ECMA - Projet d'optimisation robuste

Cours ECMA

ALES Zacharie (zacharie.ales@ensta.fr)
PORUMBEL Daniel (daniel.porumbel@cnam.fr)

Adapté de la présentation ROADEF 2017 de Michael Poss

Sommaire

Optimisation robuste

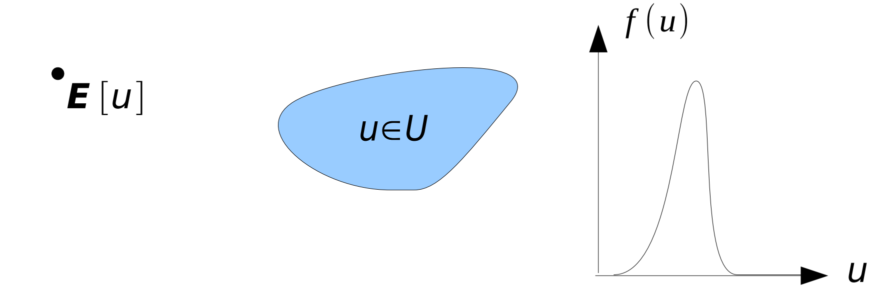
Notation

- u : donnée(s) d'un problème d'optimisation
  Ex : distance entre deux villes, poids d'un objet, ...

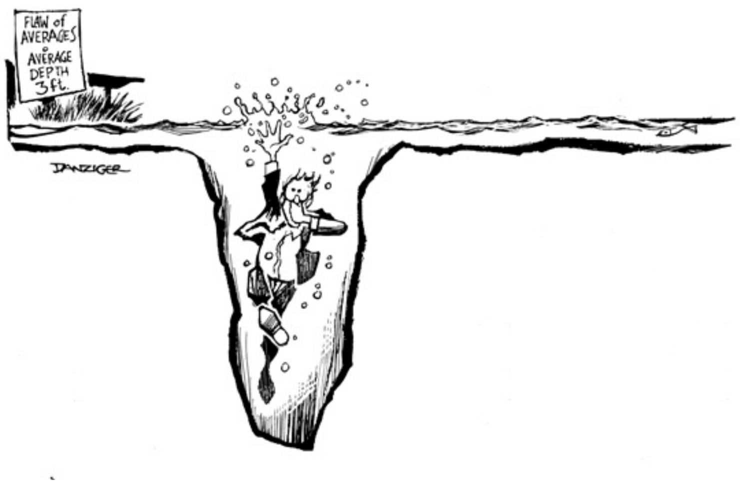
Problème

Comment prendre en compte l'aléa de la valeur de u ?

Mean value (Deterministic) — *Robust* — *Stochastic*



L'optimisation robuste considère le pire des cas
Contrairement à l'optimisation stochastique qui optimise en moyenne



Types de problèmes robustes

Statique

Prise de décisions ⇢ L'incertitude est révélée

- Facile pour la PL☺
- $\mathcal{NP}$-difficile pour l'optimisation combinatoire ☹
- Il existe des reformulation MILP ☺

Deux niveaux

Prise de décision ⇢ L'incertitude est révélée ⇢ Autres décisions

- $\mathcal{NP}$-difficile pour la PL ☹
- Algorithmes de décomposition ☺

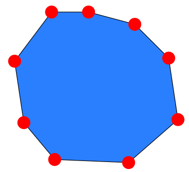
Plusieurs niveaux

Décisions ⇢ Incertitude ⇢ Décisions ⇢ Incertitude ⇢ ···

- $\mathcal{NP}$-difficile pour la PL☹
- Non résolvable optimalement ☹

Incertitude discrète ou continue

Soit $\mathcal{U} = \text{sommets}(\mathcal{P})$



Remarque

Dans la plupart des cas, $\mathcal{U} \sim \mathcal{P}$

Exceptions

- contraintes robustes $f(x, u) \leq b$ avec f non-concave en u
- problèmes multi-niveaux avec des variables d'ajustement entières

Optimisation combinatoire robuste

CO - Problème combinatoire

Contraintes Données

- $\mathcal{X} \subseteq \{0, 1\}^n, u \in \mathbb{R}^n$

Variables

$$\min_{x \in \mathcal{X}} ux$$

$\mathcal{U}$-*CO* - Problème combinatoire robuste avec incertitude sur u

Valeurs possibles de u

- $\mathcal{X} \subseteq \{0, 1\}^n, \mathcal{U}^0 \subset \mathbb{R}^n$

... le coût pour le pire scénario u^0

Solution x qui minimise... → $\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{u^0 \in \mathcal{U}^0} u^0 x$

Problème combinatoire robuste avec regret

Coût optimal pour u^0

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \min_{y \in \mathcal{X}} \left(u^0 x - u^0 y\right)$$

Solution optimale pour u^0

Contraintes robustes

Contraintes

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^{comb} \cap \mathcal{X}^{num}$$

Contraintes **statiques** Contraintes **robustes**

$\mathcal{U}$-*CO*

$$\min_x \left\{ \begin{array}{l} \max_{u^0 \in \mathcal{U}^0} u^0 x \\ x \in \mathcal{X}^{comb} \\ x \in \mathcal{X}^{num} \end{array} \right\}$$

Exemple de contraintes robustes

- $\mathcal{X}^{num} = \left\{x \in \{0, 1\}^n \text{ tel que } u^j x \leq b_j,\ \mathbf{u^j} \in \mathcal{U}^j\ \forall j = 1, \ldots, m\right\}$

Valeurs possibles des coefficients de la contrainte j

Exemple de problème robuste

Sac à dos statique

Prix de l'objet i ; $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est dans le sac} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\max_x \sum_{i \in S} u_i x_i \quad \leftarrow \text{Objets}$$
$$\sum_{i \in S} w_i x_i \le K \quad \leftarrow \text{Capacité du sac}$$
Poids de l'objet i
$$x_i \in \{0,1\} \quad i \in S$$

Variante robuste

$$\max_x \min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \sum_{i \in S} u_i^0 x_i$$
Incertitude sur les prix
$$\sum_{i \in S} w_i^1 x_i \le K \quad w^1 \in \mathcal{U}^1$$
Incertitude sur les poids
$$x_i \in \{0,1\} \quad i \in S$$

Exemple de problème robuste

$\mathcal{U}^0$: incertitude sur l'objectif

Au plus 10€ est retiré à la valeur des objets

$$\mathcal{U}^0 = \left\{ \{u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0\}_{i \in S} \mid \qquad \right\}$$

Valeur nominale **(constante)** ; Valeur retirée **(variable)**

$\mathcal{U}^1$: incertitude des contraintes

1kg peut être ajouté au poids de l'ensemble des objets

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \{w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1\}_{i \in S} \mid \qquad \right\}$$

Poids nominal **(constant)** ; Poids ajouté **(variable)**

Incertitude discrète : $\mathcal{U}$-CO est difficile [Kouvelis and Yu, 2013]

Théorème

Le plus court chemin robuste, l'affectation, l'arbre couvrant, ..., sont $\mathcal{NP}$-difficile même quand $|\mathcal{U}| = 2$

Preuve - Problème de sélection

Polynomial

1. Problème de sélection : $\min_{S \subseteq N, |S| = p} \sum_{i \in S} u_i$
   Choisir p objets de poids minimal
2. Problème de sélection ROBUST : $\min_{S \subseteq N, |S| = p} \max_{u \in \mathcal{U}} \sum_{i \in S} u_i$
   $\mathcal{NP}$-difficile au sens faible
3. Problème de partitionnement : $\min_{S \subseteq N, |S| = |N|/2} \max\left(\sum_{i \in S} a_i, \sum_{i \in N \setminus S} a_i\right)$
   Poids minimal de la plus grande des deux parties
   Construction d'une instance de sélection robuste à partir d'une instance de partitionnement
4. Réduction : $p = \frac{|N|}{2}$, et $\mathcal{U} = \{u^1, u^2\}$ tel que
   On séléctionne la moitié des objets
   $$u_i^1 = a_i \quad \text{et} \quad u_i^2 = \frac{2}{|N|} \sum_k a_k - a_i$$
   $\Sigma_{i \in N} u_i^1$: poids des objets séléctionnés ; $\Sigma_{i \in N} u_i^2$: poids des autres objets
   $$\Rightarrow \quad \forall S \ \max_{u \in \mathcal{U}} \sum_{i \in S} u_i = \max\left(\sum_{i \in S} a_i, \sum_{i \in N \setminus S} a_i\right)$$

Incertitude polyhédrale: $\mathcal{U}$-CO est toujours difficile (mais résolvable)

Est-ce mieux quand l'incertitude est décrite par un polytope plutôt que des scénarios ?

Théorème

Le plus court chemin robuste, l'affectation, l'arbre couvrant, ... sont $\mathcal{NP}$-difficile même quand $\mathcal{U}$ a une description compacte

Preuve

1. $\mathcal{U} = \text{conv}(u^1, u^2)$
2. $ux \le b, \quad u \in \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad ux \le b, \quad u \in \text{ext}(\mathcal{U})$

Ben-Tal and Nemirovski [1998]

Le problème $\mathcal{U}$-CO est équivalent à un MILP

Sommaire

Dualisation - Incertitude sur les coûts

Théorème Ben-Tal and Nemirovski [1998]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{l \times n}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{l}$ définissant le polytope

$$\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \alpha_k u \leq \beta_k, \ k = 1, \dots, l\}$$

Le problème $\min\limits_{x \in \mathcal{X}} \max\limits_{u \in \mathcal{U}} ux$ est équivalent à un MILP compact

Ne veut pas dire que le problème garde sa complexité (ex : perte d'unimodularité)

Preuve

1. Dualiser la maximisation interne

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{u \in \mathcal{U}} ux = \min_{x \in \mathcal{X}} \min \left\{ \sum_{k=1}^{l} \beta_k z_k \ : \ \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ki} z_k \geq x_i, i = 1, \dots, n, z \geq 0 \right\}$$

2. Regrouper les deux min

Exemple de dualisation - Problème de sac à dos

Rappel

- $\mathcal{U}^0 = \left\{ \{u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0\}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10, \ \delta_i^0 \geq 0 \ \forall i \in S \right\}$

1.1 - Isoler δ^0

$\max_x \min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \sum_{i \in S} u_i^0 x_i =$ .... = ...

Développer $\mathcal{U}^0$

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10 & \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10 \\ \delta_i^0 \geq 0 \quad i \in S & \delta_i^0 \geq 0 \ \ i \in S \end{array}$$

2.1 - Dualiser la minimisation interne

$$\begin{array}{lll} \min_{\delta^0} \sum_{i \in S} -\delta_i^0 x_i & = \max_\alpha 10\alpha & \\ \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10 \ \ (\alpha) & \alpha \leq -x_i & i \in S \\ \delta_i^0 \geq 0 \ \ i \in S & \alpha \leq 0 & i \in S \end{array}$$

x est considéré constant pour la dualisation !

3.1 - Remplacer la minimisation par son dual dans le problème initial

$\max_x \sum_{i \in S} \overline{u}_i x_i + \min_{\delta^0} -\delta_i^0 x_i =$ .... = ...

$$\begin{array}{lll} \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10 & & \\ \delta_i^0 \geq 0 \ \ i \in S & \alpha \leq -x_i \ \ i \in S & \alpha \leq -x_i \ \ i \in S \\ & \alpha \leq 0 & \alpha \leq 0 \end{array}$$

Example de dualisation - Problème de sac à dos

Notations

- $\mathcal{U}^1 = \left\{ \{w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1\}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1, \ \delta_i^1 \geq 0 \ \forall i \in S \right\}$

1.2 - Isoler δ^1

$\sum\limits_{i \in S} w_i^1 x_i \leq K \ \ \forall w^1 \in \mathcal{U}^1 =$

Développer $\mathcal{U}^1$ ....

$$\sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1$$
$$\delta_i^1 \geq 0$$

2.2 - Dualiser la maximisation interne

$$\begin{array}{ll} \max_{\delta^1} \sum_{i \in S} x_i \delta_i^1 & = \min_\beta \beta \\ \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1 \ \ (\beta) & \beta \geq x_i \ \ i \in S \\ \delta_i^1 \geq 0 \ \ i \in S & \end{array}$$

3.2 - Remplacer la minimisation par son dual dans le problème initial

$\sum\limits_{i \in S} \overline{w}_i^1 x_i + \max\limits_{\delta^1} \sum\limits_{i \in S} \delta_i^1 x_i \leq K \ \Leftrightarrow$ .... $\Leftarrow$ ....

$$\begin{array}{lll} \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1, \ \delta_i^1 \geq 0 & \beta \geq x_i \ \ i \in S & \beta \geq x_i \ \ i \in S \end{array}$$

Sommaire

Algorithme de plans coupants [Bertsimas et al., 2016]

$\mathcal{U}$-CO

$$\min_{x} \left\{ \begin{array}{l} \max_{u^0 \in \mathcal{U}^0} u^0 x \ : \\ x \in \mathcal{X}^{num} \\ x \in \mathcal{X}^{comb} \end{array} \right\}$$

Reformulation de l'objectif

$$\min_{z,x} \left\{ \begin{array}{l} . \ : \\ \\ \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \\ x \in \mathcal{X}^{num} \\ x \in \mathcal{X}^{comb} \end{array} \right\}$$

Algorithme de plans coupants [Bertsimas et al., 2016]

Definition - **Problème maître (MP)**

$$\min_{z,x} \left\{ \begin{array}{l} z \ : \\ u^0 x \leq z, \quad u^0 \in \underbrace{\mathcal{U}^{0^*}}_{\subset \mathcal{U}^0}, \\ u^j x \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, m, \ u^j \in \underbrace{\mathcal{U}^{j^*}}_{\subset \mathcal{U}^j}, \\ x \in \mathcal{X}^{comb} \end{array} \right\}$$

Sous-problème 1 (SPo)

$$\max_{u^0 \in \mathcal{U}^0} u^0 \underbrace{x^*}_{\text{Fixé !}}$$

Sous-problème 2 (SPj)

$$\max_{u^j \in \mathcal{U}^j} u^j \underbrace{x^*}_{\text{Fixé !}}$$

Algorithme des plans coupants

1. **Résoudre** $MP \to x^*, z^*$
2. **Résoudre** SPo $\to u^{0*}$ **et** SP1 à SPm $\to u^{1^*}, \ldots, u^{m*}$
3. **Si** $u^{0^*} x^* > z^*$ **et/ou** $u^{j^*} x^* > b_j$ **alors**
   - $\mathcal{U}^{0^*} \leftarrow \mathcal{U}^{0^*} \cup \{u^{0^*}\}$ **et/ou** $\mathcal{U}^{j*} \leftarrow \mathcal{U}^{j^*} \cup \{u^{j^*}\}$
   - aller à 1

Exemple d'algorithme de plans coupants - Problème de sac à dos

Notations

- $\mathcal{U}^0 = \left\{ \{ \underbrace{u_i^0}_{\text{valeur de } i \ (€)} = \overline{u}_i - \delta_i^0 \}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^0 \leq 10, \ \delta_i^0 \geq 0 \ \forall i \in S \right\}$
- $\mathcal{U}^1 = \left\{ \{ \underbrace{w_i^1}_{\text{poids de } i \ (kg)} = \overline{w}_i + \delta_i^1 \}_{i \in S} \mid \sum_{i \in S} \delta_i^1 \leq 1, \ \delta_i^1 \geq 0 \ \forall i \in S \right\}$

1 - Reformuler l'objectif

Original

$$\begin{array}{ll} \max_x \min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \sum_{i \in S} u_i^0 x_i & \\ \quad \sum_{i \in S} w_i^1 x_i \leq K & w^1 \in \mathcal{U}^1 \\ \quad x_i \in \{0, 1\} & i \in S \end{array}$$

Reformulé

$$\begin{array}{ll} \max_{z,x} \ . & \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \quad \sum_{i \in S} w_i^1 x_i \leq K & w^1 \in \mathcal{U}^1 \\ \quad x_i \in \{0, 1\} & i \in S \end{array}$$

2 - Définir le problème maître (MP)

Remplacer $\mathcal{U}^0$ et $\mathcal{U}^1$ par de petits sous-ensembles $\mathcal{U}^{0^*}$ et $\mathcal{U}^{1^*}$

ex : $\{\{u_i^0 = \overline{u}_i\}_{i \in S}\}$ ex : $\{\{w_i^1 = \overline{w}_i\}_{i \in S}\}$

Exemple d'algorithme de plans coupants - Problème de sac à dos

3 - Résoudre MP

$\Rightarrow x^*$ et z^*

4 - Vérifier si x^* et z^* satisfont toutes les contraintes robustes de $\mathcal{U}^0$ et $\mathcal{U}^1$

$\Rightarrow$ nécessite de résoudre 1 sous-problème pour chaque ensemble d'incertitude

Exemple d'algorithme de plans coupants - Problème de sac à dos

Rappel

$\mathcal{U}^0 = \left\{ \{u_i^0 = \overline{u}_i - \delta_i^0\}_{i \in S} \mid \sum_{i\in S} \delta_i^0 \leq 10,\ \delta_i^0 \geq 0\ \forall i \in S \right\}$

4.1 - Sous-problème lié à $\mathcal{U}^0$

$\min_{u^0 \in \mathcal{U}^0} \sum_{i \in S} u^0 x_i^* =$ ....

....

....

- Le résoudre $\Rightarrow \delta^{0^*}$ **x^* est constant !**
- Si z^* et x^* ne satisfont pas le scénario δ^{0^*} de $\mathcal{U}^0$
  Si $z^* > \sum_{i\in S}(\overline{u}_i - \delta_i^{0^*})x_i^*$
  Ajouter le scénario au MP
  Ajouter la contrainte $z \leq \sum_{i\in S}(\overline{u}_i - \delta_i^{0^*})x_i$

Exemple d'algorithme de plans coupants

Rappel

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \{w_i^1 = \overline{w}_i + \delta_i^1\}_{i \in S} \mid \sum_{i\in S} \delta_i^1 \leq 1,\ \delta_i^1 \geq 0\ \forall i \in S \right\}$$

4.2 - Sous-problème lié à $\mathcal{U}^1$

$\sum_{i\in S} w_i^1 x_i^* \leq K\ \ \forall w^1 \in \mathcal{U}^1 \Leftrightarrow$ ....

$\sum_{i\in S} \delta_i^1 \leq 1$

$\delta_i^1 \geq 0 \qquad i \in S$

- Le résoudre $\Rightarrow \delta^{1^*}$
- Si z^* et x^* ne satisfont pas le scénario δ^{1^*} de $\mathcal{U}^1$
  Si $\sum_{i\in S}(\overline{w}_i + \delta_i^{1^*})x_i^* > K$
  Ajouter le scénario au MP
  Ajouter la contrainte $\sum_{i\in S}(\overline{w}_i + \delta_i^{1^*})x_i \leq K$

5

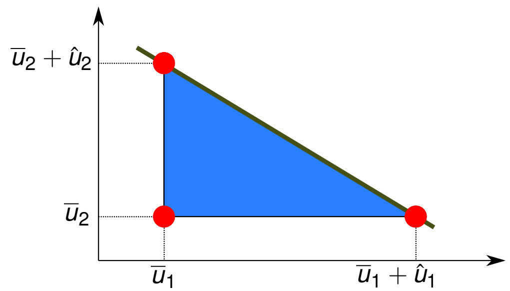
Répéter les étapes 3 et 4 jusqu'à ce que tous les scénarios soient satisfait

En pratique on ne sait pas si c'est la dualisation ou les plans coupants qui seront les plus efficaces

Sommaire

Structure plus simple : Optimisation combinatoire robuste $\mathcal{U}^\Gamma$

- $\mathcal{U} = \text{sommets}(\mathcal{P})$: bien, mais on souhaite un $\mathcal{P}$ "plus simple"



$$\mathcal{U}^\Gamma = \left\{ \overline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i + \hat{u}_i, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - \overline{u}_i}{\hat{u}_i} \leq 1 \right\}$$

Algorithme itératif pour $\mathcal{U}^\Gamma$

$$\mathcal{U}^\Gamma = \textit{sommets}\left(\left\{ \overline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i + \hat{u}_i, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - \overline{u}_i}{\hat{u}_i} \leq \Gamma \right\} \right)$$

Théorème - Bertsimas and Sim [2003], Goetzmann et al. [2011], Álvarez-Miranda et al. [2013], Lee and Kwon [2014]

Incertitude sur l'objectif $\mathcal{U}^\Gamma$-*CO* $\Rightarrow$ résoudre $\sim n/2$ problèmes *CO*

Incertitude sur m contraintes $\mathcal{U}^\Gamma$-*CO* $\Rightarrow$ résoudre $\sim (n/2)^m$ problèmes *CO*

Autre ensembles convexes $\mathcal{U}$ (pour rappel $\mathcal{U} \Leftrightarrow \text{conv}(\mathcal{U})$)

Déviation totale

$\left\{ \overline{u} \leq u \leq \overline{u} + \hat{u}, \sum_{i=1}^{n} (u_i - \overline{u}_i) \leq \Omega \right\} \Rightarrow$ résoudre 2 problèmes *CO*

Incertitude de type sac à dos [Poss, 2017]

$\left\{ \overline{u} \leq u \leq \overline{u} + \hat{u}, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \leq b \right\} \Rightarrow$ résoudre n problèmes *CO*

Decision-dependent [Poss, 2013, 2014, Nohadani and Sharma, 2016]

$\left\{ \overline{u} \leq u \leq \overline{u} + \hat{u}, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \leq b(x) \right\} \Rightarrow$ résoudre n problèmes *CO*

Ellipsoides aux axes parallèles [Mokarami and Hashemi, 2015]

$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i - \overline{u}_i}{\hat{u}_i} \right)^2 \leq \Omega \right\} \Rightarrow$ résoudre $n \max_i \hat{u}_i$ problèmes *CO*

Est-ce que tous les problèmes sont simples ?

Non, les problèmes difficiles doivent :

1. avoir un nombre non-constant de contraintes "linéaires" robustes ; ou
2. avoir des contraintes ou coûts "non-linéaires"

Théorème Pessoa et al. [2015]

Le plus court chemin $\mathcal{U}^\Gamma$-robuste avec fenêtre de temps est $\mathcal{NP}$-difficile au sens fort

Théorème Bougeret et al. [2016]

Minimiser la somme pondérée des dates de fin est $\mathcal{NP}$-difficile au sens fort

Conclusion

Problèmes statiques

- Solutions numériques par **dualisation** ou **décomposition**
- $\mathcal{U}$ "bonne" structure et objectif non linéaire
  $\Rightarrow$ problème ouverts intéressants

Problèmes ajustables

- Sujet d'actualité
- Très dur à résoudre !

Lien avec les autres cours

- Data driven robust optimization
- Projet RORT
  Plus court chemin avec attaquant

Sommaire

Présentation du projet

Objectif

Implémenter et comparer des méthodes de résolution d'un problème de plus court chemin robuste

Notations

- $G = (V, A)$
- $s, t \in V$: sommets source and puits
- d_{ij}: distance entre les sommets i et j
- p_i: poids du sommet i

Problème de plus court chemin statique avec poids sur les sommets

$\min_{x \in \mathcal{X}^{comb}} ux$

$\left\{x \in \{0,1\}^{|A|} \mid x \text{ est un chemin de } s \text{ à } t \text{ de poids} \leq S\right\}$

Présentation du projet

Notations

- d_{ij}: distance entre i et j
- p_i: poids de i

Problème de plus court chemin robuste considéré

$$\min_{x\in\mathcal{X}^{comb}} \left\{ \max_{d^1\in\mathcal{U}^1} d^1 x \qquad x \in \mathcal{X}^{num} \right\}$$

x is a path

$\{$ s-t path of weight $\leq S$ for all weight $p^2 \in \mathcal{U}^2 \}$

Incertitude de l'objectif

$$\mathcal{U}^1 = \Big\{ \{d^1_{ij} = d_{ij}(1+\delta^1_{ij})\}_{ij\in A} \text{ tel que } \begin{array}{l} \sum_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 \\ \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \ \forall ij \end{array} \Big\}$$

Présentation du projet

Problème de plus court chemin robuste considéré

$$\min_{x\in\mathcal{X}^{comb}} \left\{ \max_{d^1\in\mathcal{U}^1} d^1 x \qquad x \in \mathcal{X}^{num} \right\}$$

x is a path

$\{$ s-t chemin de poids $\leq S$ for all weight $p^2 \in \mathcal{U}^2 \}$

Incertitude sur les contraintes

$$\mathcal{U}^2 = \Big\{ \{p^2_i = p_i + \delta^2_i \hat{p}_i\}_{ij\in A} \text{ tel que } \begin{array}{l} \sum_{i\in V} \delta^2_i \leq d_2 \\ \delta^2_i \in [0, 2] \ \forall i \end{array} \Big\}$$

Instances

Données

- 9eme challenge DIMACS
- Villes américaines
- Entre 20 et 3500 sommets

Exemple de fichier de données

```
n = 20
s = 15
t = 17
S = 66
d1 = 2
d2 = 5
p = [14, 4,   ...,  12, 9]
ph = [1, 1,   ..., 4, 1]
Mat = [
1 2 1457 0.45;
1 3 1441 0.67;
1 4 2477 0.77;
...
20 16 2691 0.83;
20 17 3179 0.98;
20 18 439 0.14]
```

i j $d_{i,j}$ $D_{i,j}$

Travail demandé

1 - Partie théorique

1. Modélisation **compacte** du problème statique
2. Modélisation **compacte** du problème robuste
3. Définition des sous-problèmes associés à $\mathcal{U}^0$ et $\mathcal{U}^1$
4. Dualisation du problème associé à l'incertitude de l'objectif

2 - Implémentation (langage de programmation libre)

Pour ce problème, implémenter et comparer

1. un algorithme de plans coupants
2. un branch-and-cut
3. la dualisation
4. une heuristique ou une formulation non compacte

Algorithme de plans coupants

Principe

MP$\leftarrow$ problème de plus court chemin statique

1. $x^* \leftarrow$ résoudre MP
2. ${u^1}^* \leftarrow$ résoudre le sous-problème associé à l'objectif
   Ajouter un scénario s'il n'est pas satisfait
3. ${u^2}^* \leftarrow$ résoudre le sous-problème associé à la contrainte
   Ajouter un scénario s'il n'est pas satisfait
4. Aller à l'étape 1 si une contrainte est ajoutée

Choix d'implémentation

- Définition de MP
  Choix des scénarios dans $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$
- Résolution des sous-problèmes
  De manière exacte ou approchée

Branch-and-cut

Principe

Similaire aux plans coupants mais les sous-problèmes sont résolus à chaque noeuds de l'arbre de branchement de MP qui retournent une solution entière
Avantage : ne pas repartir de 0 après chaque ajout de contrainte

Comment faire ?

Définition - **Callback**

Fonctions données en entrée d'un solveur MILP

Type de callbacks

Nom	**Quand est-il appelé ?**	**Que fait-il ?**
User cut	nouvelle relaxation	trouve des coupes
Lazy	nouvelle solution entière	trouve des coupes
Heuristic	nouvelle relaxation	trouve une solution entière
Branch	nouvelle relaxation	choisi sur quelle variable brancher
Node	nouvelle relaxation	choisi le prochain sommet à explorer

Choix d'implémentation

- Similaire aux plans coupants
- Utilisation possible d'autres callback

Dualisation

Principe

Résoudre le problème dualisé

Heuristique

Principe

Trouver une “bonne” solution heuristiquement

- Donner un gap en calculant la relaxation du problème dualisé

Comparaison des résultats

Comparaison des méthodes

- Temps de résolution à l'optimum
- Gap si le temps maximal est atteint

Comparaison des solutions statiques et robustes

- poids
- coûts
- longueur
- ...

Présentation des résultats

- Tableaux
  ex : une instance par ligne
- Diagramme de performances
  Trace le nombre d'instances résolues en fonction du temps

Links with other courses

- Data driven robust optimization
- RORT project
  Shortest-path with attacker

Références I

E. Álvarez-Miranda, I. Ljubić, and P. Toth. A note on the bertsimas & sim algorithm for robust combinatorial optimization problems. 4OR, 11(4): 349–360, 2013.

A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. Mathematics of Operations Research, 23(4):769–805, 1998.

D. Bertsimas and M. Sim. Robust discrete optimization and network flows. Math. Program., 98(1-3):49–71, 2003.

Dimitris Bertsimas, Iain Dunning, and Miles Lubin. Reformulation versus cutting-planes for robust optimization. Computational Management Science, 13(2):195–217, 2016.

M. Bougeret, Artur A. Pessoa, and M. Poss. Robust scheduling with budgeted uncertainty, 2016. Submitted.

K.-S. Goetzmann, S. Stiller, and C. Telha. Optimization over integers with robustness in cost and few constraints. In WAOA, pages 89–101, 2011.

P. Kouvelis and G. Yu. Robust discrete optimization and its applications, volume 14. Springer Science & Business Media, 2013.

Références II

Taehan Lee and Changhyun Kwon. A short note on the robust combinatorial optimization problems with cardinality constrained uncertainty. 4OR, pages 373–378, 2014.

Shaghayegh Mokarami and S Mehdi Hashemi. Constrained shortest path with uncertain transit times. Journal of Global Optimization, 63(1): 149–163, 2015.

Omid Nohadani and Kartikey Sharma. Optimization under decision-dependent uncertainty. arXiv preprint arXiv:1611.07992, 2016.

A. A. Pessoa, L. Di Puglia Pugliese, F. Guerriero, and M. Poss. Robust constrained shortest path problems under budgeted uncertainty. Networks, 66(2):98–111, 2015.

M. Poss. Robust combinatorial optimization with variable budgeted uncertainty. 4OR, 11(1):75–92, 2013.

M. Poss. Robust combinatorial optimization with variable cost uncertainty. European Journal of Operational Research, 237(3):836–845, 2014.

Michael Poss. Robust combinatorial optimization with knapsack uncertainty. 2017. Available at `hal.archives-ouvertes.fr/tel-01421260`.