-4} \Rightarrow N \geq 9$$

$$s \cong s_9 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{9 \cdot 2^9} = 0.\underline{405}5323\ldots$$

$s = \log(3/2) = 0.4054651081...$

**Exemple:** Aproximar $s \overset{?}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(2n+1)5^n}$ a partir de $s_4$ i amb sis decimals exactes

$$|A_n| = \frac{n}{(2n+1)5^n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow \quad E_N = |s - s_N| < \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{8\cdot 5^N}$$

- $E_4 < \frac{1}{8\cdot 5^4} = 0.0002 \Rightarrow \quad s \cong s_4 = \sum_{n=1}^{4}\frac{n}{(2n+1)5^n} = 0.\underline{086}8\ldots$ (tres decimals exactes)
- $E_N < \frac{1}{8\cdot 5^N} < 10^{-7} \Rightarrow n \geq 9$ i $\quad s \cong s_9 = \sum_{n=1}^{9}\frac{n}{(2n+1)5^n} = 0.\underline{086988}76\ldots$

**Exemple:** Aproximar $s \overset{?}{=} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ amb cinc decimals exactes, almenys

$$E_N = \cdots = \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)(N+3)}+\cdots\right) < \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\cdots\right) < \frac{2}{(N+1)!}$$

$$E_N < \frac{2}{(N+1)!} < 10^{-6} \Rightarrow n \geq 9 \text{ i } \quad s \cong s_9 = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!} = 1.\underline{71828}1525\ldots$$

$$s = e - 1 = 1.\underline{718281}828\ldots$$