ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT3 - Problemes proposats: MANIPULACIÓ I CÀLCUL D'INTEGRALS

1. Calcula les primitives que segueixen, reductibles a immediates:

a) $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2+3\cos(x)}{\sin^2(x)}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1+\log(x)}{3+x\log(x)}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx$

2. Calcula les primitives que segueixen per integració per parts:

a) $\displaystyle\int x\log(x)dx$ b) $\displaystyle\int \arcsin(x)dx$ c) $\displaystyle\int e^x\sin(x)dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

3. Calcula les primitives que segueixen a partir de canvis de variable convenients:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x-5}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

4. Calcula les integrals de Riemann que segueixen, aplicant la regla de Barrow. Es tindran en compte els mètodes d'integració per parts, substitució (canvi de variable) o una combinació d'ells:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x(x+4)}dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$ f) $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{-x}dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos(x)dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\log(5)} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)dx$

j) $\displaystyle\int_2^{\pi} \cos\left(\sqrt{x}-2\right)dx$ k) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ l) $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

5. a) Calcula l'àrea tancada per la gràfica de $y=x^2+x-2$ i l'eix OX, sobre l'interval $[-3,2]$

   b) Calcula l'àrea que limiten les funcions $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$ i $g(x)=\dfrac{x-1}{8x}$ en el primer quadrant.

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT3 - Exercicis addicionals: MANIPULACIÓ I CÀLCUL D'INTEGRALS

1. Utilitza la monotonia de l'operador integral per a:

   a) Acotar la integral $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^4}dx$ si f és continua i $x^2 \le f(x) \le x^3$ per a $x \in [2,5]$

   b) Justificar que $\displaystyle\left|\int_0^\pi e^{-x}\cos(x^2)dx\right| \le 1 - e^{-\pi}$

   c) Acotar, sense resoldre ninguna integral, $\displaystyle\left|\int_0^\pi \frac{e^{-x}\sin(x)}{x^2+1}dx\right|$

   d) Millorar el resultat de c) calculant $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{x^2+1}$.

2. Calcula els valors de $L(f,P)$ i $U(f,P)$ per a la funció $f(x) = \dfrac{3-x}{3^x}$ i la partició $P = \{1,2,4,7\}$.

*3. Considera la funció $f(x) = x^2$ i la partició, P_n, que divideix l'interval $[0,1]$ en n parts iguals

   a) Calcula els valors de $L(f,P_n)$ i $U(f,P_n)$ tenint en compte que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n+1)\,n\,(n+1)$

   b) Determina els límits de $L(f,P_n)$ i $U(f,P_n)$ quan $n \to \infty$

   c) Quin és el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$? Per què?

4. Calcula les integrals de Riemann que segueixen, aplicant la regla de Barrow. Hauràs de descomposar l'integrand en fraccions simples i es tindrà en compte el mètode de substitució (canvi de variable) en b):

   a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ c) $\displaystyle\int_{e-1}^{e+1} \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx$

5. Calcula $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ amb dos canvis de variable distints i verifica que trobes el mateix resultat.

*6. a) Si f és una funció senar, integrable Riemann en $[-b,b]$, verifica que $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$

   b) Què pots dir si f és parella?

*7. a) Tenint en compte el problema anterior, calcula $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$ després d'aplicar el canvi de variable $x = 3\cos(t)$

   b) Dedueix de l'apartat anterior el valor de l'àrea d'una circumferència de radi 3.

*8. a) Troba el valor de l'àrea del recinte limitat entre les corbes $x^2 = 2py$ i $y\left(x^2+p^2\right) = p^3$, $p > 0$

   b) Troba el valor de l'àrea tancada entre $y_1 = 1 - \dfrac{x}{2}$ i $y_2 = |x|$

   c) Calcula l'àrea de la regió limitada entre les gràfiques de $\sin(x)$ i de $\cos(x)$ en l'interval $[0,\pi]$

*9. Calcula, per a tots els possibles valors de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el valor de $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} |\alpha - |x| + x| \ dx$.

*10. Calcula les primitives de les funcions secant i cosecant:

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{dx}{\cos(x)} \quad \text{i} \quad \int \csc(x)dx = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

*11. a) Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \ dx$

b) Aplicant algún canvi de variable a la integral de l'apartat anterior, calcula

$$\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \ dx \quad , \quad \int_{\pi}^{\pi/2} \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ dx \quad , \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) \ dx$$

*12. Mitjançant un canvi de variable similar al canvi del problema 8, calcula $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$.

*13. a) Calcula el valor de l'àrea tancada entre $y_1 = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2}$ i $y_2 = |x|$

b) Troba el valor de $k > 0$ de manera que la corba $y = k\sin(x)$ dividisca en dues parts de la mateixa àrea el recinte determinat per $y = \cos(x)$ i els eixos coordenats, en l'interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

*14. La taxa de variació d'una població de conills satisfà, per a t en anys,

$$P'(t) = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 17} = \frac{-25(t-4)}{(t-4)^2 + 1}$$

a) En quin moment és màxima la població de conills?

b) Si la població inicial és de 50 conills quin és el màxim nombre de conills esperable?

c) S'extingiran els conills? Quan?