Transformada de Laplace e Funções de Transferência

Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza

Centro de Ciências Tecnológicas

Transformada de Laplace

- **Variável complexa**: variável que possui uma parte real e uma imaginária. Na Transformada de Laplace usamos a notação **"s"** como variável complexa ($s = \sigma + j\omega$).

- **Funções complexas**: funções de "s" que possuem parte real e imaginária.

$$G(s) = G_x + jG_y \quad \begin{cases} |G(s)| = \sqrt{G_x^{\,2} + G_y^{\,2}} \\ \angle G(s) = \tan^{-1}\left(\dfrac{G_y}{G_x}\right) \end{cases}$$

- **Teorema de Euler**: permite que expressemos funções seno e cosseno em termos de exponenciais complexas.

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \quad \sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

Transformada de Laplace

- Seja:

$f(t)$ ⇨ Função de tempo em que $f(t)=0$ para t < 0

s ⇨ Uma variável complexa

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Transformada de Laplace

- A transformada de Laplace é uma **operação linear**. Assim:

$$L[Af(t)]=AL[f(t)]=AF(s)$$

$$L[\alpha f_1(t)+\beta\alpha f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

Transformada de Laplace

- **Exemplos:**
  - **Função exponencial**:

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \qquad t \geq 0$$

$$F(s) = \int_0^\infty Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}dt = \frac{A}{s+\alpha}$$

  - **Função degrau**:

$$f(t) = A \qquad t \geq 0$$

$$F(s) = \int_0^\infty Ae^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{A}{s}$$

Transformada de Laplace

- **Exemplos:**
  - **Transformadas mais comuns**:

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Teoremas da Transformada de Laplace

- **Teorema da derivação real:**

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

- Da mesma maneira, obtém-se a seguinte relação para a segunda derivada:

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$$

- **Exemplo**: Função seno e cosseno.

$$f(t)=\sin(\omega t)\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}f(t)=\omega\cos(\omega t)\Rightarrow\cos(\omega t)=\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}f(t)$$

$$L[\cos(\omega t)]=L\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right]=\frac{1}{\omega}[sF(s)-f(0)]=\frac{1}{\omega}\left[\frac{s\omega}{s^2+\omega^2}-0\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Teoremas da Transformada de Laplace

- **Teorema da integração real:**

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int f(t)dt\Big|_{t=0}$$

- Da mesma maneira, obtém-se a seguinte relação para a segunda integral:

$$L\left[\int\int f(t)dt^2\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{1}{s^2}\int f(t)dt\Big|_{t=0} + \frac{1}{s}\int\int f(t)dt^2\Big|_{t=0}$$

- **Exemplo**: Função seno e cosseno.

$$f(t) = \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \int f(t)dt = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \Rightarrow \sin(\omega t) = \omega\int f(t)dt$$

$$L[\sin(\omega t)] = L\left[\omega\int \cos(\omega t)dt\right] = \omega\left[\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int \cos(\omega t)dt\Big|_{t=0}\right] = \omega\left[\frac{s}{s(s^2+\omega^2)} - 0\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Teoremas da Transformada de Laplace

- **Teorema do valor final:**
  - Relaciona o comportamento em **regime estacionário** de ***f(t)*** ao comportamento de ***sF(s)*** nas proximidades de ***s=0***.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

  - **Exemplo**: Qual o valor em regime estacionário de uma função cuja transformada de Laplace é dada por:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Transformada Inversa

- **Integral de inversão**: não recomendada para representar no tempo equações complexas.

- Um método bastante utilizado é expandir a equação em “s” em **frações parciais** e escrever F(s) em termos de funções simples para as quais as transformadas inversas de Laplace já são **conhecidas**.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \Rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_n(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)$$

Zeros e Pólos

- As funções no domínio de "s" podem ser representadas por uma **divisão de polinômios**.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

- Pode-se **fatorar** os polinômios e reescrever a função como:

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

  - **Zeros**: Raízes do polinômio **numerador**.
  - **Pólos**: Raízes do polinômio **denominador**.

Expansão em Frações Parciais

- Sabendo-se a forma fatorada do polinômio, pode-se **expandir** a função *F(s)* em frações mais simples.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r_1}{s+p_1} + \frac{r_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{r_n}{s+p_n}$$

- Utilizando uma tabela de Transformada de Lapace:

$$f(t) = r_1 e^{-p_1 t} + r_2 e^{-p_2 t} + \ldots + r_n e^{-p_n t}$$

  - **Resíduo**: Coeficiente de cada função exponencial no tempo.

$$r_k = \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

Expansão em Frações Parciais

- **Exemplo**:

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2} \Rightarrow f(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

- Qual seria o valor final desta função?

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{t\to\infty} f(t)=0$$

$$F(s)=\frac{10}{s(s+1)} \Rightarrow f(t)=10\left(1-e^{-t}\right)$$

- Qual seria o valor final desta função?

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{t\to\infty} f(t)=10$$

Casos Especiais

1. Se a função *F(s)* possuir pólos **múltiplos**.

$$F(s) = \frac{s+z}{(s+p)^3}$$

- Como temos três pólos, teremos **três resíduos**.

$$F(s) = \frac{r_1}{s+p} + \frac{r_2}{(s+p)^2} + \frac{r_3}{(s+p)^3}$$

- O resíduo do pólo de **maior multiplicidade** é encontrado de maneira **convencional**:

$$r_3 = \left[(s+p)^3 F(s)\right]_{s=-p}$$

- O restante dos resíduos pode ser encontrado com o auxílio das **derivadas** da função acima.

$$r_2 = \frac{d}{ds}\left\{\left[(s+p)^3 F(s)\right]\right\}_{s=-p} \qquad r_3 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left\{\left[(s+p)^3 F(s)\right]\right\}_{s=-p}$$

Casos Especiais

1. Se a função *F(s)* possuir pólos **múltiplos**.

- **Exemplo**:

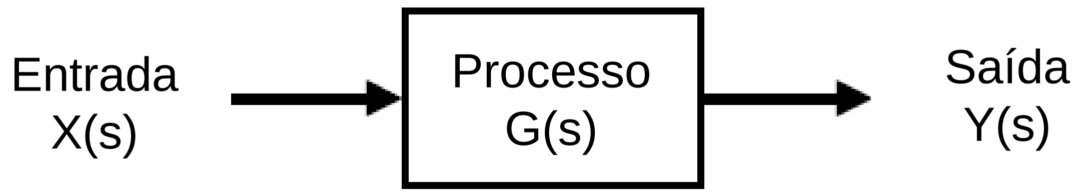
$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \Rightarrow f(t) = (1 + t^2)e^{-t}$$

Função de Transferência

- **Aspectos Gerais**:
  - Caracteriza relações de **entrada e saída** de componentes ou sistemas, que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo;
  - Permite analisar a resposta do sistema para **diferentes** sinais de entrada;
  - Independe da **magnitude e natureza** do sinal de excitação aplicado à entrada;
  - Pode ser obtida **experimentalmente**.

Função de Transferência

- **Definição**:
  - **Relação** entre a transformada de Laplace da **saída** (função resposta) e a transformada de Laplace da **entrada** (função de excitação), admitindo-se todas as **condições iniciais nulas**;



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Função de Transferência

- **Definição**:

  - Considerando um sistema modelado pela equação diferencial:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \ldots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

$$\text{Função de Transferência} = G(s) = \left.\frac{\mathscr{L}[\text{Saída}]}{\mathscr{L}[\text{Entrada}]}\right|_{\text{condições iniciais} = 0}$$

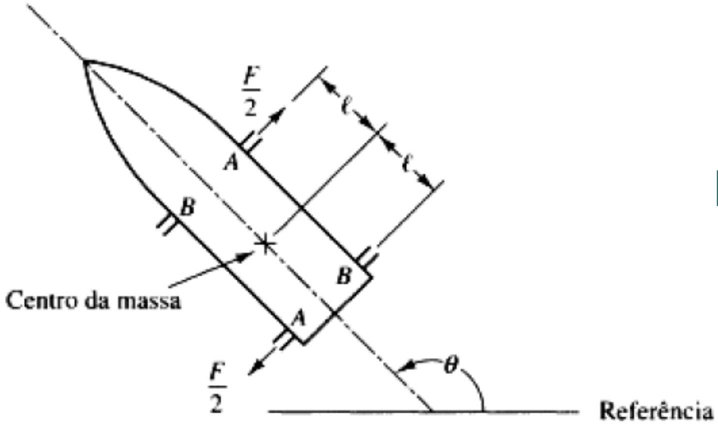
$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

  - **Vantagem**: É possível representar a dinâmica de um sistema por meio de uma **equação algébrica em *s***.

  - **Ordem do sistema**: Se a **potência de *s*** no denominador da função de transferência (**equação característica**) for ***n***, o sistema será denominado de **ordem *n***.

Função de Transferência

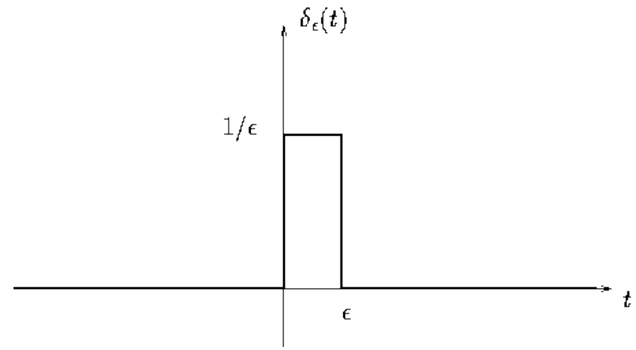
- **Exemplo**:
  - Sistema de controle de posição de um satélite:
    - Pequenos jatos aplicam forças de reação para girar o corpo do satélite conforme a posição desejada. Suponha que o empuxo de cada jato seja ***F/2*** e o torque ***T = Fl*** seja aplicado ao sistema. Os jatos são aplicados por certo tempo e, assim, o torque pode ser escrito como ***T(t)***. Suponha que não há atrito e que o momento de inércia em relação ao eixo de rotação no centro da massa é ***J***.



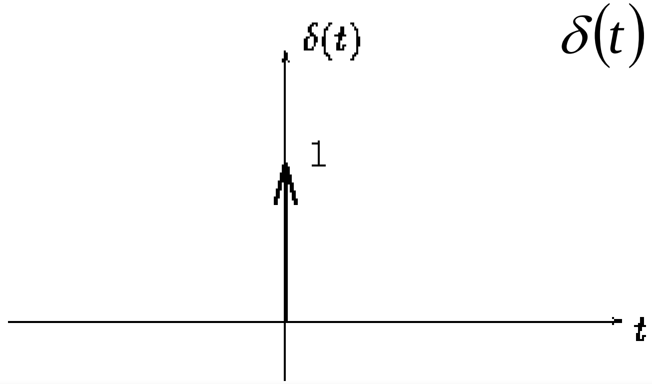
$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

Resposta Impulsiva

- **Função Impulso Unitário**:
  - Consideremos um pulso de **área unitária** conforme abaixo:



  - Se fizermos $\varepsilon \to 0$, temos:



$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Resposta Impulsiva

- **Função Impulso Unitário**:
  - A Transformada de Laplace da Função Impulso Unitário será:

$$\Delta(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) = 1$$

  - Assim, se considerarmos uma função de transferência ***G(s)*** e determinarmos sua resposta a um ***entrada impulsiva***:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)$$

  - A Transformada de Laplace da resposta impulsiva fornece a Função de Transferência.

Na próxima aula...

Funções de Transferência de Sistemas Mecânicos

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza

Centro de Ciências Tecnológicas