Sistemas Formais

Jorge Muniz Barreto

UFSC-INE

Curso: Teoria da Computação

Em que consiste?

- Formal se refere a forma. Portanto sistemas formais, são sistemas de manipulação de formas, sem preocupação do que estas formas significam no mundo real.
- A essência de um sistema formal é portanto sua **sintaxe**.
- Inclui-se ainda o estudo da **semântica** formal mas a posição é ainda abstrata.

Primeiro Sistema Formal

- A primeira notícia de que se tem de um sistema formal são os trabalhos de Euclides (300A.C.). Estes trabalhos organizam e sistematizam todo o conhecimento da época com relação à Geometria e são conhecidos sob o nome **Elementos.** Neste livro, pela primeira vez, a apresentação é feita através de axiomas, definições, postulados, teoremas e demonstrações. É neste trabalho que se encontram as raizes dos conceitos de termos primitivos e dos outros mencionados de uso corrente atualmente.

Euclides e o Axioma das Paralelas:

- J. Bolyai (1802-1860) e de N. Lobachevsky (1793-1856). Estes dois matemáticos conseguiram abalar seriamente a intocabilidade do sistema de axiomas e postulados. Foi então que surgiram novos modelos para a Geometria, chamados de não euclidianas, se servindo de tudo que tinha sido apresentado nos Elementos de Euclides apenas trocando um postulado por outro. Tratava-se do postulado 5 que diz: “Se uma linha reta corta duas outras fazendo ângulos interiores do mesmo lado de soma menor do que 2 ângulos retos, as duas retas se prolongadas indefinidamente se encontram do lado do plano em que a soma dos ângulos é menor do que 2 ângulos retos".

Tentativas de Prova do Postulado das Paralelas

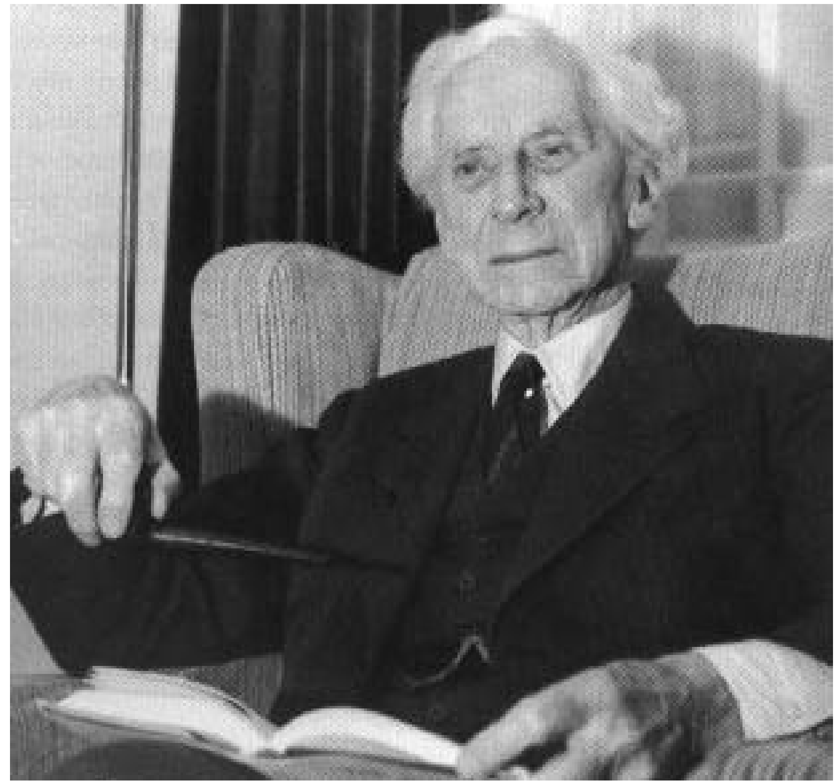
- Várias foram as tentativas de provas deste postulado partindo das definições e dos quatro primeiros. Notáveis são as tentativas de Ptolomeu Próclus, Nascira Ddin At-Tusi, o editor persa de Euclides (120-1274) que substituiu por três novos lemas levando a prova do quinto postulado, Gerolamo Saccheri (1667-1733) jesuita, professor da Universidade de Pávia e Johann Heinrich Lamber (1728-1777) que pela primeira vez exprimiu dúvida da demonstrabilidade da Teoria das Paralelas (inspirado na tese de seu aluno G. S. Klügel) 1763 e finalmente Adrian Marie Lagrandre (1752-1833).

Criadores dos Sistemas Formais

- René Descartes (1596-1650) e de Leibniz (1646-1716) sôbre linguagens e alfabetos completaram o arcabouço básico de sistemas formais. Frege (1848-1925), Peano (1858-1932), Whitehead (1861-1947) e Bertran Russel (1872-1970) e finalmente Wittgenstein (1889-1951) criaram a formalização como se costuma apresentar nos dias de hoje. Kurt Godel enunciou teorema dando os limites dos sistemas formais.

Bertran Russel

- Lord inglês. Espírito anarquista indomável.
- Grande amigo dos alunos e manifestante eloquente. Amante da liberdade.
- 1-Matemático
- 2-Lógico
- 3-Filósofo
- 4-Ficção científica.

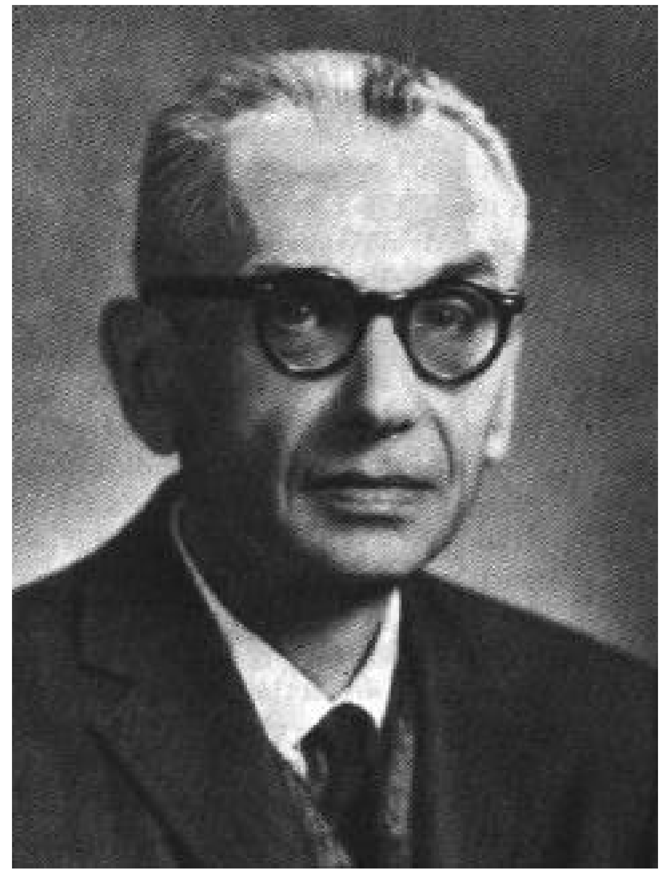


Wittgenstein (1889-1951)

- Russell conta que por volta de 1913, tinha em Cambridge um aluno bastante excêntrico. Sua perplexidade chegou ao apogeu quando o aluno lhe perguntou “o senhor poderia fazer a fineza de me dizer se sou ou não um completo idiota"? Russell respondeu que não sabia, mas perguntou porque perguntara. Aí o aluno continuou “se eu for um completo idiota, me dedicarei à Aeronáutica. Caso contrário, vou ser filósofo”. Russell ficou embaraçado e pediu para o aluno escrever algo. Depois de ler uma linha, Russell disse: “desista de ser aeronauta”.
- Foi preso de guerra, professor de filosofia em Cambridge, jardineiro de mosteiro em Hutteldorf, porteiro de hospital e quando o médico lhe disse que seu fim chegara pediu: “Diga a todos que tive uma vida maravilhosa”

Kurt Gödel

- Grande pensador conhecido por seu teorema da consistência e completude, forma base dos sistemas formais usados atualmente.



Construção de um Sistema Formal

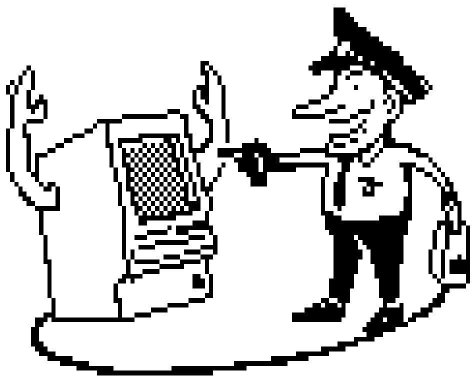
- Na construção de um sistema formal deve-se concentrar atenção na **forma** com que se trabalha. Linguagens Naturais (aquelas usadas entre seres humanos para se comunicarem) possuem ambiguidades que impedem seu uso para este propósito. Portanto, torna-se necessário, dar um passo na direção de evitar estas ambiguidades o que é feito usando um a linguagem constituída por um conjunto bem definido de símbolos e de regras de derivação permitindo construir novos objetos a partir daqueles que se dispõe.

Definições

- Um *alfabeto* é um conjunto finito de símbolos.

  Alfabetos serão denotados por letras gregas maiúsculas. Exemplos: Φ e Σ.
- Costuma-sa ainda com relação a alfabetos, usar os seguintes símbolos:
- O conjunto de todas as cadeias finitas formadas com os elementos do alfabeto Φ é denotado por Φ^*.
- A *cadeia vazia*, ou seja, aquela que tem 0 elementos é denotada por ε
- O conjunto $\Phi^* \setminus \varepsilon$ isto ,é o conjunto de todas as cadeias finitas a partir do alfabeto Φ excluida a cadeia vazia será denotado por Φ^+.
- O comprimento de uma cadeia é o número de elementos da mesma. O da cadeia μ denota-se $\rho(\mu)$ ou $|\mu|$.

Regra de Derivação



Ei, obedeça a regra!

- Seja o alfabeto Φ e seja n   N um número natural. Uma regra de derivação é uma função:

$$F: \Phi^{*n} \rightarrow \Phi^{*}$$

Exemplo: Sejam os dois elementos de Φ*={…,(x y), (car ‘),…}

Uma regra de derivação será:

F:((x y)(car ‘)) |—> (car ‘(x y))

Que tambem se escreve:

$$\frac{\text{(x y)(car ‘)}}{\text{(car ‘(x y))}}$$

Definicão de Sistema Formal

- Um sistema formal é um par constituído por objetos e regras de derivação.

$$<\Phi, D>$$

Exemplo: Seja o sistema formal:

$$< \{0, 1\}, \{\frac{}{0}, \frac{\alpha}{1\alpha}, \frac{\alpha}{10\alpha}\} >$$

Trata-se de um sistema capaz de gerar os números pares do sistema de numeração binário, mas esta interpretacão é irrelevante para o sistema formal.

Representação de Sistemas Formais

- Sistemas formais costumam ser representados por letras gregas maiúsculas.
- Por exemplo:

Γ, Π, Σ, Ω, Ξ, e Ψ.

Linguagem

- Seja um alfabeto de referência Φ e o conjunto de objetos relativo este alfabeto Φ^*. Uma linguagem é um subconjunto de Φ^*, isto é:

$$L \quad \Phi^*.$$

- Quando se deseja explicitar o alfabeto escreve-se:

$$L_\Phi \text{ ou } L(\Phi)$$

Linguagem While

$$\Phi = \{begin, end, if, then, else, while, do, ;, E, \alpha, \beta\}$$

- *(Instrução)*

$$\overline{\alpha}$$

- *(Procedimento)*

$$\frac{\alpha}{begin\ \alpha\ end}$$

- *(Sequência)*

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha;\ \beta}$$

- *(Condicional uma direção)*

$$\frac{E,\ \alpha}{if\ E\ then\ \alpha}$$

- *(Condicional duas direções)*

$$\frac{E,\ \alpha,\ \beta}{if\ E\ then\ \alpha\ else\ \beta}$$

- *(Enquanto)*

$$\frac{E,\ \alpha}{while\ E\ do\ \alpha}$$

Exemplos da Linguagem While

- Exemplos:

1 begin while E_1 do C_1; C_2 end; end;

2 if begin then while E_1 else do C_2 ;

3 Begin

If E_1 then

C_1; C_2

else

C_3; C_4 End; end;

Exemplo 2: Lisp

- Seja o alfabeto:
- Φ ={(,),defun, ‘ , car, cdr, cons, atom, eql, cond, x, y, ...,l_1, l_2,…,=, +, -, *, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, F}
- Exemplos:
- car cond x (cdr x y ((
- (car ‘(x y)))
- (car (cdr ‘(a s d f g)))
- (defun x (l_1) (car (cdr (cdr l_1))))
- (defun fac(x)(cond ((= x 1) 1 (T (fac(- x 1))))))

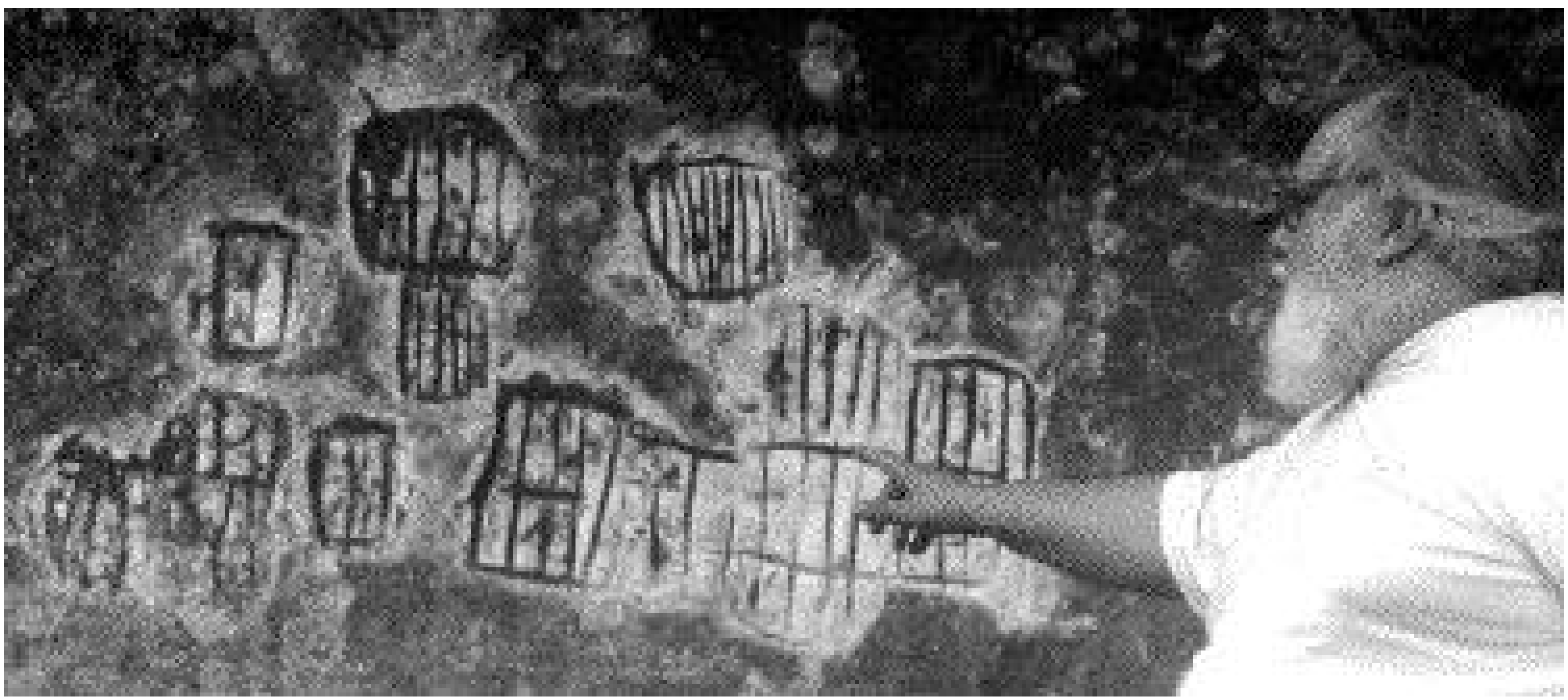
Definições

- **Cálculo:** sinônimo de sistema formal.
- **Teoria:** conjunto de objetos gerados por um sistema formal.
- **Dedução:** Seja teoria Θ e uma sequência de objetos $O = (o_1, o_2, o_3, \ldots o_s)$ obtidos sucessivamente pela aplicação das regras de derivação $R = (r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{s-1})$de um sistema formal. Tem-se
  - R: dedução;
  - O: passos da dedução;
  - o_s: conclusão.

Numeração primitiva

- Interessante que alguns sistemas de numeração primitiva podem ser enquadrados como Sistema Formal. Assim seja o SF:

$$< 1, \frac{\alpha}{\alpha\, 1} >$$



Sistema MIU

- Seja o alfabeto de três letras Ψ ={M, I, U}. Exemplos de palavras que podem ser construídas são:

Ψ^* = {MU, MI,MUUIII, MUI, MUIMUUMII, ...}

Seja agora o sistema formal:

<{M,U,I}, $xI \rightarrow xIU$, $Mx \rightarrow Mxx$, $xIIIy \rightarrow xUy$, $xUUy \rightarrow xy$>

onde x, y são palavras do sistema formal. Tome MI como ponto de partida. Pergunta-se, MU pertence ao sistema?

Números Naturais (Peano)

- O sistema **N** de números naturais é um conjunto gerado por uma Função Sucessor $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ e um elemento selecionado de modo que:
- (i) σ é uma injeção;
- (ii) o elemento previlegiado não é imagem de nenhum outro pela função sucessor;
- (iii) qualquer subconjunto U **N** que goze das propriedades:
  - o elemento previlegiado pertence a U
  - n **N**, n U σ(n) U deve ser igual ao conjunto **N**

Indução Completa ou Matemática

- O terceiro postulado é também conhecido por Indução matemática é frequentemente utilizada como método de prova em conjuntos enumeráveis.
- Um conjunto é dito ser enumerável se existe uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais.

Indução como método de prova

- Os passos para usar a indução matemática como método de prova são:
  - verifica-se se ela é válida para o primeiro elemento da seqüência de acertivas.
  - Caso seja provada esta parte, supõe-se que a acertiva seja válida para a acertiva correspondente ao número n;
  - baseado nesta suposição, teanta-se provar ser válida para a acertiva sucessora, ou seja, correspondente a n+1.

Exercício (Números Romanos)

- Seja o alfabeto R = {I,V,X,L,C,M}. R* é um conjunto de cardinalidade À$_0$. Abaixo mostram-se alguns elementos:

  R* = {I,II,III,IIII,V,VV,VVV,VVVV,VXL,XL,...}

  que em termos dos símbolos usados para eração com símbolos significam: 1,2,3,?,5,?,?,?,?,40,...
- As sequencias às quais não corresponde valor, expresso pelo correspondente número arábico, não são números romanos, isto é, não pertencem à linguagem dos números romanos. Lembrar que esta correspondência em significado não é relevante quando do estudo de sistemas formais.
- Pede-se sugerir as regras de derivação que permitem gerar somente as cadeias que podem ter significado como numeros romanos.

Algebra de Regras de Derivação

- Pode-se compor regras de derivação pela aplicação sucessiva de duas regras. Assim:

  $$r_{1.} \,.\, r_2 = r_3$$

  Esta composição de regras é como uma nova regra r_3 que não aparece na definição do sistema formal.
- Pode-se imaginar uma regra que nada faz, a regra identidade r_i

Algebra de Regras de Derivação

- Composição de regras de derivação é associativa, pois:

r1 . (r2 . r3) = (r1 . r2) . R3

Consequentemente,

Sistemas Formais geram categorias, cujos elementos são os da teoria definida pelo sistema formal e os morfismos

são as regras de derivação.

Semântica

- Semântica formal consiste em atribuir *valores veritativos* às fórmulas de um sistema formal.
- *Valores veritativos* podem ser interpretados como graus de verdade ou falsidade de uma fórmula. Valores veritativos de uma dada fórmula são tambem chamados *valores distinguidos*.

Valoração

- Valoração é a função que associa fórmulas a valores veritativos.
- As propriedades de valoração variam de Lógica para Lógica; exemplos:
  - Lógica Clássica: valores veritativos: verdade, falso.
  - Lógica Nebulosa: valores veritativos: intervalo dos reais entre 0 e 1.

Valoração

- V é uma valoração para um sistema formal Ξ se V for valoração para as fórmulas da linguagem **L** definida pelo sistema formal.
- A valoração V para L satisfaz uma fórmula P se V(P) é um *valor distinguido*. V satisfaz uma coleção de fórmulas se satisfaz todas as formulas da coleção.

Conseqüência Semântica

- Um uma linguagem L, P é conseqüência semântica de Q se toda valoração que satisfaz Q satisfaz P.
- Em símbolos se escreve:

$$Q \models P$$

Consistência Semântica

- Seja um sistema formal com valoração semântica. Se o sistema contiver duas valorações distintas para o mesmo elemento da linguagem do sistema diz-se que o sistema é *inconsistente*.
- Por exemplo: se for possível deduzir que P e $\neg$P pertencem a uma linguagem de valoração dicotômica o sistema será *inconsistente*.

Completude

Seja o sistema formal $<\Phi, D>$, e

$$L \quad \Phi^*$$

uma linguagem L definida pelas regras de derivação do sistema formal.

O Sistema Formal é dito Completo se para todo $\varphi \quad \Phi^*$ é possivel provar que $\varphi \quad L$ ou $\varphi \quad L$

Teorema de Gödel

- Um sistema formal consistente é incompleto e um sistema completo é inconsistente.

!!!

Consistente, mas incompleto,
Completo mas inconsistente
e agora, como fico eu?