Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessió 5

1. **Arbres**

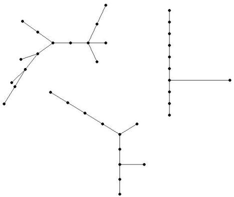
2. Grafs ponderats i arbres generadors de pes mínim

Conceptes bàsics

Definicions

- La **longitud d'un camí** és el nombre d'arestes del camí.
- Un **cicle** en un graf és un camí tancat, simple (és a dir, no repeteix arestes), que no repeteix vèrtexs (excepte l'inicial i el final que coincideixen per ser tancat) i de longitud positiva.
- Un **arbre** és un graf connex i acíclic (no conté cicles).
- Un **bosc** és un graf acíclic (és a dir, els seus components connexos són arbres).

El següent graf és un bosc. Cadascun dels tres components connexos és un àrbre:



Principals propietats dels arbres

Definició

En un arbre, els vèrtexs de grau 1 es denominen **fulles**. Els vèrtexs de grau major que 1 es denominen **vèrtexs interns**.

Propietats

1. Els arbres són grafs simples i sense bucles.
2. Un graf connex amb n vèrtexs és un arbre si i només si té exactament $n - 1$ arestes.
3. Tot arbre amb més d'un vèrtex té, almenys, dues fulles.

Arbres generadors

Definicions

- Un subgraf G_1 d'un graf G es diu que és un **subgraf generador** de G si conté tots els vèrtexs de G.
- Un **arbre generador** del graf G és un subgraf generador de G que, a més a més, és arbre, és a dir, un subgraf de G que és arbre i conté tots els vèrtexs de G.

Propietat

Tot graf connex té un arbre generador

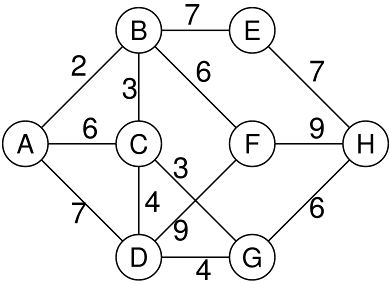
Grafs ponderats

Definició

Un graf **ponderat** és un graf en el qual cada aresta porta associat un nombre anomenat pes (o cost).

El **pes** d'un graf és la suma dels pesos de totes les arestes del graf.

Exemple:



Arbres generadors de pes mínim

Definició

Siga G un graf ponderat connex. Un **arbre generador minimal** és un arbre generador de G el pes del qual és menor o igual que el de qualsevol altre arbre generador.

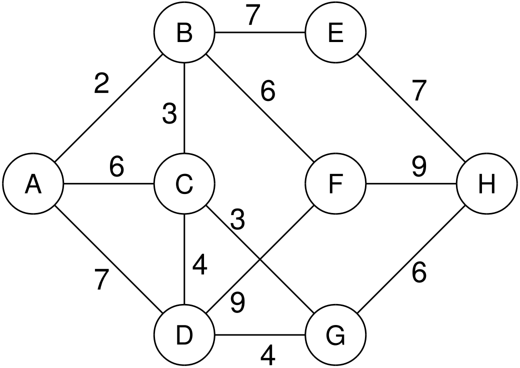
Un dels algorismes que s'utilitzen per a trobar arbres generadors minimals és el de Kruskal, que es basa en l'estratègia d'anar construint un arbre utilitzant sempre una aresta de pes mínim d'entre les disponibles.

Algorisme de Kruskal

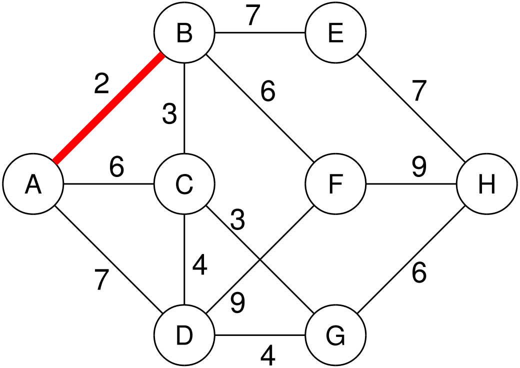
1. Triem una aresta qualsevol que siga de pes mínim
2. Anem afegint noves arestes de pes mínim (triades entre les quals encara no han sigut utilitzades) amb la condició que no forme un cicle amb les ja triades. No és necessari que els subgrafs que anem obtenint siguen connexos.
3. El procés acaba quan ja no és possible afegir cap aresta sense obtenir un cicle.

Exemple

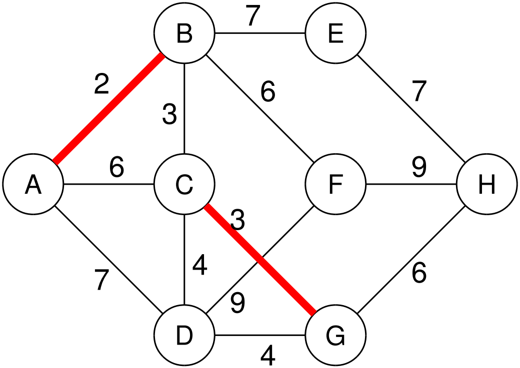
Volem calcular un arbre generador de pes mínim en el següent graf:



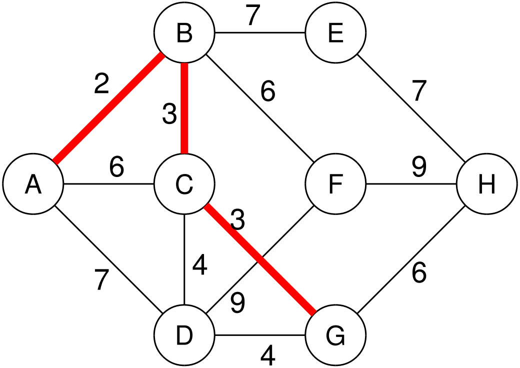
Exemple



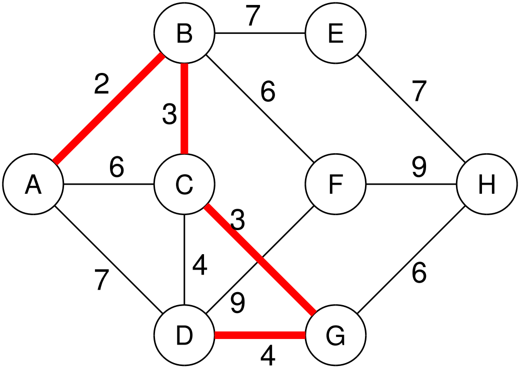
Exemple



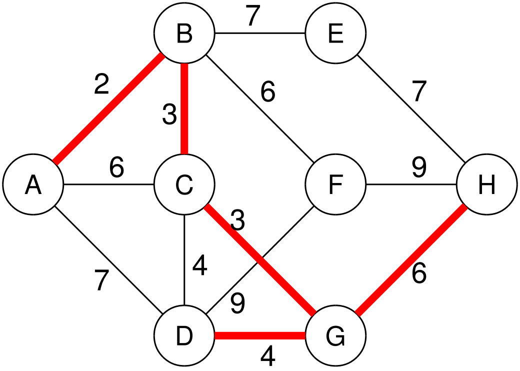
Exemple



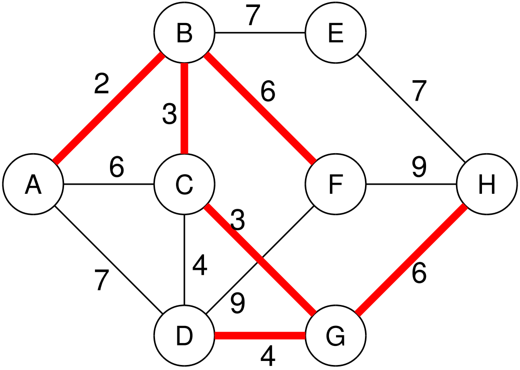
Exemple



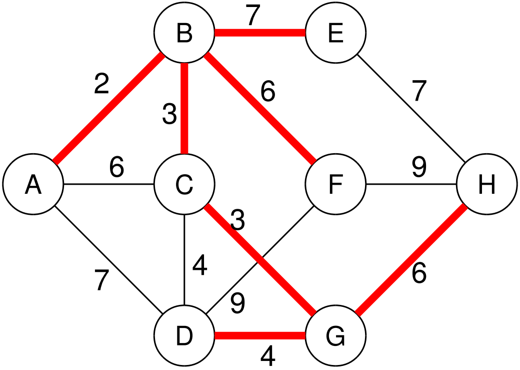
Exemple



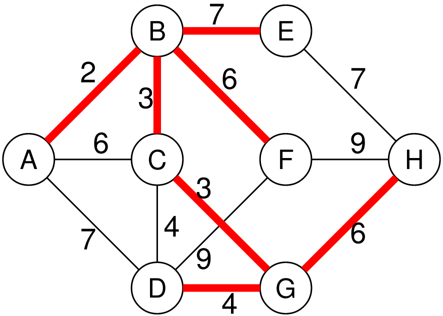
Exemple



Exemple



Exemple



Pes de l'àrbre obtingut $= 2 + 3 + 3 + 4 + 6 + 6 + 7 = 31$

Notes

- Si en l'algorisme de Kruskal canviem **pes mínim** per **pes màxim** en triar les arestes obtenim un àrbre generador maximal del graf connex, és a dir, un arbre generador del graf el pes del qual és major o igual que el de qualsevol altre arbre generador.
- En el cas que el graf no siga connex, es pot aplicar l'algorisme de Kruskal a cada component connex per a obtenir un bosc generador minimal (o maximal).