Resposta Temporal de Sistemas de Primeira Ordem

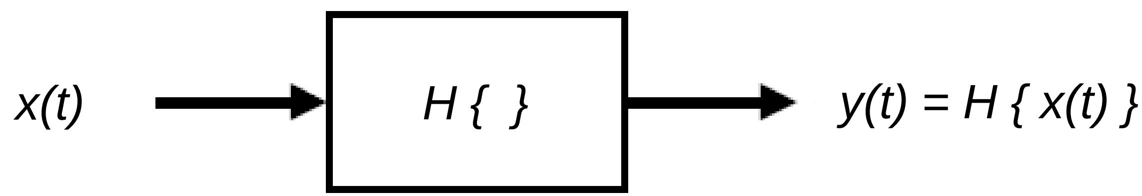
Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas

Resposta Temporal de Sistemas

- O primeiro passo para a análise de um sistema de controle é a obtenção de um **modelo matemático** do sistema. Com base no modelo é possível analisar a **resposta temporal** a determinada entrada.
- A resposta no tempo de qualquer sistema a uma entrada qualquer pode ser dada pela **convolução** desta **entrada** com a **resposta ao impulso** do sistema.



$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Resposta Temporal de Sistemas

- Com a transformação de Laplace, as integrais de **convolução** no domínio do **tempo** são substituídas por operações de **multiplicação** no domínio **complexo**.

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$X(s)$ ⇒ TL da entrada

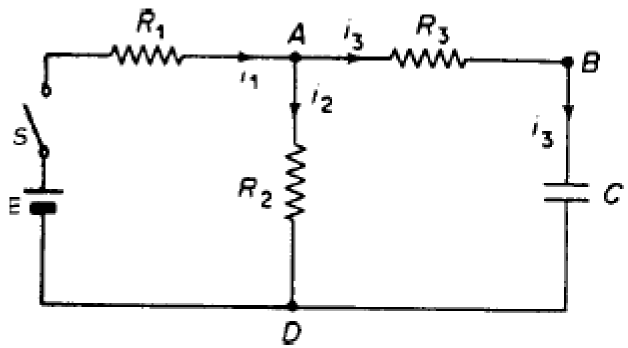
$H(s)$ ⇒ TL da resposta ao impulso (**FT**)

- Logo, a resposta temporal de sistemas pode ser facilmente obtida com o auxílio da transformada de Laplace, sabendo-se a **Função de Transferência** do sistema e a **Transformada de Laplace de sua entrada**.

Resposta Temporal de Sistemas

- **Exemplo**:

  - Obter a resposta temporal do sistema abaixo, sendo:



$$2R_1 = R_2 = R_3$$

$$R_3 C = 1$$

$$e_i(t) = 12u(t)$$

- **1º Passo**: Encontrar a função de transferência do sistema (transformada de Laplace da resposta ao impulso).

$$H(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{0,5}{s + 0,75}$$

Resposta Temporal de Sistemas

- **Exemplo**:

  - **2º Passo**: Encontrar a transformada de Laplace da entrada e determinar a transformada de Laplace para a saída.

$$E_i(s) = \frac{12}{s} \Rightarrow E_o(s) = \frac{6}{s(s+0{,}75)}$$

  - **3º Passo**: Expandir em frações parciais.

$$E_o(s) = \frac{8}{s} - \frac{8}{s+0{,}75}$$

  - **4º Passo**: Aplicar a transformada inversa de Laplace.

$$e_o(t) = 8 \cdot \left(1 - e^{-0{,}75t}\right)$$

Sinais de Entrada

- Em sistemas reais, os sinais de entrada têm característica **aleatória** e na maioria das vezes não são conhecidos previamente.

- Para se ter uma base de comparação do desempenho de vários sistemas de controle, utilizam-se **sinais de teste conhecidos** cuja resposta possua **correlação** com sinais de entrada reais.

- Os sinais de entrada de teste geralmente utilizados são as funções **impulso**, **degrau**, **rampa**, **senoidais** e outras.

Sinais de Entrada

- Pode-se determinar quais desses sinais típicos de entrada devem ser utilizados na análise das características do sistema, pelo **comportamento da entrada** a que o sistema será submetido, com maior freqüência, sob condições normais de operação.

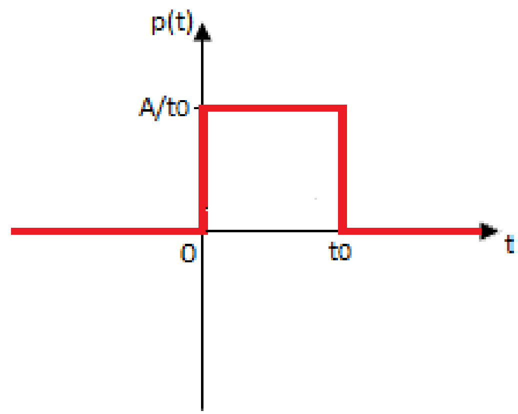
- Uma vez projetado o sistema de controle com base nos sinais de teste, o desempenho do sistema em resposta a entradas reais geralmente é **satisfatório**.

- O uso de sinais de testes possibilita a comparação de desempenho de todos os sistemas em relação a uma **mesma base**.

Sinais de Entrada

❖ Função Impulso

- Considere um pulso de duração t_0 e amplitude A/t_0 :



$$p(t) = 0 \quad \text{para}\, t < 0 \ \text{e} \ t > t_0$$

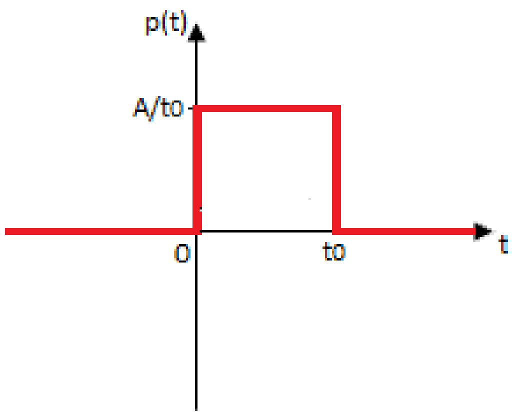
$$p(t) = \frac{A}{t_0} \quad \text{para}\, 0 < t < t_0$$

- A função impulso é um caso-limite especial da função pulso, definida por:

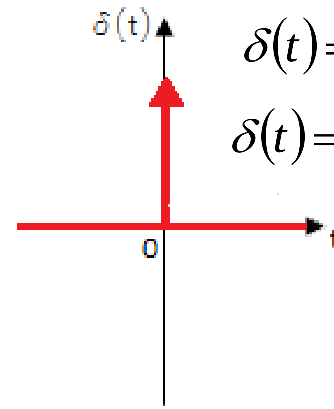
$$\delta(t) = \lim_{t_0 \to 0} p(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \delta(t) = 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & \text{para } t = 0 \end{array}$$

Sinais de Entrada

❖ Função Impulso



$$\delta(t) = \lim_{t_0 \to 0} p(t)$$



$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$
$$\delta(t) = \infty \quad \text{para } t = 0$$

- Como a altura da função pulso é A/t_0 e a duração é t_0, a área delimitada pelo pulso é A. Quando t_0 se aproxima de zero, a amplitude do impulso tende ao infinito, porém sua **área permanece igual a *A***.
- A função impulso em que $A=1$ é chamada de **função impulso unitário** ou **função delta de Dirac**.

Sinais de Entrada

Função Impulso

- A função impulso **não ocorre** em sistemas físicos. Entretanto, se a magnitude de um pulso de entrada de um sistema for muito grande e sua duração for muito curta em comparação às constantes de tempo do sistema, então pode-se **aproximar** o pulso de entrada por uma função impulso.

- Transformada de **Laplace** da função impulso unitário:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

- A **função de transferência** de um sistema representa o comportamento ao mesmo a uma entrada do tipo impulso unitário.

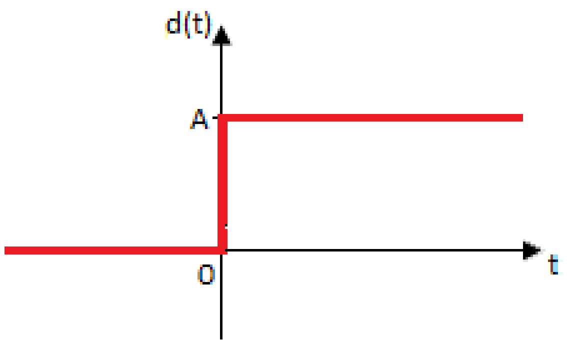
Sinais de Entrada

❖ Função Degrau

- A função degrau que ocorre em *t=0* corresponde a um sinal constante subitamente aplicado ao sistema, no instante *t* igual a zero.

$$d(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$d(t) = A \quad \text{para } t > 0$$



- De forma semelhante, a função degrau em que *A=1* é chamada de **função degrau unitário**.

- Transformada de **Laplace** da função degrau unitário:

$$\int_0^{\infty} d(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

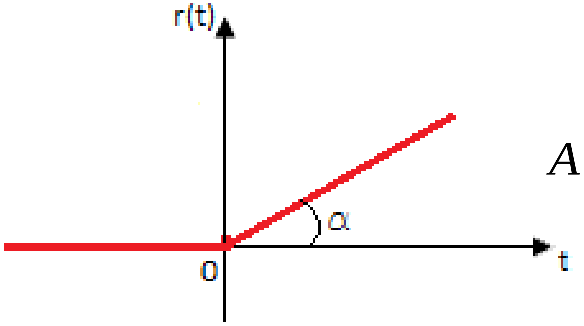
Sinais de Entrada

❖ Função Rampa

- A função rampa corresponde a um sinal que cresce linearmente com o tempo.

$$r(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$r(t) = At \quad \text{para } t \geq 0$$



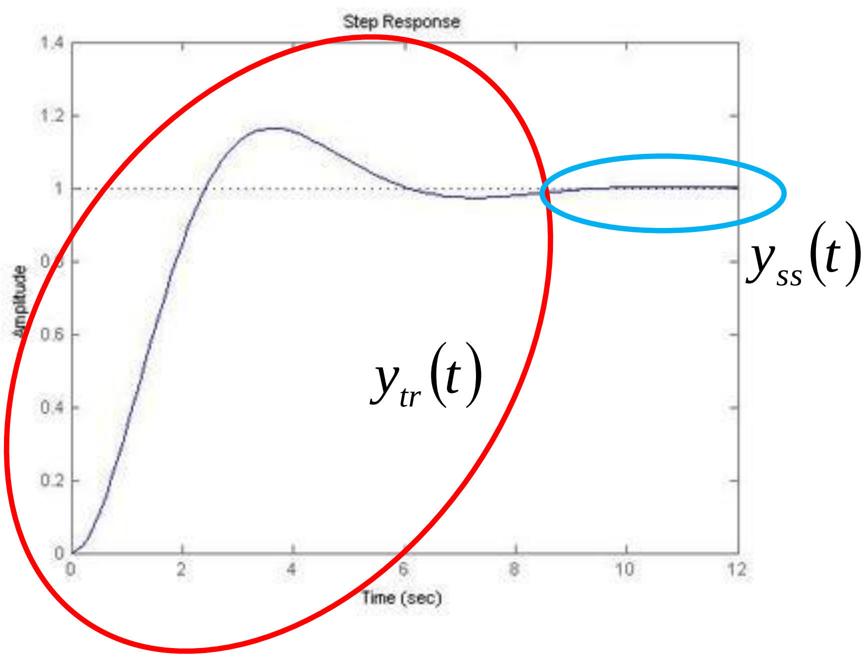
$$A = \tan\alpha$$

- Transformada de **Laplace** da função rampa:

$$\int_0^\infty r(t) e^{-st} dt = \frac{A}{s^2}$$

Resposta transitória e estacionária

- **Resposta transitória**: Aquela que vai do estado inicial ao estado final.
- **Resposta estacionária**: Comportamento do sinal de saída do sistema à medida em que *t* tende ao infinito.



$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

Estabilidade e Erro Estacionário

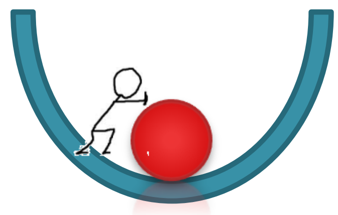
- **Equilíbrio**: Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer distúrbio ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado.
- **Sistema Estável**: Um sistema é estável se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial.
- **Sistema Criticamente Estável**: Um sistema é criticamente estável se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua.
- **Sistema Instável**: Um sistema é instável se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial.

Estabilidade e Erro Estacionário

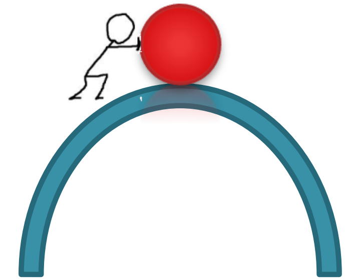
- Para ilustrar:

Sistema Estável

Sistema Criticamente Estável



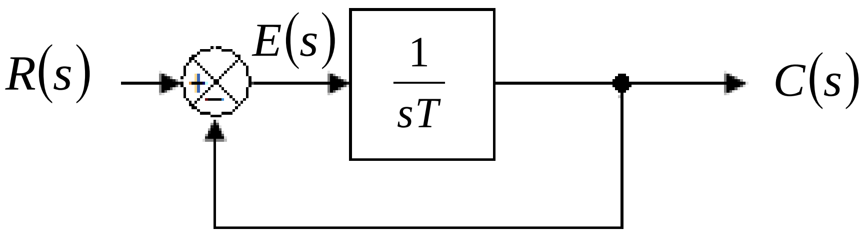
Sistema Instável



- **Erro Estacionário**: Se o sinal de saída de um sistema em regime permanente não coincidir exatamente com a entrada, diz-se que o sistema apresenta um erro estacionário. Esse erro é indicativo da precisão do sistema.
- Na análise e projeto de sistemas de controle, deve-se examinar o comportamento da **resposta transitória** e do **erro estacionário**.

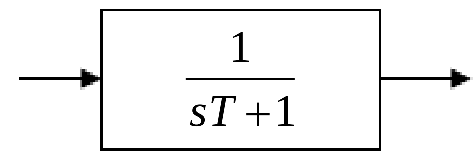
Sistemas de Primeira Ordem

- Considere um sistema com o seguinte diagrama de blocos:



- Função de Transferência:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT+1}$$



- **Sistema de Primeira Ordem**: O maior expoente de *s* no denominador da função de transferência (equação característica) é “1”.

Sistemas de Primeira Ordem

❖ Resposta ao Degrau Unitário

- Considerando a Transformada de Laplace da função degrau unitário:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT+1} \qquad R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s^2T + s}$$

- Expandindo em frações parciais:

$$C(s) = \frac{1}{s^2T + s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \quad \Rightarrow \quad c(t) = 1 - e^{-t/T} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Sistemas de Primeira Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \qquad \text{para } t \geq 0$$

- Inicialmente, a resposta *c(t)* é zero e no fim se torna unitária.
- No tempo *t* = *T*, o valor de *c(t)* é 0,632, ou a resposta *c(t)* alcançou 63,2% de sua variação total.

Constante de Tempo: Definida como o tempo necessário para que a resposta ao degrau alcance 63,2% do seu valor final.

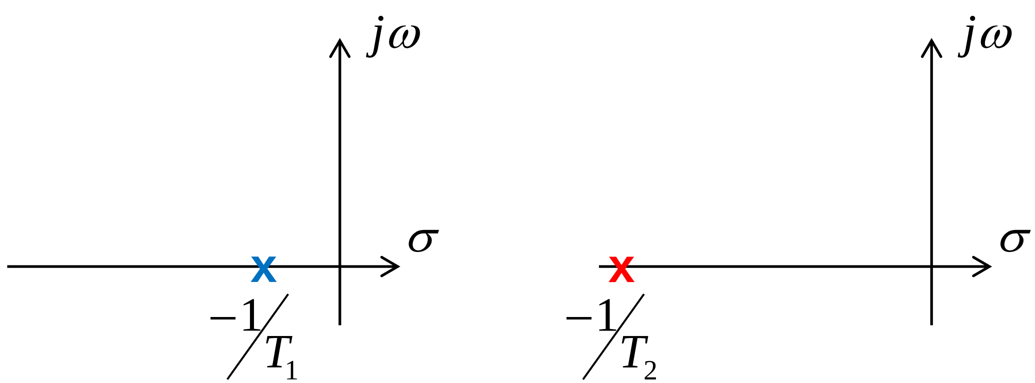
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s\boxed{T}+1}$$

Sistemas de Primeira Ordem

❖ Resposta ao Degrau Unitário

- Quanto **menor** a constante de tempo *T*, mais **rapidamente** o sistema responde.

- Assim, se pensarmos em termos de localização do pólo do sistema de 1ª ordem no plano "s":



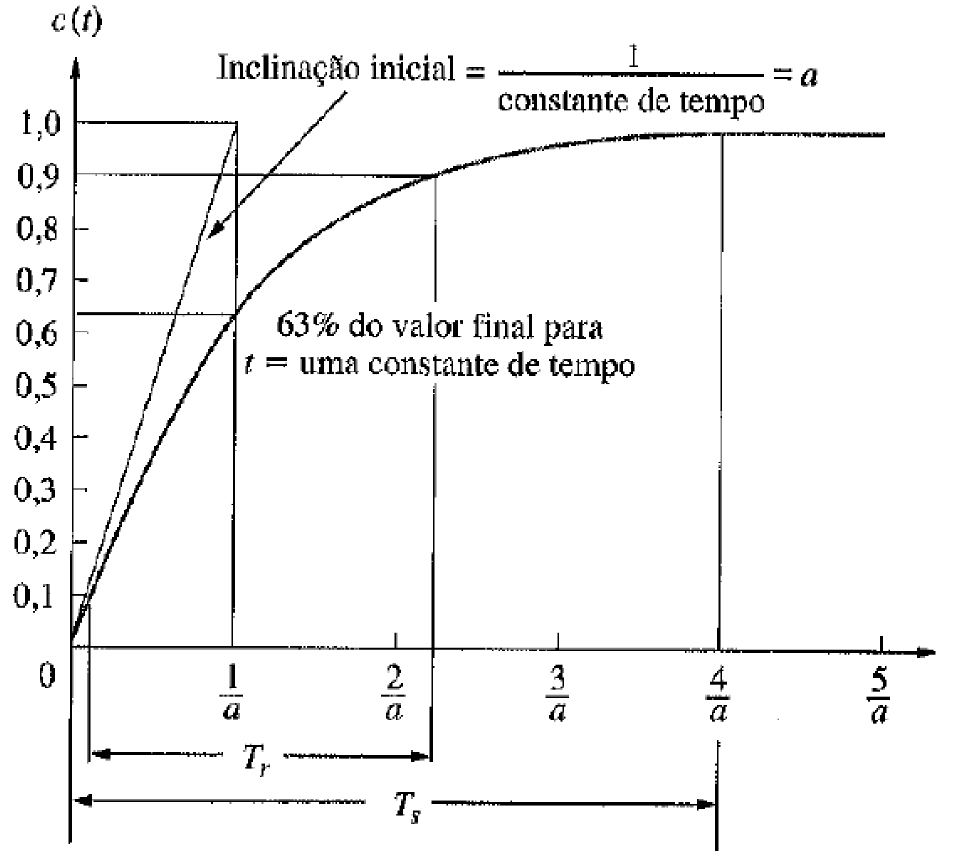
$$T_1 > T_2$$

- Logo, sistemas com **pólos próximos da origem respondem mais lentamente**.

Sistemas de Primeira Ordem

❖ Resposta ao Degrau Unitário

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$



Sistemas de Primeira Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

- A inclinação da linha tangente em *t=0* é *1/T*.

$$\left.\frac{d[c(t)]}{dt}\right|_{t=0} \Rightarrow \left.\frac{d[c(t)]}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}e^{-t/T}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

- Assim, a saída alcançaria o valor final em *t=T* se fosse mantida a velocidade inicial de resposta.

- Matematicamente, o estado permanente é alcançado somente depois de um tempo infinito. Na prática, entretanto, é razoável que o tempo estimado de resposta seja o intervalo de tempo necessário para a curva alcançar e permanecer a **2%** da linha do valor final (*t = 4T*).

Sistemas de Primeira Ordem

Resposta à Rampa Unitária

- Considerando a Transformada de Laplace da função rampa unitária:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT+1} \qquad R(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s^3T + s^2}$$

- Expandindo em frações parciais:

$$C(s) = \frac{1}{s^3T + s^2} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \quad \Rightarrow \quad c(t) = t - T + Te^{-t/T} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Sistemas de Primeira Ordem

Resposta à Rampa Unitária

- O sinal de erro é dado por:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = T\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

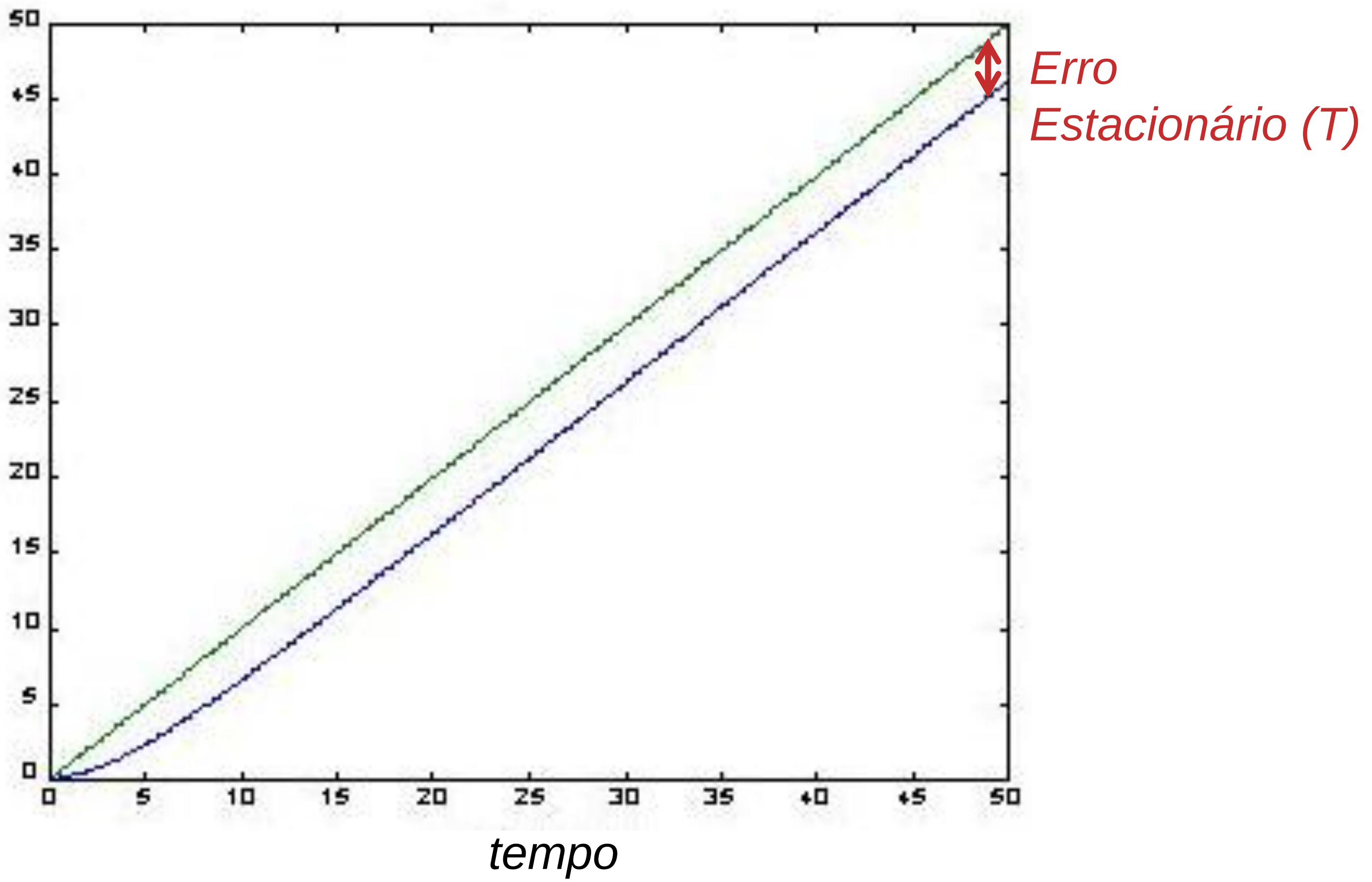
- Em regime permanente, o **erro estacionário** é dado por:

$$e(t) = T\left(1 - e^{-t/T}\right)\Big|_{t\to\infty} \quad \Rightarrow \quad e(t)\Big|_{t\to\infty} = T$$

- O erro do sistema para seguir a rampa unitária é igual a *T* para *t* suficientemente grande. Assim, quanto menor a **constante de tempo** *T*, menor o **erro estacionário** ao seguir a entrada em rampa.

Sistemas de Primeira Ordem

❖ Resposta à Rampa Unitária



Sistemas de Primeira Ordem

Resposta ao Impulso Unitário

- Considerando a Transformada de Laplace da função impulso unitário:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT+1}$$

$$R(s) = 1$$

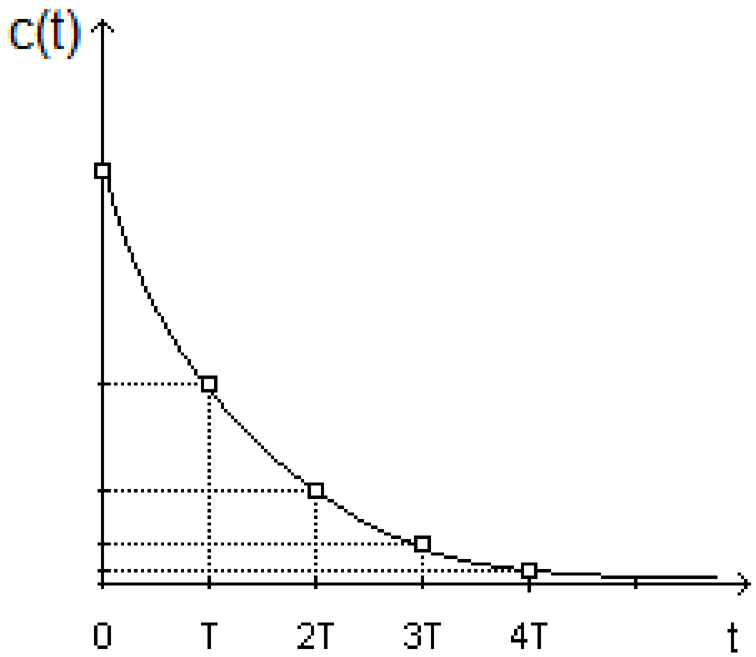
$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{1/T}{s+1/T}$$

- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$C(s) = \frac{1/T}{s+1/T} \quad \Rightarrow \quad c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Sistemas de Primeira Ordem

❖ Resposta ao Impulso Unitário



Sistemas de Primeira Ordem

❖ Correlação entre as repostas

- Nos sistemas lineares invariantes no tempo, a reposta à derivada de um sinal de entrada pode ser obtida diferenciando-se a resposta do sistema para o sinal original.

	Entrada	**Saída**
Rampa	$r(t)=t$	$c(t)=t-T+Te^{-t/T}$
	$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$	$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$
Degrau	$r(t)=1$	$c(t)=1-e^{-t/T}$
	$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$	$\Big\downarrow \frac{d}{dt}$
Impulso	$r(t)=\delta(t)$	$c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}$

Na próxima aula...

Resposta Temporal de Sistemas de 2ª Ordem

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas