Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

Sessions 3 i 4: camins, conexió i grafs eulerians

Definició de camí

Un **camí** (de longitud n) en un graf és una seqüència ordenada

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

de manera que:

a) $v_0, v_1, \dots, v_n$ són vèrtexs del graf,

b) $e_1, e_2, \dots, e_n$ són arestes del graf,

c) v_{i-1} i v_i són els extrems de e_i per a tot $i = 1, 2, \dots, n$.

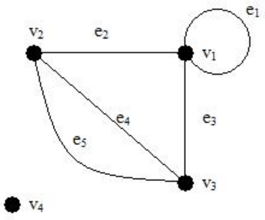
Direm que v_0 és el *vértex inicial* i que v_n el *vértex final* del camí.

Nota: Si el graf és simple, aleshores qualsevol camí en ell està determinat per la seqüència de vèrtexs i, per tant, podem ometre les arestes: $v_0 v_1 \dots v_n$.

Camins especials

- Un **camí** és **tancat** si els vèrtexs inicial i final coincideixen.
- Un **camí** és **simple** si no conté arestes repetides.

Exemple:



(i) $v_1 e_1 v_1 e_3 v_3 e_4 v_2 e_5 v_3 e_3 v_1$ és un camí tancat. No és un camí simple perquè hi ha arestes repetides (e_3 es repeteix).

(*ii) $v_2 e_4 v_3 e_3 v_1$ és un camí simple amb v_2 com a vèrtex inicial i v_1 com a vèrtex final.

Connexió

Vértexs connectats

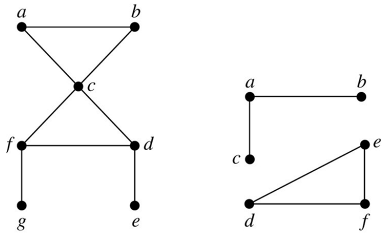
Dos **vèrtexs** u i v d'un graf G es diu que estan **connectats** si existeix un camí en el graf els vèrtexs inicial i final del qual són u i v.

Grafs connexos i components connexes d'un graf

- Un **graf** és **connex** si dos vèrtexs qualssevol del graf estan connectats. És a dir, un graf és connex si donats dos vèrtexs qualssevol del graf sempre existeix un camí entre ells.
- Si el graf no és connex, donat un vèrtex qualsevol v, el subgraf determinat per tots els vèrtexs que estan connectats amb v i les arestes que incideixen en ells és un subgraf connex.

  A cadascun d'aquests subgrafs connexos d'un graf els cridarem **components connexes** del graf.

Exemples



G_1 G_2

- G_1 és un graf connex (ja que cada vèrtex està connectat amb tots els altres).
- G_2 no és connex. Té 2 components connexes: una d'elles és el subgraf format pels vèrtexs a, b i c i les arestes que incideixen en ells i l'altra és el subgraf format pels vèrtexs d, e i f i les corresponents arestes.

Camins i grafs eulerians

Definición

- Un camí en un graf es diu que és un **camí eulerià** si és simple (és a dir, no repeteix arestes) i conté a totes les arestes del graf.
- Un **graf** és **eulerià** si conté un camí eulerià tancat.

OBSERVACIÓ: El problema dels "ponts de Königsberg", expressat en aquests termes, consisteix a decidir si el graf associat és eulerià.

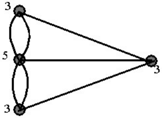
El següent teorema, provat per Euler, proporciona una caracterització dels grafs eulerians i, per tant, dóna resposta, en particular, al problema dels "ponts de Königsberg".

Existència d'un camí eulerià tancat

Teorema de Euler (part 1)

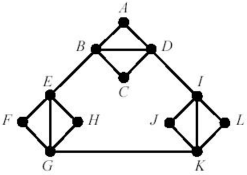
Siga G un graf connex. G és un graf eulerià si i només si tots els seus vèrtexs tenen grau parell.

Exemple:



El graf del problema dels ponts de Königsberg **no** és eulerià (els graus dels seus vèrtexs apareixen en el dibuix).
Dons no és possible recórrer tots els ponts sense passar dues vegades pel mateix pont i tornant al punt d'eixida.

Exemple:



Aplicant el Teorema de Euler es dedueix que aquest graf és eulerià (ja que tots els seus vèrtexs tenen grau parell).

Construcció d'un camí eulerià tancat

Algorisme de Hierholzer

1. Comencem per qualsevol vèrtex i anem recorrent un camí que no repetisca arestes fins a tornar al vèrtex d'eixida (com el graf té tots els vèrtexs de grau parell, arribarà un moment en què necessàriament tornem a aquest vèrtex).
2. Si el camí anterior conté a totes les arestes del graf, aleshores ja tenim un camí eulerià tancat. Si no, considerem el subgraf que s'obté en eliminar les arestes ja recorregudes i els vèrtexs no incidents amb cap de les arestes que queden.
3. El subgraf obtingut tindrà almenys un vèrtex en comú amb el camí ja recorregut (com el graf és eulerià, té totes les arestes en un únic component connex). Començant per aquest vèrtex, tornem a recórrer un camí simple fins a tornar a ell.
4. Repetim el procés fins que ja no queden arestes.
5. Finalment, concatenem o inserim (uns en uns altres) successivament els camins simples tancats que hem obtingut fins a obtenir un camí eulerià tancat.

Existència d'un camí eulerià no tancat

Podem fer-nos una pregunta més general que la de decidir si un graf ès eulerià o no:

Existeix un camí eulerià no necessàriament tancat al graf?

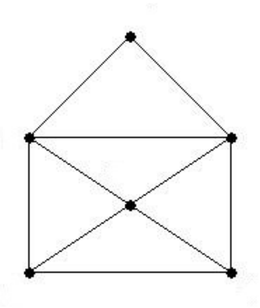
La segona part del Teorema de Euler dóna resposta també a aquesta pregunta:

Teorema de Euler (part 2)

Siga G un graf connex que no és eulerià. Aleshores G conté un camí eulerià no tancat si i només si G té exactamente dos vértexs de grau senar.
(En aquest cas, qualsevol camí eulerià no tancat té els seus extrems en aquests dos vèrtexs).

Exemple

El següent graf no és eulerià, encara que sí que conté un camí eulerià no tancat (pel Teorema de Euler, ja que posseeix exactament dos vèrtexs de grau imparell).



Construcció d'un camí eulerià no tancat

Si un graf connex té exactament 2 vértexs de grau senar, Com es construeix un camí eulerià no tancat?

1. Afegim una aresta nova que connecte els 2 vértexs de grau senar.
2. El nou graf és eulerià (ja que tots els seus vértexs són de grau parell), per tant, podem trobar un camí eulerià tancat en ell aplicant el procés vist anteriorment.
3. Cambiem el vértex d'eixida d'aquest camí eulerià tancat de manera que comencem el camí pel extrem final de la aresta que haviem afegit (en el sentit del recorregut).
4. Suprimim l'aresta que haviem afegit, de manera que el camí resultant ja no és tancat (serà un camí eulerià no tancat en el graf original).

Nota: Una altra opció per a obtenir un graf eulerià seria afegir un vèrtex fictici entre els dos vèrtexs de grau senar i dues arestes fictícies que ho unisquen als vèrtexs de grau imparell.