Pràctica 2: Estudi i representació de funcions

En aquesta pràctica veurem com definir funcions d'una variable amb *Mathematica* i com representar-les gràficament amb l'ordre Plot. Aprendrem també com modificar l'estil de la representació, i com localitzar punts destacats en una gràfica. L'última secció la dedicarem al càlcul i representació d'asímptotes de funcions.

1. Definició de funcions d'una variable

En la pràctica 1, ja hem vist algunes funcions matemàtiques que estan implementades en *Mathematica,* com ara *Cos*[*x*], *Sin*[*x*], *Tan*[*x*], *Exp*[*x*], *Log*[*x*], etc. *Mathematica* permet també què l'usuari definisca les seues pròpies funcions. La sintaxi per a definir una funció d'una variable és la següent:

Nom[x_]:=expressió

on:

- Nom és un nom o una lletra que designa a la funció (no pot tenir espais en blanc ni començar per un nombre ni ser una ordre de *Mathematica*).
- x és la variable de la funció (pot ser una altra lletra). Important: en la definició d'una funció darrere de la variable ha d'aparèixer sempre un guió baix _
- expressió és una expressió matemàtica que depèn de la variable x.

Com a exemple, definirem la funció $f(x) = x^2 - 5$ amb *Mathematica* i calcularem el seu valor en $x = 3$:

```
In[1]:= f[x_] := x^2 - 5

In[2]:= f[3]

Out[2]= 4
```

Recordeu que per a executar les ordres hem de prémer enter+⇑ o bé la tecla intro.

També podem definir funcions més complexes que depenguen d'altres funcions ja implementades. Per exemple.

```
In[3]:= g[x_] := (Cos[x] - Sin[x]) / x
                  coseno   seno
```

i calcular els valors que pren la funció, per exemple

```
In[4]:= g[3]

Out[4]= 1/3 (Cos[3] - Sin[3])
```

```
In[5]:= N[g[3]]
        valor numérico

Out[5]= -0.377038
```

2. Traçat de gràfiques

Tenir l'opció de dibuixar una funció ens permetrà fer-nos una idea de moltes propietats de la funció que de forma analítica són més costoses d'esbrinar. Així, amb la gràfica d'una funció podem tenir una idea del seu domini, la seua imatge, quan creix o decreix, on té màxims o mínims, com es corba, si té asímptotes verticals, horitzontals o obliqües, etc. Ens proposem ara analitzar amb detall les utilitats de *Mathematica* a l'hora de fer gràfiques de funcions d'una variable.

2.1. Representació de funcions d'una variable

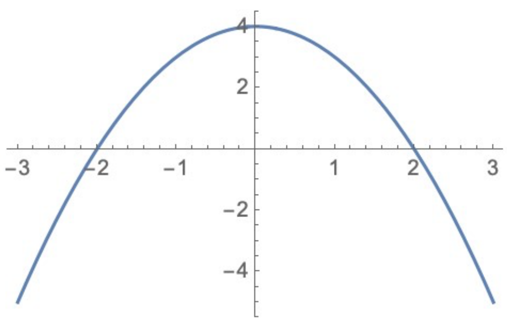
Per a representar una funció d'una variable definida de manera **explícita**, $y = f(x)$, *Mathematica* utilitza l'ordre **Plot**. Aquesta ordre consta, almenys, de dos arguments: una expressió de la funció que volem representar, expressió, i un rang escrit entre claus compost per la variable de l'expressió, x, i els extrems de l'interval on varia, això és, $x_{\text{mín}}$ i $x_{\text{màx}}$:

Plot[expressió, $\{x, x_{\text{mín}}, x_{\text{màx}}\}$]

Per exemple, per a representar la gràfica de la paràbola $\mathrm{y} = -x^2 + 4$ en l'interval $[-3,3]$ utilitzem la instrucció següent:

```
In[6]:= Plot[-x^2 + 4, {x, -3, 3}]
        representación gráfica
```

Out[6]=

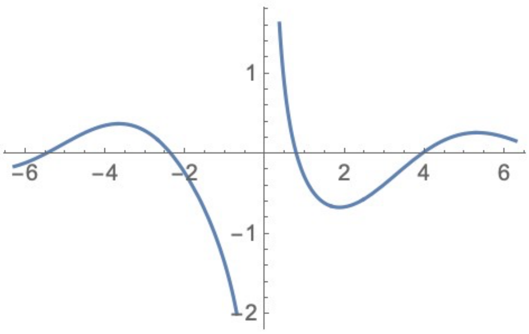


També podem representar qualsevol funció que tinguem prèviament definida. Per exemple, podem representar la funció $g(x)$ que hem introduït abans

```
In[7]:= Plot[g[x], {x, -2 π, 2 π}]
        representación gráfica
```

El nombre π podeu seleccionar-lo en la paleta *Ajudant de classe* o bé escriure Pi.

Out[7]=



Mathematica també permet representar corbes definides de manera implícita, com per exemple la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 1$, mitjançant l'ordre ContourPlot, o corbes donades en forma paramètrica amb l'ordre ParametricPlot. No analitzarem aquestes ordres gràfiques, ja que al llarg de les pràctiques només ens apareixeran funcions definides de forma explícita, $y = f(x)$.

2.2. Modificació de l'estil d'una gràfica: opcions

L'ordre Plot té nombroses opcions que permeten modificar el gràfic que es mostra per pantalla. Aquestes opcions s'inclouen en l'ordre Plot de la següent manera:

Plot[expressió, {x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}, opció]

Si no s'especifica una determinada opció, s'usa el seu valor per defecte. Es poden incloure diverses opcions separades per comes. Vegem algunes de les opcions més usuals:

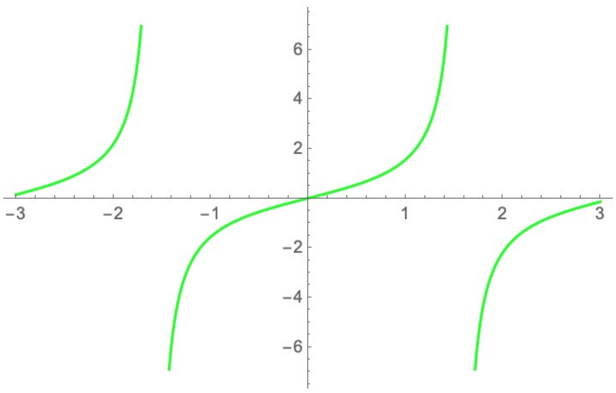
- **Canviar el color del gràfic**

Plot[expressió, {x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}, PlotStyle−> RGBColor[a, b, c]]

L'elecció del color amb el model RGB es pot substituir per l'opció de colors predefinits en *Mathematica*, com ara: Red, Green, Blue, Black, White, Yellow, etc.

```
In[8]:= Plot[Tan[x], {x, -3, 3}, PlotStyle → Green]
        repr···  tangente           estilo de repre···  verde
```

Out[8]=



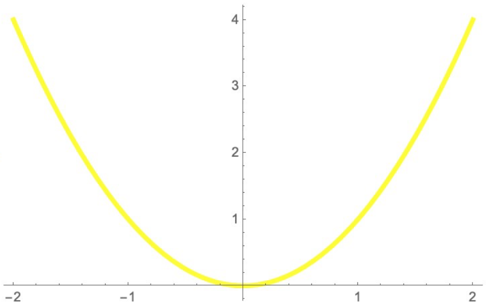
Canviar el gruix del gràfic

Plot[expressió, {x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}, PlotStyle –> Thickness[a]]

l'argument a és un nombre entre 0 i 1 que indica la raó de l'ample de línia respecte a tot el gràfic. L'opció de color i la de gruix de PlotStyle també es poden usar simultàniament si s'especifiquen en una llista (incloses entre claus):

```
In[9]:= Plot[x^2, {x, -2, 2}, PlotStyle → {Yellow, Thickness[0.01]}]
        representación gráfica   estilo de represe··  amarillo  grosor
```

Out[9]=



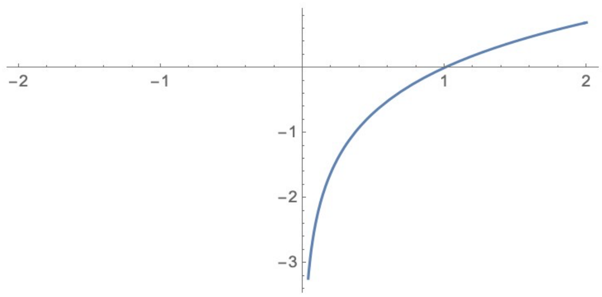
Proporció entre la longitud dels eixos

Plot[expressió,{x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}, AspectRatio –> k]

l'argument k és un nombre major que zero que es correspon amb el quocient entre la longitud de l'eix y i la longitud de l'eix x. Per exemple, si triem k= 0,5 llavors la longitud de l'eix y seria la meitat que la de l'eix x:

```
In[10]:= Plot[Log[x], {x, -2, 2}, AspectRatio → 0.5]
         repr···  logaritmo              cociente de aspecto
```

Out[10]=



En comptes de k es pot posar com a argument l'opció Automatic, que dibuixa els eixos de tal manera que tinguen la mateixa escala:

```
In[11]:= Plot[Log[x], {x, -2, 2}, AspectRatio → Automatic]
         repr···  logaritmo              cociente de aspecto  automático
```

- ### Rang de l'eix y

Plot[expressió, {x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}, PlotRange –> {a, b}]

els valors a i b determinen l'interval $[a, b]$ de l'eix y que apareixerà en el gràfic.

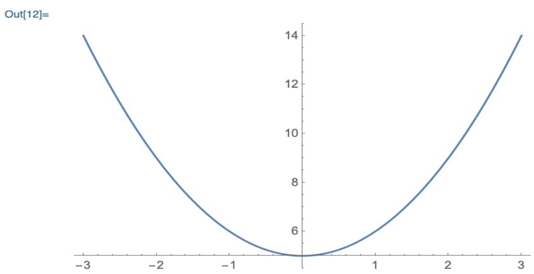
- ### Punt de tall dels eixos

Plot[expressió,{x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}, AxesOrigin –> {a, b}]

els valors a i b determinen el punt de tall (a, b) dels eixos x i y.

Per exemple, dibuixarem la funció $x^2 + 5$ en l'interval $[-3{,}3]$ amb Plot sense especificar aquesta opció:

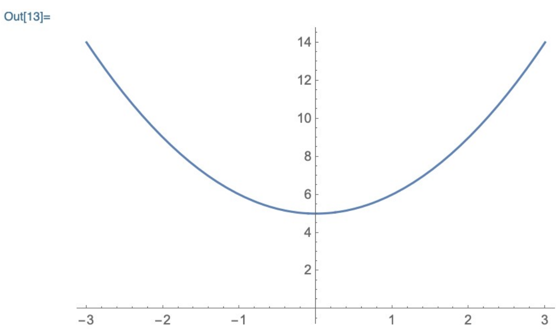
```
In[12]:= Plot[x^2 + 5, {x, -3, 3}]
         representación gráfica
```



Podriem pensar (erròniament) que aquesta funció s'anul·la en $x = 0$, però si substituïm comprovem que no és així. Què ha passat?

Si ens fixem, la intersecció de l'eix x amb l'eix y no es produeix en el punt (0,0) com és l'habitual. *Mathematica* ha estimat que per a una millor visió del gràfic, era millor pujar l'eix x fins a una altura de 5 de tal manera que ha fixat el punt de tall dels eixos en el punt (0,5). Per a fixar com a origen de coordenades el punt (0,0) usarem l'opció AxesOrigin –> {0, 0}:

```
In[13]:= Plot[x^2 + 5, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0}]
         representación gráfica          origen de ejes
```



2.3. Gràfica de diverses funcions

Mathematica permet visualitzar simultàniament la gràfica de diverses funcions definides de manera explícita $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ en un mateix interval. N'hi ha prou amb introduir les diferents funcions en forma de llista com a primer argument de l'ordre Plot:

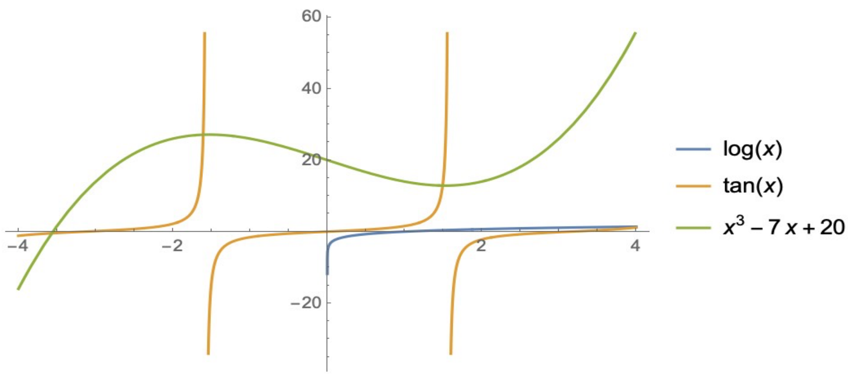
Plot[{$f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$},{x, $x_{\text{mín}}$, $x_{\text{màx}}$}]

Mathematica dibuixa cadascuna de les funcions d'un color diferent. Si volem identificar-les amb una llegenda, podem afegir l'opció PlotLegends –> "Expressions".

∗ **Exemple.** Dibuixa en un mateix gràfic les funcions $ln(x)$, $tan(x)$ i $x^3 - 7x + 20$ en l'interval $[-4{,}4]$.

```
In[14]:= Plot[{Log[x], Tan[x], x^3 - 7 x + 20}, {x, -4, 4}, PlotLegends → "Expressions"]
          repre···  logaritmo  tangente                        leyendas de representación
```

Out[14]=



2.4. Localització gràfica de punts destacats

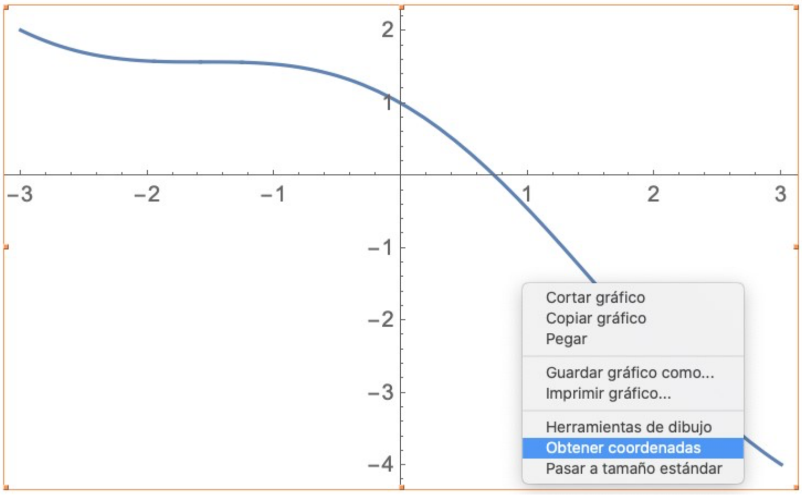
La possibilitat de representar gràficament una funció $y = f(x)$ serà de gran ajuda per a fer-nos una idea de les propietats de la funció i per a localitzar determinats punts destacats, si n'hi ha, com per exemple:

- Arrels d'una funció: valor reals x tals que $f(x) = 0$.
- Punts de tall entre dues funcions: valors reals x tals que $f(x) = g(x)$.
- Possibles extrems relatius de $f(x)$: valors reals x tals que $f'(x) = 0$.

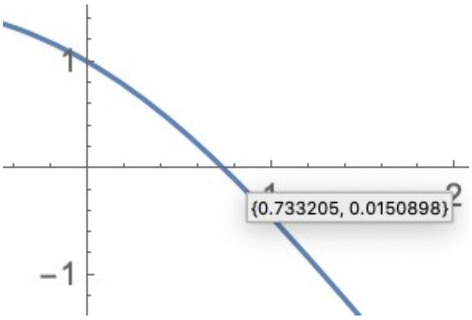
Quan fem una representació gràfica podem **mostrar les coordenades del cursor**. N'hi ha prou amb situar-nos sobre el gràfic i prémer amb el botó dret del ratolí per a triar aquesta opció. Per exemple, representarem la funció $cos(x) - x$:

```
In[15]:= Plot[Cos[x] - x, {x, -3, 3}]
          repr···  coseno
```

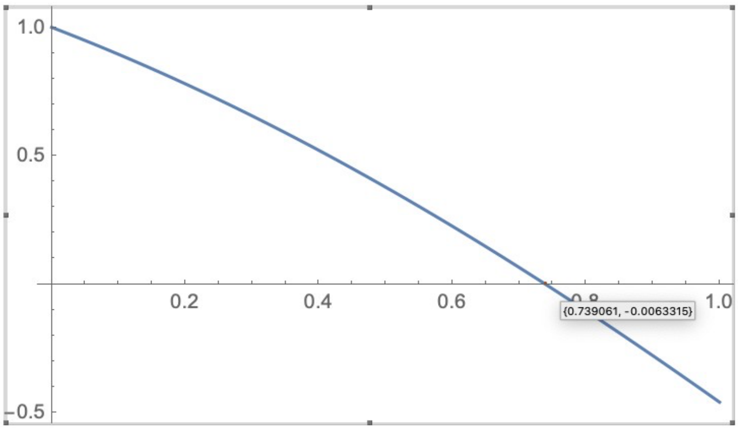
Out[15]=



Com s'aprecia en el dibuix, la funció $cos(x) - x$ té una arrel en l'interval [0,1], és a dir, un valor x en el qual la gràfica de la funció talla l'eix x. Si mostrem les coordenades, i posem el cursor sobre aquest punt, podem estimar que aquesta arrel és aproximadament 0,733:



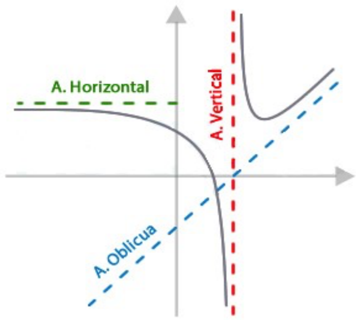
Si fem el dibuix amb x entre 0 i 1 podem acostar-nos una mica millor al punt:



En la Pràctica 3 veurem les ordres que posseeix *Mathematica* per a resoldre equacions (Solve, NSolve o FindRoot) i les usarem, amb l'ajuda de la representació gràfica, per a obtenir els punts destacats amb més precisió.

3. Asímptotes d'una funció

S'anomena **asímptota d'una funció** $f(x)$ a una recta la distància de la qual a la gràfica de $f(x)$ tendeix a zero, és a dir, la gràfica de la funció i la recta s'acosten indefinidament sense arribar a coincidir (la paraula *asímptota* prové del grec *asumptotos,* que significa 'sense trobar-se'). Tenint en compte que una asímptota és, en particular, una recta, se'n distingeixen tres tipus, horitzontals, verticals o obliqües:



Asímptotes horitzontals. Les asímptotes horitzontals d'una funció, si n'hi ha, són rectes horitzontals de la forma $y = a$, on $a \in \mathbb{R}$. Es defineixen de la següent forma:

Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ o $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ llavors $y = a$ és una **asímptota horitzontal** de $f(x)$

Una funció pot tenir com a molt dues asímptotes horitzontals: una per l'esquerra (quan x tendeix a $-\infty$) i una altra per la dreta (quan x tendeix a $+\infty$).

Asímptotes verticals. Les asímptotes verticals d'una funció, si n'hi ha, són rectes verticals de la forma $x = b$, on $b \in \mathbb{R}$. Es defineixen de la següent forma:

Si $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to b^+} f(x) = \pm\infty$ llavors $x = b$ és una **asímptota vertical** de $f(x)$

No hi ha restriccions quant al nombre d'asímptotes verticals que pot tenir una funció: hi ha funcions que no tenen asímptotes verticals, funcions que només en tenen una, funcions que en tenen dues i fins i tot funcions que en tenen infinites.

Asímptotes obliqües. Les asímptotes obliqües d'una funció, si n'hi ha, són rectes de la forma $y = mx + n$, amb $m, n \in \mathbb{R}$ i $m \neq 0$. El càlcul es fa així:

Calculem $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si $m \in \mathbb{R}$ i $m \neq 0$ calculem $n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$.
Si $n \in \mathbb{R}$ la recta $y = mx + n$ és una **asímptota obliqua** de $f(x)$ **per l'esquerra**

Si canviem $-\infty$ per $+\infty$ en els límits, obtenim la definició d'asímptota obliqua **per la dreta.** Una funció pot tenir, com a màxim, dues asímptotes obliqües diferents (una per l'esquerra de la seua gràfica i una altra per la dreta). D'altra banda, una funció no pot tenir alhora una asímptota horitzontal per l'esquerra i una obliqua per la esquerra (i el mateix per la dreta), així que si la funció té dues asímptotes horitzontals, no tindrà asímptotes obliqües (i al contrari).

3.1. Càlcul d'asímptotes usant límits

Asímptotes horitzontals o obliqües. Per a comprovar si una funció té asímptotes horitzontals o obliqües n'hi haurà prou amb calcular els límits que apareixen en les definicions anteriors. Per al càlcul de límits *Mathematica* disposa de l'ordre **Limit**:

Limit[$f(x)$, x −> a] Calcula el límit de $f(x)$ quan x tendeix al valor a.

Limit[$f(x)$, x −> a, Direction −> 1] Calcula el límit de $f(x)$ quan x tendeix al valor a *per l'esquerra*.

Limit[$f(x)$, x −> a, Direction −> −1] Calcula el límit de f (x) quan x tendeix al valor a *per la dreta*.

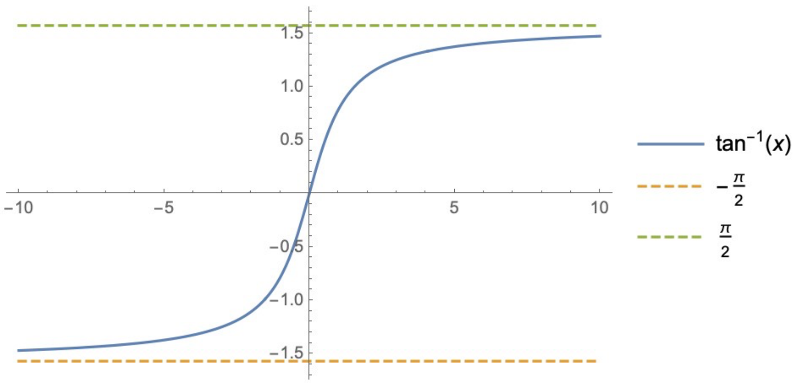
Si volem calcular el límit quan x tendeix a infinit, en comptes de posar a en l'ordre **Limit** posarem Infinity o ∞ (aquest símbol està en l'*Ajudant de classe*).

* **Exemple.** Vegem si la funció *arctan*(x) té asímptotes horitzontals o asímptotes obliqües:

```
In[16]:= Limit[ArcTan[x], x → -∞]
         límite  arco tangente
Out[16]=
         -π/2

In[17]:= Limit[ArcTan[x], x → +∞]
         límite  arco tangente
Out[17]=
         π/2
```

Per tant, *arctan*(x) té dues asímptotes horitzontals: $y = -\frac{\pi}{2}$ (per l'esquerra) i $y = \frac{\pi}{2}$ (per la dreta). En particular, com que té dues asímptotes horitzontals, aquesta funció no té asímptotes obliqües. Representarem *arctan*(x) juntament amb les seues asímptotes horitzontals:

```
In[18]:= Plot[{ArcTan[x], -π/2, π/2}, {x, -10, 10},
         repre···  arco tangente
          PlotStyle → {Automatic, Dashed, Dashed}, PlotLegends → "Expressions"]
          estilo de represe··  automático  rayado  rayado  leyendas de representación

Out[18]=
```



∗ **Exemple.** Vegem si la funció racional $q(x) = \frac{2x^3+7x^2}{x^2-3x+3}$ té asímptotes horitzontals o asímptotes obliqües:

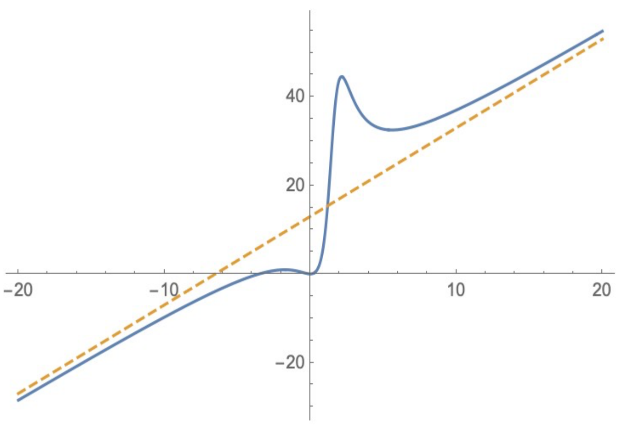
```
In[19]:= q[x_] := (2 x^3 + 7 x^2) / (x^2 - 3 x + 3)

In[20]:= Limit[q[x], x → -Infinity]
         límite            infinito

Out[20]=
         -∞

In[21]:= Limit[q[x], x → +Infinity]
         límite            infinito

Out[21]=
         ∞
```

Per tant, q (x) **no** té asímptotes horitzontals. Vegem ara si té asímptotes obliqües:

```
Limit[q[x] / x, x → -Infinity]
límite               infinito

2

Limit[q[x] - 2 x, x → -Infinity]
límite                  infinito

13
```

Per tant, la recta $y = 2x+13$ és una asímptota obliqua de $q(x)$ (per l'esquerra). A més, si calculem els mateixos límits però canviant $-\infty$ per $+\infty$ obtenim els mateixos valors. Per tant, aquesta recta és una asímptota obliqua de $q(x)$ tant per l'esquerra com per la dreta. Representarem la funció $q(x)$ juntament amb l'asímptota obliqua:

```
In[24]:= Plot[{q[x], 2 x + 13}, {x, -20, 20}, PlotStyle → {Automatic, Dashed}]
         representación gráfica                estilo de represe··· automático   rayado

Out[24]=
```



Asímptotes verticals. En el cas de les asímptotes verticals no coneixem per endavant els valors de b que apareixen en els límits de la definició. Els valors de b, *candidats a existència d'asímptota vertical*, són els següents:

- Valors que anul·len algun denominador de la funció. Per exemple, per a la funció $f(x) = \frac{x}{x-1}$ tenim un candidat a asímptota vertical en el punt $x = 1$.

- Extrems d'intervals del domini que no pertanyen al mateix domini. Per exemple, el domini de $f(x) = x \cdot ln(x)$ és l'interval $]0,+\infty[$. Per tant , $x = 0$ és un candidat a asímptota vertical per a aquesta funció.

Per tant, per a estudiar en quins valors pot tenir asímptotes verticals una funció, en calcularem primer el domini. *Mathematica* disposa de la següent ordre:

FunctionDomain$[f(x), x]$

∗ **Exemple.** Vegem si la funció $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ té asímptotes verticals.

Els valors que anul·len el denominador són $x = 1$ i $x = -1$. Com que és un quocient de dos polinomis, aquests són els únics valors que no pertanyen al domini de $f(x)$. Efectivament, si ho calculem amb *Mathematica* obtenim:

```
In[25]:= f[x_] := (x + 1) / (x^2 - 1)

In[26]:= FunctionDomain[f[x], x]
         dominio de función
Out[26]=
         x < -1 || -1 < x < 1 || x > 1
```

(el símbol | | és el **o** disjuntiu)

Per tant, el domini de $f(x)$ és, com ja sabíem, $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

Com que $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$ la discontinuïtat que hi ha en $x = -1$ desapareix en simplificar el quocient de polinomis. És el que es coneix com a *discontinuïtat evitable* (col·loquialment parlant, hi ha un "forat" en la gràfica de $f(x)$ en el punt $(-1,-1/2)$). Efectivament, si calculem el límit corresponent, veiem que $f(x)$ **no** té cap asímptota vertical en $x = -1$:

```
In[27]:= Limit[f[x], x → -1, Direction → 1]
         límite              dirección
Out[27]=
         -1/2

In[28]:= Limit[f[x], x → -1, Direction → -1]
         límite              dirección
Out[28]=
         -1/2
```

En canvi , $x = 1$ sí que és una asímptota vertical de $f(x)$:

```
In[29]:= Limit[f[x], x → 1, Direction → 1]
         límite              dirección
Out[29]=
         -∞
In[30]:= Limit[f[x], x → 1, Direction → -1]
         límite              dirección
Out[30]=
         ∞
```

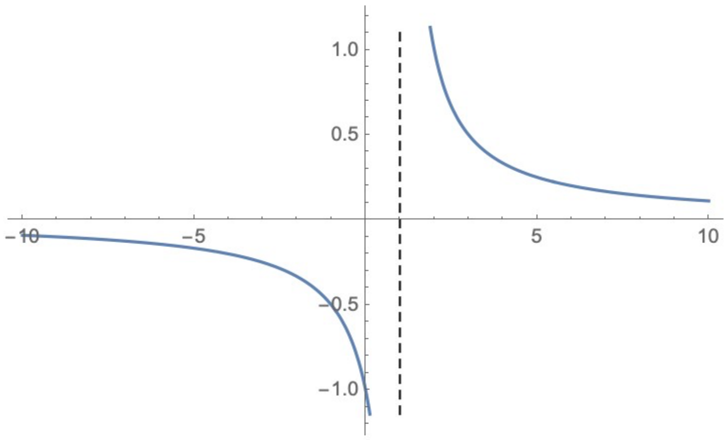
La representació d'asímptotes verticals, en ser rectes d'equació $x = a,\ x = b, \ldots$, no és immediata (almenys , a partir de la versió *11* de *Mathematica*). Per a dibuixar-les hem d'incloure en l'ordre Plot l'opció :

Exclusions −>{a, b, ...}

on els nombres entre claus són els valors de les asímptotes verticals. Podem afegir també l'opció ExclusionsStyle, que indica l'estil usat per a representar-les.

Vegem com usar aquestes opcions per a representar la funció $f(x)$ juntament amb la seua asímptota vertical $x = 1$:

```
In[31]:= Plot[f[x], {x, -10, 10}, Exclusions → {1}, ExclusionsStyle → Dashed]
         representación gráfica   exclusiones   estilo de exclusiones   rayado
Out[31]=
```



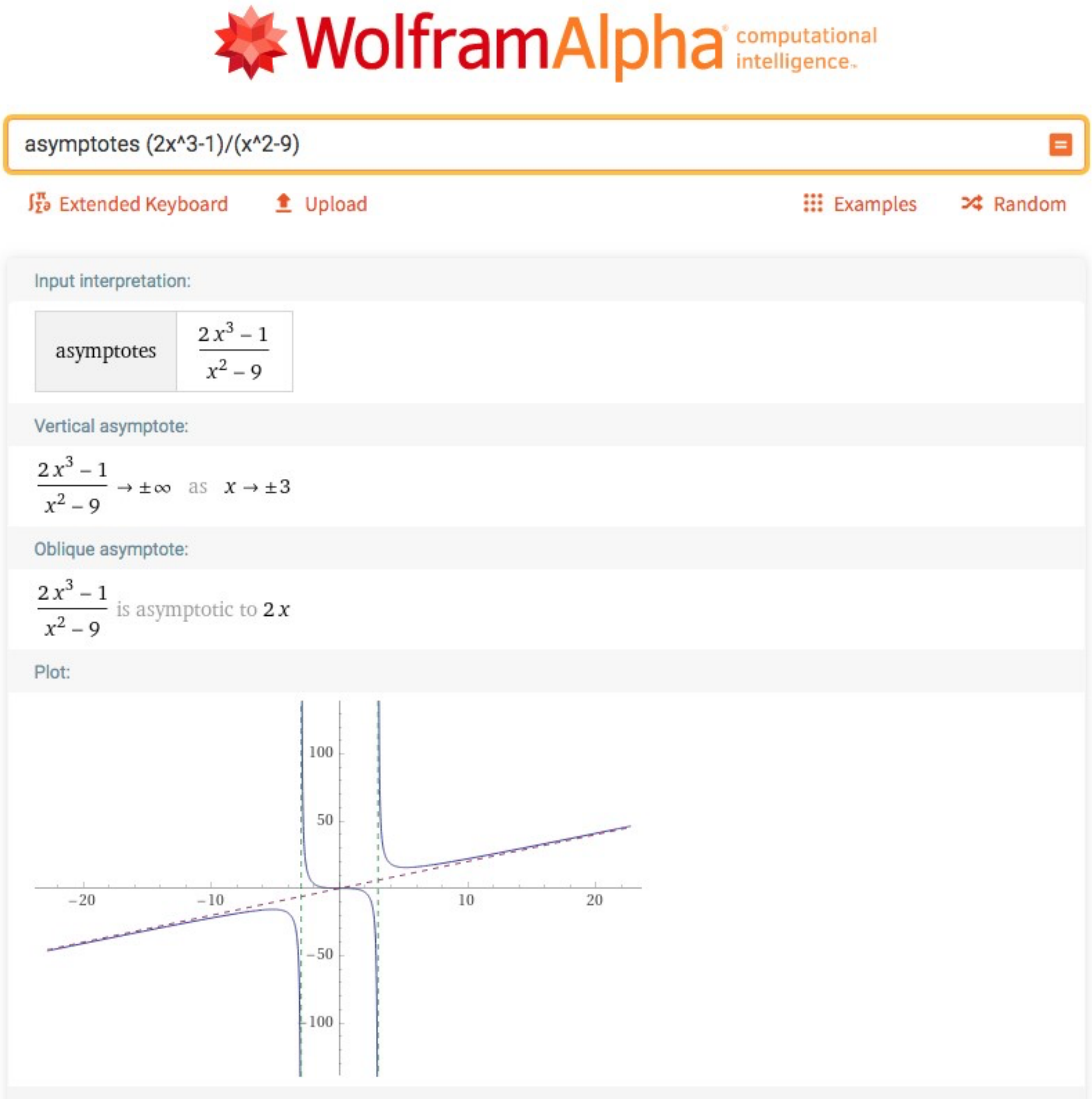
3.2. Càlcul d'asímptotes amb *Wolfram Alpha*

Mathematica no posseeix cap ordre específica per al càlcul d'asímptotes, però sí que és possible calcular-les, i obtenir una representació gràfica, usant *Wolfram Alpha*, el cercador en línia de Wolfram Research:

https://www.wolframalpha.com/

Wolfram Alpha respon a preguntes del llenguatge natural i du a terme càlculs de manera immediata usant codi de *Mathematica* .

Si volem que el cercador ens proporcione, si n'hi ha, les asímptotes d'una funció, escriurem Asymptotes i a continuació la funció. Com a exemple, calcularem les asímptotes de la funció $g(x) = \frac{2x^3-1}{x^2-9}$ usant *Wolfram Alpha*:



Per tant $g(x)$ té dues asímptotes verticals, $x = -3$ i $x = 3$, i una asímptota obliqua d'equació $y = 2x$. També ens proporciona una representació gràfica de la funció juntament amb les seues asímptotes. Com que en l'opció gratuïta del cercador no podem modificar-la, si volem visualitzar millor alguna part de la gràfica, n'hi haurà prou amb dibuixar-la amb *Mathematica*. La informació sobre els límits també podem contrastar-la usant *Mathematica*.

4. Funcions parelles i imparelles

A l'hora d'analitzar el domini i les propietats de les funcions resulta útil conèixer prèviament si es tracta de funcions parelles o imparelles per les propietats de simetria que presenten quan ho són.

Una **funció** és parella quan presenta simetria respecte de l'eix OX, és a dir ,

$$f(x) \text{ és } \textbf{parella} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(-x) = 0$$

Són exemples de funcions parelles les funcions constants, x^2 i $\cos(x)$.

I una **funció** és imparella quan és simètrica respecte de l'origen de coordenades, és a dir,

$$f(x) \text{ és } \textbf{imparella} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + f(-x) = 0$$

Són exemples de funcions imparelles x, x^3 i $\sin(x)$.

Per a comprovar amb *Mathematica* si una funció compleix alguna d'aquestes dues propietats de simetria, n'hi haurà prou amb que simplifiquem aquestes expressions usant l'ordre **Simplify** i comprovem si s'anul·len o no.