MC448 — Análise de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva

31 de Março de 2006

Crescimento de funções

Notação Assintótica

- Vamos expressar complexidade através de funções em variáveis que descrevam o tamanho de instâncias do problema. Exemplos:
  - Problemas de aritmética de precisão arbitrária: número de bits (ou bytes) dos inteiros.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas de ordenação de vetores: tamanho do vetor.
  - Busca em textos: número de caracteres do texto ou padrão de busca.
- Vamos supor que funções que expressam complexidade são sempre positivas, já que estamos medindo número de operações.

Comparação de Funções

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

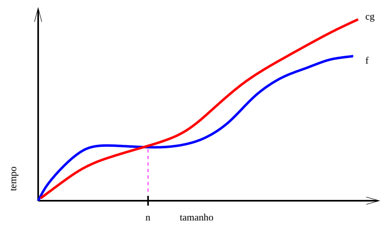
	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1,0015 \cdot 10^6$	$1,00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1,26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1,07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Classe O

Definição:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq cg(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.



Classe O

Definição:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq f(n) \leq cg(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$
Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

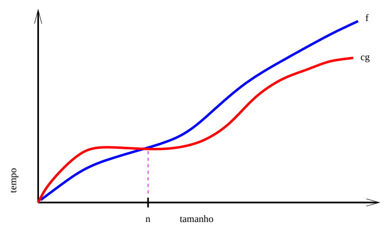
$$c = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 7.$$

Classe Ω

Definição:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq cg(n) \leq f(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.



Classe Ω

Definição:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq cg(n) \leq f(n), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$
Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

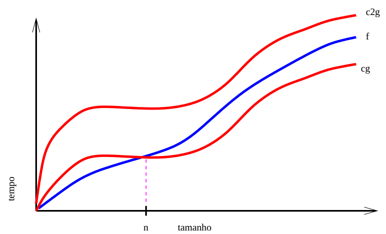
$$c = \frac{1}{14} \text{ e } n_0 = 7.$$

Classe Θ

Definição:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \begin{array}{l}\text{existem constantes positivas } c_1,\ c_2 \text{ e } n_0 \\ \text{tais que } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \\ \text{para todo } n \geq n_0\}.\end{array}$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.



Classe Θ

Definição:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \begin{array}{l}\text{existem constantes positivas } c_1,\ c_2 \text{ e } n_0 \\ \text{tais que } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \\ \text{para todo } n \geq n_0\}.\end{array}$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

Valores de c_1, c_2 e n_0 que satisfazem a definição são

$$c_1 = \frac{1}{14},\ c_2 = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 7.$$

Classe o

Definição:

$$o(g(n)) = \{f(n) : \begin{array}{l}\text{para toda constante positiva } c, \text{ existe uma} \\ \text{constante } n_0 > 0 \text{ tal que } 0 \leq f(n) < cg(n), \\ \text{para todo } n \geq n_0\}.\end{array}$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in o(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Exemplo:

$1000n^2 \in o(n^3)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1.$$

Classe ω

Definição:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \begin{array}{l}\text{para toda constante positiva } c, \text{ existe uma} \\ \text{constante } n_0 > 0 \text{ tal que } 0 \leq cg(n) < f(n), \\ \text{para todo } n \geq n_0.\}\end{array}$$

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1.$$

Definições equivalentes

$$f(n) \in o(g(n)) \text{ se } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$
$$f(n) \in O(g(n)) \text{ se } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$
$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ se } 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$
$$f(n) \in \Omega(g(n)) \text{ se } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0.$$
$$f(n) \in \omega(g(n)) \text{ se } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Propriedades das Classes

Transitividade:
Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das Classes

Reflexividade:
$f(n) \in O(f(n))$.
$f(n) \in \Omega(f(n))$.
$f(n) \in \Theta(f(n))$.
Simetria:
$f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.
Simetria Transposta:
$f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
$f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Exemplos

Quais as relações de comparação assintótica das funções:

- 2^π
- $\log n$
- n
- $n \log n$
- n^2
- $100n^2 + 15n$
- 2^n