Algoritmos em Grafos

Celso C. Ribeiro
Caroline T. Rocha

PARTE 5: Árvore Geradora de Peso Mínimo

Árvore Geradora de Peso Mínimo

- Dados:

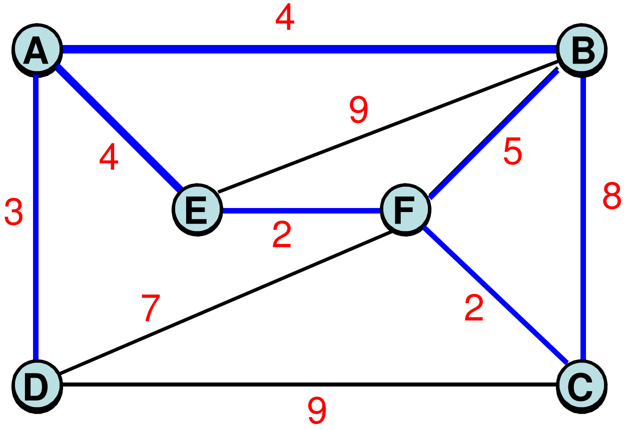
  $\begin{cases} G = (V,E) \text{ grafo não-orientado, com } |V|=n \text{ e } |E|=m \\ \text{peso } c(e),\ \forall e \in E \end{cases}$

- Problema

  Obter $F \subseteq E$ tal que:
  - o grafo $G'=(V,F)$ é acíclico e conexo (G' é gerador de G)
  - $c(F) = \Sigma_{e \in E} c(e)$ é mínimo

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Exemplo:



4

4

4

5

4

3

8

3

2

2

árvore geradora
peso = 24

árvore geradora
peso = 15

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Algoritmo de Kruskal

- Princípio: a aresta de menor peso sempre pertence à árvore geradora de peso mínimo.

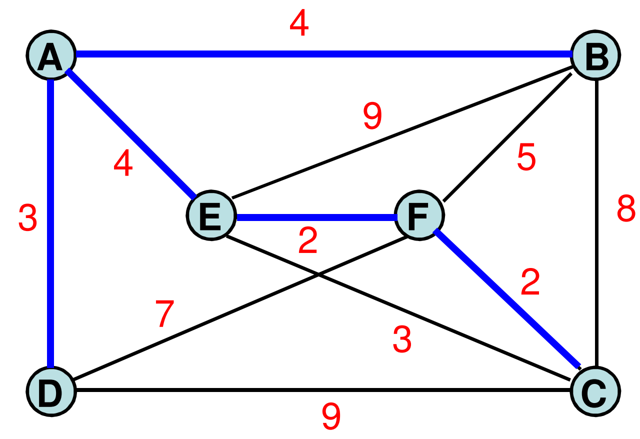
- Prova:
  - Suponha que a aresta de peso mínimo não pertença à solução ótima.
  - Inserindo-se a aresta de peso mínimo nesta solução ótima, obtém-se um ciclo.
  - Pode-se obter uma nova árvore geradora removendo-se a aresta de maior peso.
  - Esta nova árvore geradora teria peso menor do que a anterior, portanto aquela solução não poderia ser ótima.

Algoritmo de Kruskal

```
Criar uma lista L com as arestas ordenadas em
ordem crescente de pesos.
Criar |V| subárvores contendo cada uma um nó
isolado.
F ← ∅
contador ← 0
Enquanto contador < |V|-1 e L ≠ ∅ faça
   Seja (u,v) o próximo arco de L.
   L ← L - {(u,v)}
   Se u e v não estão na mesma subárvore então
      F ← F ∪ {(u,v)}
      Unir as subárvores que contêm u e v.
      contador ← contador + 1
   fim-se
fim-enquanto
```

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Exemplo:



c(F) = 15

Lista L

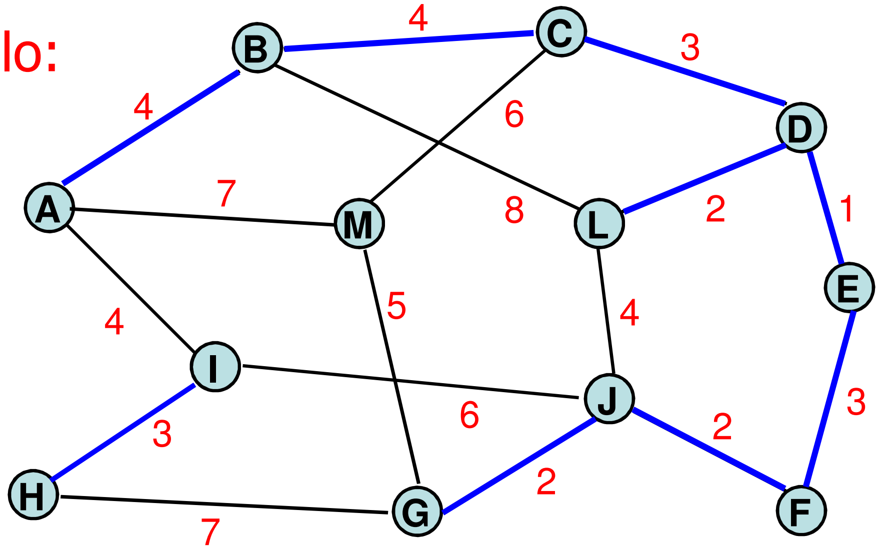
e	c(e)
(C,F)	2
(E,F)	2
(A,D)	3
~~(C,E)~~	3
(A,B)	4
(A,E)	4
(B,F)	5
(D,F)	7
(B,C)	8
(B,E)	9
(C,D)	9

Subárvores

{ A, B, C, D, E, F }

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Exemplo:



c(F) = 24

Subárvores

{ A, B, C, D, E, F, G, J, L }

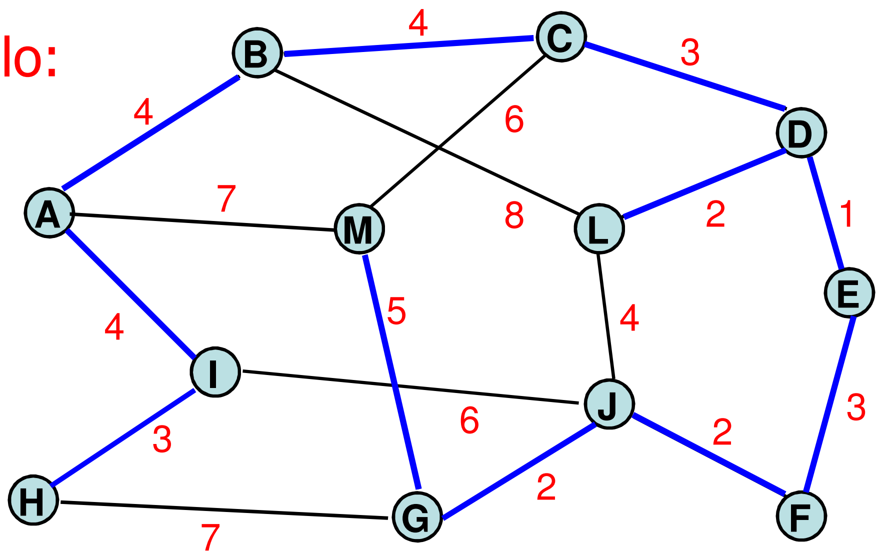
{ H, I } { M }

Lista L

e	c(e)
(D,E)	1
(D,L)	2
(F,J)	2
(G,J)	2
(C,D)	3
(E,F)	3
(H,I)	3
(A,B)	4
(B,C)	4
...	...

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Exemplo:



Lista L

e	c(e)
...	...
(A,I)	4
~~(J,L)~~	4
(G,M)	5
(C,M)	6
(I,J)	6
(A,M)	7
(G,H)	7
(B,L)	8

c(F) = 33

Subárvores

{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M }

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Algoritmo de Prim

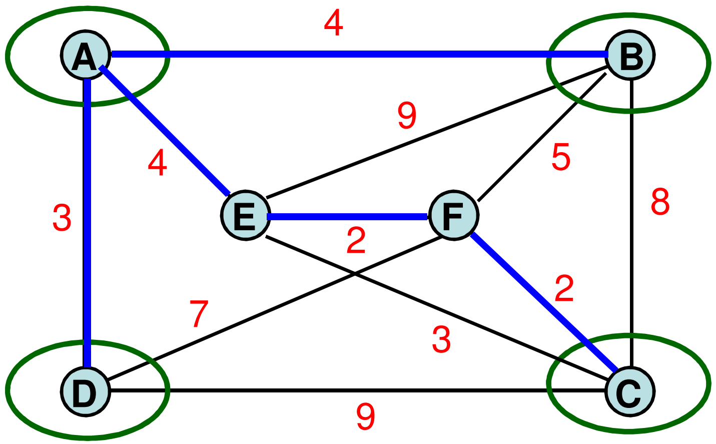
- Começar com uma árvore formada apenas por um nó qualquer do grafo, ou pela aresta de peso mínimo.
- A cada iteração, adicionar a aresta de menor peso que conecta um nó já conectado a um nó não-conectado.

Algoritmo de Prim

```
Seja (u,v) a aresta de menor peso.
F ← {(u,v)}
Para i = 1,...,n faça
    Se c(i,u) < c(i,v) então prox(i) ← u
    Senão prox(i) ← v
fim-para
prox(u), prox(v) ← 0, contador ← 0
Enquanto contador < n-2 faça
    Seja j tal que prox(j)≠0 e c(j,prox(j)) é mínimo.
    F ← F ∪ {(j,prox(j))}
    prox(j) ← 0
    Para i = 1,...,n faça
        Se prox(i) ≠ 0 e c(i,prox(i)) > c(i,j) então
            prox(i) ← j
    fim-para
    contador ← contador + 1
fim-enquanto
```

Árvore Geradora de Peso Mínimo

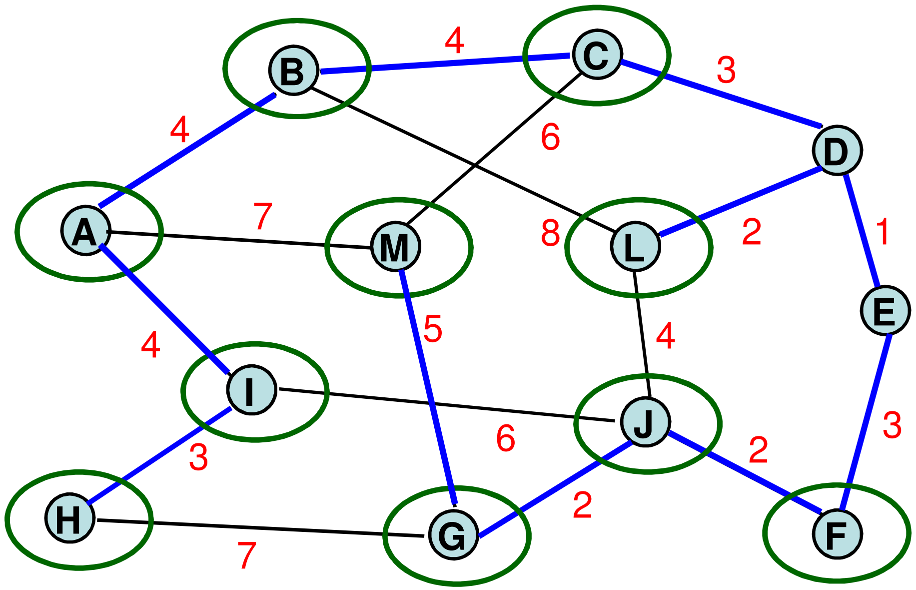
Exemplo:



c(F) = 15

Árvore Geradora de Peso Mínimo

Exemplo:



c(F) = 33