Modélisation Papier

Antonio Tavares, Julien Dallot

2 janvier 2022

1. Voici le problème statique $(\mathcal{P})$:

$$
(\mathcal{P}) \left\{
\begin{array}{lllll}
\min\limits_{x} & \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\, x_{ij} & & & \\
\text{s.c.} & & & & \\
& \sum\limits_{ij \in A} p_i x_{ij} \quad + \quad p_t & \leq S & (1) & \text{(limite sur les sommets empruntés)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} \;-\; \sum\limits_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2) & \text{(conservation du flot)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3) & \text{(un seul arc sortant de } s\text{)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4) & \text{(un seul arc rentrant dans } t\text{)}
\end{array}
\right.
$$

2. Modélisation du problème robuste $(\mathcal{P}_r)$:

$$
(\mathcal{P}_r) \left\{
\begin{array}{llll}
\min\limits_{x} \max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\, (1 + \delta^1_{ij})\, x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & & & \\
& \sum\limits_{ij \in A} p_i\, x_{ij} + \max\limits_{\delta^2} \left\{ \delta^2_t \hat{p}_t + \sum\limits_{ij \in A} \delta^2_i\, \hat{p}_i\, x_{ij} \right\} & \leq S - p_t & (1_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} \;-\; \sum\limits_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4_{robuste})
\end{array}
\right.
$$

3. Résolution par plans coupants et LazyCallback. On réexprime d'abord le problème robuste avec les ensembles $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$.

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{\begin{array}{lllll}
\min\limits_{z} & z & & & \\
\text{s.c.} & & & & \\
 & \sum\limits_{ij\in A} d^1_{ij}\, x_{ij} & \leq z & \forall d^1 \in \mathcal{U}^{1*} & (0) \\
 & \sum\limits_{ij\in A} p^2_i x_{ij} \quad + \quad p^2_t & \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^{2*} & (1_{robuste}) \\
 & \sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} \; - \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 & \forall i \in V\setminus\{s,t\} & (2_{robuste}) \\
 & \sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & & (3_{robuste}) \\
 & \sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & & (4_{robuste})
\end{array}\right.
$$

(Je sais pas encore quels ensembles $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$ choisir au début, deux sous ensembles aléatoires et petits de $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$?)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}^{1*} &= \left\{ \left\{ d^1_{ij} = d_{ij} \right\}_{ij\in A} \right\} \\
\mathcal{U}^{2*} &= \left\{ \left\{ p^1_{i} = d_{i} \right\}_{i\in V} \right\}
\end{aligned}
$$

Il y a deux sous problèmes à résoudre, (SP_0) et (SP_1) :

$$
(SP_0)\left\{\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\,(1+\delta^1_{ij})\; x^*_{ij} \\
\text{s.c} & \\
 & \sum\limits_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 \\
 & \delta^1_{ij} \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A
\end{array}\right.
\qquad
(SP_1)\left\{\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^2} & \sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\,\hat{p}_i)\; x^*_{ij} \quad + \quad p_t + \delta^2_t\,\hat{p}_t \\
\text{s.c} & \\
 & \sum\limits_{i\in V} \delta^2_i \leq d_2 \\
 & \delta^2_i \leq 2 \quad \forall i \in V
\end{array}\right.
$$

avec x^* une solution courante du problème maître. Soient δ^{1*} et δ^{2*} des solutions optimales de (SP_0) et (SP_1), soit z^* une solution optimale du problème maître courant. Cette solution du problème maître courant est l'optimale, ssi

$$
\begin{aligned}
& \sum_{ij\in A} d_{ij}\,(1+\delta^1_{ij})\; x^*_{ij} \leq z^* \\
\text{et} & \\
& \sum_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\,\hat{p}_i)\; x^*_{ij} \;+\; p_t + \delta^2_t\,\hat{p}_t \leq S
\end{aligned}
$$

À chaque itération, on ajoute les contraintes suivantes. Si $\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\,(1+\delta^1_{ij})\; x^*_{ij} > z^*$, alors on coupe cette mauvaise solution x^* en rajoutant l'inégalité $\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\,(1+\delta^1_{ij})\; x_{ij} \leq z^*$. De même si $\sum\limits_{i\in V} (p_i+\delta^2_i\,\hat{p}_i)\; x^*_{ij} \;+\; p_t+\delta^2_t\,\hat{p}_t > S$, alors on rajoute l'inégalité $\sum\limits_{i\in V} (p_i+\delta^2_i\,\hat{p}_i)\; x_{ij} \;+\; p_t + \delta^2_t\,\hat{p}_t \leq S$. Si aucune de ces inégalités n'est violée, alors on a trouvé l'optimale pour le problème maître.

4. Résolution par dualisation.

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{
\begin{array}{lllr}
\min\limits_x \; d_{ij}\, x_{ij} \quad + & \left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} \\ \text{s.c} & \\ & \sum\limits_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 \\ & \delta^1_{ij} \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A \end{array}\right. & & \\
\quad \text{s.c.} & & & \\
\sum\limits_{ij\in A} p_i\, x_{ij} + \max\limits_{\delta^2} \left\{ \delta^2_t \hat{p}_t + \sum\limits_{ij\in A} \delta^2_i\ \hat{p}_i\ x_{ij} \right\} & & \leq S - p_t & (1_{robuste}) \\
\sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} \ - \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
\sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & & = 1 & (3_{robuste}) \\
\sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & & = 1 & (4_{robuste})
\end{array}\right.
$$

Isolation dans le problème robuste du terme faisant intervenir les variables δ^1_{ij} :

$$
\begin{aligned}
\min_x \max_{d^1} \sum_{ij\in A} d^1_{ij}\, x_{ij} &= \min_x \max_{delta^1} \sum_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x_{ij} \\
& \min_x \left(\sum_{ij\in A} d_{ij}\, x_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{ij\in A} d_{ij}\, \delta^1_{ij}\, x_{ij} \right)
\end{aligned}
$$

Problème interne lié aux variables δ^1_{ij} :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\, \delta^1_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.c.} & \\
& \sum\limits_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 \\
& \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \quad \forall ij \in A
\end{array}
\right.
$$

On dualise ce problème : Je ne suis pas sûr du tout de la dualisation, je pense même qu'elle est fausse...

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\min\limits_{\alpha} \quad d_1\,\alpha \\
\\
\text{s.c.} \\
\\
\qquad \alpha \sum\limits_{ij \in A} \delta^1_{ij} \geq \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\,\delta^1_{ij} \\
\\
\qquad \alpha \geq 0 \qquad \text{Que devient l'intervalle } [O, D_{ij}]\,?\,? \\
\\
\end{array}
\right.
$$

Reformulation de la contrainte robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables δ^1_{ij} :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ij \in A} p^2_i\,x_{ij} + p^2_t \leq S \qquad p^2_i \in \mathcal{U}^2 \\
&\sum_{ij \in A} \left(p_i + \delta^2_i\,\hat{p}_i\right) x_{ij} + p_t + \delta^2_t\,\hat{p}_t \leq S \\
&\sum_{ij \in A} p_i\,x_{ij} + \max_{\delta^2} \left(\sum_{ij \in A} \delta^2_i \hat{p}_i x_{ij} + \delta^2_t \hat{p}_t \right) \leq S
\end{aligned}
$$

Le problème interne lié aux variables δ^1_{ij} :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\max\limits_{\delta^2} \quad \left(\sum\limits_{ij \in A} \delta^2_i \hat{p}_i x_{ij} + \delta^2_t \hat{p}_t \right) \\
\\
\text{s.c.} \\
\\
\qquad \sum\limits_{i \in V} \delta^2_i \leq d_2 \\
\\
\qquad \delta^2_i \in [0, 2] \quad \forall i \in V \\
\\
\end{array}
\right.
$$

Il faut le dualiser puis utiliser les deux dualisations pour présenter les problème robuste sous la forme d'un simple programme linéaire en nombre entiers.