Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessió 1

Leonard Euler (1707-1783)

La Teoria de Grafs està considerada com una de les branques més modernes de les Matemàtiques. No va ser fins l'any 1936 quan va aparèixer publicat el primer text que desenvolupava la Teoria de Grafs com una teoria madura. No obstant això, els seus orígens es remunten als temps de Leonard Euler, que va resoldre el famós " problema dels ponts de Königsberg": per l'antiga ciutat de Königsberg (avui Kaliningrad, Rússia) passa el riu Pregel; aquest riu té 2 illes i 7 ponts que les comuniquen entre elles i entre les dues riberes del riu.

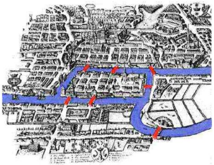
Problema

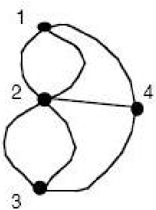
És possible recórrer els 7 ponts sense passar dues vegades pel mateix i tornant al punt de partida?

Traducció a un problema sobre "grafs"

Euler va formular la pregunta com un problema de "teoria de grafs" (i, de passada, va inventar el concepte de "graf"):

És possible recórrer sencer el "graf"de la dreta sense passar dues vegades per la mateixa " aresta"?





En 1736 Euler va publicar un article en el que es solventaba aquest problema per al cas general. Aquest treball es considera el naixement de la Teoria de Grafs.

Graf (no dirigit)

Definició

Es denomina *graf (no dirigit)* a una terna $G = (V, A, \delta)$ on:

1. V és un conjunt finit no buit els elements es denominen *vèrtexs*.
2. A és un conjunt finit els elements es denominen *arestes* o *arcs*.
3. $\delta : A \to \mathcal{P}(V)$ és una aplicació (anomenada *aplicació d'incidència*) tal que, per a tota aresta $e \in A$, $\delta(e)$ és un subconjunt de V format per 1 o 2 elements (anomenat/s *extrem/s* de l'aresta).

Notació: $\mathcal{P}(V)$ denota el conjunt de les parts de V, és a dir, el conjunt de tots els subconjunts de V.

Exemple

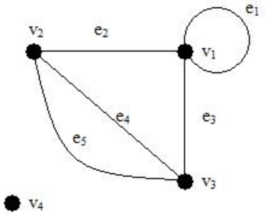
Considerem el graf donat per la terna $G = (V, A, \delta)$, on

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

i l'aplicació d'incidència $\delta : A \to \mathcal{P}(V)$ està definida de la següent manera:

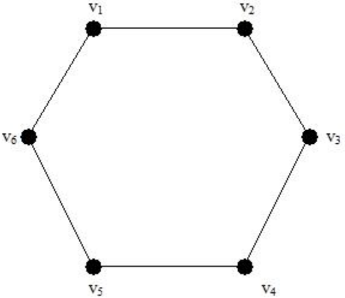
$$\delta(e_1) = \{v_1\}, \ \ \delta(e_2) = \{v_1, v_2\}, \ \ \delta(e_3) = \{v_1, v_3\},$$
$$\delta(e_4) = \{v_2, v_3\}, \ \ \delta(e_5) = \{v_2, v_3\}$$

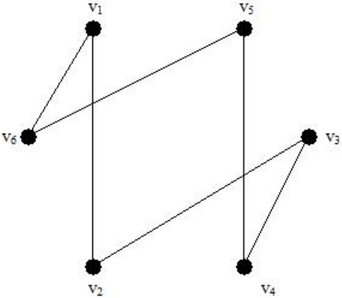
Este graf pot representar-se mitjançant el següent diagrama:



Diferents representacions d'un mateix graf

Cal observar que un mateix graf admet diferents representacions gràfiques:





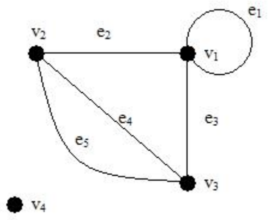
Els grafs que admeten, com a representació gràfica, un polígon regular, s'anomenen *grafs cíclics o poligonals*, i es denotem amb C_n (sent n el nombre de vèrtexs). El grafo anterior és C_6.

Fins que no es diga el contrari:

quan parlem de graf ens referirem a

graf no dirigit.

Exemple i algunes definicions

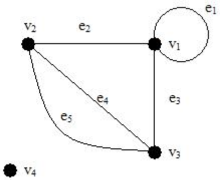


Aquest graf té un bucle (o llaç), és a dir, una aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix (e_1). També té arestes múltiples, és a dir, diverses arestes que uneixen els mateixos vèrtexs (e_4 i e_5). El vèrtex v_4 és un vèrtex aïllat, és a dir, no és extrem de cap aresta.

Adjacència i incidència

- Una aresta e es dirà que *és incident* amb un vèrtex v si aquest és un dels seus extrems.

- Dos vèrtexs $v, w \in V$ es diran *adjacents* si existeix una aresta e que els uneix.



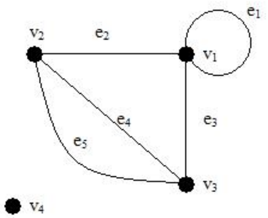
- L'aresta e_2 és incident amb els vèrtexs v_1 i v_2.
- Els vèrtexs v_1 i v_2 són adjacents.

Matriu d'adjacència d'un graf

Definición

Siga $G = (V, A, \delta)$ un graf, amb $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La *matriu d'adjacència* de G és la matriu quadrada d'ordre n $M_A = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ tal que m_{ij} és el nombre d'arestes diferents que tenen com a extrems a v_i i v_j.

Exemple:



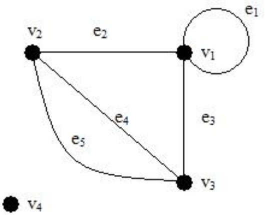
$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu d’incidència d’un graf

Definición

Siga G un graf amb conjunt de vèrtexs $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ i conjunt d’arestes $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. La *matriu d’incidència* de G es defineix com la matriu $M_I = (b_{ij})$, de grandària $m \times n$, tal que $b_{ij} = 1$ si l’aresta e_j no és un llaç i és incident amb el vèrtex v_i, $b_{ij} = 2$ si l’aresta e_j és un llaç i és incident amb el vèrtex v_i, i $b_{ij} = 0$ en un altre cas.

Exemple:

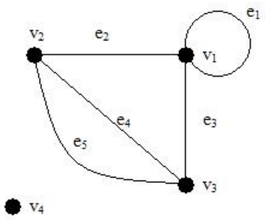


$$M_I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grau d'un vèrtex

Definició

S'anomena *grau* d'un vèrtex v (i el denotarem per $\deg(v)$) al nombre d'arestes incidents amb ell (es compten 2 vegades quan són llaços).



En aquest graf:

- $\deg(v_1) = 4$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 3$ y $\deg(v_4) = 0$.

Definició

Un graf ponderat és un graf en el que cadascuna de les arestes té associat un nombre anomenat pes (o cost).