# *Anàlisi Matemàtica*

UT1 - Nombres Reals

◊ AMA

# *Contingut*

## Nombres Reals

- Evolució dels conjunts numèrics $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$
- Nombres irracionals
- Propietats dels nombres reals
- Valor absolut. Propietats elementals

# *Objectius*

## Nombres reals (3S)

- Recordar els conjunts numèrics $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$
- Conéixer les propietats bàsiques de $\mathbb{R}$ (estructura, àlgebra i ordre)
- Manipular correctament el valor absolut i les desigualtats

# *Nombres Reals*

**Nombres naturals:**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Suma i producte. Ordenació "natural"

L'equació $2 + x = 1$ no és resoluble en $\mathbb{N}$

**Nombres enters:**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Ordenació "natural" induïda

L'equació $2x = 1$ no és resoluble en $\mathbb{Z}$

## Nombres racionals:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;, m \in \mathbb{Z},\; n \in \mathbb{N},\; \text{fracció irreduïble} \right\}$$

$$(\mathbb{Q}, \leq) \text{ definida per } \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow m \cdot q < n \cdot p$$

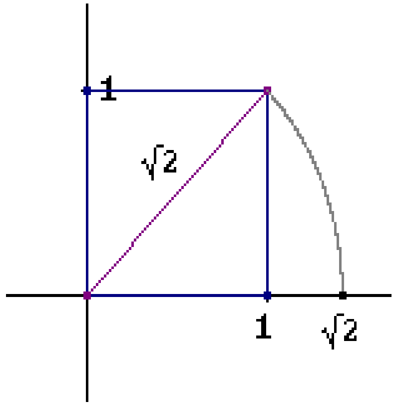
Representació decimal finita o periòdica: $\frac{12}{5} = 2.4$ ; $\frac{139}{60} = 2.31\overset{\frown}{6}$ ; $\frac{21}{19} = ?$

$$x = 2.456 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2456}{1000} = \frac{307}{125}$$

$$\frac{139}{60} = 2.31\overset{\frown}{6} \qquad x = 2.31\overset{\frown}{6} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} 100x = 231 + 0.\overset{\frown}{6} \\ 1000x = 2316 + 0.\overset{\frown}{6} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; x = \frac{2316 - 231}{900}$$

$$\frac{1812}{37} = 48.\overset{\frown}{972} \qquad x = 48.\overset{\frown}{972} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} x = 48 + 0.\overset{\frown}{972} \\ 1000x = 48972 + 0.\overset{\frown}{972} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; x = \frac{48972 - 48}{999}$$

## Nombres irracionals:




L'equació $x^2 = 2$ no és resoluble en $\mathbb{Q}$

La solució, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ; és *irracional*

(correspon a la diagonal del quadrat unitat)

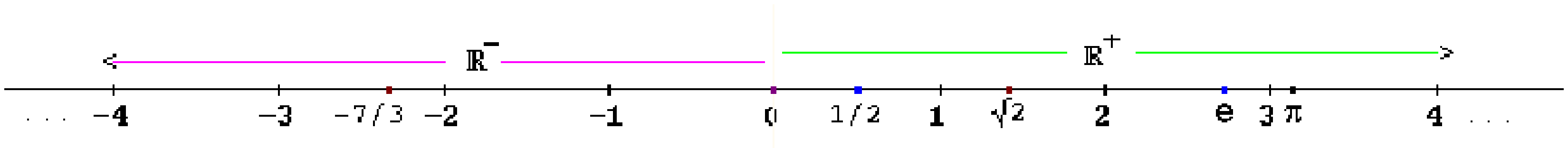
Representació decimal infinita, no periòdica

($\sqrt{2}$=1.41421356… ; $\pi$=3.14159265… ; e=2.71828182…)

## Nombres reals:

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ (racionals i irracionals)

$\mathbb{R}$ s'identifica amb el conjunt de punts de la recta real




$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ (negatius, zero i positius)

Les operacions i l'ordre dels nombres racionals s'estenen als irracionals (i als reals) fent ús de les aproximacions decimals.

**Propietats dels nombres reals:**

$(\mathbb{R},+,\times)$ cos abelià

$(\mathbb{R},\leq)$ relació d'ordre total, compatible amb + i $\times$

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \quad \text{(reflexiva, antisimètrica i transitiva)}$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, aleshores $x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ x > y$

Si $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, aleshores $x + y \in \mathbb{R}^{+} \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}^{+}$

$(\mathbb{R},+,\times,\leq)$ és complet

**Nota:** Definim la recta real ampliada afegint dos símbols més

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

**Propietats de les desigualtats:**

$$a \le b \;\Rightarrow\; a+c \le b+c$$

$$a \le b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a\cdot c \le b\cdot c & \text{si } c>0 \\ a\cdot c \ge b\cdot c & \text{si } c<0 \end{cases}$$

$$4x+13 \le 2x+7$$

$$4x-2x \le 7-13$$

$$2x \le -6$$

$$x \le \frac{-6}{2} = -3$$

$$x \in \left]-\infty,-3\right]$$

$$4x+13 \le 6x+7$$

$$4x-6x \le 7-13$$

$$-2x \le -6$$

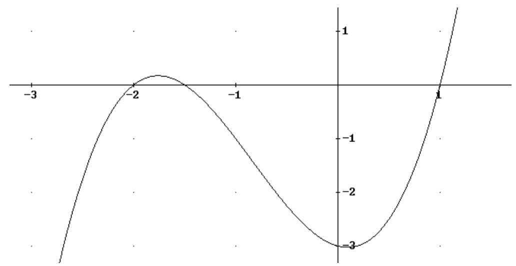
$$x \ge \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x \in \left[3,+\infty\right[$$

$$2x^3+5x^2-x-6 \le 0$$

$$2(x-1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \le 0$$

$$x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[\frac{-3}{2},1\right]$$



**Valor absolut en $\mathbb{R}$:**

Si $x \in \mathbb{R}$, es defineix el seu valor absolut com $|x| = |-x| = \begin{cases} x \text{ , si } x \geq 0 \\ -x \text{ , si } x \leq 0 \end{cases}$

***Propietats:***

$$|x| \geq 0$$

$$(a>0) \quad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff -a \leq x \wedge x \leq a \iff x \in [-a, a]$$

$$(b>0) \quad |x| \geq b \iff b \leq x \vee x \leq -b \iff x \in ]-\infty, -b] \cup [b, +\infty[$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ (desigualtat de Minkowski)}$$

Nota: $\sqrt{x^2} = |x|$

**Distància en $\mathbb{R}$:**

Si $x, y \in \mathbb{R}$, es defineix la distància entre ells com $d(x, y) = |x - y|$

$I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, d(x,a) < \delta\} = ]a-\delta, a+\delta[$ , interval (obert) de centre $a$ i radi $\delta$

**Exercici:** Trobar els $x \in \mathbb{R}$ tals que $\left||x|-2\right| \leq 1$

Tenint en compte la segona propietat del valor absolut,

$$\left||x|-2\right| \leq 1 \iff 1 \leq |x| \leq 3 \iff |x| \leq 3 \wedge |x| \geq 1$$

Per la mateixa raó, $|x| \leq 3 \iff x \in [-3,3]$

La tercera propietat ens condueix a $|x| \geq 1 \iff x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$

El conjunt solució, $S$, és $[-3,3] \cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) = [-3,-1] \cup [1,3]$

$S$ és acotat i $\sup(S) = \max(S) = 3$ ; $\inf(S) = \min(S) = -3$