

PROBLEMES DE MATEMÀTICA DISCRETA

Tema 2. CONJUNTS I RELACIONS (Bloc 1)

1. Escriviu les següents afirmacions en notació conjuntista:

- a) x és un element del conjunt A .
- b) a no pertany a A .
- c) B és un subconjunt de A .
- d) D està inclòs en C .
- e) E no és subconjunt de F .
- f) A és un conjunt sense elements.
- g) B està inclòs en C i C està inclòs en B .

2. Descriviu els següents conjunts per extensió:

- a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 9\}$.
- b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.
- c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.
- d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

3. Descriviu els següents conjunts per comprensió:

- a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- b) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.
- c) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
- d) $\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$.

4. Siga $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Indiqueu quines de les següents afirmacions són correctes, assenyalant per què no ho són la resta.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $\{1, 4\} \subseteq \wp(A)$ | d) $\{1, 4\} \subseteq A$ | g) $\{4\} \subseteq A$ |
| b) $4 \in A$ | e) $4 \subseteq A$ | h) $\{4\} \in A$ |
| c) $\{4\} \in \wp(A)$ | f) $4 \in \wp(A)$ | i) $\emptyset \in \wp(A)$ |

5. Si A i B són subconjunts qualssevol d'un conjunt E , completa les següents afirmacions inserint els símbols \subseteq , \supseteq o nc (no comparables) entre cada parell de conjunts:

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a) $\emptyset \dots A$ | e) $B \dots A^c \cup B$ | i) $A \setminus B \dots B^c$ |
| b) $A \dots A \cap B$ | f) $A \setminus B \dots B^c$ | j) $A \dots A \cup B$ |
| c) $\wp(A) \dots \emptyset$ | g) $B^c \dots B \setminus A$ | |
| d) $B \dots B \setminus A$ | h) $A \cap B \dots A^c \cup B$ | |

6. Siguen els conjunts $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ i $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Considerant els complementaris respecte del conjunt $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, calculeu:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $(A \cap B) \cup C$ | e) $A \times C$ | i) $U \setminus (A \cup B \cup C)$ |
| b) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ | f) $C \times A$ | j) $A \Delta B$ |
| c) $A^c \cup B^c$ | g) $(A \cup B) \setminus C$ | |
| d) $(A \cap B)^c$ | h) $A \setminus (B \cap C)$ | |

7. Si A, B i C són subconjunts qualssevol d'un conjunt E , proveu:

- $A^c \setminus B^c = B \setminus A$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

8. Si A, B i C són conjunts qualssevol indiqueu quines de les següents afirmacions són correctes, justificant les respostes:

- Si $A = B \setminus C$, aleshores $B = A \cup C$
- $(A \cup B) \setminus B = A$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

9. Simplifiqueu la següent expressió utilitzant les propietats de l'àlgebra de conjunts:

$$(A^c \cap B^c) \cap [((A \cup B) \cap (A \cup B^c)) \cup ((A \cap B) \cup (A^c \cap B))]$$

10. Donats els conjunts $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 4\}$ i $B = \{1, 4, 6\}$, obteniu els subconjunts $R = A \setminus B$, $S = B \setminus A$, $V = A \cap B$ i $W = E \setminus (A \cup B)$. És $\{R, S, V, W\}$ una partició del conjunt E ?

11. Proveu que la família de conjunts $\{A_k, k \in \mathbb{N}^*\}$, definida per:

$$A_k = \{2k - 1, 2k + 1\}, k = 1, 2, \dots$$

és un recobriment del conjunt dels nombres naturals senars, però no una partició.

12. Siga g la correspondència de \mathbb{N} en \mathbb{N} definida per $G = \{(x, y) : x + 2y = 12\}$.

- Descriviu el graf d'aquesta relació per extensió.
- Calculeu el domini i el rang d'aquesta correspondència.
- Obteniu el graf de la correspondència inversa per extensió.
- Calculeu $g \circ g$.

13. a) Considerem els conjunts $X = \{2, 4, 5\}$ i $Y = \{1, 2, 4, 6\}$. Dels següents subconjunts de parells ordenats de $X \times Y$, indiqueu aquells que defineixen aplicacions de X en Y .

- (i) $F = \{(2, 4), (4, 1), (5, 6), (4, 2)\}$
- (ii) $G = \{(2, 4), (4, 6), (5, 1)\}$
- (iii) $H = \{(2, 6), (4, 6), (5, 1)\}$
- (iv) $J = \{(2, 2), (4, 4)\}$

b) Per a aquells que siguen aplicacions, determineu de quins tipus són.

14. Trobeu els grafs de les següents aplicacions:

a) L'aplicació f definida del conjunt $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en \mathbb{R} donada per:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

b) L'aplicació f definida del conjunt $W = \{1, 2, 3, 4\}$ en \mathbb{R} donada per la fórmula $f(x) = x^3$.

c) L'aplicació g definida del conjunt $S = \{a, e, i, o, u\}$ en el conjunt A format per totes les lletres de l'alfabet, que a cada element del conjunt S li assigna la lletra que li segueix en l'alfabet.

15. Siguen $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ i $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Considerem la funció f de A en B definida per

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}.$$

Comproveu que és injectiva i suprajectiva. Obteniu una fórmula per a definir f^{-1} .

16. Siga $f_{a,b}$ una aplicació de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida com $f_{a,b}(x) = ax + b$ amb $a \neq 0$ i $a, b \in \mathbb{R}$. Demostreu que $f_{a,b}$ és bijectiva i calculeu la seua inversa.