Especificações da Resposta Transitória e Sistemas de Ordem Superior

Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza

Centro de Ciências Tecnológicas

Introdução

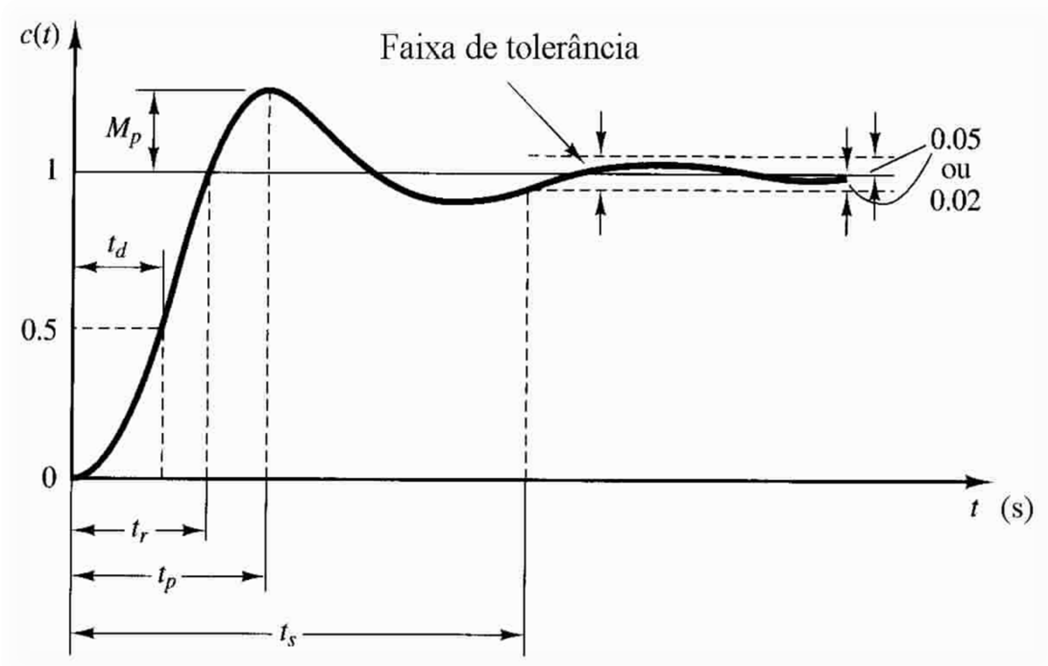
- Sistemas com energia armazenada não respondem **instantaneamente** e vão fornecer respostas **transitórias** sempre que estiverem sujeitos a sinais de entrada ou distúrbios.

- As características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos da resposta transitória ao **degrau unitário**, já que se trata de um entrada suficientemente brusca e gerada com facilidade.

- Freqüentemente, antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema apresenta **oscilações amortecidas**. Na especificação das características das respostas transitórias, é comum se especificar:

Tempo de atraso t_d	Tempo de pico t_p	Tempo de acomodação t_s
Tempo de subida t_r	Máximo sobre-sinal M_p	Erro estacionário E_{ss}

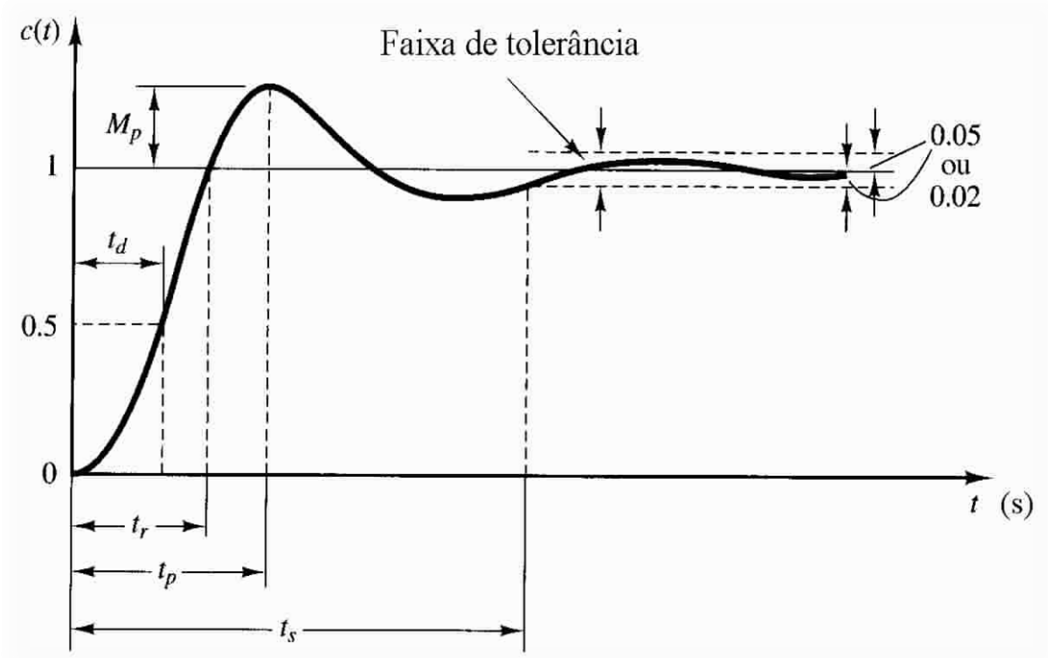
Introdução



t_d **Tempo de Atraso**: Tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.

t_r **Tempo de Subida**: Tempo requerido para que a resposta passe de 0% a 100% (ou de 10% a 90% para sistemas não-oscilatórios) do seu valor final.

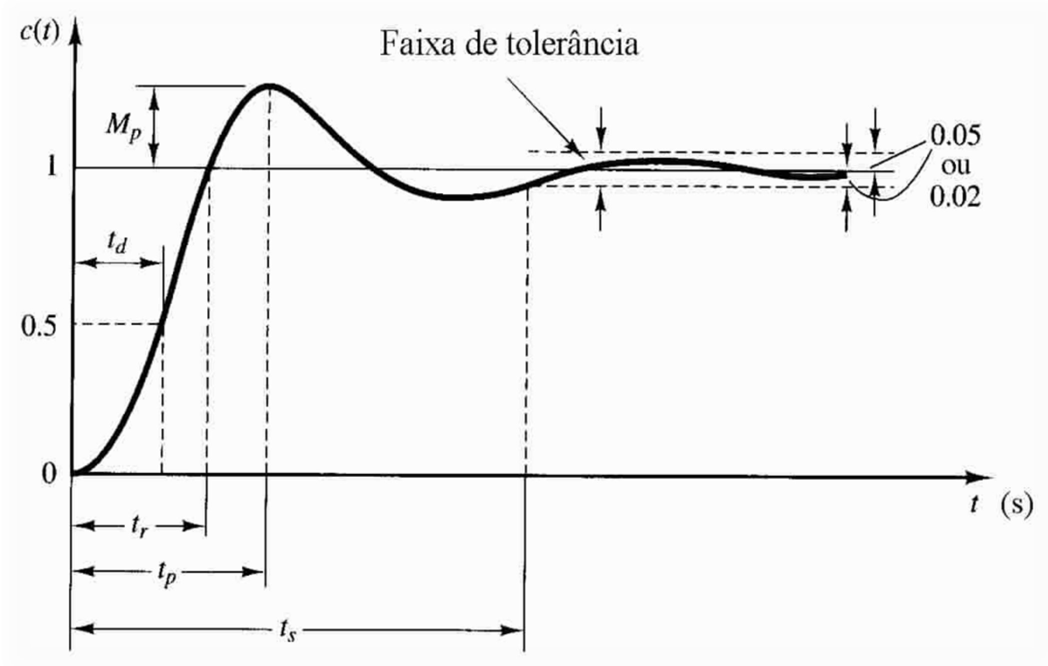
Introdução



t_p **Tempo de Pico**: Tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobre-sinal.

t_s **Tempo de Acomodação**: Tempo necessário para que a resposta alcance valores em uma faixa em torno do valor final (2% ou 5%), aí permanecendo indefinidamente.

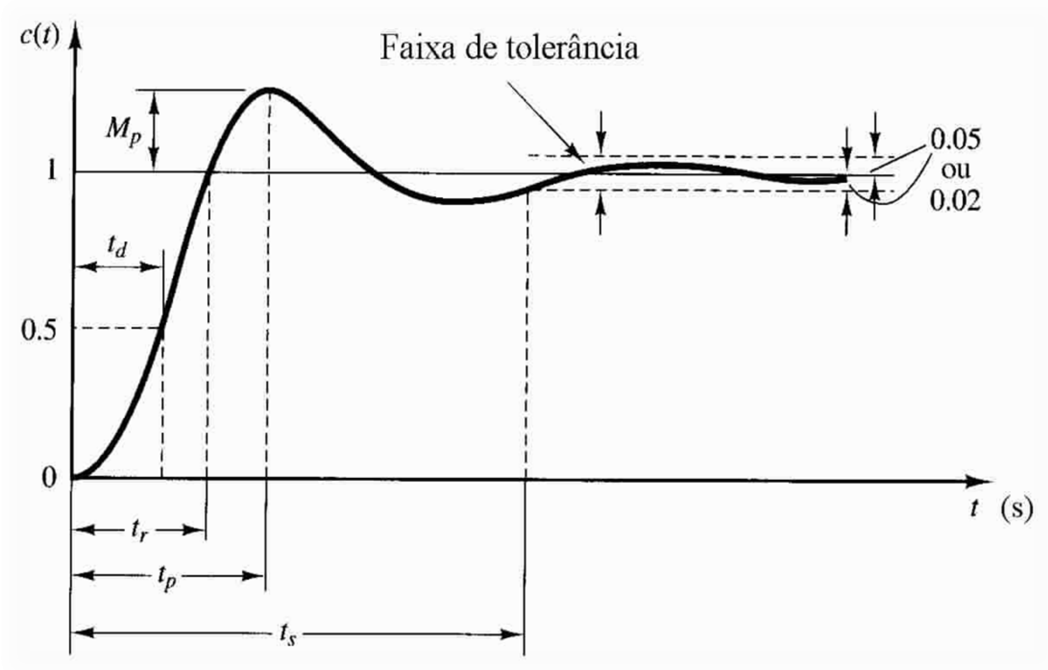
Introdução



$\boxed{M_p}$ **Máximo Sobre-Sinal**: Valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir do seu valor final.

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100\%$$

Introdução



$\boxed{E_{ss}}$

Erro Estacionário: Desvio percentual que a resposta do sistema em regime permanente possui em relação à entrada.

$$E_{ss} = \frac{r(t) - c(\infty)}{r(t)} \cdot 100\%$$

Introdução

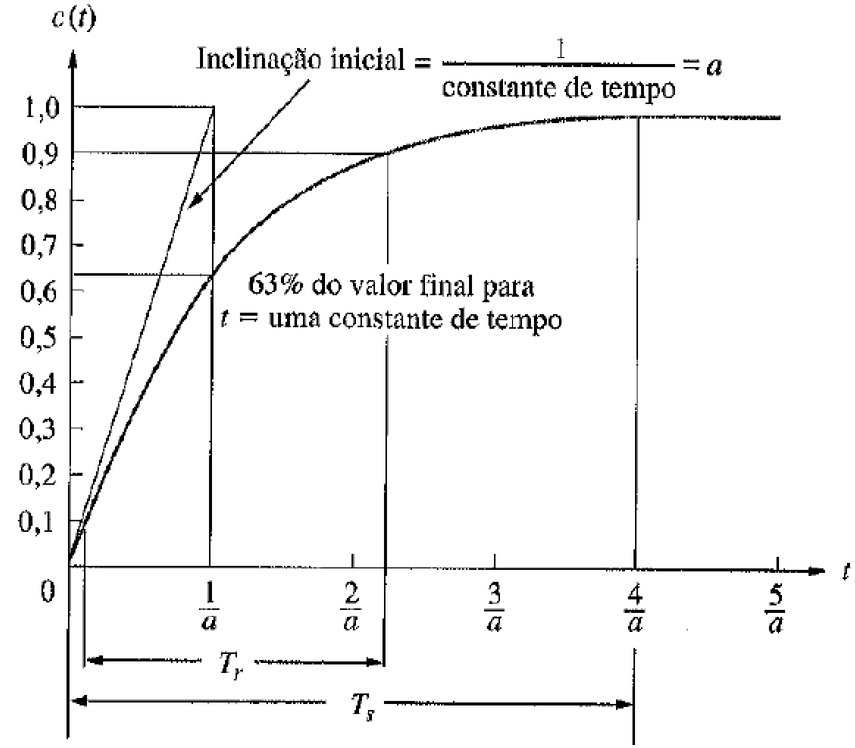
- **Observações:**
  - O tempo de acomodação de um sinal está relacionado à **maior constante de tempo** do sistema de controle (pólo dominante);
  - Todas as especificações relacionadas **não se aplicam** necessariamente a todos os sistemas. Por exemplo, para um sistema superamortecido, os termos “tempo de pico” e “máximo sobre-sinal” não se aplicam.
  - No caso de sistemas que resultam em erros estacionários para entradas em degrau, esse erro deve ser conservado em um nível de porcentagem específico através do uso de **controladores**.

Sistemas de Primeira Ordem

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

- **Constante de tempo**: tempo requerido para que a resposta alcance 63% do seu valor final.
- **Tempo de atraso e tempo de subida**: determina-se a partir da equação de resposta do sistema.
- **Erro estacionário**:

$$E_{ss} = \frac{r(t) - c(\infty)}{r(t)} \cdot 100\% = 0\%$$



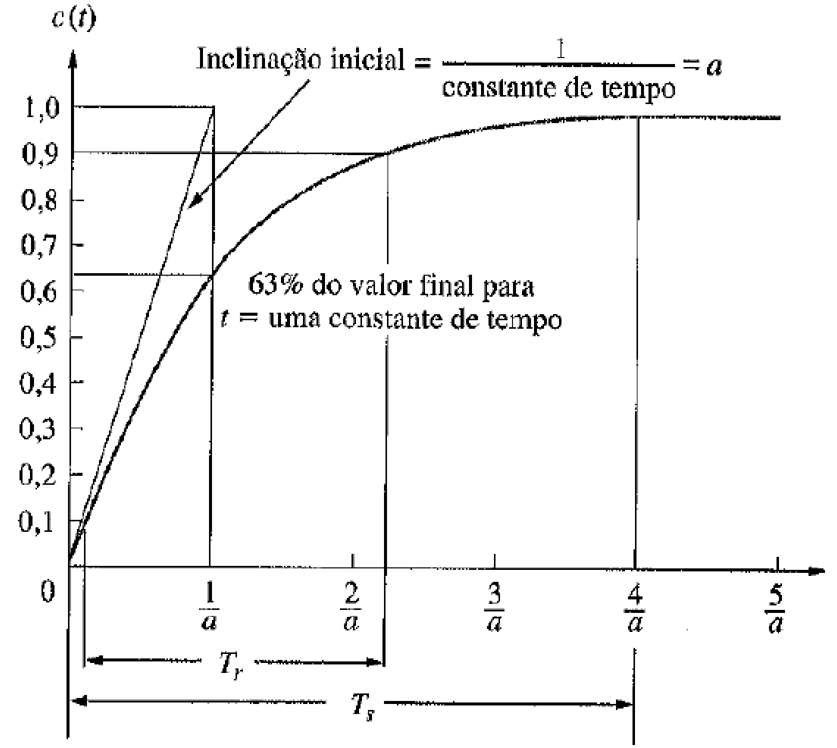
Sistemas de Primeira Ordem

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

- **Tempo de acomodação**: Pode ser medido em termos da constante de tempo *T*.

$t_s = 3T$ (Critério de 5%)

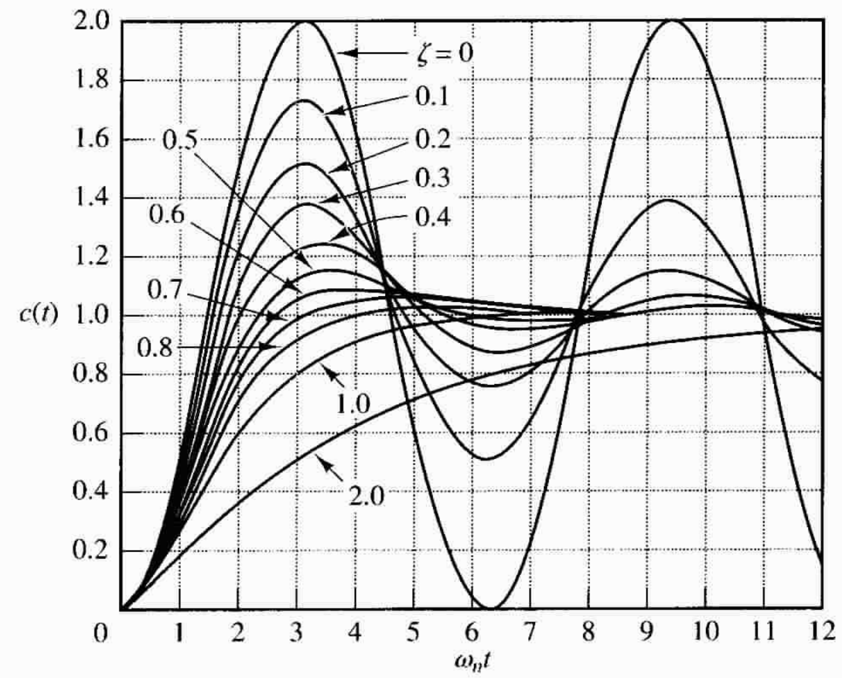
$t_s = 4T$ (Critério de 2%)



Sistemas de Segunda Ordem

- Exceto para certas aplicações em que as oscilações não podem ser toleradas, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente **rápida** e **amortecida**.

- Para uma resposta transitória aceitável em um sistema de segunda ordem, o **coeficiente de amortecimento** deve se situar entre 0,4 e 0,8.



Sistemas de Segunda Ordem

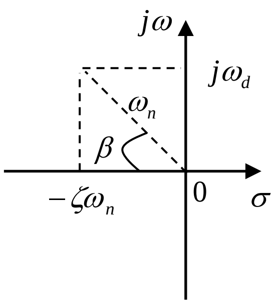
Tempo de Subida

- O tempo de subida da resposta pode ser obtido fazendo $c(t_r)=1$

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\qquad \text{para}\ \ t\geq 0$$

- Como $e^{-\zeta\omega_n t}\neq 0$, o tempo de subida é obtido por:

$$\cos\omega_d t_r+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r=0 \quad\Rightarrow\quad t_r=\frac{1}{\omega_d}\arctan\left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}\right)$$



$$\Rightarrow\quad t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$

Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Pico

- O tempo de pico pode ser obtido diferenciando-se $c(t)$ em relação ao tempo e igualando essa derivada a zero.

$$\frac{dc(t)}{dt} = \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right) + e^{-\zeta\omega_n t}\left(\omega_d sen\omega_d t - \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\omega_d t\right)$$

- Os termos em cosseno cancelam-se mutuamente, logo, em $t = t_p$:

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p} = \sin\omega_d t_p \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\omega_d t_p = 0 \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- O tempo de pico corresponde a meio ciclo da freqüência de oscilação amortecida.

Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Acomodação

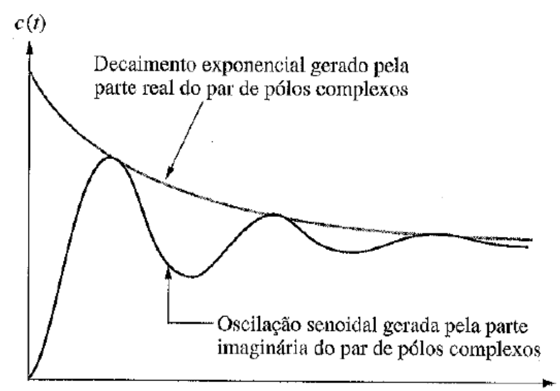
- A resposta transitória de um sistema subamortecido de segunda ordem permanece sempre dentro de um par de envoltórias.

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$c(t) = \boxed{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\sin\left(\omega_d t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

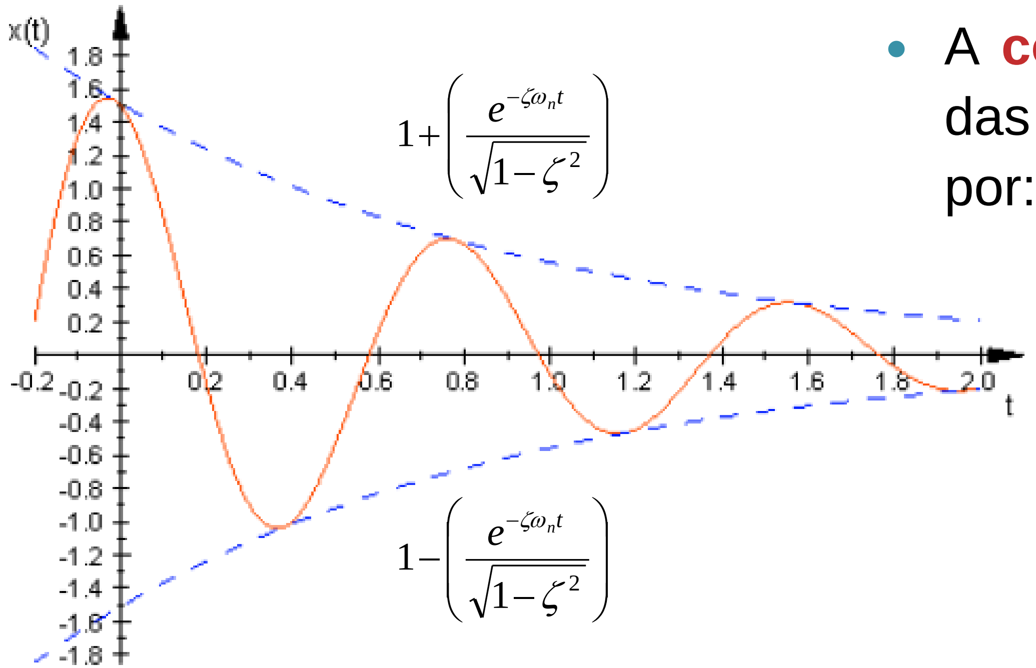
Envoltórias

$$1 \pm \left(\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$



Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Acomodação



- A **constante de tempo** das envoltórias é dada por:

$$T = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

- A velocidade de decaimento da resposta depende do valor da constante de tempo.

Sistemas de Segunda Ordem

❖ Tempo de Acomodação

- O tempo de acomodação correspondente à faixa de tolerância de 2% ou 5% pode ser medido em termos da constante de tempo.

$$t_s = 3T = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad \text{(Critério de 5\%)}$$

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad \text{(Critério de 2\%)}$$

Sistemas de Segunda Ordem

Máximo Sobre-Sinal

- O máximo sobre-sinal ocorre no tempo de pico.

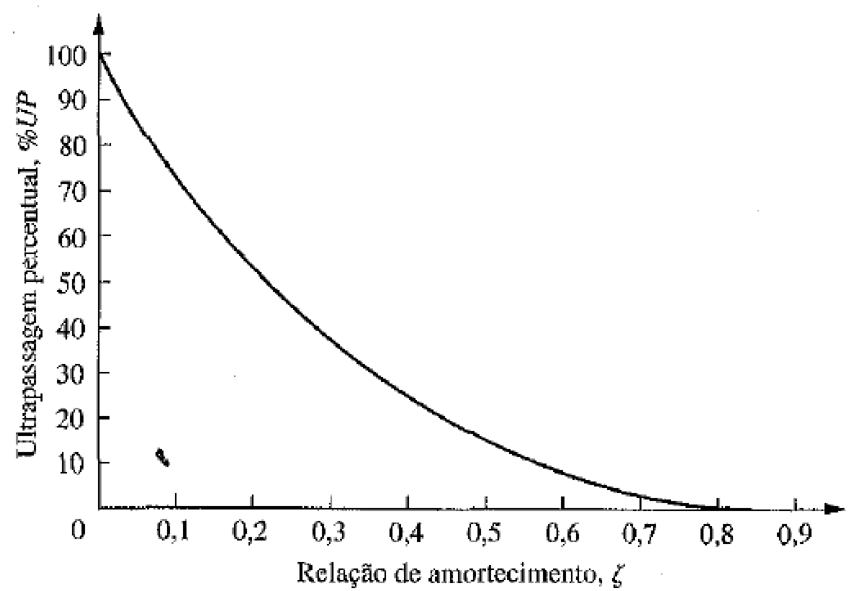
$$c(t_p) = 1 - e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi\right) \Rightarrow c(t_p) = 1 + e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi}$$

- Considerando que a resposta tenha valor final unitário:

$$M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \cdot 100\%$$

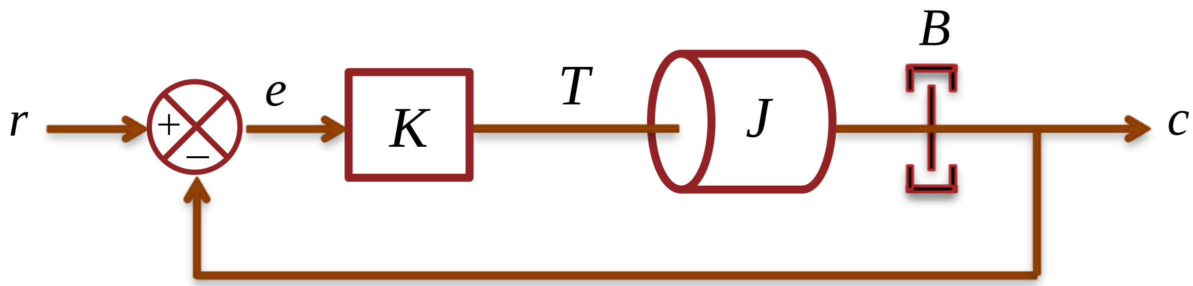
Sistemas de Segunda Ordem

- **Conclusão!**
  - Para uma **resposta rápida**, a freqüência natural não-amortecida deve ser grande. Para limitar o sobre-sinal e fazer com que o tempo de acomodação seja pequeno, o coeficiente de amortecimento não deve ser muito pequeno.



Sistemas de Segunda Ordem

- **Exemplo:**



$$\zeta = 0{,}6$$

$$\omega_n = 5 rad/s$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \qquad t_r = 0{,}55s$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad t_p = 0{,}785s$$

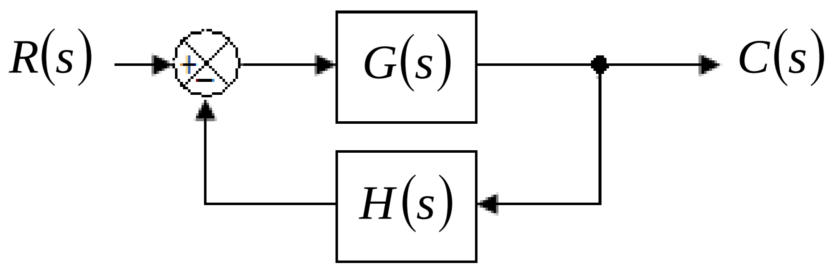
$$M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \cdot 100\% \qquad M_p = 9{,}5\%$$

$$t_{s\,(2\%)} = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad t_{s\,(2\%)} = 1{,}33s$$

Sistemas de Ordem Superior

- Pelo princípio da **superposição**, a resposta dos sistemas de ordem superior é a **soma das respostas** de sistemas de primeira e segunda ordem.

- Consideremos o seguinte sistema:



$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- A **função de transferência de malha fechada** é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)}$$

Sistemas de Ordem Superior

- Deseja-se obter a **resposta temporal** do sistema de ordem superior a uma entrada do tipo **degrau unitário**.

$$C(s)=\frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s)+p(s)n(s)}\cdot\frac{1}{s}$$

- Para obter a resposta no tempo, o primeiro passo é **fatorar** os polinômios numerador e denominador.

$$C(s)=\frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s)+p(s)n(s)}\cdot\frac{1}{s} \Longrightarrow C(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

- O segundo passo é expandir em **frações parciais**.

$$C(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \Longrightarrow C(s)=\frac{a}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s+p_i}$$

Sistemas de Ordem Superior

- O terceiro e último passo e aplicar a **Transformada Inversa de Laplace**:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s + p_i} \quad \Longrightarrow \quad c(t) = a + \sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}$$

- Vamos analisar cada termo da resposta temporal ao degrau unitário:

$$c(t) = \boxed{a} + \sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}$$

  - Quanto t tende ao infinito, a resposta estaciona no valor a.
  - Assim, a valor a representa a **resposta estacionária** do sistema de ordem superior.
  - A resposta estacionária $c(\infty)$ também pode ser obtida a partida da função de transferência em malha fechada. Vejamos como...

Sistemas de Ordem Superior

- Como encontrar a resposta estacionária a partir da função de transferência de malha fechada ?
  - O resíduo a pode ser obtido fazendo:

$$a = s \cdot \left[\frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \cdot \frac{1}{s} \right]_{s=0} \Rightarrow a = \frac{p(0)d(0)}{q(0)d(0) + p(0)n(0)}$$

  - Logo, a **resposta estacionária** a uma entrada do tipo **degrau unitário** pode ser dada por:

$$a = \frac{C(0)}{R(0)}$$

  - Sabendo a resposta transitória ao degrau unitário, é possível obter o **erro estacionário** como:

$$E_{ss} = \left(1 - \frac{C(0)}{R(0)} \right) \cdot 100\%$$

Sistemas de Ordem Superior

- **Exemplo**: Encontre a resposta em regime permanente e o erro estacionário a uma entrada do tipo degrau unitário do sistema cuja função de transferência em malha fechada é dada abaixo.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^3 + 4s^2 + 5s + 10}{s^5 + 2s^4 + s^3 + 20s^2 + 10s + 20}$$

  - Resposta estacionária: $c(t \to \infty) = 0{,}5$
  - Erro estacionário: $E_{ss} = 50\%$

Sistemas de Ordem Superior

- Vamos analisar agora o segundo termo da resposta temporal do sistema de ordem superior ao degrau unitário:

$$c(t) = a + \boxed{\sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}}$$

  - Se o pólo p_i for **real**, a resposta temporal será uma **exponencial decrescente** (resposta típica de sistemas de primeira ordem).
  - Se existirem pares de pólos **complexos conjugados**, a resposta temporal é formada por uma curva **senoidal amortecida** (resposta típica de sistemas de segunda ordem).
  - Assim, a resposta transitória de um sistema de ordem superior é a **soma** de uma série de curvas **exponenciais decrescentes** e curvas **senoidais amortecidas**, estacionando no valor a.

Sistemas de Ordem Superior

- Os valores dos **resíduos** determinarão ainda a importância relativa de cada curva componente da resposta temporal:

$$c(t) = a + \boxed{\sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}}$$

  - Se existir um zero de malha fechada **próximo** a um pólo de malha fechada, então o **resíduo** deste pólo será **pequeno**.
    - **Conseqüência**: Um par de pólos e zeros próximos podem se cancelar mutuamente.
  - Se um pólo estiver localizado muito **longe** da origem, a **constante de tempo** da curva exponencial será **pequena** e o **resíduo** deste pólo poderá ser **pequeno**.
    - **Conseqüência**: Os transitórios correspondentes aos pólos remotos são pequenos e de curta duração, logo contribuem pouco para a resposta transitória do sistema de ordem superior.

Sistemas de Ordem Superior

- Os valores dos **resíduos** determinarão ainda a importância relativa de cada curva componente da resposta temporal:

  - Se um pólo estiver localizado **próximo** da origem, a **constante de tempo** da curva exponencial será **grande** e o **resíduo** deste pólo poderá ser **grande**.
    - **Conseqüência**: Os transitórios correspondentes aos pólos próximos da origem são significativos e determinam a resposta transitória do sistema de ordem superior.

$$c(t) = a + \boxed{\sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}}$$

  - Logo, a **posição dos pólos** de malha fechada em relação à origem e a **magnitude dos resíduos** determinam o comportamento da resposta.

  - Os pólos que têm efeitos dominantes no comportamento da resposta são chamados de **pólos dominantes** de malha fechada.

Na próxima aula...

Estabilidade de Sistemas

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza

Centro de Ciências Tecnológicas