

# Erros Estacionários

*Prof. Nilo Rodrigues*

*Sistemas de Controle e Automação*



Universidade de Fortaleza

Centro de Ciências Tecnológicas

# Erros Estacionários

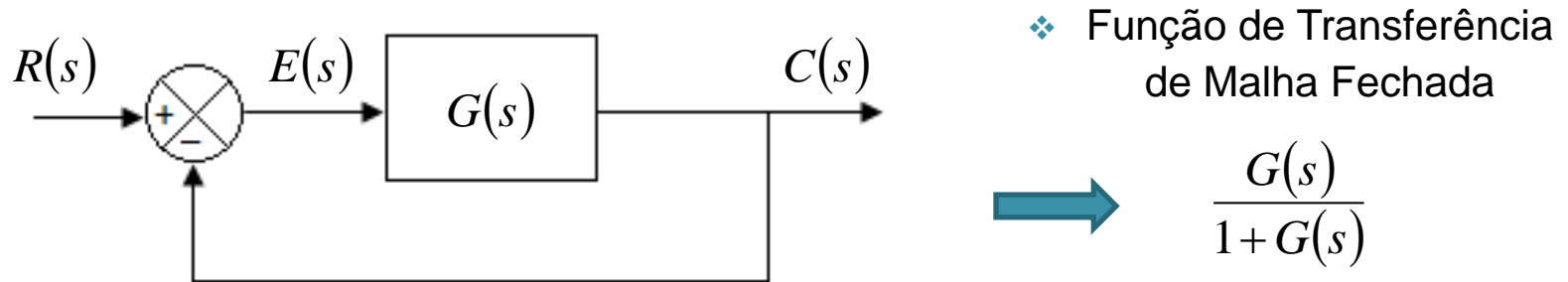
- Qualquer sistema de controle físico apresenta **erros estacionários** na resposta a **certos tipos de entradas**.
- Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com o erro estacionário a entradas do tipo **degrau**, **rampa**, **parábola** etc.
- O erro estacionário que um sistema apresenta em relação a determinado tipo de excitação depende do tipo de **função de transferência de malha aberta** desse sistema.

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}$$

- A classificação tem como base o número de integrações na função de transferência de malha aberta. Logo, um sistema é chamado **tipo 0**, **tipo 1**, **tipo 2**, ..., se  **$N = 0$** ,  **$N = 1$** ,  **$N = 2$** , ...

# Erros Estacionários

- Analisaremos os erros estacionários em sistemas com **realimentação unitária**.



- A função de transferência entre o sinal de erro e o sinal de entrada é dada por:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

- Em termos gerais, o erro estacionário pode ser obtido como:

$$E_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s)$$

# Constantes de Erro Estático

- As constantes de erro estático são definidas de forma que quanto **maior** for seu **valor**, **menor** será o **erro** estacionário.
  - Constante de erro estático de **posição**;
  - Constante de erro estático de **velocidade**;
  - Constante de erro estático de **aceleração**.
- Os termos “posição”, “velocidade” e “aceleração” são convenções e referem-se à saída do sistema, à taxa de variação da saída e assim por diante...
- Estas constantes estão relacionadas aos erros estacionários a entradas do tipo **degrau**, **rampa** e **parábola**.



# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Posição:

- O erro estacionário do sistema para uma entrada em **degrau** é dado por:

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(0)}$$

- A constante de erro estático de **posição** é definida como:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \quad \longrightarrow \quad E_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

- Sistema **tipo 0**:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$

- Sistema **tipo 1** ou superior:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty$

# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Posição:

- O erro estacionário será:
  - Sistema **tipo 0**:  $E_{ss} = \frac{1}{1+K}$
  - Sistema **tipo 1** ou superior:  $E_{ss} = 0$
- A resposta de um sistema de controle com realimentação unitária a uma entrada em degrau conterá um erro estacionário, se não houver integração no ramo direto (tipo 0). Se for desejável um erro estacionário nulo para uma entrada em degrau, o tipo do sistema deverá ser 1 ou maior.



# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Velocidade:

- O erro estacionário do sistema para uma entrada em **rampa** unitária é dado por:

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)}$$

- A constante de erro estático de **velocidade** é definida como:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad \longrightarrow \quad E_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

- Sistema **tipo 0**:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\dots} = 0$
- Sistema **tipo 1**:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\dots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\dots} = K$
- Sistema **tipo 2** ou superior:  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\dots}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\dots} = \infty$

# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Velocidade:

- O erro estacionário será:
  - Sistema **tipo 0**:  $E_{ss} = \infty$
  - Sistema **tipo 1**:  $E_{ss} = \frac{1}{K}$
  - Sistema **tipo 2** ou superior:  $E_{ss} = 0$
- Um sistema tipo 0 é incapaz de seguir, em regime estacionário, uma entrada em rampa. Por outro lado, um sistema tipo 2 ou superior pode seguir esta mesma entrada com erro nulo.

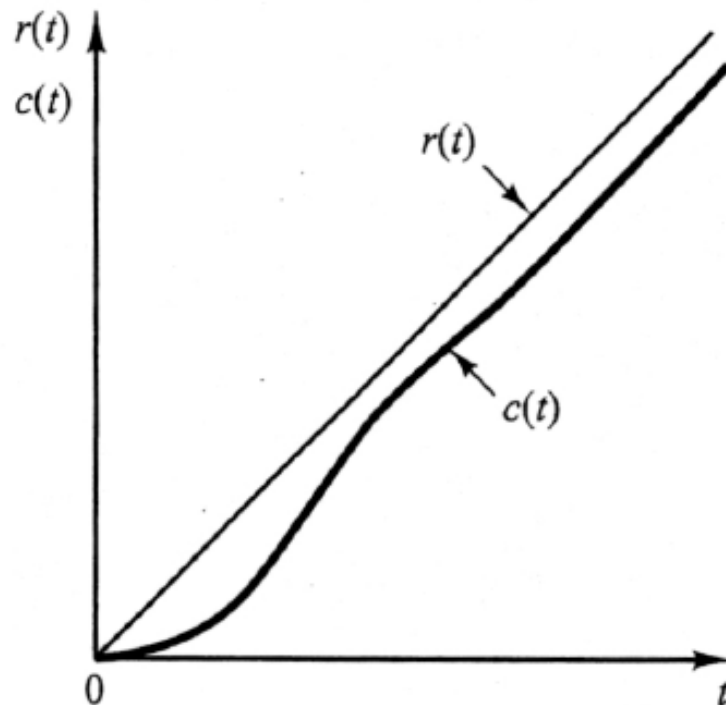




# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Velocidade:

- O sistema do tipo 1 pode seguir a entrada em rampa com um erro finito. Note que em uma operação em regime estacionário, a velocidade de saída é exatamente a mesma velocidade de entrada, mas existe um erro de posição.



# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Aceleração:

- O erro estacionário do sistema para uma entrada em **parábola** unitária é dado por:

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

- A constante de erro estático de **aceleração** é definida como:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad \longrightarrow \quad E_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

- Sistema **tipo 0**:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$
- Sistema **tipo 1**:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$
- Sistema **tipo 2**:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$

# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Aceleração:

- O erro estacionário do sistema para uma entrada em **parábola** unitária é dado por:

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

- A constante de erro estático de **aceleração** é definida como:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad \longrightarrow \quad E_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

- Sistema **tipo 3** ou superior:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty$

# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Aceleração:

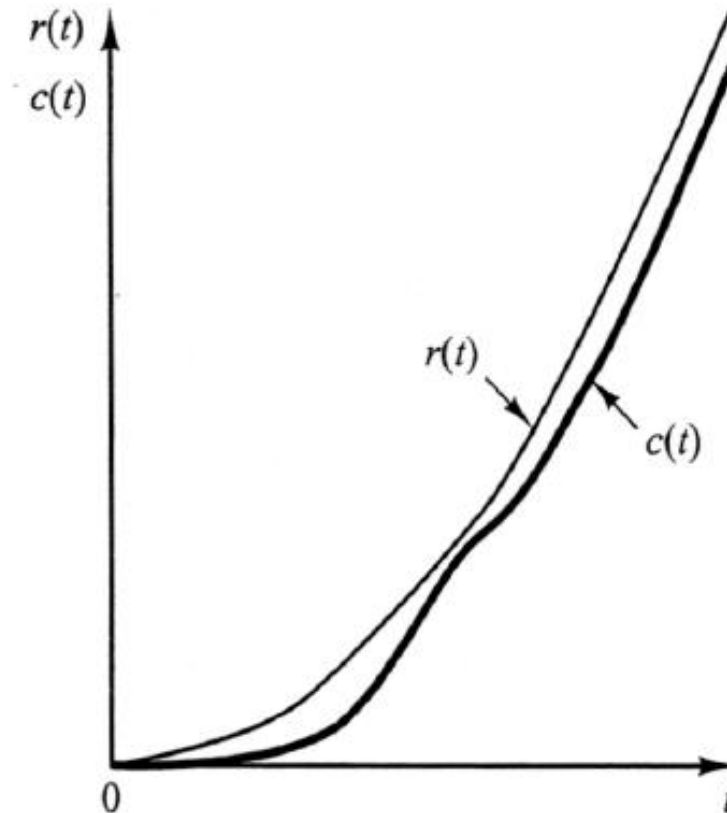
- O erro estacionário será:
  - Sistema **tipo 0** e **1**:  $E_{ss} = \infty$
  - Sistema **tipo 2**:  $E_{ss} = \frac{1}{K}$
  - Sistema **tipo 3** ou superior:  $E_{ss} = 0$
- Sistemas tipo 0 e 1 são incapazes de seguir, em regime estacionário, uma entrada em parábola. Por outro lado, um sistema tipo 3 ou superior pode seguir esta mesma entrada com erro nulo.



# Constantes de Erro Estático

## ❖ Constante de Erro Estático de Aceleração:

- O sistema do tipo 2 pode seguir a entrada em parábola com um erro finito.



# Constantes de Erro Estático

## ❖ Resumo:

	Entrada em degrau $r(t) = 1$	Entrada em rampa $r(t) = t$	Entrada em aceleração $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema do tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	$\infty$	$\infty$
Sistema do tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
Sistema do tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

- Lembre que os termos *erro de posição*, *erro de velocidade* e *erro de aceleração* significam desvios em regime estacionário na **posição** da saída.
- Observe que para melhorar o desempenho em regime permanente, é necessário **aumentar o tipo** do sistema, adicionando um integrador ou integradores no ramo direto.

# Na próxima aula...

Análise do Lugar das Raízes

*Prof. Nilo Rodrigues*

---



Universidade de Fortaleza  
Centro de Ciências Tecnológicas