Modélisation Papier

Antonio Tavares, Julien Dallot

1er janvier 2022

1. Voici le problème statique ($\mathcal{P}$) :

$$
(\mathcal{P})\left\{
\begin{array}{llllll}
\min\limits_{x} & \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\, x_{ij} & & & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
& \sum\limits_{ij \in A} p_i x_{ij} \quad + \quad p_t & \leq S & & (1) & \text{(limite sur les sommets empruntés)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} \; - \sum\limits_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2) & \text{(conservation du flot)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & & (3) & \text{(un seul arc sortant de } s\text{)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & & (4) & \text{(un seul arc rentrant dans } t\text{)}
\end{array}
\right.
$$

2. Modélisation du problème robuste ($\mathcal{P}_r$) :

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{
\begin{array}{lllll}
\min\limits_{x} \max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\,(1+\delta^1_{ij})\, x_{ij} & & & \\
\text{s.c.} & & & & \\
& \sum\limits_{ij \in A} p_i\, x_{ij} + \max\limits_{\delta^2} \left\{ \delta^2_t \hat{p}_t + \sum\limits_{ij \in A} \delta^2_i\, \hat{p}_i\, x_{ij} \right\} & \leq S - p_t & & (1_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} \; - \sum\limits_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & & (4_{robuste})
\end{array}
\right.
$$

3. Résolution par plans coupants et LazyCallback. On réexprime d'abord le problème robuste avec les ensembles $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$.

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{\begin{array}{llllll}
\min\limits_{z} & & z & & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
& \sum\limits_{ij\in A} d^1_{ij}\, x_{ij} & & \leq z & \forall d^1 \in \mathcal{U}^{1*} & (0) \\
& \sum\limits_{ij\in A} p^2_i x_{ij} & + \quad p^2_t & \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^{2*} & (1_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} & - \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & & = 1 & & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & & = 1 & & (4_{robuste})
\end{array}\right.
$$

(Je sais pas encore quels ensembles $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$ choisir au début, deux sous ensembles aléatoires et petits de $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$?)

Il y a deux sous problèmes à résoudre, (SP_0) et (SP_1) :

$$
(SP_0)\left\{\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} \\
\text{s.c} & \\
& \sum\limits_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 \\
& \delta^1_{ij} \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A
\end{array}\right.
\qquad
(SP_1)\left\{\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^2} & \sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x^*_{ij} \quad + \quad p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t \\
\text{s.c} & \\
& \sum\limits_{i\in V} \delta^2_i \leq d_2 \\
& \delta^2_i \leq 2 \quad \forall i \in V
\end{array}\right.
$$

avec x^* une solution courante du problème maître. Soient δ^{1*} et δ^{2*} des solutions optimales de (SP_0) et (SP_1), soit z^* une solution optimale du problème maître courant. Cette solution du problème maître courant est l'optimale, ssi

$$
\begin{array}{c}
\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} \leq z^* \\
\text{et} \\
\sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x^*_{ij}\ +\ p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t \leq S
\end{array}
$$

À chaque itération, on ajoute les contraintes suivantes. Si $\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} > z^*$, alors on coupe cette mauvaise solution x^* en rajoutant l'inégalité $\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x_{ij} \leq z^*$. De même si $\sum\limits_{i\in V} (p_i+\delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x^*_{ij}\ +\ p_t+\delta^2_t\ \hat{p}_t > S$, alors on rajoute l'inégalité $\sum\limits_{i\in V} (p_i+\delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x_{ij}\ +\ p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t \leq S$. Si aucune de ces inégalités n'est violée, alors on a trouvé l'optimale pour le problème maître.

4. Résolution par dualisation. Voici le problème maître reformulé pour faire apparaître le problème interne lié aux variables δ^1_{ij}.

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{
\begin{array}{lllr}
\min\limits_x d_{ij}\, x_{ij} \quad + & \left\{\begin{array}{ll}\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij}\\ \text{s.c} & \\ & \sum\limits_{ij\in A}\delta^1_{ij} \le d_1\\ & \delta^1_{ij}\le D_{ij} \quad \forall ij\in A\end{array}\right. & & \\
\quad \text{s.c.} & & & \\
 & \sum\limits_{ij\in A} p^2_i x_{ij} \quad + \quad p^2_t & \le S \quad \forall p^2\in\mathcal{U}^{2*} & (1_{robuste})\\
 & \sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} \ - \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i\in V\setminus\{s,t\} & (2_{robuste})\\
 & \sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3_{robuste})\\
 & \sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4_{robuste})
\end{array}\right.
$$