Exemple de problème robuste

$\mathcal{U}^0$: incertitude sur l'objectif

Au plus 10€ est retiré à la valeur des objets

$$\mathcal{U}^0 = \Big\{ \{ u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0 \}_{i \in S} \mid \underbrace{\sum_{i \in S} \delta_i^0 \le 10,\ \delta_i^0 \ge 0\ \forall i \in S}_{} \Big\}$$

Valeur nominale **(constante)** — Valeur retirée **(variable)**

$\mathcal{U}^1$: incertitude des contraintes

1kg peut être ajouté au poids de l'ensemble des objets

$$\mathcal{U}^1 = \Big\{ \{ w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1 \}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^1 \le 1,\ \delta_i^1 \ge 0\ \forall i \in S \Big\}$$

Poids nominal **(constant)** — Poids ajouté **(variable)**

Exemple de dualisation - Problème de sac à dos

Rappel

- $\mathcal{U}^0 = \Big\{ \{ u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0 \}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^0 \le 10,\ \delta_i^0 \ge 0\ \forall i \in S \Big\}$

1.1 - Isoler δ^0

$$\max_x \min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \sum_{i \in S} u_i^0 x_i = \max_x \begin{array}{l} \min_{\delta^0} \sum_{i \in S} (\overline{u}_i - \delta_i^0) x_i \\ \sum_{i \in S} \delta_i^0 \le 10 \\ \delta_i^0 \ge 0 \quad i \in S \end{array} = \max_x \begin{array}{l} \sum_{i \in S} x_i \overline{u}_i + \min_{\delta^0} -\delta_i^0 x_i \\ \sum_{i \in S} \delta_i^0 \le 10 \\ \delta_i^0 \ge 0 \quad i \in S \end{array}$$

Développer $\mathcal{U}^0$

2.1 - Dualiser la minimisation interne

$$\begin{array}{ll} \min_{\delta^0} \sum_{i \in S} -\delta_i^0 x_i & \\ \sum_{i \in S} \delta_i^0 \le 10 \quad (\alpha) & \\ \delta_i^0 \ge 0 \quad i \in S & \end{array} = \begin{array}{ll} \max_\alpha 10\alpha & \\ \alpha \le -x_i & i \in S \\ \alpha \le 0 & i \in S \end{array}$$

x est considéré constant pour la dualisation !

3.1 - Remplacer la minimisation par son dual dans le problème initial

$$\max_x \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \overline{u}_i x_i + \min_{\delta^0} -\delta_i^0 x_i \\ \sum_{i \in S} \delta_i^0 \le 10 \\ \delta_i^0 \ge 0 \quad i \in S \end{array} = \max_x \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \overline{u}_i x_i + \max_\alpha 10\alpha \\ \alpha \le -x_i \quad i \in S \\ \alpha \le 0 \end{array} = \max_{x,\alpha} \begin{array}{l} \sum_{i \in S} x_i \overline{u}_i + 10\alpha \\ \alpha \le -x_i \quad i \in S \\ \alpha \le 0 \end{array}$$

Example de dualisation - Problème de sac à dos

Notations

- $\mathcal{U}^1 = \Big\{ \{ w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1 \}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^1 \le 1,\ \delta_i^1 \ge 0\ \forall i \in S \Big\}$

1.2 - Isoler δ^1

$$\sum_{i \in S} w_i^1 x_i \le K \quad \forall w^1 \in \mathcal{U}^1 = \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \overline{w}_i x_i + \max_{\delta^1} \sum_{i \in S} \delta_i^1 x_i \le K \\ \sum_{i \in S} \delta_i^1 \le 1 \\ \delta_i^1 \ge 0 \end{array}$$

Développer $\mathcal{U}^1$

2.2 - Dualiser la maximisation interne

$$\begin{array}{l} \max_{\delta^1} \sum_{i \in S} x_i \delta_i^1 \\ \sum_{i \in S} \delta_i^1 \le 1 \quad (\beta) \\ \delta_i^1 \ge 0 \quad i \in S \end{array} = \begin{array}{l} \min_\beta \beta \\ \beta \ge x_i \quad i \in S \end{array}$$

3.2 - Remplacer la minimisation par son dual dans le problème initial

$$\begin{array}{l} \sum_{i \in S} \overline{w}_i^1 x_i + \max_{\delta^1} \sum_{i \in S} \delta_i^1 x_i \le K \\ \sum_{i \in S} \delta_i^1 \le 1,\ \delta_i^1 \ge 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \overline{w}_i^1 x_i + \min_\beta \beta \le K \\ \beta \ge x_i \quad i \in S \end{array} \Leftarrow \begin{array}{l} \sum_{i \in S} \overline{w}_i^1 x_i + \beta \le K \\ \beta \ge x_i \quad i \in S \end{array}$$

Algorithme de plans coupants (?)

$\mathcal{U}$-CO

$$\min_x \left\{ \begin{array}{l} \max_{u^0 \in \mathcal{U}^0} u^0 x \ : \\ x \in \mathcal{X}^{num} \\ x \in \mathcal{X}^{comb} \end{array} \right\}$$

Reformulation de l'objectif

$$\min_{z,x} \left\{ \begin{array}{l} z \ : \\ u^0 x \le z, \quad u^0 \in \mathcal{U}^0, \\ x \in \mathcal{X}^{num} \\ x \in \mathcal{X}^{comb} \end{array} \right\}$$

Exemple d'algorithme de plans coupants - Problème de sac à dos

Notations

- $\mathcal{U}^0 = \left\{ \{u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0\}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10,\ \delta_i^0 \geq 0\ \forall i \in S \right\}$
  valeur de i (€)
- $\mathcal{U}^1 = \left\{ \{w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1\}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1,\ \delta_i^1 \geq 0\ \forall i \in S \right\}$
  poids de i (kg)

1 - Reformuler l'objectif

Original

$$\begin{array}{lll} \max_x \min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} & \sum_{i \in S} u_i^0 x_i & \\ & \sum_{i \in S} w_i^1 x_i \leq K & w^1 \in \mathcal{U}^1 \\ & x_i \in \{0,1\} & i \in S \end{array}$$

Reformulé

$$\begin{array}{lll} \max_{z,x} & z & \\ & z \leq \sum_{i \in S} u_i^0 x_i & u^0 \in \mathcal{U}^0 \\ & \sum_{i \in S} w_i^1 x_i \leq K & w^1 \in \mathcal{U}^1 \\ & x_i \in \{0,1\} & i \in S \end{array}$$

2 - Définir le problème maître (MP)

Remplacer $\mathcal{U}^0$ et $\mathcal{U}^1$ par de petits sous-ensembles $\mathcal{U}^{0*}$ et $\mathcal{U}^{1*}$

ex : $\{\{u_i^0 = \overline{u}_i\}_{i \in S}\}$ ex : $\{\{w_i^1 = \overline{w}_i\}_{i \in S}\}$

Exemple d'algorithme de plans coupants - Problème de sac à dos

Rappel

$$\mathcal{U}^0 = \left\{ \{u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0\}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10,\ \delta_i^0 \geq 0\ \forall i \in S \right\}$$

4.1 - Sous-problème lié à $\mathcal{U}^0$

$$\begin{array}{lll} \min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \sum_{i \in S} u^0 x_i^* = & \min_{\delta^0} \sum_{i \in S} (\overline{u}_i - \delta_i^0) x_i^* & \\ & \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10 & \\ & \delta_i^0 \geq 0 & i \in S \end{array}$$

- Le résoudre $\Rightarrow \delta^{0*}$ **x^* est constant !**
- Si z^* et x^* ne satisfont pas le scénario δ^{0*} de $\mathcal{U}^0$
  Si $z^* > \sum_{i \in S} (\overline{u}_i - \delta_i^{0*}) x_i^*$
  Ajouter le scénario au MP
  Ajouter la contrainte $z \leq \sum_{i \in S} (\overline{u}_i - \delta_i^{0*}) x_i$

Exemple d'algorithme de plans coupants

Rappel

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \{w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1\}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1,\ \delta_i^1 \geq 0\ \forall i \in S \right\}$$

4.2 - Sous-problème lié à $\mathcal{U}^1$

$$\begin{array}{lll} \sum_{i \in S} w_i^1 x_i^* \leq K\ \ \forall w^1 \in \mathcal{U}^1 \Leftrightarrow & \max_{\delta^1} \sum_{i \in S} (\overline{w}_i + \delta_i^1) x_i^* \leq K & \\ & \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1 & \\ & \delta_i^1 \geq 0 & i \in S \end{array}$$

- Le résoudre $\Rightarrow \delta^{1*}$
- Si z^* et x^* ne satisfont pas le scénario δ^{1*} de $\mathcal{U}^1$
  Si $\sum_{i \in S} (\overline{w}_i + \delta_i^{1*}) x_i^* > K$
  Ajouter le scénario au MP
  Ajouter la contrainte $\sum_{i \in S} (\overline{w}_i + \delta_i^{1*}) x_i \leq K$

5

Répéter les étapes 3 et 4 jusqu'à ce que tous les scénarios soient satisfait