Tema 1: Introducció a la lògica

1. **Lògica proposicional**
2. Lògica de predicats
3. El Principi d'Inducció

Proposicions

Definició

Una *proposició* és una sentència o afirmació de la qual es pot dir sense ambigüitat (i de manera excloent) que és certa o falsa. El *valor lògic* d'una proposició és 1 si és certa, i 0 si és falsa.

Exemples:

(1) ≪*La gallina és un animal mamífer*≫ és una proposició falsa (valor lògic 0).

(2) ≪*On vas aquesta vesprada?*≫ no és una proposició.

(3) ≪*Si un nombre és una potència de* 10 *aleshores és parell*≫ és una proposició certa (valor lògic 1).

(4) ≪$x + 4 = 0$≫ no és una proposició.

Proposicions

Definició

- Las proposicions més simples es diuen atòmiques i se solen representar amb lletres minúscules: p, q, r . . .
- Existeixen altres proposicions, que anomenarem proposicions moleculars y que estan formades per proposicions atòmiques unides mijançant unes partícules que actuen com a nexes. Se solen representar amb lletres majúscules: P, Q, R, . . .

Exemples:

(1) *"Joan és alt"* és una proposició atòmica (p).

(2) *"Maria és rossa "* és una proposició atòmica (q)

(3) *"Joan és alt i Maria és rossa'* és una proposició molecular.

Connectors lògics

Els *connectors lògics* permeten construir proposicions compostes (*moleculars*) a partir d'unes altres més simples (*atòmiques*). Si p i q representen proposicions, els connectors més emprats són els que apareixen al següent quadre:

Connector lògic	Símbol	S'escriu	Es llig
Negació	$\rceil$	$\rceil p$	no p
Conjunció	$\wedge$	$p \wedge q$	p i q
Disjunció	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Condicional	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	si p, aleshores q
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p si i només si q

Depenent dels valors lògics de les proposicions p i q i dels connectors emprats, les proposiciones moleculars poden tenir un valor lògic 0 o 1. Les possibles combinacions poden representar-se en un quadre, anomenat taula de veritat.

Significat dels connectors lògics

Vejem ara el significat dels connectors lògics i les corresponents taules de veritat.

- Negació: $\rceil p$ és certa en el cas que p siga falsa, i és falsa quan p és certa. La seua taula de veritat és:

p	$\rceil p$
0	1
1	0

- Conjunció: $p \wedge q$ és certa quan (i només quan) p i q són certes simultàniament. La seua taula de veritat és:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Significat dels connectors lògics

- **Disjunció**: $p \vee q$ és certa quan (i només quan) alguna de les dues proposicions p o q siga certa (és a dir, si p és certa, q és certa, o ambdues ho són). La seua taula de veritat és:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Significat dels connectors lògics

- Condicional: $p \to q$ és falsa quan (i només quan) p és certa i q és falsa. La seua taula de veritat és:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Bicondicional: $p \leftrightarrow q$ és certa quan (i només quan) ambdues proposicions són certes, o ambdues són falses. La seua taula de veritat és:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Jerarquía dels connectors

Considerem les proposicions:

p : Hui és dissabte

q : Fa sol

r : Estem en la universitat

En principi, no podem determinar el valor de veritat de la expressió $p \wedge q \vee r$ ja que és ambigüa. Pot significar:

[Hui és dissabte i fa sol] o [estem en la universitat]

(proposició vertadera)

o

[Hui és dissabte] i [fa sol o estem en la universitat]

(proposició falsa)

Per a evitar aquestes ambigüitats utilitzarem parèntesis.

Jerarquia dels connectors

Per a representar adequadament proposicions en les que aparèixen varios connectors s'utilitzen parèntesis.
Per a minimitzar l'ús d'aquestos s'estableix la següent jerarquia:

Jerarquia (de major a menor)

- $\leftrightarrow$
- $\rightarrow$
- $\wedge$, $\vee$
- $\rceil$

Si la jerarquia d'un connector és més gran que la d'un altre, en absència de parèntesis, el segon s'executa abans que el primer.

Exemples:

L'expressió $p \wedge q \rightarrow r$ està correctament escrita perquè té una intepretació única segons la jerarquia dels connectors. Equival a $(p \wedge q) \rightarrow r$.

$p \wedge q \vee r$ no té cap sentit lògic. Com que els connectors $\wedge$ i $\vee$ tenen la mateixa categoria jeràrquica, cal fer servir parèntesis per evitar ambigüitats: $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$.

Jerarquia dels connectors

Observació. Si en una expressió hi ha més d'un condicional, aquestos han d'estar jerarquitzats per paréntesi, ja que la taula de veritat de $(p \to q) \to r$ és distinta de la de $p \to (q \to r)$. Anem a vore-ho:

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Per tant, l'expressió $p \to q \to r$ no té cap sentit lògic.

Formes proposicionals

Un dels aspectes més rellevants de la lògica és que la validesa d'una deducció depèn exclusivament de la ≪forma≫ que aquesta tinga, i no del possible significat de les proposicions que hi intervenen.

Definició

Una *forma proposicional* (o *fórmula lògica*, o *fórmula proposicional*) és qualsevol expressió formada per

(a) símbols (normalment lletres) que representen altres fórmules proposicionals i que es denominen *variables proposicionals*,

(b) connectors lògics,

(c) parells de parèntesis $(\ldots)$,

i construïda amb la següent regla: si $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són formes proposicionals, aleshores també ho són $(\rceil\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ i $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$.

Formes proposicionals

- Una forma o fórmula proposicional (per exemple, $p \wedge q$) es converteix en una proposició quan substituïm les seus variables (p y q en el exemple) per proposicions concretes.
- Una proposició és necessariament certa o falsa, mentre que una fórmula proposicional pot ser una cosa o l'altra, segons el valor de veritat de les seues components.

  Exemple:
  La forma proposicional $p \wedge q$ pot representar tant a la proposició certa *"La Terra és un planeta i París és la capital de França"* como a la proposició falsa *"El Sol és un estel i Londres és la capital de Espanya"*.
- $(p \wedge (\rceil q) \to r)$ és una fórmula proposicional , però poden eliminar-se parèntesis innecessaris: $p \wedge \rceil q \to r$.

Tautologies i contradiccions

Definició

- Una tautologia és una fórmula proposicional que sempre és certa (independentment dels valors lògics de les variables que la formen). El símbol τ denotarà qualsevol tautologia.
- Una contradicció és una fórmula proposicional que sempre és falsa (independentment dels valors lògics de les variables que la formen). Es denotarà pel símbol ϕ.
- Una contingència és una fórmula proposicional que no és ni tautologia ni contradicció.

Exemples:

- $\rceil(p \wedge q \rightarrow r)$ és una contingència.
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\rceil p \vee q)$ és una tautologia.
- $p \wedge \rceil p$ és una contradicció.

Equivalència lògica

Definició

Dues fórmules proposicionals es diu que són equivalents si tenen la mateixa taula de veritat, es a dir, tenen *idèntics valors lògics* per a cada conjunt de valors lògics de les seues components.
Dit d'una altra manera, dues fórmules proposicionals P i Q són equivalents si $P \leftrightarrow Q$ és una tautologia. Ho escriurem $P \equiv Q$ o també $P \Leftrightarrow Q$.

Exemple:

Les formes proposicionals $\rceil(p \wedge q)$ i $\rceil p \vee \rceil q$ són equivalents:

$$\rceil(p \wedge q) \equiv \rceil p \vee \rceil q$$

(aquesta equivalència és una de les lleis de De Morgan, que veurem més endavant).

Implicació tautològica

Definició

Donades dues fórmules proposicionals P i Q, si l'expressió condicional $P \rightarrow Q$ és una tautologia, direm que és una implicació tautològica i ho escriurem $P \Rightarrow Q$. En aquest cas, direm que P *implica* Q. P s'anomena l'*antecedent* i Q el *conseqüent* de la implicació.

$P \Rightarrow Q$ significa que, sempre que P és certa, Q també ho és.

Exemple: $p \Rightarrow (\rceil p \rightarrow q)$

Equivalències tautològiques

Propietats booleanes:

1. Propietats associatives:

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$
$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

2. Propietats commutatives:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$
$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

3. Propietats distributives:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

4. Elements neutres:

$$P \vee \phi \equiv P$$
$$P \wedge \tau \equiv P$$

5. Elements complementaris (o propietat de la negació):

$$P \vee \rceil P \equiv \tau$$
$$P \wedge \rceil P \equiv \phi$$

Equivalències tautològiques

Altres propietats de la disjunció, la conjunció i la negació:

- Absorbents:

$$\tau \vee P \equiv \tau, \quad \phi \wedge P \equiv \phi$$

- Simplificatives (o «lleis d'absorció»):

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P, \quad P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

- Idempotents:

$$P \vee P \equiv P$$
$$P \wedge P \equiv P$$

- Lleis de De Morgan:

$$\rceil(P \vee Q) \equiv \rceil P \wedge \rceil Q$$
$$\rceil(P \wedge Q) \equiv \rceil P \vee \rceil Q$$

- Propietat de la doble negació (o involució):

$$\rceil(\rceil P) \equiv P$$

Equivalències tautològiques

Propietats que involucren els connectors condicional i bicondicional:

- Condicional-disjunció:

$$P \to Q \equiv \rceil P \vee Q$$

- Condicional-bicondicional:

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P) \equiv P \leftrightarrow Q$$

- Transposició:

$$P \to Q \equiv \rceil Q \to \rceil P$$

- Llei d'exportació:

$$(P \wedge Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$$

Simplificació de formes proposicionals

Totes les equivalències exposades poden fer-se servir per *simplificar* una determinada forma proposicional, és a dir, per trobar-ne una altra d'equivalent més senzilla.

Exemple: Anem ara a simplificar la forma proposicional

$$\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$$

$$\begin{aligned}
\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow q && \text{(Propietat distributiva)} \\
&\equiv \emptyset \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow q && \text{(Propietat de la negació)} \\
&\equiv \neg p \wedge q \rightarrow q && \text{(Neutre)} \\
&\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee q && \text{(Condicional-disjunció)} \\
&\equiv p \vee (\neg q \vee q) && \text{(Llei de De Morgan i associativa)} \\
&\equiv p \vee \tau && \text{(Prop. negació)} \\
&\equiv \tau && \text{(Absorció)}
\end{aligned}$$

Per tant: $\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q \equiv \tau$

Inferència

Definició

S'anomena *inferència* al procés que permet, partint d'unes premisses $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (és a dir, d'unes proposicions que se suposen certes), arribar a una conclusió R; dit d'una altra manera, el que es fa és *demostrar* la implicació lògica $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow R$ mitjançant una seqüència finita de passos en els quals es fan servir les anomenades lleis d'inferència (que estudiarem tot seguit).

Les tècniques més habituals en els processos d'inferència són les següents:

- Inferència directa.
- Inferència condicional.
- Inferència bicondicional.
- Inferència por reducció a l'absurd.

NOTA: També es pot demostrar $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow R$ sense inferència: provant que $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow R$ és tautologia mitjançant la taula de veritat.

Inferència directa

La inferència directa consisteix a deduir la conclusió directament a partir de las premisses, fent servir una sèrie de regles anomenades lleis d'inferència. Són les següents:

1. Llei de les premisses: Qualsevol premissa pot ser utilitzada en qualsevol pas del procés d'inferència.
2. Llei de la unió: Si en un pas de la inferència es té la premissa P i en un altre la premissa Q, aleshores es pot introduir com a nova premissa $P \wedge Q$.
3. Llei d'inserció de tautologies: En qualsevol pas pot introduir-se una tautologia com a premissa.
4. Llei d'ús d'equivalències lògiques: Qualsevol forma proposicional pot ser substituïda per una altra d'equivalent.
5. Llei d'ús de les implicacions lògiques: Si es té com a premissa l'antecedent d'una implicació lògica, aleshores se'n pot concloure el conseqüent i introduir-lo com a nova premissa.

Implicacions lògiques més usuals

1. Regla de la simplificació:
   - $P \wedge Q \Rightarrow P$
   - $P \wedge Q \Rightarrow Q$
2. Regla de l'addició:
   - $P \Rightarrow P \vee Q$
3. Regla del condicional:
   - $Q \Rightarrow (P \to Q)$
4. Sil·logisme hipotètic:
   - $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$
5. Sil·logisme disjuntiu:
   - $(P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R \vee S$
   - $(P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow (P \vee Q) \to (R \vee S)$

Implicacions lògiques més usuals

6. Modus ponendo ponens (o modus ponens):
   - $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$
7. Modus tollendo tollens (o modus tollens):
   - $(P \rightarrow Q) \wedge \rceil Q \Rightarrow \rceil P$
8. Modus tollendo ponens:
   - $(P \vee Q) \wedge \rceil P \Rightarrow Q$
   - $(P \vee Q) \wedge \rceil Q \Rightarrow P$

Exemple

Demostreu que a partir de les premisses

$$P1 : p \to q \quad P2 : p \leftrightarrow \rceil r \quad P3 : \rceil q$$

es dedueix la conclusió r.

P1:	$p \to q$	
P2:	$p \leftrightarrow \rceil r$	
P3:	$\rceil q$	
P4:	$(p \to q) \wedge \rceil q$	Llei de la unió (1,3)
P5:	$\rceil p$	Modus tollens (4)
P6:	$(p \to \rceil r) \wedge (\rceil r \to p)$	Condicional-bicondicional (2)
P7:	$\rceil r \to p$	Simplificació (6)
P8:	$(\rceil r \to p) \wedge \rceil p$	Llei de la unió (7,5)
P9:	$\rceil \rceil r$	Modus tollens (8)
P10:	r	Propietat de la doble negació (9)

Inferència condicional

La inferencia condicional se basa en la equivalència

$$P \to (Q \to R) \equiv P \wedge Q \to R$$

i pot aplicar-se quan la conclusió que s'ha de deduir siga una forma condicional:

Quan la conclusió siga una expressió condicional $Q \to R$:

1. s'afegirà Q al conjunt de premisses i
2. es deduirà R per inferència directa.

Exemple

Anem a veure que podem deduir $q \to p$ de les següents premisses:

$$P1 : u \to r \quad P2 : (r \wedge s) \to (p \vee t) \quad P3 : q \to (u \wedge s) \quad P4 : \rceil t$$

P1:	$u \to r$	
P2:	$(r \wedge s) \to (p \vee t)$	
P3:	$q \to (u \wedge s)$	
P4:	$\rceil t$	
P5:	q	(Premissa auxiliar Inf. Condicional)
P6:	$[q \to (u \wedge s)] \wedge q$	Llei de la unió (2,5)
P7:	$u \wedge s$	Modus ponens (6)
P8:	u	Simplificación(7)
P9:	$(u \to r) \wedge u$	Llei de la unió (1,8)
P10:	r	Modus ponens (9)
P11:	s	Simplificació (7)
P12:	$r \wedge s$	Llei de la unió (10,11)
P13:	$[(r \wedge s) \to (p \vee t)] \wedge (r \wedge s)$	Llei de la unió (2,12)
P14:	$p \vee t$	Modus ponens (13)
P15:	$(p \vee t) \wedge \rceil t$	Llei de la unió (14, 4)
P16:	p	Modus tollendo ponens (15)
C:	$q \to p$	Per Inf. Condicional

Simplificació de la notació

Per simplificar la notació i estalviar espai en aplicar ≪Modus ponens≫, en comptes d'introduir prèviament una premissa mitjançant la ≪Llei de la Unió (a,b)≫, es podrà escriure directament ≪Modus ponens (a,b)≫. Anàlogament es procedirà amb ≪Modus tollens≫ i ≪Modus tollendo ponens≫. L'exemple anterior quedaria:

P1:	$u \to r$	
P2:	$(r \wedge s) \to (p \vee t)$	
P3:	$q \to (u \wedge s)$	
P4:	$\rceil t$	
P5:	q	(Premissa auxiliar Inf. Condicional)
P6:	$u \wedge s$	Modus ponens (3,5)
P7:	u	Simplificació (6)
P8:	r	Modus ponens (1,7)
P9:	s	Simplificació (6)
P10:	$r \wedge s$	Llei de la unió (8,9)
P11:	$p \vee t$	Modus ponens (2,10)
P12:	p	Modus tollendo ponens (11,4)
C:	$q \to p$	Per Inf. Condicional

Inferència bicondicional

La inferència bicondicional s'utilitza quan la conclusió que s'ha de deduir és una expressió del tipus $P \leftrightarrow Q$. Es fa servir l'equivalència condicional-bicondicional:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P).$$

Quan la conclusió siga una expressió bicondicional $P \leftrightarrow Q$:

1. es prova que de les premisses s'infereix l'expressió condicional $P \rightarrow Q$ (condicional directe) i
2. es fa el mateix amb $Q \rightarrow P$ (condicional recíproc).

Inferència per reducció a l'absurd

Aquest mètode es basa en l'equivalència

$$(P \wedge \rceil Q) \rightarrow \phi \Leftrightarrow P \rightarrow Q.$$

Per provar que de P es dedueix Q, suposem que P és cert i Q és fals i, si a partir d'ací s'arriba a un absurd (contradicció), aleshores és que Q ha de ser cert.

En la pràctica, si Q és la conclusió que s'ha de demostrar, introduirem $\rceil Q$ com a nova premissa e intentarem arribar a una contradicció.

Exemple

Demostrem por reducció a l'absurde que a partir de les premisses

$$P1 : \rceil p \rightarrow q \wedge \rceil s \quad P2 : p \rightarrow r \quad P3 : \rceil q$$

es dedueix la conclusió r.

P1:	$\rceil p \rightarrow q \wedge \rceil s$	
P2:	$p \rightarrow r$	
P3:	$\rceil q$	
P4:	$\rceil r$	Premissa auxiliar reducció a l'absurde
P5:	$\rceil p$	Modus tollens (2,4)
p6:	$q \wedge \rceil s$	Modus ponens (1,5)
P7:	q	Simplificació (6)
P8:	$q \wedge \rceil q$	Lley de la unió (3,7)
P9:	ϕ	Propietat de la negació (8)

Podem concloure, per tant, que r és certa.

1. Lògica proposicional

2. **Lògica de predicats**

3. El Principi d'Inducció

Motivació de la lògica de predicats

La lògica proposicional vista fins ara resulta insuficient per justificar raonaments del tipus

«Tots els múltiples de 4 són divisibles per 2.
24 és múltiple de 4.
Per tant, 24 és divisible per 2.»

ja que no és possible expressar que dues proposicions diferents contenen elements anàlegs. En el nostre cas: «ser divisible per 2» o «ser múltiple de 4».
Tampoc no resulta suficientment flexible per poder-se aplicar tant a individus como a col·lectivitats d'individus (per exemple: «tots els múltiples de 4» o «alguns múltiples de 4»).
Per aquests motius s'introdueix la *Lògica de Predicats* o *Càlcul de Predicats*.

Predicats

En Lògica de predicats es distingueix entre les *propietats* anomendades *predicats* i els *objectes* als que aquestes propietats fan referència (anomenats *termes*).

Exemples de predicats podrien ser:

(a) . . . es roig.

(b) . . . té el nas llarg.

(c) . . . és múltiple de 4.

(d) . . . és divisible per 2.

(e) . . . és més alt que . . ..

Els espais . . . poden ser «emplenats» per noms d'objectes apropiats per formar una proposició, que pot ser certa o falsa en el sentit usual. Per exemple, en (a): «el cotxe es roig», o en (c): «24 és múltiple de 4», o en (d) «Joan és més alt que Pere» .

Notació

- Per referir-nos als *predicats* farem servir lletres majúscules:

  R : «es roig/roja»

  N : «té el nas llarg»

  M : «és múltiple de 4»

  D : «és divisible per 2»

- Les lletres minúscules denotaran objectes particulars (o individus). Poden ser constants que simbolitzen *termes de caràcter concret* o variables que simbolitzen *termes de caràcter arbitrari* o genèric. Per exemple:

  c : «aquest cotxe»

  j : «Joan»

  p : «Pere»

  x : (variable)

Notació

Amb la notació anterior,

$$\ll x \text{ és roig} \gg \text{ es representarà per } R(x)$$

on x pot ser reemplaçat per qualsevol objecte o individu.

$R(x)$ no és, en si mateixa, una proposició, ja que no pot ser declarada certa ni falsa. Tanmateix, sí que ho és si la *variable* x se substitueix per un objecte particular:

$R(c)$: ≪aquest cotxe és roig≫ $N(j)$: ≪Joan té el nas llarg≫

$M(24)$: ≪24 és múltiple de 4≫ $A(j, p)$ ≪ Joan és més alt que Pere≫

Anomenarem *univers* a la classe d'objectes o individus que estem considerant, sobre els que enunciem algún predicat.

Quantificador universal

Per exemple, si considerem l'univers format pels nombres $2, 4$ i 6, podem considerar el predicat:

$P(x)$: «x és múltiple de 2»

observem que ***tots** els elements de l'univers fixat cumpleixen la propietat P* (ja que $P(2)$, $P(4)$ i $P(6)$ són proposicions certes). Per a representar aquesta situació utilitzarem:

El símbol $\forall$ es denomina **quantificador universal**

$\forall x$ significa «per a tot x».

Així, la expressió anterior

***Per a tot** element de l'univers $\mathcal{U}$ es cumpleix la propietat P*

(o ***Tots** els elements de l'univers cumpleixen la propietat P*)

es simbolitza :

$$\forall x\, P(x)$$

Quantificador existencial

Si considerem de nou l'univers format pels nombres $2, 4$ i 6 i considerem el predicat:

$Q(x)$: «x és múltiple de 3»

observem que ***alguns*** *dels elements de l'univers fixat cumpleixen la propietat Q* (ja que al menys $Q(6)$ és certa). Per a representar aquesta situació utilitzarem:

> El símbol $\exists$ es denomina **quantificador existencial**
>
> $\exists x$ significa «existeix x».

Així, la expressió anterior

Existeix *algún element de l'univers que cumpleix la propietat Q*

(o ***Alguns*** *elements de l'univers cumpleixen la propietat Q*)

es simbolitza :

$$\exists x\, Q(x)$$

Funcions proposicionals

Un predicat pot tenir més d'una variable. Per exemple, en l'univers dels nombres enters:

$T(x, y)$: «x és múltiple de y»

$T(10, 5)$ és la proposició «10 és múltiple de 5".

Definició

Una funció proposicional en el càlcul de predicats és una expressió del tipus $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on P és un predicat i $x_1, x_2, \dots, x_n$ són les variables.

Una funció o forma proposicional passa a ser una proposició quan:

- es substitueixen les variables per termes concrets, o
- quantifiquem les variables (amb $\forall$ o $\exists$).

Sil·logismes aristotèlics

Per a formular expressions en les que apareixen quantificadors i varios predicats, són útils els següents exemples generals (on A i B són predicats):

- "Tots els elements de l'univers que cumpleixen A cumpleixen B"

  se simbolitza

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$$

Exemple:

En l'univers format per tots els humans, la proposició "Tots els fiòsofs són savis" es pot simbolitzar

$$\forall x(F(x) \rightarrow S(x)),$$

on F és el predicat "ser fiòsof" i S és el predicat "ser savi".

Sil·logismes aristotèlics

- "Cap element de l'univers que cumpleix A cumpleix B"

  se simbolitza
  $$\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$$
  Nota: Com vorem més endavant esta expressió és equivalent a
  $$\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

  Exemple:
  En l'univers format per tots els humans, la proposició "Cap sospitós no és l'assassí" es pot simbolitzar
  $$\neg\exists x(S(x) \wedge A(x)),$$
  on S és el predicat "ser sospitós" i A és el predicat "ser l'assassí".

Sil·logismes aristotèlics

- "Alguns elements de l'univers que cumpleixen A cumpleixen B"

  se simbolitza

$$\exists x(A(x) \wedge B(x))$$

  Exemple:

  En l'univers format per tots els humans, la proposició "Alguns grecs són filòsofs" es pot simbolitzar

$$\exists x(G(x) \wedge F(x)),$$

  on G és el predicat "ser grec" i F és el predicat "ser filòsof".

Sil·logismes aristotèlics

- "Alguns elements de l'univers que cumpleixen A no cumpleixen B"

  se simbolitza
  $$\exists x(A(x) \wedge \rceil B(x))$$

  Exemple:

  En l'univers format per tots els humans, la proposició "Alguns alumnes no tenen permis de conduir" es pot simbolitzar

  $$\exists x(A(x) \wedge \rceil P(x)),$$

  on A és el predicat "ser alumne" i P és el predicat "tenir permis de conduir".

Inferència en el càlcul de predicats

El procés d'inferència en el càlcul de predicats és anàleg al vist per al càlcul proposicional, però s'hi afegeixen algunes equivalències, implicacions i lleis d'inferència que són específiques per als quantificadors.

EQUIVALÈNCIES I IMPLICACIONS:

- Negació de quantificadors:
  - $\rceil \forall x P(x) \equiv \exists x \rceil P(x)$
  - $\rceil \exists x P(x) \equiv \forall x \rceil P(x)$
- Disjunció i conjunció:
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
  - $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$
  - $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$
  - $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

- Lleis de De Morgan generalitzades:
  - $\rceil \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x(\rceil P(x) \vee \rceil Q(x))$
  - $\rceil \forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x(\rceil P(x) \wedge \rceil Q(x))$
  - $\rceil \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x(\rceil P(x) \vee \rceil Q(x))$
  - $\rceil \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x(\rceil P(x) \wedge \rceil Q(x))$

Lleis d'inferència específiques del càlcul de predicats

1. Especificació universal:
   - Del predicat $\forall x P(x)$ es pot deduir $P(a)$ per a qualsevol membre a de l'univers.
2. Especificació existencial:
   - De $\exists x P(x)$ podem deduir $P(a)$ per a algun membre concret a de l'univers.
3. Generalització universal:
   - Si $P(y)$ és cert per a qualsevol membre y de l'univers, aleshores podem deduir $\forall x P(x)$.
4. Generalització existencial:
   - Si $P(a)$ és cert per a un membre concret a de l'univers aleshores podem deduir $\exists x P(x)$.

Exemple

Provem que la següent deducció és correcta: Alguns aficionats al futbol són també aficionats al bàsquet. Els aficionats al futbol no van al cine els diumenges per la vesprada. Per tant, algun aficionat al bàsquet no va al cine els diumenges per la vesprada.

$F(x)$: «x és aficionat al futbol»
$B(x)$: «x és aficionat al basquet»
$C(x)$: «x va al cine els diumenges per la vesprada»

Les premisses seran:

- $\exists x(F(x) \wedge B(x))$
- $\forall x(F(x) \rightarrow \rceil C(x)$

i la conclusió ha de ser $\exists x(B(x) \wedge \rceil C(x))$.

Exemple

P1:	$\exists x(F(x) \wedge B(x))$	
P2:	$\forall x(F(x) \rightarrow \rceil C(x))$	
P3:	$F(a) \wedge B(a)$	Especificació existencial (1)
P4:	$F(a) \rightarrow \rceil C(a)$	Especificació universal (2)
P5:	$F(a)$	Simplificació (3)
P6:	$\rceil C(a)$	Modus ponens (4,5)
P7:	$B(a)$	Simplificació (3)
P8:	$B(a) \wedge \rceil C(a)$	Llei de la unió (7,6)
P9:	$\exists x(B(x) \wedge \rceil C(x))$	Generalització existencial (8)

El Principi d'Inducció

Principi d'Inducció

Siga $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ el conjunt dels nombre naturals, i E una propietat dels nombres naturals que pot ser certa o no per a cada nombre natural n. El principi d'inducció matemàtica afirma que si:

- **i)** $E(1)$ és certa, es a dir, si el nombre natural 1 verifica la propietat E, i
- **ii)** suposant que $E(n)$ és certa, per a un nombre natural qualsevol n, es pot provar que $E(n+1)$ també és certa (hipotesi inductiva),

aleshores, qualsevol nombre natural verifica la propietat, és a dir, la propietat E és certa per a tots els nombres naturals:

$$\forall n \;\; E(n)$$

El Principi d'Inducció

Observació:
Si la hipótesi i), "$E(1)$ és certa", es canvia per "$E(n_0)$ és certa", amb $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \neq 1$, aleshores el Principi d'Inducció permet concloure que la propietat E és cierta per a qualsevol nombre natural $n \geq n_0$.

Expressió del Principi d'Inducció amb lògica de predicats

Si $E(n)$ és una funció proposicional en l'univers dels nombres naturals, aleshores:

$$E(1) \wedge (E(n) \rightarrow E(n+1)) \Rightarrow \forall n \;\; E(n).$$

El mètode d'Inducció. Exemple

Així, per a provar que tots els nombres naturals cumpleixen una determinada propietat seguirem els següents passos:

Pas 1: Es prova que la propietat és certa per a $n = 1$

Pas 2: Es prova que si la propietat és certa per a un valor k, aleshores és certa per al valor $(k + 1)$

En el Pas 2, la suposició de que la propietat és certa per a un valor arbitrari k es coneix com *Hipòtesi d'inducció (H.I).*

Exemple. Demostrem que per a tot nombre natural n es cumpleix que

$$1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Procedim pel mètode d'inducció:

1. La propietat és certa per a $n = 1$ ja que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

2. Suposem que la fòrmula és certa per a un nombre natural qualsevol k. Es a dir, suposem que

$$1 + 2 + 3 + \cdots k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (H.I)$$

Hem de provar que és certa per a $(k+1)$, o siga, hem de provar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Anem a vore-ho:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1)$$

i aplicant la hipòtesi d'inducció *(H.I)*

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Fent ara operacions obtenim el resultat esperat

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$