Pràctiques de Matemàtica Discreta: Introducció a la teoria de grafs

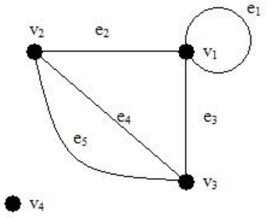
Sessió 2: successions gràfiques i tipus de grafs

Grau d'un vèrtex

Recorda:

Definició

El **grau** d'un vèrtex v, denotat $\deg(v)$, és el nombre d'arestes que incideixen en ell (es compten 2 vegades quan són bucles).



En aquest graf:

- $\deg(v_1) = 4$
- $\deg(v_2) = 3$
- $\deg(v_3) = 3$
- $\deg(v_4) = 0.$

Fórmula dels graus

Propietat

Si $G = (V, A, f)$ és un graf llavors:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot \text{n}^{\text{o}} \text{ de arestes},$$

és a dir, en qualsevol graf, **la suma dels graus de tots els vèrtexs és igual al doble del nombre d'arestes**.

Conseqüències immediates:

- La suma dels graus dels vèrtexs d'un graf és un nombre parell.

- Tot graf conté un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

Seqüències gràfiques

Definició

Una successió finita d'enters no negatius es diu que és una **seqüència gràfica** si existeix un graf (no dirigit) simple i sense bucles tal que aquesta seqüència és exactament la llista de graus dels seus vèrtexs.

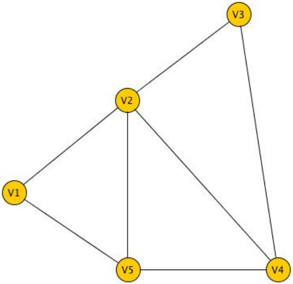
Exemple

¿Són seqüències gràfiques les següents successions?

1. $(4, 3, 3, 2, 2)$
2. $(3, 3, 3, 2, 2)$
3. $(6, 3, 3, 2, 2)$

Seqüències gràfiques

1. $(4, 3, 3, 2, 2)$ Sí:



2. $(3, 3, 3, 2, 2)$ No. La suma dels valors no és parell.
3. $(6, 3, 3, 2, 2)$ No. No podem tenir un vèrtex de grau 6 si només tenim 5 vèrtexs (no estan permesos bucles ni arestes múltiples!).

Seqüències gràfiques

Teorema de Hakimi

Una successió decreixent d'enters no negatius

$$(s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

és una seqüència gràfica si i solament si

$$(t_1 - 1, t_2 - 1, \ldots, t_s - 1, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

també és una seqüència gràfica.

Seqüències gràfiques

Algorisme per a determinar si una seqüència decreixent d'enters no negatius és una seqüència gràfica o no:

Algorisme de Hakimi

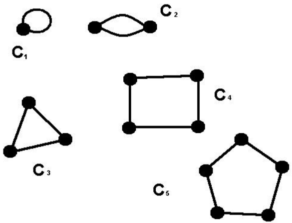
1. Comença amb una seqüència decreixent d'enters no negatius

$$(s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

   i amb un graf nul (sense arestes) amb tants vèrtexs com a nombres hi ha en la seqüència.
2. Elimina el major valor de la seqüència (a l'esquerra), s, i resta 1 als s valors següents de la seqüència. Si la seqüència obtinguda té algun enter negatiu, la seqüència inicial no és gràfica. En cas contrari anar al pas següent.
3. Connecta amb arestes el vèrtex associat amb s amb els vèrtexs associats amb $t_1, t_2, \ldots, t_s$.
4. Si la llista obtinguda només té zeros, FI (hem obtingut el graf desitjat). En cas contrari, si **no és** decreixent llavors reordena-la (**anant amb compte en no barrejar els noms dels vèrtexs!**) i torna al pas 2.

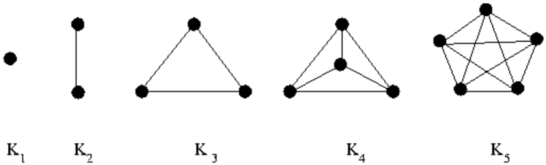
Tipus de grafs

- Recorda: un **graf** és **simple** si no té arestes paral·leles.
- Un **graf** és **nul** si no té arestes, és a dir, consta únicament d'un conjunt de vèrtexs aïllats.
- El **graf trivial** és el que consta d'un únic vèrtex aïllat.
- Un **graf** és **regular** si tots els seus vèrtexs tenen el mateix grau. Si aqueix grau comú és k es diu que el graf és ***k*-regular**. Per exemple els següents grafs són tots 2-regulars:



Tipus de grafs

- Un **grafo** és **complet** si cada vèrtex és adjacent a tots els altres (és a dir, qualsevol parell de vèrtexs diferents estan units per almenys una aresta).
- Denotarem $\mathbf{K_n}$ al graf complet, simple i sense bucles de n vèrtexs:



Tipus de grafs

- Un **graf** $G = (V, A, f)$ és **bipartit** si el conjunt de vèrtexs V es pot dividir en dos subconjunts V_1 i V_2 que no tenen elements en comú, de manera que cada aresta del graf uneix un vèrtex de V_1 amb un de V_2.
- Cridem graf **bipartit complet** $\mathbf{K_{n,m}}$ al graf simple i bipartit en el qual V_1 té n vèrtexs, V_2 té m vèrtexs i cada vèrtex de V_1 és adjacent a tots i cadascun dels vèrtexs de V_2.