Modélisation Papier

Antonio Tavares, Julien Dallot

3 janvier 2022

Dans la suite du document, la variable x_{ij} désigne la sélection de l'arc $ij \in A$ dans le chemin de s à t.

1. Voici le problème statique $(\mathcal{P})$:

$$
(\mathcal{P}) \left\{
\begin{array}{lllllll}
\min\limits_{x} & \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\, x_{ij} & & & & & \\
\text{s.c.} & & & & & & \\
& \sum\limits_{ij \in A} p_i x_{ij} \quad + \quad p_t & \leq S & & (1) & & \text{(limite sur les sommets empruntés)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum\limits_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2) & & \text{(conservation du flot)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & & (3) & & \text{(un seul arc sortant de } s\text{)} \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & & (4) & & \text{(un seul arc rentrant dans } t\text{)}
\end{array}
\right.
$$

2. Modélisation du problème robuste $(\mathcal{P}_r)$:

$$
(\mathcal{P}_r) \left\{
\begin{array}{llll}
\min\limits_{x} \max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij \in A} d_{ij}\,(1 + \delta^1_{ij})\, x_{ij} & & \\
\text{s.c.} & & & \\
& \sum\limits_{ij \in A} p_i\, x_{ij} + \max\limits_{\delta^2} \left\{ \delta^2_t \hat{p}_t + \sum\limits_{ij \in A} \delta^2_i\, \hat{p}_i\, x_{ij} \right\} & \leq S - p_t & (1_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} x_{ji} - \sum\limits_{j \in \delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j \in \delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4_{robuste})
\end{array}
\right.
$$

3. Résolution par plans coupants et LazyCallback. On réexprime d'abord le problème robuste avec les ensembles $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$.

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{
\begin{array}{lllll}
\min\limits_{z} & z & & & \\
\text{s.c.} & & & & \\
& \sum\limits_{ij\in A} d^1_{ij}\, x_{ij} & \leq z & \forall d^1 \in \mathcal{U}^{1*} & (0) \\
& \sum\limits_{ij\in A} p^2_i x_{ij} \quad + \quad p^2_t & \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^{2*} & (1_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} \; - \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & & (4_{robuste})
\end{array}
\right.
$$

Au début de l'algorithme de plans coupants, on peut choisir les ensembles de départ $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$ suivants :

$$
\mathcal{U}^{1*} = \left\{ \{d^1_{ij} = d_{ij}\}_{ij\in A} \right\}
$$
$$
\mathcal{U}^{2*} = \left\{ \{p^2_i = d_i\}_{i\in V} \right\}
$$

Il y a deux sous problèmes à résoudre, (SP_0) et (SP_1) :

$$
(SP_0)\left\{
\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} \\
\text{s.c} & \\
& \sum\limits_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 \\
& \delta^1_{ij} \leq D_{ij} \quad \forall ij \in A
\end{array}
\right.
\qquad
(SP_1)\left\{
\begin{array}{ll}
\max\limits_{\delta^2} & \sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x^*_{ij} \quad + \quad p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t \\
\text{s.c} & \\
& \sum\limits_{i\in V} \delta^2_i \leq d_2 \\
& \delta^2_i \leq 2 \quad \forall i \in V
\end{array}
\right.
$$

avec x^* une solution courante du problème maître. Soient δ^{1*} et δ^{2*} des solutions optimales de (SP_0) et (SP_1), soit z^* une solution optimale du problème maître courant. Cette solution du problème maître courant est l'optimale, ssi

$$
\begin{array}{ll}
& \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} \leq z^* \\
\text{et} & \\
& \sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x^*_{ij}\ +\ p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t \leq S
\end{array}
$$

À chaque itération, on ajoute les contraintes suivantes. Si $\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} > z^*$, alors on coupe cette mauvaise solution x^* en rajoutant l'inégalité $\sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x_{ij} \leq z^*$. De même si $\sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x^*_{ij}\ +\ p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t > S$, alors on rajoute l'inégalité $\sum\limits_{i\in V} (p_i + \delta^2_i\ \hat{p}_i)\ x_{ij}\ +\ p_t + \delta^2_t\ \hat{p}_t \leq S$. Si aucune de ces inégalités n'est violée, alors on a trouvé l'optimale pour le problème maître.

4. Résolution par dualisation.

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{
\begin{array}{lll}
\min\limits_{x}\ d_{ij}\, x_{ij} \quad + & \left\{\begin{array}{ll}\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x^*_{ij} \\ \text{s.c} & \\ & \sum\limits_{ij\in A}\delta^1_{ij}\le d_1 \\ & \delta^1_{ij}\le D_{ij}\quad \forall ij\in A\end{array}\right. & \\
\quad\text{s.c.} & & \\
\sum\limits_{ij\in A} p_i\, x_{ij} + \max\limits_{\delta^2}\left\{\delta^2_t \hat{p}_t + \sum\limits_{ij\in A}\delta^2_i\ \hat{p}_i\, x_{ij}\right\} & \le S - p_t & (1_{robuste}) \\
\sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji}\ -\ \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i\in V\setminus\{s,t\} & (2_{robuste}) \\
\sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3_{robuste}) \\
\sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4_{robuste})
\end{array}\right.
$$

Isolation dans le problème robuste du terme faisant intervenir les variables δ^1_{ij} :

$$
\begin{aligned}
\min_x \max_{d^1} \sum_{ij\in A} d^1_{ij}\, x_{ij} &= \min_x \max_{\delta^1} \sum_{ij\in A} d_{ij}\ (1+\delta^1_{ij})\ x_{ij} \\
&= \min_x \left(\sum_{ij\in A} d_{ij}\, x_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{ij\in A} d_{ij}\, \delta^1_{ij}\, x_{ij} \right)
\end{aligned}
$$

Problème interne lié aux variables δ^1_{ij} :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{ij\in A} d_{ij}\, \delta^1_{ij}\, x_{ij} & \\
\text{s.c.} & & \\
 & \sum\limits_{ij\in A} \delta^1_{ij} \le d_1 & (\alpha^1) \\
 & \delta^1_{ij} \le D_{ij} \quad \forall ij\in A & (\beta^1_{ij})
\end{array}
\right.
$$

On dualise ce problème :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\min\limits_{\alpha^1,\beta^1} & d_1\alpha^1 + \sum\limits_{ij\in A} D_{ij}\beta^1_{ij} \\
\text{s.c.} & \\
 & \alpha^1 + \beta^1_{ij} \ge d_{ij}x_{ij} \quad \forall ij\in A \quad (\delta_{ij})
\end{array}
\right.
$$

Reformulation de la contrainte robuste afin d'isoler le terme faisant intervenir les variables δ^1_{ij} :

$$\sum_{ij \in A} p_i^2 \, x_{ij} + p_t^2 \leq S \qquad p_i^2 \in \mathcal{U}^2$$

qui se décompose en

$$\sum_{ij \in A} \left(p_i + \delta_i^2 \, \hat{p}_i\right) x_{ij} + p_t + \delta_t^2 \, \hat{p}_t \leq S$$

et après passage au maximum par rapport à δ^2

$$\sum_{ij \in A} p_i \, x_{ij} + \max_{\delta^2} \left(\sum_{ij \in A} \delta_i^2 \hat{p}_i x_{ij} + \delta_t^2 \hat{p}_t \right) \leq S$$

Le problème interne lié aux variables δ_{ij}^1 :

$$\begin{cases} \max\limits_{\delta^2} & \left(\sum\limits_{ij \in A} \delta_i^2 \, \hat{p}_i \, x_{ij} + \delta_t^2 \, \hat{p}_t \right) \\ \text{s.c.} & \\ & \sum\limits_{i \in V} \delta_i^2 \leq d_2 \qquad\qquad (\alpha^2) \\ & \delta_i^2 \leq 2 \quad \forall i \in V \qquad\qquad (\beta_i^2) \end{cases}$$

Il faut le dualiser puis utiliser les deux dualisations pour présenter les problème robuste sous la forme d'un simple programme linéaire en nombre entiers.

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha^2, \beta^2} & d_2 \alpha^2 + \sum\limits_{i \in V} 2 \beta_i^2 \\ \text{s.c.} & \\ & \alpha^2 + \beta_i^2 \geq \hat{p}_i \, x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{t\} \quad (\delta_i^2) \\ & \alpha^2 + \beta_t^2 \geq \hat{p}_i \qquad\qquad (\delta_t^2) \end{cases}$$

On reformule le problème maître :

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{\begin{array}{llll}
\min\limits_{x,\alpha^1,\beta^1} & d_{ij}\,x_{ij} + d_1\alpha^1 + \sum\limits_{ij\in A} D_{ij}\beta^1_{ij} & & \\
\text{s.c.} & & & \\
& \sum\limits_{ij\in A} p_i\,x_{ij} + \min\limits_{\alpha^2,\beta^2}\left(d_2\alpha^2 + \sum\limits_{i\in V} 2\beta^2_i\right) & \leq S - p_t & (1_{robuste}) \\
& \alpha^2 + \beta^2_i & \geq \hat{p}_i\,x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{t\} & (\delta^2_i) \\
& \alpha^2 + \beta^2_t & \geq \hat{p}_i & (\delta^2_t) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} \;-\; \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4_{robuste}) \\
& \alpha^1 + \beta^1_{ij} & \geq d_{ij}x_{ij} \quad \forall ij \in A & (\delta_{ij})
\end{array}\right.
$$

puis on peut supprimer le min dans la contrainte $(1_{robuste})$:

$$
(\mathcal{P}_r)\left\{\begin{array}{llll}
\min\limits_{x,\alpha^1,\beta^1} & d_{ij}\,x_{ij} + d_1\alpha^1 + \sum\limits_{ij\in A} D_{ij}\beta^1_{ij} & & \\
\text{s.c.} & & & \\
& \sum\limits_{ij\in A} p_i\,x_{ij} + d_2\alpha^2 + \sum\limits_{i\in V} 2\beta^2_i & \leq S - p_t & (1_{robuste}) \\
& \alpha^2 + \beta^2_i & \geq \hat{p}_i\,x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{t\} & (\delta^2_i) \\
& \alpha^2 + \beta^2_t & \geq \hat{p}_i & (\delta^2_t) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(i)} x_{ji} \;-\; \sum\limits_{j\in\delta^-(i)} x_{ij} & = 0 \quad \forall i \in V \setminus \{s,t\} & (2_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^-(s)} x_{sj} & = 1 & (3_{robuste}) \\
& \sum\limits_{j\in\delta^+(t)} x_{jt} & = 1 & (4_{robuste}) \\
& \alpha^1 + \beta^1_{ij} & \geq d_{ij}x_{ij} \quad \forall ij \in A & (\delta_{ij})
\end{array}\right.
$$