

# Modélisation Papier

Antonio Tavares, Julien Dallot

2 janvier 2022

Dans la suite du document, la variable  $x_{ij}$  désigne la sélection de l'arc  $ij \in A$  dans le chemin de  $s$  à  $t$ .

1. Voici le problème statique  $(\mathcal{P})$  :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min_x & \sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{ij \in A} p_i x_{ij} + p_t \leq S \quad (1) \quad (\text{limite sur les sommets empruntés}) \\ & \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\} \quad (2) \quad (\text{conservation du flot}) \\ & \sum_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} = 1 \quad (3) \quad (\text{un seul arc sortant de } s) \\ & \sum_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} = 1 \quad (4) \quad (\text{un seul arc entrant dans } t) \end{array} \right.$$

2. Modélisation du problème robuste  $(\mathcal{P}_r)$  :

$$(\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{ll} \min_x \max_{\delta^1} & \sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{ij \in A} p_i x_{ij} + \max_{\delta^2} \left\{ \delta_t^2 \hat{p}_t + \sum_{ij \in A} \delta_i^2 \hat{p}_i x_{ij} \right\} \leq S - p_t \quad (1_{\text{robuste}}) \\ & \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\} \quad (2_{\text{robuste}}) \\ & \sum_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} = 1 \quad (3_{\text{robuste}}) \\ & \sum_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} = 1 \quad (4_{\text{robuste}}) \end{array} \right.$$

3. Résolution par plans coupants et LazyCallback. On réexprime d'abord le problème robuste avec les ensembles  $\mathcal{U}^{1*}$  et  $\mathcal{U}^{2*}$ .

$$(\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{ll} \min_z & z \\ \text{s.c.} & \sum_{ij \in A} d_{ij}^1 x_{ij} \leq z \quad \forall d^1 \in \mathcal{U}^{1*} \quad (0) \\ & \sum_{ij \in A} p_i^2 x_{ij} + p_t^2 \leq S \quad \forall p^2 \in \mathcal{U}^{2*} \quad (1_{robuste}) \\ & \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\} \quad (2_{robuste}) \\ & \sum_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} = 1 \quad (3_{robuste}) \\ & \sum_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} = 1 \quad (4_{robuste}) \end{array} \right.$$

Au début de l'algorithme de plans coupants, on peut choisir les ensembles de départ  $\mathcal{U}^{1*}$  et  $\mathcal{U}^{2*}$  suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{1*} &= \left\{ \{d_{ij}^1 = d_{ij}\}_{ij \in A} \right\} \\ \mathcal{U}^{2*} &= \left\{ \{p_i^1 = d_i\}_{i \in V} \right\} \end{aligned}$$

Il y a deux sous problèmes à résoudre,  $(SP_0)$  et  $(SP_1)$  :

$$(\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\delta^1} & \sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij}^* \\ \text{s.c.} & \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 \\ & \delta_{ij}^1 \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\delta^2} & \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) x_{ij}^* + p_t + \delta_t^2 \hat{p}_t \\ \text{s.c.} & \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \\ & \delta_i^2 \leq 2 \quad \forall i \in V \end{array} \right.$$

avec  $x^*$  une solution courante du problème maître. Soient  $\delta^{1*}$  et  $\delta^{2*}$  des solutions optimales de  $(SP_0)$  et  $(SP_1)$ , soit  $z^*$  une solution optimale du problème maître courant. Cette solution du problème maître courant est l'optimale, ssi

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij}^* &\leq z^* \\ \text{et} & \\ \sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) x_{ij}^* + p_t + \delta_t^2 \hat{p}_t &\leq S \end{aligned}$$

À chaque itération, on ajoute les contraintes suivantes. Si  $\sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij}^* > z^*$ , alors on coupe cette mauvaise solution  $x^*$  en rajoutant l'inégalité  $\sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij} \leq z^*$ . De même si  $\sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) x_{ij}^* + p_t + \delta_t^2 \hat{p}_t > S$ , alors on rajoute l'inégalité  $\sum_{i \in V} (p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) x_{ij} + p_t + \delta_t^2 \hat{p}_t \leq S$ . Si aucune de ces inégalités n'est violée, alors on a trouvé l'optimale pour le problème maître.

#### 4. Résolution par dualisation.

$$(\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{l} \min_x d_{ij} x_{ij} + \left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij}^* \\ \text{s.c.} \\ \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 \\ \delta_{ij}^1 \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A \end{array} \right. \\ \text{s.c.} \\ \sum_{ij \in A} p_i x_{ij} + \max_{\delta^2} \left\{ \delta_t^2 \hat{p}_t + \sum_{ij \in A} \delta_i^2 \hat{p}_i x_{ij} \right\} \leq S - p_t \quad (1_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\} \quad (2_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} = 1 \quad (3_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} = 1 \quad (4_{robuste}) \end{array} \right.$$

Isolation dans le problème robuste du terme faisant intervenir les variables  $\delta_{ij}^1$  :

$$\begin{aligned} \min_x \max_{d^1} \sum_{ij \in A} d_{ij}^1 x_{ij} &= \min_x \max_{\delta^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} (1 + \delta_{ij}^1) x_{ij} \\ &= \min_x \left( \sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \delta_{ij}^1 x_{ij} \right) \end{aligned}$$

Problème interne lié aux variables  $\delta_{ij}^1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta^1} \sum_{ij \in A} d_{ij} \delta_{ij}^1 x_{ij} \\ \text{s.c.} \\ \sum_{ij \in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 \quad (\alpha^1) \\ \delta_{ij}^1 \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A \quad (\beta_{ij}^1) \end{array} \right.$$

On dualise ce problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha^1, \beta^1} d_1 \alpha^1 + \sum_{ij \in A} D_{ij} \beta_{ij}^1 \\ \text{s.c.} \\ \alpha^1 + \beta_{ij}^1 \geq d_{ij} x_{ij} \quad \forall ij \in A \quad (\delta_{ij}) \end{array} \right.$$

Reformulation de la contrainte robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables  $\delta_{ij}^1$  :

$$\sum_{ij \in A} p_i^2 x_{ij} + p_t^2 \leq S \quad p_i^2 \in \mathcal{U}^2$$

qui se décompose en

$$\sum_{ij \in A} (p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i) x_{ij} + p_t + \delta_t^2 \hat{p}_t \leq S$$

et après passage au maximum par rapport à  $\delta^2$

$$\sum_{ij \in A} p_i x_{ij} + \max_{\delta^2} \left( \sum_{ij \in A} \delta_i^2 \hat{p}_i x_{ij} + \delta_t^2 \hat{p}_t \right) \leq S$$

Le problème interne lié aux variables  $\delta_{ij}^1$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\delta^2} & \left( \sum_{ij \in A} \delta_i^2 \hat{p}_i x_{ij} + \delta_t^2 \hat{p}_t \right) \\ \text{s.c.} & \\ & \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \quad (\alpha^2) \\ & \delta_i^2 \leq 2 \quad \forall i \in V \quad (\beta_i^2) \end{array} \right.$$

Il faut le dualiser puis utiliser les deux dualisations pour présenter le problème robuste sous la forme d'un simple programme linéaire en nombre entiers.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\alpha^2, \beta^2} & d_2 \alpha^2 + \sum_{i \in V} 2 \beta_i^2 \\ \text{s.c.} & \\ & \alpha^2 + \beta_i^2 \geq \hat{p}_i x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{t\} \quad (\delta_i^2) \\ & \alpha^2 + \beta_t^2 \geq \hat{p}_t \quad (\delta_t^2) \end{array} \right.$$

On reformule le problème maître :

$$(\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x, \alpha^1, \beta^1} & d_{ij} x_{ij} + d_1 \alpha^1 + \sum_{ij \in A} D_{ij} \beta_{ij}^1 \\ \text{s.c.} & \\ \sum_{ij \in A} p_i x_{ij} + \min_{\alpha^2, \beta^2} \left( d_2 \alpha^2 + \sum_{i \in V} 2\beta_i^2 \right) & \leq S - p_t \quad (1_{robuste}) \\ \alpha^2 + \beta_i^2 & \geq \hat{p}_i x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{t\} \quad (\delta_i^2) \\ \alpha^2 + \beta_t^2 & \geq \hat{p}_i \quad (\delta_t^2) \\ \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\} \quad (2_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 \quad (3_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 \quad (4_{robuste}) \\ \alpha^1 + \beta_{ij}^1 & \geq d_{ij} x_{ij} \quad \forall ij \in A \quad (\delta_{ij}) \end{array} \right.$$

puis on peut supprimer le min dans la contrainte  $(1_{robuste})$  :

$$(\mathcal{P}_r) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x, \alpha^1, \beta^1} & d_{ij} x_{ij} + d_1 \alpha^1 + \sum_{ij \in A} D_{ij} \beta_{ij}^1 \\ \text{s.c.} & \\ \sum_{ij \in A} p_i x_{ij} + d_2 \alpha^2 + \sum_{i \in V} 2\beta_i^2 & \leq S - p_t \quad (1_{robuste}) \\ \alpha^2 + \beta_i^2 & \geq \hat{p}_i x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{t\} \quad (\delta_i^2) \\ \alpha^2 + \beta_t^2 & \geq \hat{p}_i \quad (\delta_t^2) \\ \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\} \quad (2_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 \quad (3_{robuste}) \\ \sum_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 \quad (4_{robuste}) \\ \alpha^1 + \beta_{ij}^1 & \geq d_{ij} x_{ij} \quad \forall ij \in A \quad (\delta_{ij}) \end{array} \right.$$