ERRORES EN LAS MEDIDAS. MEDIDAS DIRECTAS

1 INTRODUCCION. ERRORES E INCERTIDUMBRES ABSOLUTOS Y RELATIVOS

Siempre que realizamos una medida de alguna magnitud física (mesurando), dicha medida está sujeta a un error que dependerá de muchos factores, pero **el error es inherente a cualquier medida de una magnitud física**. La diferencia entre la medida de una magnitud, x, y el valor "cierto" de dicha magnitud, x_{cierto}, es lo que llamamos **error absoluto** (normalmente abreviado como error), que puede ser también expresado como **error relativo** si lo comparamos con el valor "cierto" de esa magnitud:

$$Error\ absoluto(x) = |x_{cierto} - x| \qquad\qquad Error\ relativo(x) = \frac{Error\ absoluto(x)}{x_{cierto}}$$

Como desgraciadamente el valor "cierto" de una magnitud es normalmente desconocido, los errores de una medida son difícilmente cuantificables, y deberemos "estimar" el valor cierto mediante mediciones.

Lo que es evidente es que, al llevar a cabo una medida de una magnitud física, la sola expresión del valor de la medida (x) no da idea de su validez, por lo que es necesario acompañar la medida de un segundo valor (Δx ó u(x)) que nos dice que **el valor "cierto"** de esa magnitud **estará comprendido**, con una cierta **probabilidad**, en el intervalo **[x-Δx, x+Δx]**. Obviamente, si el valor de Δx se incrementa, también será más probable encontrar el valor "cierto" en el intervalo, y viceversa. El valor Δx (también escrito como u(x)) se conoce como **incertidumbre absoluta** de una medida, y la forma correcta de escribir una medida, junto con su error es: **x±Δx ó x(u(x))**

Y a partir de ella puede calcularse también la **incertidumbre relativa (ε_r(x) o u_r(x))**, como el cociente entre la incertidumbre absoluta y el valor medido:

$$\varepsilon_r(x) = u_r(x) = \frac{\Delta x}{x} = \frac{u(x)}{x}$$

La utilidad fundamental de los valores relativos es la comparación de medidas entre sí.

***Ejemplo**: dos medidas de longitud con una incertidumbre absoluta de 5 cm no son igualmente exactas si las longitudes medidas son de 50 cm y 50 Km, respectivamente. Las incertidumbres relativas en ambos casos, expresadas en tanto por cien, son:*

$$\varepsilon_r(1) = \frac{5}{50} = 0{,}1 = 10\% \qquad\qquad \varepsilon_r(2) = \frac{5}{50 \cdot 10^5} = 10^{-6} = 0{,}0001\%$$

Obviamente, la segunda medida es mucho más exacta que la primera.

Es habitual utilizar las palabras **error e incertidumbre de manera indistinta** refiriéndose a la incertidumbre absoluta de una medida. Si queremos referirnos a los valores relativos, entonces es necesario añadir la palabra relativo.

Existen **dos convenciones** o reglas para escribir correctamente una medida y su error. Estas reglas deben ser respetadas siempre que demos el resultado de una medida:

a) El **error de la medida será redondeado** de forma que tenga, **como máximo, dos cifras significativas**. También puede escribirse con una única cifra significativa.

   Nota: Son cifras significativas:

   i. Cualquier cifra distinta de cero.
   ii. Los ceros situados entre dos cifras distintas de cero.
   iii. Para cualquier valor >1, los ceros situados a la derecha de la coma son cifras significativas.

b) La **última cifra significativa de la medida no debe ser de orden menor que la del error.** Es decir, la medida no puede ser escrita con mayor precisión que el error. En primer lugar debemos redondear el error, y luego redondear la medida de acuerdo con el orden decimal del error.

Ejemplos:

Medidas incorrectas	***Medidas correctas***
48,721 ± 0,32 V	*48,72 ± 0,32 V = 48,72(0,32) V*
4,6 ± 0,0182 V	*4,6 ± 0,018 V = 4,6(0,018) V*
563,1 ± 30 cm	*563 ± 30 cm = 563(30) cm*
$872\cdot10^{-6} \pm 0{,}8656\cdot10^{-4}$ *N*	$8{,}72\cdot10^{-4} \pm 0{,}87\cdot10^{-4}$ *N* = $(8{,}72 \pm 0{,}87)\cdot10^{-4}$ *N*
	= $8{,}72\cdot10^{-4}(0{,}87\cdot10^{-4})$ *N* = $8{,}72(0{,}87)\cdot10^{-4}$ *N*
$4{,}67825\cdot10^{-8} \pm 4{,}61\cdot10^{-10}$ *A*	$4{,}678\cdot10^{-8} \pm 0{,}046\cdot10^{-8}$ *A*=$(4{,}678 \pm 0{,}046)\cdot10^{-8}$ *A*
	= $4{,}678\cdot10^{-8}(0{,}046\cdot10^{-8})$ *A* = $4{,}678(0{,}046)\cdot10^{-8}$ *A*
0,23±3,0 ºC	*0±3 ºC = 0(3) ºC*

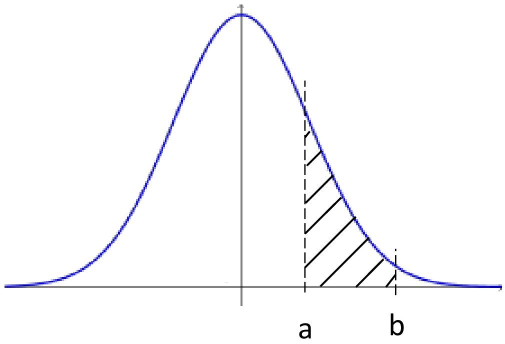
La elección de escribir el error con una o dos cifras significativas es, en cierta medida, arbitraria, dependiendo del error introducido. Si, por ejemplo, tenemos un error de 0,89 m y lo redondeamos a 0,9, la diferencia introducida es ligeramente superior al 1 %, valor que podría justificar el redondeo y expresar el error de una manera más sencilla; pero si un error de 1,4 m lo redondeamos a 1 m, la diferencia es cercana a un 40 %, algo difícilmente justificable. Como norma general, diferencias del 1 ó 2 % parecen fácilmente justificables, pero en todo caso, quien hace las medidas debe decidir el número de cifras significativas, intentando aunar el rigor con la sencillez en la expresión.

2 ALGO DE ESTADISTICA

La relación entre incertidumbre o error y probabilidad puede entenderse mejor si introducimos algunas ideas sobre Estadística.

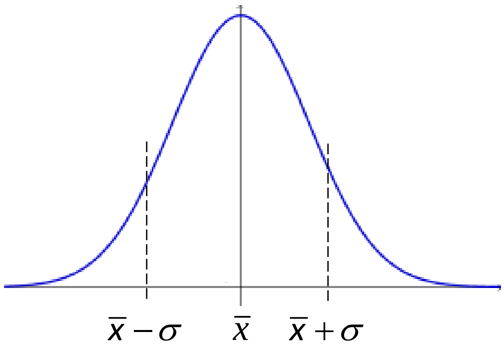
La Estadística demuestra que aquellos **procesos que dependen de multitud de factores** independientes entre sí, como ocurre en la mayoría de medidas que llevamos a cabo en el laboratorio, o también en muchos procesos sociales, demográficos y económicos, las poblaciones estudiadas presentan un **comportamiento estadísticamente "normal"**, que se define a través de una función de densidad de probabilidad, dada por la famosa **campana de**

Gauss, de forma simétrica, y cuya ecuación es $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}}$. Esto significa que la probabilidad de encontrar un valor de la variable estudiada en un intervalo entre dos valores a y b es igual al área encerrada entre la campana de Gauss y el eje X, entre los valores a y b:



$$p(a\leq x\leq b)=\int_a^b f(x)dx$$

Esta distribución se caracteriza por dos parámetros:

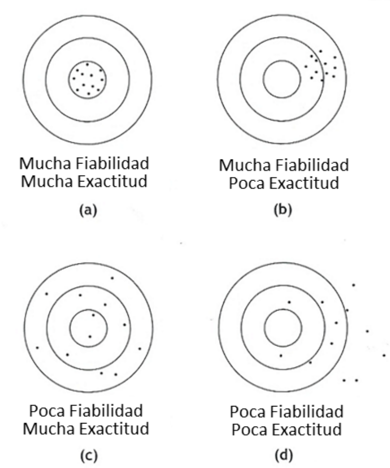


- El **valor medio (** $\bar{x}$ **)** que es, además, **el valor más probable**, y nos da idea de donde está situada la curva en el eje X.
- **σ, llamada desviación estándar**, y que tiene la propiedad de que, si tomamos el intervalo $[\bar{x}-\sigma,\bar{x}+\sigma]$, entonces la **probabilidad de encontrar** aleatoriamente **un valor de x en ese intervalo, es del 68%**. Nos da idea de cómo de abierta o cerrada es la curva, y por tanto, de si los valores más probables están muy o poco dispersos alrededor del valor medio.

Si ampliamos el intervalo a $[\bar{x}-2\sigma,\bar{x}+2\sigma]$, entonces la probabilidad de encontrar aleatoriamente un valor de x en el intervalo es del 95%, y si seguimos ampliando el intervalo hasta $[\bar{x}-3\sigma,\bar{x}+3\sigma]$, entonces es casi seguro que el valor de x caerá dentro del intervalo (probabilidad del 99,7%).

3 FIABILIDAD Y EXACTITUD. ERRORES SISTEMATICOS Y ACCIDENTALES

Al hacer una medida, lógicamente, nuestra intención es obtener una medida lo más parecida posible al valor "cierto", y además que al repetir esa medida varias veces, los resultados tengan poca variabilidad. Es decir, debemos considerar dos características que debe tener cualquier sistema de medida:

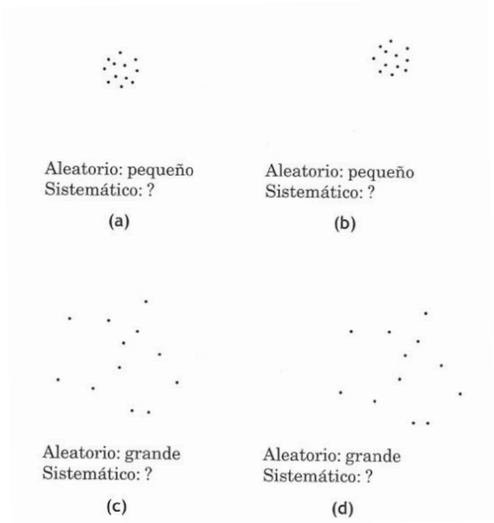


- **Exactitud** (Accuracy or validity): es la propiedad por la que **el valor medido está muy próximo al valor "cierto"**.

- **Fiabilidad, Repetitividad o Precisión** (Precision or Reliability): es la característica por la que **al medir la misma magnitud varias veces** y en las mismas condiciones, nos **conduce siempre a valores similares**.

Exactitud y fiabilidad se asocian a dos tipos de errores:

- **Errores aleatorios ó accidentales**: Son errores que se producen de manera aleatoria, y que producen **errores tanto por exceso como por defecto**, y van **asociados a una falta de fiabilidad**. Por ejemplo, la lectura que hacemos en una regla al interpolar la posición leída entre dos marcas de la regla, o el tiempo de reacción de una persona al medir con un cronómetro. Como los errores se dan aleatoriamente tanto por exceso como por defecto, la **realización de varias medidas** de la misma magnitud y su posterior tratamiento estadístico, **permite minimizarlos**.



- **Errores sistemáticos**: Son errores que **siempre se producen en el mismo sentido** (por exceso o por defecto), y su existencia va **asociada a una falta de exactitud en la medida**. Son debidos a un deficiente sistema de medida, que siempre introduce un error en la misma dirección, o a una mala calibración de los aparatos de medida. Son **difíciles de detectar**, y **la simple repetición de medidas no los elimina**. Sólo una reflexión acerca del **método empleado para medir**, o una **correcta calibración de los aparatos** de medida puede minimizarlos, aunque existen algunas técnicas para detectarlos y corregirlos. En la figura se puede ver la problemática de estos errores: al no conocer el valor "cierto", todo ocurre como si en la figura anterior hubiéramos eliminado la diana.

4 MEDIDAS DIRECTAS E INDIRECTAS

Una magnitud puede medirse, básicamente, de dos maneras distintas:

- **Medidas Directas**: Son aquellas medidas en las que tomamos las medidas de la magnitud buscada de manera directa, **mediante un instrumento de medida**. Ejemplos de medidas directas son la medición de una longitud con una cinta métrica, un tiempo con un cronómetro, o una resistencia con un óhmetro.

- **Medidas Indirectas**: Son aquellas que se obtienen mediante la **aplicación de una ley física o ecuación**, a partir de magnitudes conocidas o que se han medido directamente. Un ejemplo de este tipo de medidas sería el cálculo del volumen de una esfera a partir de su radio; el radio se mide de manera directa mediante una cinta métrica, y el volumen se calcula mediante la ecuación $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

5 ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS

Cuando estamos utilizando un aparato de medida para hacer medidas directas de una magnitud, hemos visto que la **repetición de varias medidas minimiza los errores accidentales**, pero como veremos, **en ocasiones será suficiente una única medida**.

a) Repetición de varias medidas

Idealmente, deberíamos hacer infinitas medidas de la misma magnitud, y de ese modo, aceptando que la magnitud que estamos midiendo tiene un comportamiento normal (en términos estadísticos), tendríamos completamente definida su densidad de probabilidad, y por tanto su valor medio o más probable ($\overline{x}$), y su desviación estándar (σ). Y considerando un intervalo de amplitud σ, 2σ, o 3σ alrededor de su valor medio, tendríamos probabilidad del 68, 95 ó 99,7% de que, al hacer una medida, su valor estuviera dentro del intervalo.

Pero obviamente, hacer infinitas medidas de una magnitud no es posible, y en su lugar **haremos sólo unas pocas medidas** (N, una muestra de la población total) y a partir de ellas **"estimaremos" un valor para $\overline{x}$ y otro para σ**. El número de medidas necesarias (N) lo discutiremos más adelante.

Para $\overline{x}$ se toma **el valor medio** de los valores medidos (x_1, x_2,..., x_N):

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1...N} x_i}{N}$$

Este valor se puede calcular en ***Excel mediante la función PROMEDIO***

Y para **σ** se utiliza un valor que recoge el error debido a la dispersión de las medidas realizadas, y que se conoce como **incertidumbre (o error) tipo A**. Para calcularlo, primero calculamos la **desviación estándar** de la muestra (S_x):

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1...N} (x_i - \overline{x})^2}{(N-1)}}$$

Este valor se puede calcular en ***Excel mediante la función DESVEST.M***

La **desviación estándar** nos da idea de **la dispersión** de las medidas efectuadas, evitando que unas diferencias compensen a otras (término $(x_i - \overline{x})^2$). Además, el término N-1 del denominador, nos indica que no tiene sentido calcular este parámetro cuando hacemos una única medida del mesurando.

Y mediante la teoría de la propagación de errores, que explicaremos más adelante, se puede demostrar que **el error de la media** de las N medidas (x_i) tomadas es:

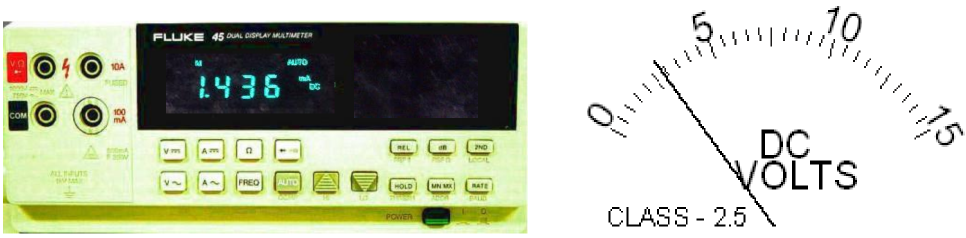
$$\Delta_A(x) = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1...N} (x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}}$$

Esta función no está directamente implementada en Excel, pero ***se puede calcular como la función*** $\frac{DESVEST.M}{\sqrt{N}}$

b) Realización de **una única medida**.

No obstante, en ocasiones es imposible, difícil, o simplemente innecesario realizar la repetición de varias medidas, y **una única medida puede ser suficiente** para hacer una estimación del mesurando. Ello ocurre cuando la medida puede **alterar la muestra** que medimos, cuando el **fabricante** del aparato de medida ya nos da **información del error** de la medida, o cuando el **tiempo empleado** en varias medidas no se justifica.

La forma más fiable de calcular el error en esta situación, el llamado **error (o incertidumbre) tipo B**, es a partir de las **hojas de características técnicas suministradas por el fabricante**, si las hay. Cuando **no disponemos de ellas** ni de otra fuente fiable, podemos hacerlo a partir de la **resolución del aparato (a)**, definido como la **mínima cantidad que el aparato de medida es capaz de medir**. Se corresponde con la **distancia más pequeña entre dos rayas** en la escala de un aparato **analógico**, o con **una unidad de la cifra menos significativa mostrada en la pantalla** de un aparato **digital**.



Aparato digital (izquierda) y analógico (derecha)

***Ejemplo**: La resolución del aparato digital mostrado (amperímetro) es a=0,001 mA.*

La resolución del aparato analógico mostrado en la imagen (voltímetro) es a=0,5 V

Una vez conocida la resolución, estadísticamente se puede demostrar que un valor realista para el error tipo B es:

$$\Delta_B(x) = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

De todos modos, es muy importante tener en cuenta que el **error tipo B** debe ser evaluado de **manera subjetiva** por el usuario. Es decir, que aunque el aparato de medida nos dé un valor claro e inequívoco de u_B, es posible que el sistema de medida aconseje tomar un valor mayor. Este sería el caso, por ejemplo, si tenemos que determinar la posición de un objeto móvil, en el que no es posible determinar su posición con la misma precisión que la dada por la cinta utilizada. O por ejemplo, sería el caso si queremos medir el radio de una esfera con una regla recta; tan sólo podremos medir el radio con una cierta aproximación, por lo que u_B será, seguramente, mayor que el dado por la regla de medida. Pero **cuando se dé un valor arbitrario** para este error, es necesario **justificarlo**.

***Ejemplo 1**: Queremos medir el radio de una esfera mediante una regla rígida cuya mínima distancia entre dos rayas de su escala es de 1 mm. En principio, el error tipo B de la regla sería* $u_B = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,29\,mm$ *. Pero al intentar medir el radio, vemos que es difícil colocar el origen de la regla cerca del centro de la esfera (de posición indefinida), y también es visualmente difícil determinar qué valor de la regla coincide con la superficie de la esfera. Por todo ello, estimamos difícil apreciar el radio con menos de 4 divisiones de la escala (4 mm), por lo que el valor que tomaríamos para el error tipo B sería:*

$$\Delta_B = \frac{4}{2\sqrt{3}} = 1,16 \approx 1,2\,mm.$$

Además, cuando se hace **una única medida** del mesurando, es muy importante disponer de alguna medida o procedimiento que nos permita **detectar simples equivocaciones**, tales como confundir un número en una medida, un **error de montaje** del equipo experimental, o una **avería** en cualquier aparato.

A modo de resumen, si llevamos a cabo **varias medidas**, el error del valor medido (**error típico**) será la **incertidumbre tipo A**, pero si realizamos **una única medida**, su error será la **incertidumbre tipo B**. **Una excepción** a esta norma se produce cuando tomamos varias medidas resultando todas ellas iguales, siendo entonces el error tipo A cero. Como el error de cualquier medida debe ser, como mínimo, el error dado por el aparato de medida (error tipo B), **el error típico cuando se hacen varias medidas, es el mayor del error tipo A ó del error tipo B.**

- Si tomamos **una única medida**: $\Delta x = \Delta_B x$
- Si tomamos **varias medidas**: $\Delta x = \max(\Delta_A x, \Delta_B x)$

Pero aún nos queda un importante detalle por aclarar:

6 ¿CUÁNTAS REPETICIONES DE UNA MEDIDA DEBEMOS HACER?

La respuesta a esta pregunta no es baladí. Acabamos de mencionar que con varias repeticiones de una medida podemos minimizar los errores accidentales, pero **¿cuántas medidas son suficientes?** Como norma general la Estadística recomienda **comenzar con tres medidas** de la magnitud que queremos conocer (x_1, x_2, x_3). A partir de estas medidas calculamos la **dispersión** (D) en % del conjunto de medidas, definida como:

$$D = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\overline{x}} 100$$

Y según el resultado de la dispersión, tendremos que:

- Si **D < 2%**, entonces las **tres medidas** tomadas **son suficientes**. Calculamos su media, su error tipo A, los redondeamos y damos el resultado.

- Si **D > 2%**, entonces debemos realizar **tres medidas adicionales** (6 en total) y **verificar** que la dispersión resultante del conjunto de seis medidas es **< 8%**.
- **Si la dispersión** del conjunto de seis medidas anterior es **> 8%**, entonces hay que realizar **9 medidas más** (hasta un total de 15), y **verificar** que la **dispersión** resultante es **< 12 %**.
- **Si la dispersión** del conjunto de medidas anterior es **> 12 %**, entonces tenemos que aumentar hasta un **mínimo de 50 medidas** y hacer un **tratamiento estadístico** de las medidas tomadas.

7 BIBLIOGRAFIA

- "Evaluación de datos de medición — Guía para la expresión de la incertidumbre de medida". Centro español de metrología, CEM, JCGM © 2008. www.cem.es (español), www.bipm.org. (inglés).
- "Introducción al análisis de errores", John R. Taylor, 2ª Ed. Ed. Reverté, Barcelona, 2014.
- "Glosario básico de términos estadísticos", Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), Lima, 2006.