עבודת גמר - אופטימיזציה 88-782

רותם גזית, ת"ז 318446697

סמסטר חורף 2020

תוכן עניינים

1 הקדמה

1.1 עולם הבעיה

נסיעה בפקקים הפכה להיות דבר שבשגרה למרבית האוכלוסייה בעולם המערבי. כיוון ששעות העבודה של רוב בתי העסק והחברות מסנוכרנות, נוצרים "זמני עומס" (rush hours) בהן הדרכים נמצאות בספיקה מקסימלית, מה שמוביל לפקקי תנועה.

פתרונות טכנולוגיים רבים עוסקים בתחום הזה. waze למשל מציעה למשתמשיה מסלולים אלטרנטיביים עמוסים פחות, אותם היא יכולה לחשב ע"ס משתמשים אחרים שנעים בצירים ומדווחים לה בחזרה מה המהירות הממוצעת בכל קטע. משתמש ב waze מקבל תשובה לשאלה "מה הדרך המומלצת ביותר בין X לY כרגע" על ידי כך שנוסעים אחרים זזים בצירים המרכזיים המקשרים את X ל Y כבר עכשיו.

מטרת הפרויקט היא לתת גישה אחרת לפתרון בעיית הנסיעה בפקקים. במקום לדעת **מהי** הדרך המומלצת **כרגע**, אני רוצה לדעת **מתי** לצאת כדי לנסוע כמה שפחות זמן בדרך שלי.

כלומר, אני מראש יודע מה הדרך המועדפת לנסיעה בין X ל Y, ורק רוצה לדעת מתי עדיף לי לנסוע בה. לצורך העניין - אני יודע מה הדרך הטובה ביותר מבחינתי לנסוע מביתי לאוניברסיטה (יכול להיות שהיא לא ניתנת לבחירתי, למשל אם משתמשים בתחבורה ציבורית), אבל המטרה שלי היא להיות כמה שפחות זמן על הכביש, ועל כן אני מבקש המלצה לזמן היציאה האידיאלי.

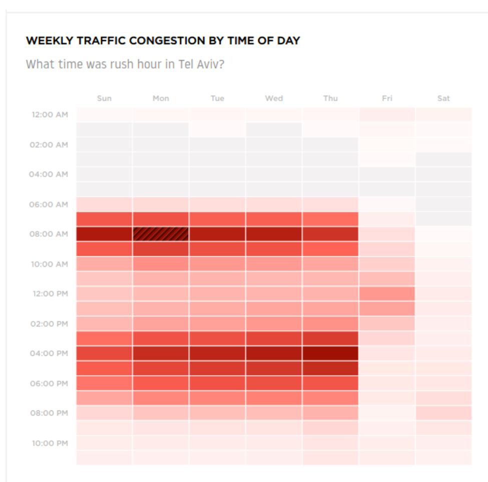
כמובן שמינימיזציה שכזו תהיה מאוד משעממת, כי סביר להניח שבאמצע הלילה כל הצירים יהיו ריקים וזמן הנסיעה בהם יהיה מינימלי. לכן היינו רוצים להוסיף זמן מינימלי ומקסימלי ליציאה בתור חסמים.

בסה"כ אני רוצה לדעת מה היא שעת היציאה שתיתן לי זמן נסיעה מינימלי בציר, תוך התנאי ששעת היציאה צריכה להיות בטווח זמנים מסוים.

הסיבה שאני רוצה לקבל מדד כזה נובעת מכך שבעבודה שלי אין לי שעת הגדרה קשיחה (היות ואני משתכר שכר גלובלי), אלא טווח זמנים שבו אני צריך להיות במשרד שלי. כיוון שאין לי סיבה מוגדרת להגיע בשעה $7^{\underline{30}}$ לעומת $7^{\underline{40}}$, אני פשוט מעדיף לנסוע כשאין פקקים.

בתל אביב מצב הפקקים חמור במיוחד[1]. תל אביב מדורגת במקום 9 מבין 240 הערים הפקוקות באירופה, ובמקום 21 מבין כלל ערי העולם שנבדקו.

בממוצע כל נסיעה מתארכת ב 46% מהזמן הנאיבי שלה (מרחק הנסיעה חלקי מהירות מקסימלית בכל אחד מהקטעים) בשל פקקים. התרשים הנ"ל מתאר את העומס הממוצע בכבישים בכל אחת משעות היום ובכל אחד מימות השבוע.



1.2 תכנית פעולה

את העבודה ניתן לחלק למספר שלבים:

1. מציאת מידע מתאים. צריך לשים לב שחשובים לנו הדברים הבאים:
   (א) דגימה של אותו נתיב הנסיעה לאורך זמן
   (ב) מספיק דגימות בזמנים שונים - שעות שונות, ימים שונים בשבוע, חודשים שונים, ימי חול וימי חופשה
   (ג) בעבור כל נסיעה - לדעת מתי התחילה וכמה זמן לקחה בפועל.
2. ביצוע רגרסייה על גבי המידע שתאפשר לנו לחזות את זמן הנסיעה ברמת דיוק מספיקה.
   כדי לבצע רגרסייה כזו נצמיד את המידע על הנסיעות לנתונים נוספים:
   (א) מה היה מזג האוויר באותו היום - רוחות, גשמים, טמפרטורות

[1] https://www.tomtom.com/en_gb/traffic-index/tel-aviv-traffic#statistics

(ב) הצמדת היום לימי חופשה לאומיים

3. ביצוע מינימיזציה על הRegressor שנקבל.
המינימיזציה מניחה יום כלשהו עם כל נתוני המסגרת שלו, והתנאים שלה היא שזמן תחילת הנסיעה נמצא בטווח הזמנים המבוקש. המינימיזציה מחזירה את זמן תחילת הנסיעה המינימלי לפי הרגרסייה שלנו.

1.2.1 גיבוש מידע מתאים

התנאים המגבילים על המידע הנדרש המובאים לעיל הם תנאים מחמירים מאוד ורוב המידע בתחום זה איננו ציבורי.
בסופו של דבר, המידע שבו נעזרתי הוא מידע ציבורי על נסיעות מוניות ברחבי העיר ניו יורק [2] . המידע נאסף בשנת 2013 ומכיל 173,179,759 נסיעות מונית (29GB) בכלל רחבי העיר ועל גבי כל ימות השנה.
עבודה משמעותית של איתור בכלל הנתונים הללו צריכה להתבצע כדי לענות על תנאי 1א המתואר לעיל, כלומר לבודד נסיעות הקורות בין שתי נקודות ספציפיות על המפה.
את המידע הנ"ל מצליבים בקלות אל מול נתוני מזג אוויר[3] וימי חופשה לאומיים בארצות הברית[4]. על כלל העבודה הנ"ל יפורט בפרק ה data preperation.

1.2.2 אתגר המינימיזציה

לאחר קבלת מודל הרגרסייה המבוקש, בעיית המינימיזצייה מעניינת כיוון שהיא משלבת שני קונספטים:

- מינימזציה של פונקצייה שהנגזרת שלה איננה ידועה
- מינימזציה של פונקציה עם אילוצים

במהלך הקורס למדנו כיצד ניתן למצוא מינימום לבעיות עם אילוצים בעזרת היכולת שלנו לגזור אותה. שיטות כמו KKT מאוד מוצלחות לפתרון בעיה זו.
כיוון שכאן הנגזרת לא ידועה היות והרגרסור שלנו איננו אנליטי, נמצא מינימום בעזרת שילוב שיטת Penalty Method יחד עם אחת השיטות שלמדנו בהרצאות הראשונות של הקורס - שיטת Nelder Mead (הידועה גם בשם downhill simplex method).
לאחר יישום השיטות הבסיסיות, ננסה לבצע היוריסטיקות שיאפשרו לנו למצוא מינימום גלובלי ולא לוקאלי.

2 הבניית המידע - data preperation

2.1 חילוץ המידע המתאים

המידע כאמור שעליו ננסה לפתור את הבעיה הוא פירוט נסיעות מונית ברחבי העיר ניו יורק על גבי כל שנת 2013.

medallion	hack_license	ndor	rate_code	and_fw	pickup_datetime	dropoff_datetime	passenger_count	trip_time_in_secs	trip_distance	pickup_longitude	pickup_latitude	dropoff_longitude	dropoff_latitude
CD483CB196E3505057E48C94FD89233B	199EEEFA30FF9D8D0DDEAAE121107C8E	VTS	1		2013-01-15 10:42:00	2013-01-15 10:49:00	5	420	0.92	-73.977074	40.750179	-73.965347	40.754841
86845617E8D805CC175640E6701E2B9B	8B608F94D85CE91ECA9D060C852C96B2	VTS	1		2013-01-15 20:10:00	2013-01-15 20:17:00	3	420	1.47	-73.971642	40.765968	-73.978149	40.750393
92A5DA5E65D973B5F64C70113B091164	BEB3C033E6D08F37F3415068B010D9EF	VTS	1		2013-01-14 19:58:00	2013-01-14 20:12:00	2	840	3.79	-73.991051	40.734871	-73.958488	40.763
CFEF976DC97C18EFE560DED254BD6283	58816C3AEBF47213F74FBC8AFF915FCD	VTS	1		2013-01-16 00:06:00	2013-01-16 00:28:00	5	1320	6.05	-73.981178	40.758041	-73.992348	40.689629
8736738DE7D70316889BF9D38B7ED338	D4E8282485A4228BB4872822C7EFEAA5	VTS	1		2013-01-14 16:45:00	2013-01-14 16:49:00	1	240	0.94	-73.970009	40.799686	-73.96814	40.792007
744B4B8BF12CF57282B79A8DEB9B9B44	B9DD7C80F538AD0BCE3D154021E733AD	VTS	1		2013-01-16 09:36:00	2013-01-16 09:58:00	1	1320	1.83	-73.971291	40.748127	-73.991966	40.748768
B208E4003BAB08E4B77DDCCF722ABC	4027AC0C230411EE4106E0071B7EDAB5	VTS	1		2013-01-16 07:35:00	2013-01-16 07:52:00	1	1020	4.16	-73.992706	40.758556	-73.997398	40.714149
11922D84A5A91EF5F8317AF86C3E43E9	E7BBC18C40F200AB9C881C5D72423D8D	VTS	5		2013-01-15 21:38:00	2013-01-15 21:39:00	1	60	0	-74.035568	40.713505	-74.035553	40.713509
BE8510A528238ACE647199089ADF6B47	A14986CCF33AF0266289D422ACB52132	VTS	1		2013-01-13 16:59:00	2013-01-13 17:10:00	3	660	1.86	-73.997864	40.745178	-73.997215	40.725773
0CA06825E31D118DED987821A7EDA3FE	AFACF8312244283B1FC901B06D7979A0	VTS	1		2013-01-16 08:13:00	2013-01-16 08:17:00	1	240	0.55	-73.967865	40.755814	-73.974487	40.75322

המידע בתצורתו המקורית מכיל את הנתונים הבאים:

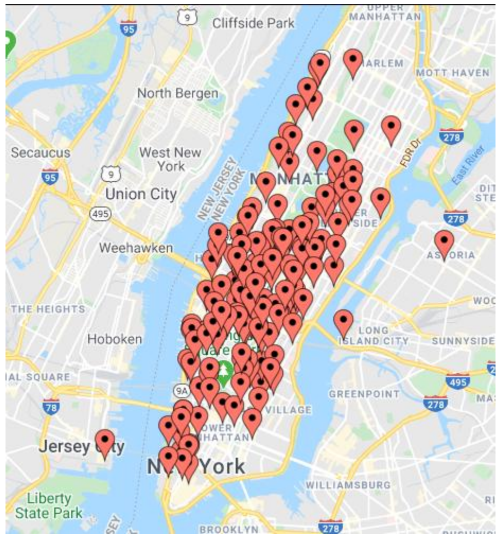
- נתוני מסגרת על הנסיעה: חברת המוניות, ו ID של הנסיעה המיוצג בעמודות:
  medallion hack_license vendor_id rate_code store_and_fwd_flag
- כמות הנוסעים במונית
  passenger_count
- נתוני זמן: זמן תחילת וסיום הנסיעה, והזמן בשניות של הנסיעה כולה
  trip_time_in_secs pickup_datetime dropoff_datetime
- המרחק שעברה המונית בזמן הנסיעה (במיילים)
  trip_distance
- קאורדינטות: קאורדינטת ההתחלה וקאורדינטת הסיום
  pickup_longitude pickup_latitude dropoff_longitude dropoff_latitude

[2] https://archive.org/details/nycTaxiTripData2013
[3] https://www.kaggle.com/selfishgene/historical-hourly-weather-data
[4] https://www.kaggle.com/gsnehaa21/federal-holidays-usa-19662020

המידע עצמו מכיל נתוני נסיעות מכל רחבי העיר, ועל כן לא מתאים לפתרון הבעיה שאנחנו מנסים לפתור (אופטימיזציה של שעת היציאה ע"ג מסלול בודד).

על כן תחילה נצטרך להתמקד באיזור מסוים בו יש לנו מספיק נסיעות לאורך השנה.

התרשים הבא מציג את מיקומן של 178 שורות רנדומליות מתוך המידע שלנו ומדגיש עד כמה הנסיעות מפוזרות ע"ג כלל העיר ניו יורק.



על מנת להתמקד באיזורים ספציפיים, נעזר בספרייה ש"מגרידה" (grid) קאורדינטות. למעשה כל קאורדינטה הופכת לקוד מיוחד שמייצג תא שטח. אנחנו נייצר תאי שטח בקוטר של בערך 250 מטר על מנת שבכל איזור כזה יהיו לנו מספיק נקודות.

הקוד של תהליך ה"הגרדה" נמצא בקובץ extract_points_of_interest.py. בשל כמות המידע הרבה שיש לנו (כ 30GB) אני נעזר בטכנולוגיית SPARK שלמעשה באופן מבוזר יכולה לעבד כמויות כאלה של מידע.

הספרייה שאיתה אני מבצע את ה"הגרדה" היא ספרייה של גוגל בשם openlocationcode. עטפתי אותה בפונקציה convert_coordinate_to_grid:

```
def convert_coordinate_to_grid(lat, long):
    try:
        return openlocationcode.encode(float(lat), float(long), 8)
    except:
        pass
```

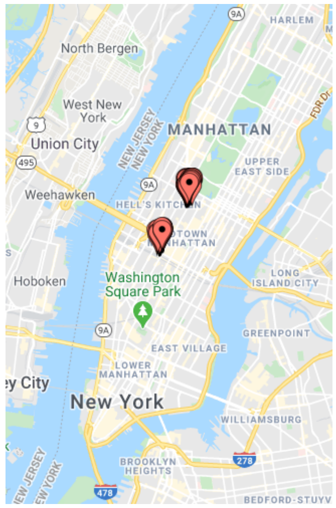
והחלתי אותה על ה Dataframe:

```
def add_grid_columns(df, columns_mapping=GRID_COLUMNS_MAPPING):
    convert_udf = F.udf(convert_coordinate_to_grid)
    for grid_column, lat_long_columns in columns_mapping.items():
        df = df.withColumn(grid_column, convert_udf(*lat_long_columns))
    return df
```

לאחר החלת ה GRID ע"ג כלל המידע, אני לוקח את 5 זוגות ה Grids (זה של תחילת הנסיעה וזה של סיום הנסיעה) שהופיעו הכי הרבה במידע, ואותם שומר בקבצים נפרדים (כדי שאוכל לאמן את המודל שלי עליהם בלבד). התוצר של התהליך נכתב לנתיב data/trip_data_grids.

יש לשים לב שאת כל ה dataset המקורי לא צירפתי לפרויקט מפאת גודלו ובמידה ורוצים להריץ את התהליך עליו יש להוריד אותו בנפרד. במקומו צירפתי דוגמית של החומרים לנתיב data/trip_data_sample.

ה GRIDS הכי פופולארים במידע היו 87G8Q279+, 87G8Q225+, בהם יש כ 35 אלף נסיעות במהלך השנה. התרשים הבא מציג 120 נסיעות מתוכן על גבי המפה, וניתן לראות שאכן התהליך מיקד אותנו לאיזורי עניין בתוך ניו יורק ותואם את ה dataset אותו ניסינו להשיג במקור, כאשר יש שני ריכוזי נקודות, אחד עבור תחילת הנסיעה ואחד עבור סופה -

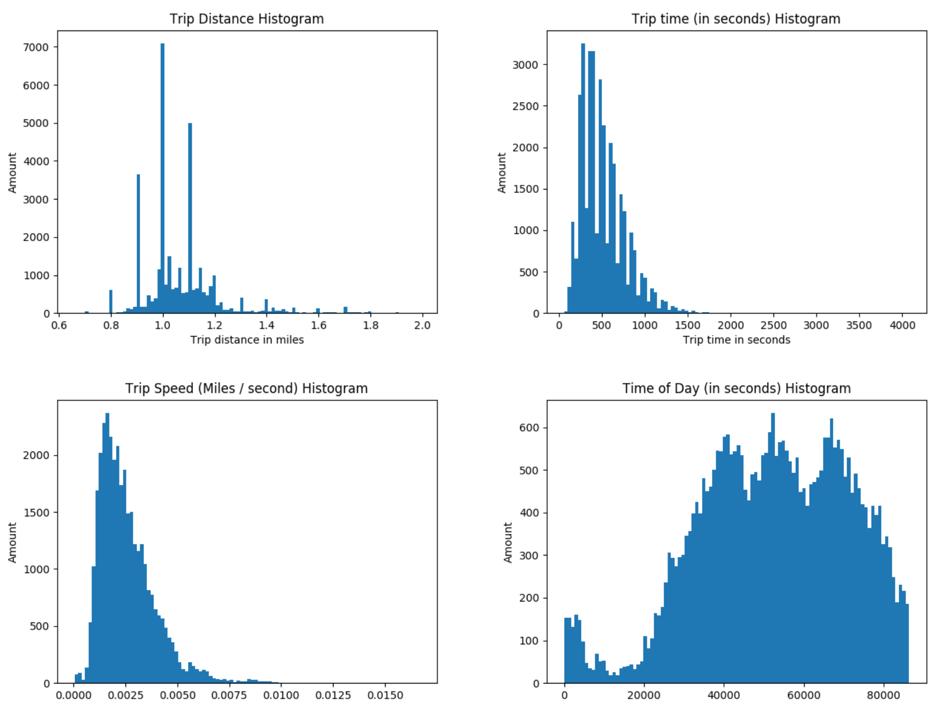


במהלך העבודה עד שלב זה ניסיתי דרכים נוספות לפתרון הבעיה:

- שימוש ב grid ממוקד יותר ברזולוצייה של 2 מטרים
האפשרות הזו נפסלה בגלל שהיא החזירה מעט מידי רשומות עבור תהליכי ההמשך. תהליך ה"הגרדה" לא מאפשר רזולוצייה שבין 250 המטרים ל2 המטרים ולכן נאלצתי להסתפק ברזולוצייה זו.
- זניחת השימוש ב grid והתבססות על מרחק אוקלידי בין נקודות
דרך זו קשה מאוד חישובית (למעשה היא $O(n^2)$ כאשר n מספר הרשומות) ולכן נזנחה.

2.2 ויזואליזציה של המידע

בשלב זה ניתן להתחיל ולנתח את התפלגות המידע שקיבלנו.
הקוד ליצירת התרשימים הנ"ל נמצא בקובץ raw_data_stats.py



2.3 סיכום הפרק

1. הצלחנו לייצר dataset בן 35000 רשומות של נסיעות בין שני איזורים ספציפיים בעיר ניו יורק.
גיבשנו את המידע בעזרת תהליך סטנדרטי בתעשייה של הפיכת נ"צ לתא שטח.

2. המידע (לפחות מבחינה ויזואלית) מתפלג באופן נורמלי גם בזמני הנסיעה וגם באורך הנסיעה, ונראה שיש לנו נתונים מספיקים ע"ג כל שעות היום.
זה למעשה תואם את הציפיות הכלליות שלנו ממידע מסוג זה.

3 בניית המודל

3.1 הנדסת פיצ'רים מתאימים

כלל הקוד של הפרק הזה מופיע בנתיב python_code/model תחת הקובץ data_prep.py ותיקיית הקבצים features/

3.1.1 חילוץ מתוך המידע הקיים

השלב הראשון בעבודה שלנו הוא חילוץ הנתונים מתוך המידע שיצרנו בפרק הקודם.
מרבית הנתונים בטבלה המקורית אינם מעניינים אותנו. אני לא רוצה ללמוד על נתונים כמו כמות הנוסעים במונית או חברת המוניות, היות ואלו נתונים שלא רלוונטים לבעיה שאני מנסה לפתור (נסיעה ברכב פרטי). על כן מתוך המידע המקורי נשמור על 3 עמודות:

- זמן תחילת הנסיעה - pickup_datetime
- זמן הנסיעה הכולל בשניות - trip_time_in_secs
- מרחק הנסיעה הכולל במייל - trip_distance

מעמודת "זמן תחילת הנסיעה" נחלץ את הפיצ'ר המרכזי - זמן תחילת הנסיעה בשניות מאז תחילת היום

```python
def format_dates(df):
    df = df.copy()
    df.pickup_datetime = pd.to_datetime(df.pickup_datetime, format='%Y-%m-%d %H:%M:%S')
    df['time_of_day'] = df.pickup_datetime.apply(lambda d: d.timestamp() % (24 * 60 * 60))
    df['DATE'] = df.pickup_datetime.dt.strftime('%Y-%m-%d')
    return df


def load_data(pickup_grid='87G8Q279+', dropoff_grid='87G8Q225+', select_cols=SELECT_COLS):
    data_path = os.path.join(os.path.abspath(TRIP_DATA_GRIDS_PATH), f'trip_data_{pickup_grid}_{dropoff_grid}.csv')
    df_grid = pd.read_csv(data_path)
    df_grid = df_grid[select_cols]
    df_grid = format_dates(df_grid)
    return df_grid
```

בקובץ python_code/model/features/date_parts.py מתבצע פירוק של עמודת הזמן לגורמיה - אנחנו לוקחים מתוך הזמן שלושה מאפיינים - היום בשבוע, היום בחודש והחודש.
נשים לב שלמרות שבמרבית התהליכים המקבילים היינו מחלצים גם את השנה, כאן כל האירועים קרו באותה השנה ולכן לא נרצה לעוות את הלמידה שלנו בשל כך.

```python
def add_date_parts(df):
    df = df.copy()
    attrs = ['Dayofweek', 'Day', 'Month', ]
    for attr in attrs:
        df[f'pickup_datetime{attr.lower()}'] = getattr(df.pickup_datetime.dt, attr.lower())
    return df
```

3.1.2 מזג אוויר

את הנתונים ניתן להצמיד לנתוני מזג אוויר התואמים את זמני הנסיעה. המידע של מזג האוויר הגיע מפרויקט Kaggle ומכיל נתונים שעתיים של מזג האוויר בניו יורק (ובערים נוספות) ע"ג תקופת זמן של מספר שנים.
המידע מגיע ע"ג מספר קבצים נפרדים, לפי המדד - טמפרטורה, לחות, כיוון הרוח, עוצמת הרוח, לחץ ברומטרי, ותיאור מילולי של מזג האוויר.
הטבלה הבאה מציגה דוגמת חומר מטבלת הטמפרטורות וטבלת התיאור המילולי. אפשר לשים לב שהטמפרטורות נתונות בקלווין, והזמנים נתונים בזמן UTC (ולכן נצטרך להזיז אותם לזמן ניו יורק)

datetime	New York	Tel Aviv District
1Oct12 – 30Nov17	251 – 310	271 – 321
2012-10-01 13:00:00	288.22	305.47
2012-10-01 14:00:00	288.24767617	304.31
2012-10-01 15:00:00	288.326939663	304.281841331
2012-10-01 16:00:00	288.406203155	304.238014609
2012-10-01 17:00:00	288.485466648	304.194187887
2012-10-01 18:00:00	288.564730141	304.150361165
2012-10-01 19:00:00	288.643993634	304.106534443
2012-10-01 20:00:00	288.723257127	304.06270772
2012-10-01 21:00:00	288.80252062	304.018880998
2012-10-01 22:00:00	288.881784113	303.975054276
2012-10-01 23:00:00	288.961047606	303.931227554
2012-10-02 00:00:00	289.040311099	303.887400832

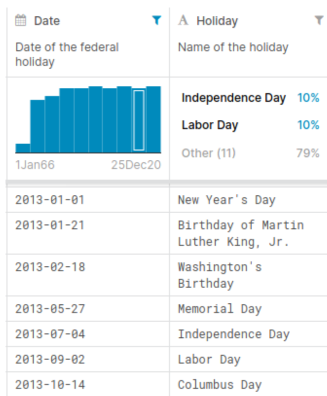
datetime	New York	Tel Aviv District
1Oct12 – 30Nov17	sky is clear 26% broken clouds 14% Other (35) 61%	sky is clear 48% few clouds 18% Other (25) 34%
2012-10-01 14:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 15:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 16:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 17:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 18:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 19:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 20:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 21:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 22:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-01 23:00:00	few clouds	sky is clear
2012-10-02 00:00:00	few clouds	sky is clear

הקובץ python_code/model/features/weather.py לוקח את נתוני מזג האוויר ומצמיד אותם בזה אחר זה לתוך הטבלה המקורית שלנו.
החיבור הוא טריוויאלי, המורכבות היחידה היא שינוי איזור הזמן.
על גבי החומרים השעתיים, אנחנו מחשבים גם 3 עמודות - הנתון המינימלי, המקסימלי והממוצע לאותו היום. הפונקציה הנ"ל מעשירה את המידע השעתי בנתונים הללו:

```python
def calculate_daily_mean(weather_dataset, file_name, date_column='datetime'):
    if weather_dataset.dtypes[file_name] == np.float:
        mean_column, min_column, max_column = f'{file_name}_daily_mean', f'{file_name}_daily_min', f'{file_name}_daily_max'
        means = weather_dataset[[date_column, file_name]]
        means[mean_column] = means[file_name]
        means[min_column] = means[file_name]
        means[max_column] = means[file_name]
        means = means.groupby([date_column], as_index=False).agg(
            {mean_column: 'mean', min_column: 'min', max_column: 'max'})
        means = means[[date_column, mean_column, min_column, max_column]]
        weather_dataset = means
    return weather_dataset
```

3.1.3 חגים לאומיים בארצות הברית

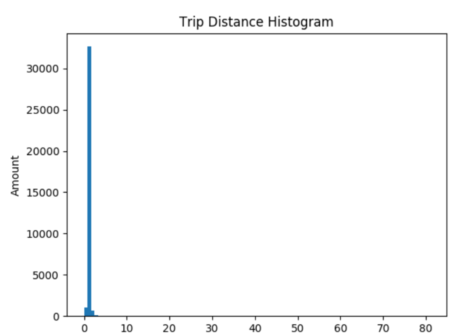
אחד הפרמטרים המשמעותיים (אינטואיטיבית) על מצב התנועה בכבישים הוא האם מדובר ביום עבודה או ביום חופש לאומי, מתוך הנחה שבימי החופש התנועה מתנהגת אחרת
(מצד אחד - פחות תנועה למקומות העבודה, ומצד שני עלייה בתיירות).
המידע עליו אני מתבסס מגיע גם הוא מפרויקט Kaggle ומכיל את כל החגים הלאומיים בארצות הברית בין השנים 1966 ל 2020.
כאן מעניין אותנו רק קיום בינארי - האם יום מסויים הוא יום חופש לאומי או לא.



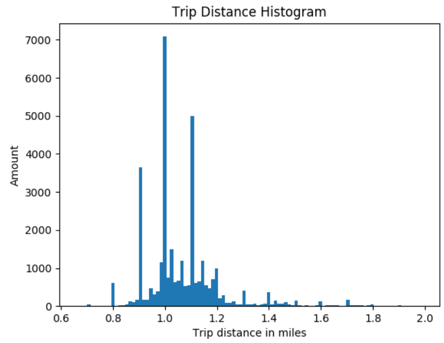
גם כאן ההצמדה פשוטה מאוד ומתבצעת בקובץ python_code/model/features/holidays.py

3.1.4 סינון אנומליות במידע

מתוך המידע שמתקבל נרצה לסנן מספר תופעות לא מוסברות שככל הנראה נובעות מהסנסורים שהפיקו במקור את הנתונים על מוניות.
ספציפית, מניתוח בסיסי ניתן לראות שלעתים יש רשומות עם אורך נסיעה ארוך או קצר מידי.
התרשים הבא הוא היסטוגרמת אורכי הנסיעה, כפי שהוצגה בפרק הקודם, רק ללא סינון על מרחק נסיעה מקסימלי:



ניתן לראות שבאמת מרבית הנסיעות מרוכזות בטווח קטן מאוד, אך ככל הנראה ישנן נסיעות (פיקטיביות?) שאורכן גדול מאוד.
כדי להתמודד עם אנומליות כאלו, נסתכל על האחוזונים השונים של מרחק הנסיעה. אחוזון 99% של מרחק הנסיעה הוא 2, ואחוזון 0.01% הוא 0.65.
על כן כדרך התמודדות נתבונן רק על רשומות בהן מרחק הנסיעה d מקיים $0.65 \leq d \leq 2$. בזכות הסינון הנ"ל נקבל היסטוגרמה הגיונית יותר:



את כל תהליך הוספת הפיצ'רים מבצעת הפונקציה data_prep שנמצאת תחת הקובץ python_code/model/data_prep.py: היא טוענת את המידע, מנקה אותו ומצמידה את כל הפיצ'רים המתוארים לעיל.

3.2 אימון המודל

3.2.1 אימון

המודל הנבחר לצורך ביצוע המשימה הוא Random Forest Regressor וזאת מפאת פשוטו בניתוח בעיות מהסוג הנ"ל. כיוון שליבת הפרויקט איננה במימוש המודל (אלא בביצוע מינימיזציה עליו בסופו של התהליך), לא אכביר בכל הניסיונות השונים בהרצת המודל עד להגעה לתוצאות המוצגות כאן. הרצת המודל מתבצעת בקובץ python_code/model/model_learning.py

אנחנו מאמנים את המודל על 80% מהמידע, עם 40 עצים שונים, שכל אחד מאומן על 50% מהפיצ'רים שלנו. הגבלתי את מספר הדגימות בכל עלה בעץ ל 3.

רשימת הFeatures המלאה שלנו בשלב זה:

feature	description	feature	description
trip_time_in_secs	**המשתנה התלוי – זמן הנסיעה**	temperature_daily_min	טמפרטורה – מינימום ליום הנסיעה
trip_distance	אורך הנסיעה	temperature_daily_max	טמפרטורה – מקסימום ליום הנסיעה
time_of_day	זמן מתחילת היום בשניות	wind_direction_daily_mean	כיוון רוח – ממוצע ליום הנסיעה
holiday	האם מדובר ביום חופש	wind_direction_daily_min	כיוון רוח – מינימום ליום הנסיעה
humidity_daily_mean	לחות – ממוצע ליום הנסיעה	wind_direction_daily_max	כיוון רוח – מקסימום ליום הנסיעה
humidity_daily_min	לחות – מינימום ליום הנסיעה	wind_speed_daily_mean	מהירות רוח – ממוצע ליום הנסיעה
humidity_daily_max	לחות – מקסימום ליום הנסיעה	wind_speed_daily_min	מהירות רוח – מינימום ליום הנסיעה
pressure_daily_mean	לחץ ברומטרי – ממוצע ליום הנסיעה	wind_speed_daily_max	מהירות רוח – מקסימום ליום הנסיעה
pressure_daily_min	לחץ ברומטרי – מינימום ליום הנסיעה	pickup_datetimedayofweek	יום בשבוע
pressure_daily_max	לחץ ברומטרי – מקסימום ליום הנסיעה	pickup_datetimeday	יום בחודש
temperature_daily_mean	טמפרטורה – ממוצע ליום הנסיעה	pickup_datetimemonth	חודש

3.2.2 מדידת איכות המודל

על תוצאת המודל הרצנו את הבדיקות הבאות (אל מול המידע עליו התאמנו ואל מול 20% מהחומרים שלא נכנסו לאימון):

- הפרש זמנים בין הזמן האמיתי לזמן המנוחש ע"י המודל: $|T_{real} - T_{predict}|$
  - תוחלת ההפרשים
  - סטיית התקן של ההפרשים
  - חציון ההפרשים
  - אחוזון 95 של ההפרשים
  - הפרש מינימלי והפרש מקסימלי
- ציון R^2 למתאם המודל על התוצאות האמיתיות. ציון זה מופיע לנו על ה train, הtest וה OOB (out of bag score, באופן כללי חישוב פרדיקציה על החומרים שלא נכנסו בתהליך הרנדומלי שבוחר חומרים לאימון)

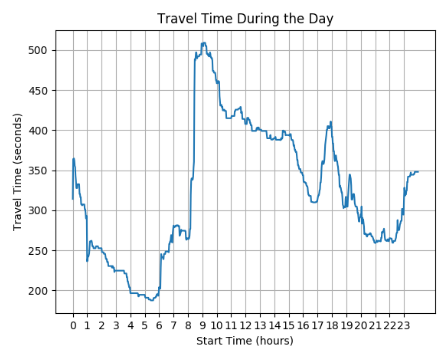
name	train	test
l1 - mean	66.913623	97.797677
l1 - std	70.332301	98.777692
l1 - quantile	48.590813	74.054876
l1 - 95% percentile	187.413907	269.010393
l1 - min	0.002254	0.006385
l1 - max	2984.010486	2764.043598
r2	0.857826	0.707454
r2 - oob	0.697148	NaN

התוצאות שקיבלנו אינן מושלמות (למשל ה R^2 על חומרי ה test נמוך ממה שהיינו רוצים), אבל ניתן לראות שאחוזון 95% של ההפרשים עומד על 269 שניות (פחות מ 4.5 דקות), שזה לחלוטין לא רע בהתחשב בכמות הפיצ'רים הקטנה שבה השתמשנו, וזה מספיק כדי שנוכל להתקדם הלאה.

מן הסתם, עבודה מאומצת שמטרתה המוצהרת היא לייצר מודל טוב יותר הייתה מניבה תוצאות מוצלחות יותר, אך כיוון שמדדי המודל אינם ליבת העבודה, אני מרשה לעצמי לעצור במצב הזה.

התרשים הבא מתאר את זמן הנסיעה המנוחש (בהפרשים של 100 שניות) על פני כל שעות היום בתאריך $22/4/2013$:

ניתן לראות מהתרשים כמה דברים מעניינים:



1. המודל מצליח לזהות את התבנית של זמני עומס ושפל, באופן דומה לאופן שבו הגיוני לחשוב עליהם (בלילה - אין עומס, וישנם שני גלי עומס, בבוקר ולקראת ערב)

2. הפונקציה הנוצרת איננה רציפה, ויש בה הרבה מאוד "רעשים".
מינימיזציה על פונקציה רועשת כזו תביא אותנו למינימום לוקאלי מאוד ולא נכון.

3.2.3 רציפות הפונקציה הנוצרת

על מנת שנוכל לבצע מינימיזציה מוצלחת על הפונקצייה הנ"ל, נרצה לנקות אותה מרעשים ולהפוך אותה לרציפה.
לשם כך נעזר בטענה הבאה:

טענה 1.3 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית (רימן) בתחום $[a,b]$. יהי $\epsilon>0$, הפונקציה $g_\epsilon(x)=\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon}f(x)dx$ רציפה לכל $x\in(a,b)$.

הוכחה: יהי $\delta>0$. נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned}|g_\epsilon(x)-g_\epsilon(x+\delta)| &= \left|\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon}f(x)dx-\int_{x-\epsilon+\delta}^{x+\epsilon+\delta}f(x)dx\right| \\ &= \left|\int_{x+\epsilon}^{x+\epsilon+\delta}f(x)dx-\int_{x-\epsilon}^{x-\epsilon+\delta}f(x)dx\right|\end{aligned}$$

היות והפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בתחום, היא גם חסומה בו. לכן ניתן להניח כי $|f(x)|\le M$, ולכן:

$$\begin{aligned}\left|\int_{x+\epsilon}^{x+\epsilon+\delta}f(x)dx-\int_{x-\epsilon}^{x-\epsilon+\delta}f(x)dx\right| &\le \int_{x+\epsilon}^{x+\epsilon+\delta}Mdx+\int_{x-\epsilon}^{x-\epsilon+\delta}Mdx \\ &= 2\cdot\delta\cdot M\end{aligned}$$

מכלל הסנדוויץ', בגלל ש $2\cdot\delta\cdot M \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ מתקיים $|g_\epsilon(x)-g_\epsilon(x+\delta)| \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ כלומר $g_\epsilon(x) \xrightarrow{\delta\to 0} g_e(x+\delta)$.
לכן $g_\epsilon(x) \xrightarrow{t\to x} g_\epsilon(t)$ לכל $x\in(a,b)$, משמע g_ϵ רציפה. ∎

הערה 2.3 כמובן שגם הפונקציה $\frac{1}{2\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(x)dx$ היא רציפה.
תהי החלוקה $\{x_{n_i}\}_{i=0}^{n}$ כאשר $x-\epsilon = x_{n_0} < x_{n_1} < \ldots < x_{n_n} = x+\epsilon$ חלוקה ל n מקטעים. אזי:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\epsilon}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_{n_i})\cdot\frac{x+\epsilon-x+\epsilon}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_{n_i})\end{aligned}$$

על כן אם נבחר $\epsilon>0$, יתקיים $\frac{1}{2\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_{n_i})$, ולכן נוכל לקחת n מספיק גדול כדי לקבל קירוב לאינטגרל הנ"ל.

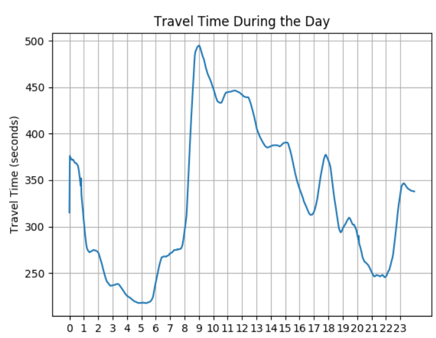
לפי הטענה, מתוך הנחה שפונקציית ה predict היא אינטגרבילית בתחום הערכים של יום מסוים, נוכל "להחליק" אותה ע"י קירוב האינטגרל הנ"ל לכל נקודה.

בקובץ python_code/model/pretty_predict.py אנחנו מיישמים פונקציית פרדיקציה אלטרנטיבית שמחשבת את **ממוצע** הפרדיקציות בסביבת הנקודה:

```python
def predict(df, model, row, time_of_day=None, buffer=1000, buffer_samples=21):
    columns = df.columns
    time_of_day_index = list(columns).index('time_of_day')
    rows = []
    time_of_day = time_of_day or row[time_of_day_index]
    for i in np.linspace(max(time_of_day - buffer, 0), min(time_of_day + buffer, 60 * 60 * 24), buffer_samples):
        row = row.copy()
        row[time_of_day_index] = i
        rows.append(row)
    rows = pd.DataFrame(rows, columns=columns)
    preds = model.predict(rows)
    return preds.mean()
```

הפונקציה מקבלת את המידע והמודל שיצרנו, יחד עם שורה ספציפית עליה אנחנו רוצים לבצע predict, היא מייצרת שורות בטווח ובכמות המוגדרות כפרמטר (ברירת המחדל כאן היא בטווח של $\epsilon = 1000_{sec}$ לייצר $n=21$ דגימות), ומחשבת את התוחלת של ה predict עליהן.

כאשר נצייר גרף של אותו היום המתואר לעיל בשימוש בפונקציה החדשה, נקבל:



3.2.4 סיכום הפרק

1. הצלחנו לייצר מודל שנותן ניבוי מוצלח של הבעיה שאותה אנחנו מנסים לפתור. המודל רחוק מלהיות אידיאלי אך מדגים את הבעיה היטב.

2. הצלחנו לייצר מתוך המודל פונקציה שתאפשר לנו לבצע מינימיזציה, זאת בעזרת "החלקה" של הפונקציה כפי שיוצאת מהמודל עצמו.

4 מינימיזציה

4.1 הגדרת הבעיה

לאחר שקיבלנו את הRegressor המבוקש, הגדרת הבעיה כרגע היא כזו:

יהי $R : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ הRegressor שלנו לאחר ההחלקה שלו, כאשר p מספר הפיצ'רים שלנו. בהנתן זמן ביום $t \in [0, 86400]$, וקטור $\bar{x} \in \mathbb{R}^{p-1}$ המכיל את יתר הפיצ'רים שלנו. נשים לב שכולם קבועים ביחס לאותו היום. $R(t, \bar{x})$ הוא זמן הנסיעה הצפוי.

בעיית המינימיזציה שלנו היא כזו:

$$\begin{aligned} \min R(t, \bar{x}) & \\ \text{S.T.} \quad & t \in [t_{min}, t_{max}] \\ & \bar{x} = \bar{x}_{today} \end{aligned}$$

העובדה שהפיצ'ר היחידי שמשתנה במהלך היום הוא t חשוב מאוד כי אנחנו למעשה נקבע את $\bar{x}$ לחלוטין לאותו היום ונבצע מינימיזציה עם אילוצי אי שיוויון על t בלבד. למעשה זה שקול ליצירת פונקציה $R_{\bar{x}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמקבלת זמן t ביום ומחזירה את זמן הנסיעה הצפוי. במקרה הזה בעיית האופטימיזציה שלנו ממוקדת עוד יותר:

$$\begin{aligned} \min R_{\bar{x}}(t) & \\ \text{S.T.} \quad & t \in [t_{min}, t_{max}] \end{aligned}$$

את $R_{\bar{x}}$ ניצור בעזרת הפונקציה הבאה (שמקבלת את המודל שלנו ואת $\bar{x}$ ומחזירה לנו פונקציה חדשה)

```
c = Cache(1e9)
def get_regressor(model, x, predict):
    regressor = lambda t: predict(model, x, t)
    regressor = c.memoize(regressor)  # In order to speed up the evaluation - Cache is used on the regressor
    return regressor
```

4.2 מימוש

כיוון והפונקציה $R_{\bar{x}}$ שלנו היא רציפה אך הנגזרת שלה איננה ידועה, המימוש שלנו יתבסס על שילוב בין שתי שיטות: שיטת Penalty Method שתאפשר לנו להזניח את העיסוק באילוץ, ושיטת Nelder Mead שתאפשר לנו למצוא מינימום לוקאלי ללא שימוש בנגזרות.

מימוש השיטות נמצא בנתיב python_code/minimization

4.2.1 מימוש Penalty Method

השיטה אומרת את הדבר הבא. תהי פונקציה $f(x)$ שלה אנחנו רוצים למצוא מינימום תחת האילוצים $c_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in I$, אזי נוכל למצוא מינימום לפונקציה ללא אילוצים:

$$P_k(x) = f(x) + \sigma_k \sum_{i \in I} \max(0, c_i(x))^2$$

וכאשר $\sigma_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, יתקיים $\min f(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \min P_k(x)$ כאשר הכוונה היא שהמינימום של הפונקציה P ללא אילוצים ישאף למינימום תחת האילוצים של f.

במקרה שלנו, לפונקציה $R_{\bar{x}}(t)$ ישנם שני אילוצים:

$$c(t) = \begin{pmatrix} t - t_{max} \\ t_{min} - t \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$P_k(t) = R_{\bar{x}}(t) + \sigma_k \cdot \max(0, t - t_{max})^2 + \sigma_k \cdot \max(0, t_{min} - t)^2$$

הפונקציה הזו עוטפת את $R_{\bar{x}}$ ומחזירה את $P_k(t)$:

```python
def penalty_predict(regressor, time_of_day, time_of_day_min, time_of_day_max, factor=1):
    res = regressor(time_of_day)
    res += factor * max([time_of_day - time_of_day_max, 0]) ** 2
    res += factor * max([time_of_day_min - time_of_day, 0]) ** 2
    return res


def get_penalty_wrapper(regressor, time_of_day_min, time_of_day_max):
    return lambda t, factor: penalty_predict(regressor, t, time_of_day_min, time_of_day_max, factor)
```

כעת, בכל איטרציה נגדיל את σ_k פי 10, ונמצא מינימום לפונקציה הזו. נעצור כאשר ההפרש בין המינימום שמצאנו לקודם קטן מטווח שגיאה שנגדיר, או כשנגיע לרף האיטרציות שנגדיר. הפונקציה הבאה מיישמת את התהליך:

```python
def minimize_penalty_in_boundry(regressor, t0, tmin, tmax, factor_iterations, minimizer, error=1e-5):
    print(f'minimize using {t0}, {tmin}, {tmax}, {factor_iterations}')
    res = None
    last_res = None
    counter = 0
    penalty = get_penalty_wrapper(regressor, tmin, tmax)
    while (res is None or last_res is None or last_res[0] - res[0] > error) and counter < factor_iterations:
        last_res = res
        res_ = minimizer(f=lambda t: penalty(t, 10 ** counter), x0=[res[1] if res else t0])
        res_value = penalty(res_, 10 ** counter)
        res = [res_value, res_[0]]
        counter += 1
    return res
```

4.2.2 מימוש Nelder Mead

אלגוריתם Nelder Mead או בשמו האחר Downhill Simplex הוא אלגוריתם שנלמד בקצרה בכיתה.
הוא אלגוריתם למציאת מינימום לפונקציה רב מימדית ללא שימוש בנגזרות.
הסיבה שהאלגוריתם הזה נבחר לעבודה הוא בגלל הפופולאריות שלו וההתכנסות המהירה שלו. היותו מיושם בהרבה מאוד ספריות בפייתון אפשרה לי לבדוק את נכונות המימוש בהשוואה מולם.
האלגוריתם עובד כך:
תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. בכל רגע נתון הוא מחזיק $x_1, ..., x_{n+1}$ נקודות. יהיו $\alpha > 0,\ \gamma > 1,\ 0 < \rho < 0.5,\ \sigma < 1$

1. מיין את הנקודות לפי f : $f(x_1) \leq ... \leq f(x_{n+1})$
2. בדוק האם תנאי העצירה מתקיים
3. חשב את $x_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i$
4. שלב **Reflection**: חשב $x_r = x_0 + \alpha(x_0 + x_{n+1})$. במידה ומתקיים $f(x_1) \leq f(x_r) \leq f(x_n)$, החלף $x_{n+1} = x_r$ וחזור ל 1.
5. שלב **Expansion**: אם $f(x_r) < f(x_1)$ אז חשב $x_e = x_0 + \gamma(x_r - x_0)$. אם $f(x_e) < f(x_r)$ אז החלף $x_{n+1} = x_e$ וחזור ל 1, אחרת $x_{n+1} = x_r$ וחזור ל 1
6. שלב **Contraction**: חשב $x_c = x_0 + \rho(x_{n+1} - x_0)$. אם $f(x_c) < f(x_{n+1})$ אז החלף $x_{n+1} = x_c$ וחזור ל 1
7. שלב **Shrink**: החלף את הנקודות: $\forall i > 1\ \ x_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$, וחזור לשלב 1

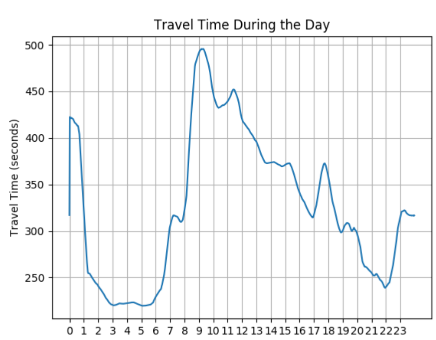
כדי לייצר את $x_1, ..., x_{n+1}$ ההתחלתיים, ניקח את נקודת ההתחלה x בשילוב עם ווקטורי היחידה:

$$\forall 1 \leq i \leq n : x_i = x + e_i, \quad x_{n+1} = x$$

המימוש של התהליך הנ"ל מופיע בקובץ python_code/minimization/nelder_mead.py.

4.3 הדגמת שימוש

התרשים הבא מתאר את זמן הנסיעה המנוחש ביום רנדומלי. במהלך השנה. הקובץ app.py מדפיס תחילה את התרשים הנ"ל, ולאחר מכן מוצא מינימום בקטע שבין השעות 10 ל 12.

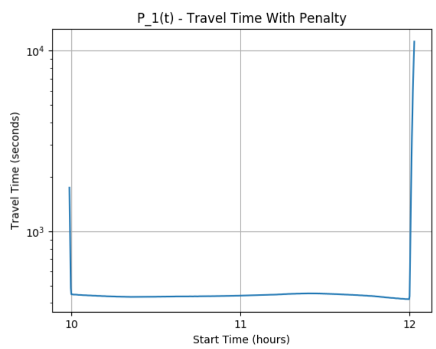


את מינימום זמן הנסיעה בטווח $t \in [10\cdot 60\cdot 60, 12\cdot 60\cdot 60]$, נקודת ההתחלה ממנה התחלנו לחפש הוא 0 שניות מתחילת היום, ואנחנו מבצעים 10 איטרציות על $P_k(t)$ (כלומר, מגדילים בכל פעם את σ_k פי 10)

המינימום שנמצא הוא בשעה $10^{\underline{19}} = 10.31111$, שם זמן הנסיעה עומד על 433.6610 שניות. מהתבוננות בתרשים ניתן לראות שזה באמת מינימום לוקאלי בטווח הזמנים, אך קיים מינימום גלובאלי בדיוק בקצה האיזור (בשעה 12).

ננסה לראות כיצד פרמטרים שונים להרצה יתנו תוצאות אחרות. כאשר שינינו את נקודת ההתחלה להיות בשעה 13 (אינטואיטיבית - אחרי הטווח שאנחנו מנסים לאתר בו, ולא לפניו) - קיבלנו מינימום בשעה $12^{\underline{00}} \sim 11.9984$, שם התקבל זמן נסיעה של 420.3702 שניות.

נשים לב שלמרות שהמינימום האמיתי נמצא ב 12 בדיוק, Penalty Method מתקשה להגיע לתשובה הנכונה בגלל הקרבה של הערך לפונקציית ה"ענישה" שלנו. אם נצייר את $P_1(t)$, היא נראית כך:



ניתן להתגבר על כך ע"י זה שנבצע בדיקה יזומה על הקצוות של הטווח ונשווה למינימום שמצאנו.
נבצע את הניסוי הבא:

- נבחר 10 תאריכים רנדומליים
- בעבור כל אחד - נחפש את המינימום בין השעות 10 ל 12 בשיטת Nelder Mead פעמיים - פעם אחת עם 0 בתור נקודת ההתחלה, ופעם שנייה עם השעה 13 בתור נקודת ההתחלה.
- נריץ מינימיזציה נאיבית על הטווח - נרוץ על טווח השעות בין 10 ל12 בקפיצות של 100 שניות בכל פעם, וניקח בסופו של דבר את הטווח שהחזיר ערך מינימלי בפונקציה. השיטה הזו מאוד לא יעילה אך תחזיר את המינימום הגלובלי בטווח הנבחר עם שגיאה של עד 50 שניות לכל היותר.

מצורפות תוצאות הניסוי. בכחול - המינימום ש Nelder Mean מצא שהוא גם המינימום הגלובלי לפי השיטה ה"נאיבית". כל זוג עמודות מייצג שיטה אחרת למציאת המינימום, כאשר argmin הוא הזמן (בשעות) ליציאה, וmin הוא זמן הנסיעה המשוער (בשניות).

date	T0 = 0 argmin	T0 = 0 min	T0 = 13 argmin	T0 = 13 min	NAIVE argmin	NAIVE min
18 / 12	**10.0000**	**616.1254**	**10.0000**	**616.1254**	10.0000	616.1254
27 / 4	10.0000	361.1666	**10.9208**	**331.9949**	10.9167	332.2417
14 / 10	**10.0000**	**590.3122**	**10.0000**	**590.3122**	10.0000	590.3122
29 / 1	11.0308	371.1742	**11.0142**	**371.1605**	11.0000	371.3076
20 / 2	**10.6467**	**451.7602**	**10.6361**	**452.2766**	10.6389	452.0178
12 / 6	12.0000	660.1254	**11.9983**	**659.9052**	11.9722	660.6095
2 / 7	11.4642	515.6491	**11.5074**	**515.8966**	11.5556	515.7216
11 / 3	**11.1997**	**383.5529**	12.0000	387.9942	11.1944	383.5529
17 / 6	12.0000	549.5601	**11.9986**	**549.5601**	11.9722	552.9747

4.4 שיטות נוספות

כיוון שהתחום של $P_{\bar{x}}(t)$ הוא קו ישר $[t_{min}, t_{max}]$, אפשר לנסות ולמצוא מינימום לוקאלי בטווח ע"י "חיפוש בינארי" עליו.

בכל איטרציה (עד לתנאי העצירה), ניקח את הטווח העדכני שלנו $[x_{min}, x_{max}]$, ונחשב $b = \frac{x_{max}+x_{min}}{2}$ הממוצע בניהם.

כעת, נחשב $x_2 = \frac{b+x_{max}}{2}, \quad x_1 = \frac{b+x_{min}}{2}$. אם $f(x_1) < f(x_2)$ - "נלך שמאלה" ונחשב מינימום על $[x_{min}, x_1]$. אחרת, "נלך ימינה" ונחשב מינימום על $[x_2, x_{max}]$.

המימוש של השיטה נמצא בקובץ python_code/minimization/binary_search.py

זו שיטה מאוד פשוטה שעובדת בזמני ריצה נהדרים, והיא עובדת רק משום שהתחום שלנו כל כך פשוט. כשנבצע את אותו הניסוי מקודם נקבל תוצאות טובות מאוד. גם כאן, בכחול מסומנים המקרים בהם החיפוש הבינארי התכנס לאותו מינימום גלובלי שהשיטה ה"נאיבית" מצאה.

date	BINARY argmin	BINARY min	NAIVE argmin	NAIVE min
18 / 12	11.7461	657.6467	10.0000	639.1585
27 / 4	11.4951	322.0941	11.4722	322.7627
14 / 10	10.0117	569.8407	10.0000	569.8441
29 / 1	11.1797	377.0123	11.1667	377.0123
20 / 2	10.7018	460.4665	10.6944	460.5264
12 / 6	11.9766	639.2237	11.9722	639.4746
2 / 7	10.4844	537.0885	11.1389	536.4100
11 / 3	11.8398	390.4767	11.8333	391.0450
17 / 6	11.9995	586.3138	11.9722	589.9637

5 סיכום

בסופו של דבר, הפתרון המוצג כאן בעבודה הוא פתרון לבעיה שלא למדנו במהלך השיעורים בקורס - מינימיזציה של פונקציות חסרות נגזרת עם אילוצים. הפתרון אליו הגעתי בסופו של דבר יצא פשוט ומוצלח.

כשחיפשתי בעיה עבור הפרויקט, רציתי מאוד לשלב תהליך למידה מקדים ועליו לבצע את המינימיזציה. כפי שניתן לראות, זו איננה בעיה פשוטה. בשלב מתקדם של הפרויקט הבנתי שהפונקציה שהמודל שלי מייצר לא מאפשרת לי למצוא מינימום אמיתי בגלל שהיא מאוד "רועשת", והייתי צריך לחשוב על טריק כדי להחליק אותה. התהליך המוצג כאן בעבודה הוא התוצאה של החשיבה הזו. כמובן שהוא איננו בא בחינם, היות וכל קריאה לפונקציה גורמת לעיבוד של פי 20 יותר חומרים (היות ואני לוקח עוד 20 דגימות בסביבת הנקודה כדי לחשב את הממוצע ביניהן).

שיטת Penalty היא שיטה שמאוד אהבתי גם במהלך הקורס, היות והיא נראית כמו פתרון "עוקף" מוצלח מאוד לבעית האילוצים. היות והצלחתי לעשות רדוקציה לבעיה בממימד אחד, יחסית פשוט להתגבר על נושא רגישות הקצוות בתחום, כי יש בסה"כ שניים לבדיקה. כמובן שבפונקציה רב מימדית עם אילוצים מורכבים יותר זה לא עניין כזה פשוט.

אפשר לראות מתוצאות הניסוי הקטן שבוצע בפרק האחרון גם את המורכבות של הבעיה המקורית אותה רציתי לפתור. ניתן לשים לב שהזמן המינימלי ליציאה שונה כמעט בכל אחד מהימים, למרות שתמיד הסתכלתי על אותו טווח זמנים.

במהלך העבודה על הפרויקט ניסיתי מגוון שיטות רחב עד שהגעתי לשיטת הפתרון כפי שנראתה כאן:

1. החלפת שיטת המינימיזציה ל Golden Scaling תוך וויתור על Penalty Method - הפתרון עבד, אך זמן הריצה היה גבוה כיוון ש Golden Scaling מתכנסת באופן ליניארי בלבד.

2. ניסיונות נוספים בהחלקת הפונקציה

3. מגוון פיצ'רים נוסף אותו ניסיתי לשיפור המודל

4. שיטות נוספות להבאת מידע רלוונטי לבעיה, והרצת ניסויים על Datasetים אחרים עד שהחלטתי להשתמש במידע המוצג כאן.