1 Introdução

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações diferencias lineares com coeficientes constantes, ou seja, equações da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Para isso, a equação diferencial é inicialmente transformada pela transformada de Laplace numa equação algébrica. Depois resolve-se a equação algébrica e finalmente transforma-se de volta a solução da equação algébrica na solução da equação diferencial inicial.

A transformada de Laplace de uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

para todo $s \geq 0$ em que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por t, e a sua transformada de Laplace pela letra correspondente maiúscula e a sua variável. Por exemplo, as transformadas de Laplace das funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ serão representadas por $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$, respectivamente.

Exemplo 1. A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s} = 0 - \frac{e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

Exemplo 2. Seja a uma constante real. A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{at}$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{a - s} \right|_0^\infty = 0 - \frac{e^{-(s-a)0}}{a - s} = \frac{1}{s - a}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3. Seja a uma constante real. Vamos determinar a transformada de Laplace das funções $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \cos at$ e $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \operatorname{sen} at$. Para isso, vamos calcular a transformada de Laplace da função
$h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = e^{iat}$.

$$\begin{aligned}
H(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{iat}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-ia)t}\, dt = \left.\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right|_0^\infty \\
&= \lim_{T\to\infty} e^{-sT}(\cos aT + i \operatorname{sen} aT) - \frac{e^{-(s-ia)0}}{-(s-ia)} = 0 - \frac{e^{-(s-ia)0}}{ia-s} \\
&= \frac{1}{s-ia}, \quad \text{para } s > 0.
\end{aligned}$$

Calculamos a acima a transformada de Laplace de

$$h(t) = e^{iat} = \cos at + i \operatorname{sen} at = f(t) + ig(t)$$

$$H(s) = \mathcal{L}(h)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,(\cos at + i \operatorname{sen} at)\, dt = \mathcal{L}(f)(s) + i\mathcal{L}(g)(s) = F(s) + iG(s)$$

Comparando a parte real (imaginária) do lado direito com a parte real (imaginária) do lado esquerdo da igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
F(s) &= \operatorname{Re}\{\frac{1}{s-ia}\} = \operatorname{Re}\{\frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)}\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \text{para } s > 0 \\
G(s) &= \operatorname{Im}\{\frac{1}{s-ia}\} = \operatorname{Im}\{\frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)}\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \text{para } s > 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 4. Seja n um inteiro positivo. Vamos calcular a transformada de Laplace da função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(t) = t^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
F_n(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt = \left.\frac{t^n e^{st}}{-s}\right|_0^\infty - \frac{n}{-s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt \\
&= \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt = \frac{n}{s} F_{n-1}(s)
\end{aligned}$$

Aplicando-se recursivamente a fórmula obtida obtemos

$$F_n(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} F_{n-2}(s) = \frac{n(n-1)\ldots 1}{s^n} F_0(s)$$

mas $F_0(s) = \dfrac{1}{s}$ é a transformada de Laplace da função constante 1, ou seja, $F_0(s) = \frac{1}{s}$. Assim, a transformada de Laplace de $f_n(t) = t^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ é

$$F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{para } s > 0.$$

Para calcular a transformada de Laplace de outras funções vamos usar as propriedades que apresentamos a seguir.

Teorema 1 (Linearidade). *Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, para $s > a_1$, e a transformada de Laplace de $g(t)$ é $G(s)$, para $s > a_2$, então para constantes α e β*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s) = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \textit{para } s > \max\{a_1, a_2\}.$$

Teorema 2 (1º Teorema de Deslocamento). *Seja a uma constante. Se a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = e^{at} f(t)$$

é

$$G(s) = F(s - a), \quad \textit{para } s > a + c$$

Exemplo 5. Sejam a e b constantes. Usando o Teorema anterior obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt} \cos at$ é dada por

$$F(s) = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 6. Sejam a e b constantes. Usando o Teorema anterior obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt} \operatorname{sen} at$ é dada por

$$F(s) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 7. Seja a um constante e n um inteiro positivo. Usando o Teorema anterior obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{at} t^n$ é dada por

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 8. Seja a uma constante. Pelo Teorema anterior a transformada de Laplace do cosseno hiperbólico de at, $f(t) = \cosh at = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

Exemplo 9. Seja a uma constante. Pelo Teorema anterior a transformada de Laplace do seno hiperbólico de at, $f(t) = \operatorname{senh} at = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

Exemplo 10. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 - 3s + 2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Para isso vamos decompor $F(s)$ em frações parciais. O denominador de $F(s)$ tem duas raízes reais $s = 1$ e $s = 2$. Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2},$$

em que A e B são constantes a determinar. Multiplicando $F(s)$ por $(s-1)(s-2)$ obtemos

$$s + 3 = A(s-2) + B(s-1) = (A+B)s + (-2A - B)$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos

$$1 = A + B \quad \text{e} \quad 3 = -2A - B$$

de onde obtemos que $A = -4$ e $B = 5$. Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = -4\frac{1}{s-1} + 5\frac{1}{s-2}$$

e a função cuja transformada é $F(s)$ é

$$f(t) = -4e^t + 5e^{2t}.$$

Exemplo 11. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+4}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. O denominador de $F(s)$ tem somente uma raiz real, $s = 2$. Podemos reescrever $F(s)$ da seguinte forma

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{s+2-5}{(s+2)^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2} + \frac{-5}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - 5\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Observando a Tabela na página 20, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = e^{-2t} - 5e^{-2t}t.$$

Exemplo 12. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-2}{2s^2+2s+2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Completando quadrados podemos reescrever $F(s)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s-2}{2s^2+2s+2} = \frac{s-2}{2[s^2+s+1]} = \frac{s-2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\
&= \frac{s+1/2-5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} = \frac{s+1/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} - \frac{5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{4}\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}
\end{aligned}$$

Observando a Tabela na página 20, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

2 Solução de Problemas de Valor Inicial

Dizemos que uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua em $[0, \infty)$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem.

Teorema 3 (Derivação). (a) *Suponha que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja derivável com $f'(t)$ seccionalmente contínua. Então*

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

(b) *Suponha que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja derivável duas vezes com $f''(t)$ seccionalmente contínua. Então*

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Exemplo 13. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t \operatorname{sen} at$. Vamos determinar $F(s)$.

$$f'(t) = \operatorname{sen} at + at \cos at$$

$$f''(t) = 2a \cos at - a^2 t \operatorname{sen} at = 2a \cos at - a^2 f(t)$$

Assim, aplicando-se a transformada de Laplace e usando o Teorema anterior obtemos

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = 2a\frac{s}{s^2 + a^2} - a^2F(s)$$

Assim,

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Exemplo 14. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t\cos at$. Deixamos como exercício mostrar que

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

Exemplo 15. Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left(s^2 + 2s + 5\right)Y(s) &= 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + s + 2 \\
&= \frac{4s + 4 + (s+2)(s^2+2s+5)}{s^2+2s+5} \\
&= \frac{s^3 + 4s^2 + 13s + 14}{s^2+2s+5}
\end{aligned}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 13s + 14}{(s^2+2s+5)^2}$$

Como o denominador tem somente raízes complexas, para decompor $Y(s)$ em frações parciais vamos encontrar A, B, C e D tais que

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2+2s+5} + \frac{Cs + D}{(s^2+2s+5)^2}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
s^3 + 4s^2 + 13s + 14 &= (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D) \\
&= As^3 + (B+2A)s^2 + (2B+5A+C)s + (5B+D)
\end{aligned}$$

Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} A & & & & & & & = & 1 \\ 2A & + & B & & & & & = & 4 \\ 5A & + & 2B & + & C & & & = & 13 \\ & & 5B & & & + & D & = & 14 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = 1$, $B = 2$, $C = 4$ e $D = 4$. Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{4s+4}{(s^2+2s+5)^2} = \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4} + 4\frac{s+1}{[(s+1)^2+4]^2} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{2\cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2} \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t + te^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

6 Tabela de Transformadas de Laplace

Transformadas de Laplace Elementares			
$f(t)$	$F(s)=\mathfrak{L}(f)(s)$	$f(t)$	$F(s)=\mathfrak{L}(f)(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$, para $s>0$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$, para $s>a$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$, para $s>0$	$\text{sen}\, at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$, para $s>0$
t^n, para $n\in\mathbb{Z}^+$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, para $s>0$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, $s>0$	$t\,\text{sen}\, at$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$, $s>0$
$\text{sen}\, at - at\cos at$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$, $s>0$	$\delta(t-t_0))(s)$	$e^{-t_0 s}$, $s>0$
$u_a(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$, para $s>0$	$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(t)\delta(t-t_0))(s)$	$e^{-t_0 s}f(t_0)$, $s>0$	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

7 Exercícios

1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y' - 2y = 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

(c) $y'' - 2y' + y = te^t + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(d) $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(e) $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

(f) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{para } t \geq \pi/2 \end{cases}$

(g) $y''+2y'+2y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 2\pi \end{cases}$

(h) $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 2\pi \end{cases}$

(i) $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$

(j) $y'' + 3y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$

(k) $y'' + 3y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 1, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$

(l) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 3\pi \\ 1, & \text{para } t \geq 3\pi \end{cases}$

(m) $y''+y'+\frac{5}{4}y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$

(n) $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$,$y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \leq t < 3\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 3\pi \end{cases}$

(o) $y'' + y = \delta(t - 2\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(p) $y'' + 4y' + 4y = f(t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

2. Resolva o problema: $y'' - 6y' + 8y = \operatorname{sen} t$, $y(0) = y'(0) = 0$

(a) sem usar transformada de Laplace

(b) usando transformada de Laplace

8 Respostas dos Exercícios

1. (a)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 2\frac{1}{s^2}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + s - 2\right) Y(s) = \frac{2}{s^2} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} \\ &= \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1}$$

$$\begin{aligned} s^2 + 2 &= As(s^2+s-2) + B(s^2+s-2) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2) \\ &= (A+C+D)s^3 + (A+B-C+2D)s^2 + (-2A+B)s + (-2B) \end{aligned}$$

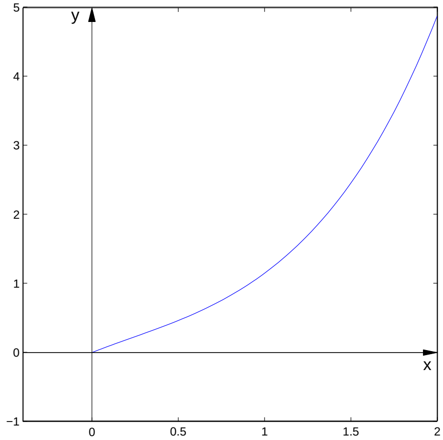
Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} A & & & + & C & + & D & = & 0 \\ A & + & B & - & C & + & 2D & = & 1 \\ -2A & + & B & & & & & = & 0 \\ & - & 2B & & & & & = & 2 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = -1/2$, $B = -1$, $C = -1/2$ e $D = 1$. Assim,

$$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t$$



(b)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ obtemos

$$\left(s^2+4\right)Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1} + 2$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s^2+4)} + \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned} 2 &= As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)s^3 \\ &= (A+D)s^4 + (B+E)s^3 + (4A+C)s^2 + 4Bs + 4C \end{aligned}$$

Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} A & & & & & + & D & & & = 0 \\ & & B & & & & & + & E & = 0 \\ 4A & & & + & C & & & & & = 0 \\ & & 4B & & & & & & & = 0 \\ & & & & 4C & & & & & = 2 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = -1/8$, $B = 0$, $C = 1/2$, $D = 1/8$ e $E = 0$. Assim,

$$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = -\frac{1/8}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4}$$

$$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$3 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1) = (A+B)s^2 + (-B+C)s + (4A-C)$$

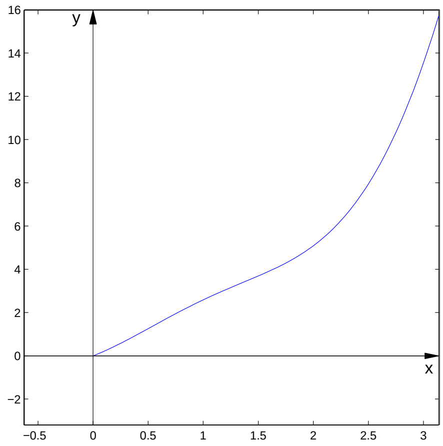
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ & - & B & + & C & = & 0 \\ 4A & & & - & C & = & 3 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = 3/5$, $B = -3/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3/5}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3/5}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s) = -\frac{1/8}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3/5}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{3}{5}e^t + \frac{7}{10}\operatorname{sen} 2t$$



(c)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right) Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s} + s - 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} \\ &= \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por $s(s-1)^2$ obtemos

$$4 = A(s^2 - 2s + 1) + B(s-1)s + Cs$$

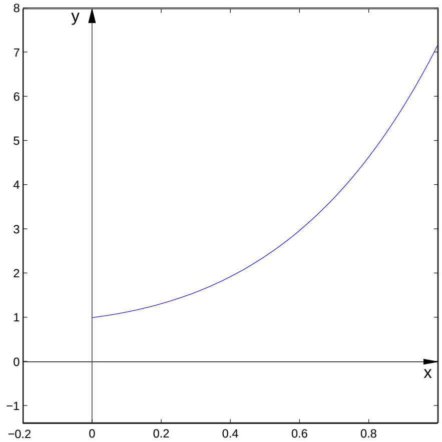
Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ -2A & - & B & + & C & = & 0 \\ A & & & & & = & 4 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 4$, $B = -4$ e $C = 4$. Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{1}{6}\frac{6}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3 e^t + 4 - 3e^t + 4te^t$$



(d)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) - 3Y(s) = 3\frac{1}{(s-2)^2}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s - 3\right)Y(s) = 3\frac{1}{(s-2)^2} + s - 2$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= 3\frac{1}{(s^2-2s-3)(s-2)^2} + \frac{s-2}{s^2-2s-3} \\
&= 3\frac{1}{(s-3)(s+1)(s-2)^2} + \frac{s-2}{(s-3)(s+1)} \\
&= \frac{3+(s-2)^3}{(s-3)(s+1)(s-2)^2} \\
&= \frac{s^3-6s^2+12s-5}{(s-3)(s+1)(s-2)^2}
\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}$$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-3)(s+1)(s-2)^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
&s^3 - 6s^2 + 12s - 5 = \\
&\qquad A(s+1)(s^2-4s+4) + B(s-3)(s^2-4s+4) + \\
&\qquad C(s^2-2s-3)(s-2) + D(s^2-2s-3)
\end{aligned}$$

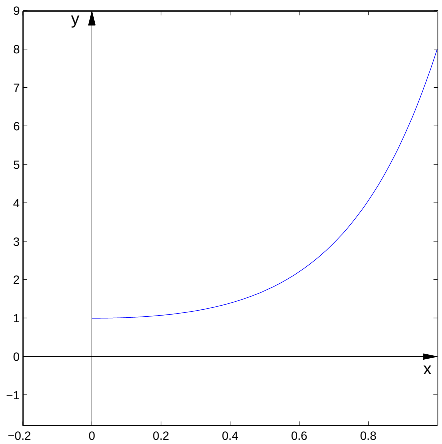
Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} A & + & B & + & C & & & = & 1 \\ -3A & - & 7B & - & 4C & + & D & = & -6 \\ & & 16B & + & C & - & 2D & = & 12 \\ 4A & - & 12B & + & 6C & - & 3D & = & -5 \end{array}\right.$$

Resolvendo-se o sistema por escalonamento obtemos a solução $A = 1$, $B = 2/3$, $C = -2/3$ e $D = -1$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{2/3}{s+1} - \frac{2/3}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$y(t) = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$$



(e)

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = 3\frac{2}{s^2+4}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$ obtemos

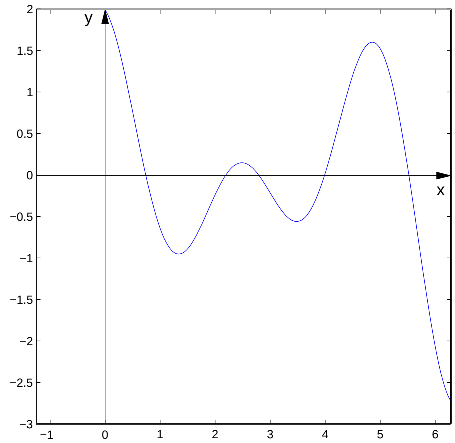
$$\left(s^2+4\right) Y(s) = 3\frac{2}{s^2+4} + 2s - 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{6}{(s^2+4)^2} + \frac{2s-1}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{16}\frac{16}{(s^2+4)^2} + 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{3}{8}\frac{8}{(s^2+4)^2} + 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{8}(\mathrm{sen}\,2t - 2t\cos 2t) + 2\cos 2t - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2t \\ &= 2\cos 2t - \frac{1}{8}\mathrm{sen}\,2t - \frac{3}{4}t\cos 2t \end{aligned}$$



(f)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2+1\right)Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s(s^2+1)} \\ &= \frac{1}{s^2+1} + H(s) - e^{-\pi s/2}H(s), \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t) - h(t - \pi/2)u_{\pi/2}(t).$$

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2 + 2s + 2)$ obtemos

$$1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)s = (A + B)s^2 + Cs + A$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrr} A & + & B & & & = & 0 \\ & & & & C & = & 0 \\ A & & & & & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$. Assim,

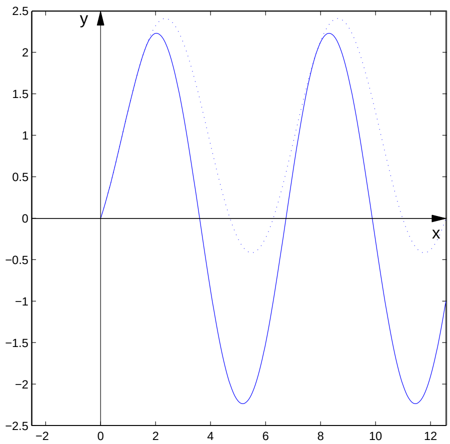
$$H(s) \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t) - h(t - \pi/2)u_{\pi/2}(t) = 1 - \cos t + \operatorname{sen} t - u_{\pi/2}(t)(1 - \operatorname{sen} t).$$



(g)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \\ &= (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})H(s) + \frac{1}{(s+1)^2 + 1}, \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$y(t) = h(t - \pi)u_\pi(t) - h(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t}\text{sen}\, t.$$

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2 + 2s + 2)$ obtemos

$$2 = A(s^2 + 2s + 2) + (Bs + C)s = (A + B)s^2 + (2A + C)s + 2A$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ 2A & & & + & C & = & 0 \\ 2A & & & & & = & 2 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1$, $B = -1$ e $C = -2$. Assim,

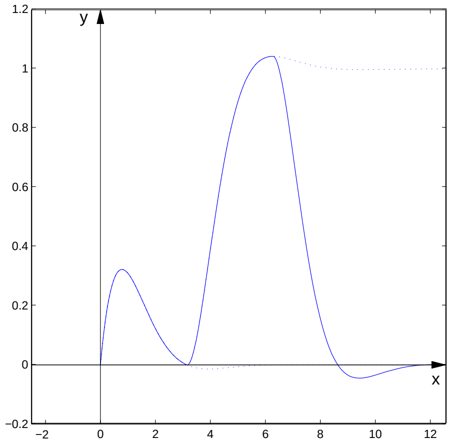
$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2}{(s+1)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\,\text{sen}\, t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = h(t - \pi)u_\pi(t) - h(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t}\text{sen}\, t.$$



(h)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2+4\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= H(s) - e^{-2\pi s}H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t)h(t-2\pi)$$

$$H(s) = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Multiplicando-se por $(s^2+1)(s^2+4)$:

$$\begin{aligned} 1 &= (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1) \\ &= (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + (4B+D) \end{aligned}$$

Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

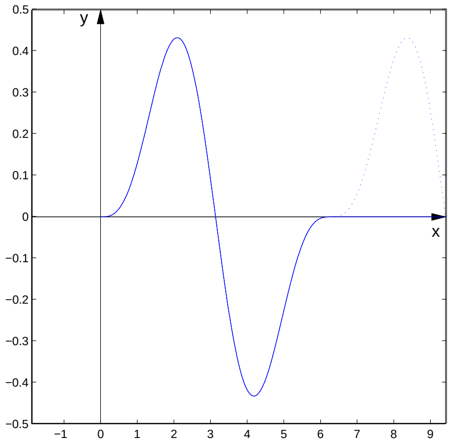
$$\begin{cases} A \quad\quad + C \quad\quad = 0 \\ \quad B \quad\quad + D = 0 \\ 4A \quad\quad + C \quad\quad = 0 \\ \quad 4B \quad\quad + D = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$ e $D = -1/3$. Assim,

$$H(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}$$

$$h(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t$$

$$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t)h(t-2\pi) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t - u_{2\pi}(t)(\frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t)$$



(i)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2+4\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= H(s) + e^{-\pi s}H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

Do exercício anterior temos que

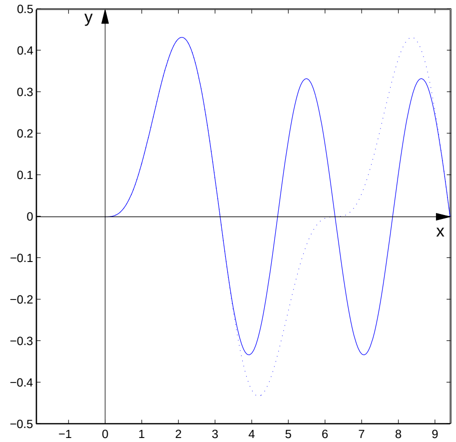
$$H(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t$$

e portanto

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t - u_\pi(t)(\frac{1}{3}\operatorname{sen} t + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t)$$



(j)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 3s + 2\right)Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)} - \frac{e^{-10s}}{s\left(s^2+3s+2\right)} = H(s) - e^{-10s}H(s)$$

em que

$$H(s)=\frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

$$y(t)=h(t)-u_{10}(t)h(t-10).$$

$$H(s)=\frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}$$

Multiplicando $H(s)$ por $s\left(s^2+3s+2\right)$ obtemos

$$1=A\left(s^2+3s+2\right)+Bs(s+2)+Cs(s+1)=(A+B+C)s^2+(3A+2B+C)s+2A$$

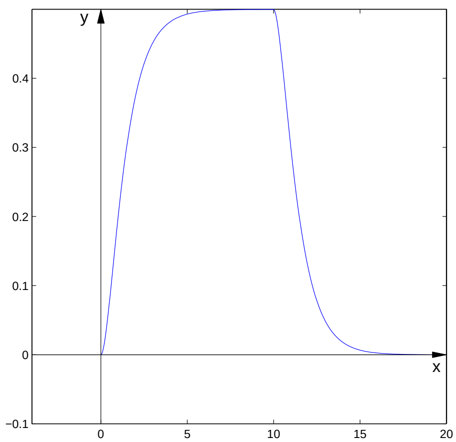
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & + & C & = & 0 \\ 3A & + & 2B & + & C & = & 0 \\ 2A & & & & & = & 1 \end{array}\right.$$

que tem solução $A=1/2$, $B=-1$ e $C=1/2$. Assim,

$$H(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t)=h(t)-u_{10}(t)h(t-10)$$



(k)

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+3\left(sY(s)-y(0)\right)+2Y(s)=\frac{e^{-2s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} + \frac{e^{-2s}}{s\left(s^2 + 3s + 2\right)} = Y_1(s) + e^{-2s} H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + 3s + 2\right)} \quad \text{e} \quad Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$y(t) = y_1(t) - u_2(t)h(t-2).$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = Y_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Multiplicando $Y_1(s)$ por $s^2 + 3s + 2$:

$$1 = A(s+2) + B(s+1) = (A+B)s + (2A+B)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ 2A & + & B & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1$ e $B = -1$. Assim,

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

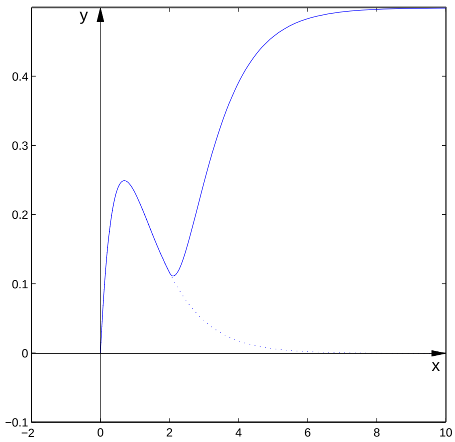
$$y_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Do exercício anterior

$$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2) = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)h(t-2)$$



(1)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 1\right) Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1} \\ &= e^{-3\pi s} H(s) + \frac{1}{s^2+1}, \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t - 3\pi)u_{3\pi}(t).$$

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2 + 2s + 2)$ obtemos

$$1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)s = (A + B)s^2 + Cs + A$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 0 \\ & & & & C & = & 0 \\ A & & & & & = & 1 \end{array} \right.$$

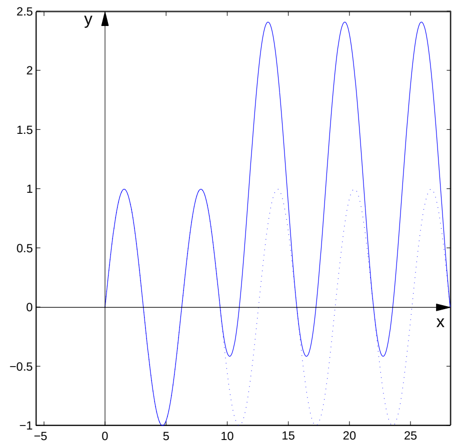
que tem solução $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$. Assim,

$$H(s) \;=\; \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t-3\pi)u_{3\pi}(t) = \operatorname{sen} t + u_{3\pi}(t)[1 - \cos(t-3\pi)]$$



(m)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + \left(sY(s) - y(0)\right) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} + e^{-\pi s}\frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} \\ &= H(s) + e^{-\pi s}H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+s+\frac{5}{4}}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)$:

$$\begin{aligned} 1 &= (As+B)(s^2+s+\frac{5}{4}) + (Cs+D)(s^2+1) \\ &= (A+C)s^3 + (A+B+D)s^2 + (\frac{5}{4}A+B+C)s + (\frac{5}{4}B+D) \end{aligned}$$

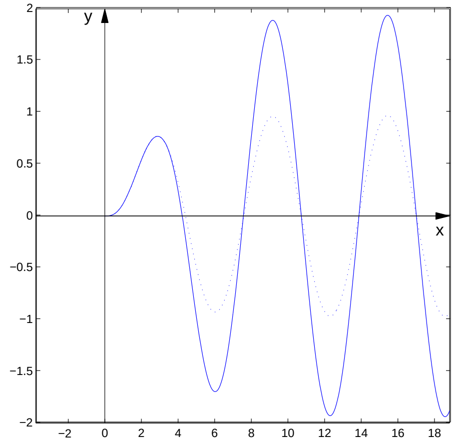
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} A & & & + & C & & & = & 0 \\ A & + & B & & & + & D & = & 0 \\ \frac{5}{4}A & + & B & + & C & & & = & 0 \\ & & \frac{5}{4}B & & & + & D & = & 1 \end{array}\right.$$

Resolvendo-se o sistema por escalonamento obtemos a solução $A = -16/17$, $B = 4/17$, $C = 16/17$ e $D = 12/17$. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{4}{17}\left(\frac{-4s+1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{s^2+s+\frac{5}{4}}\right) \\ &= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{(s+1/2)^2+1}\right) \\ &= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+3/4}{(s+1/2)^2+1}\right) \\ &= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1} + \frac{1}{(s+1/2)^2+1}\right) \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{4}{17}\left(-4\cos t + \operatorname{sen} t + 4e^{-t/2}\cos t + e^{-t/2}\operatorname{sen} t\right)$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$



(n)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-3\pi s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}}{s}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)} \\ &= (e^{-\pi s} - e^{-3\pi s})H(s), \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$y(t) = u_\pi(t)h(t-\pi) - u_{3\pi}(t)h(t-3\pi).$$

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+4)$ obtemos

$$2 = A(s^2+4) + (Bs+C)s = (A+B)s^2 + Cs + 4A$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ & & & & C & = & 0 \\ 4A & & & & & = & 2 \end{array} \right.$$

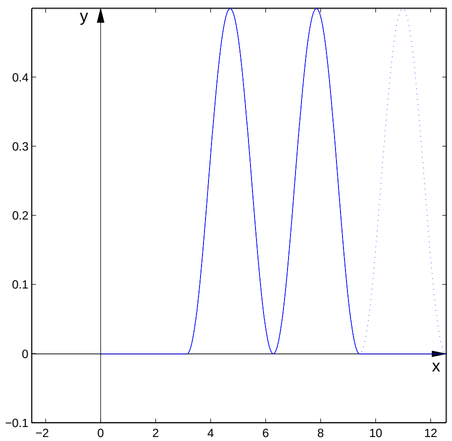
que tem solução $A = 1/2$, $B = -1/2$ e $C = 0$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t$$

$$y(t) = u_\pi(t)h(t-\pi) - u_{3\pi}h(t-3\pi)$$



(o)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = e^{-2\pi s}\cos(2\pi)$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2+1\right)Y(s) = e^{-2\pi s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = u_{2\pi}(t)\,\mathrm{sen}(t-2\pi) + \mathrm{sen}\,t = (u_{2\pi}(t)+1)\mathrm{sen}\,t.$$

(p)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 4Y(s) = G(s)$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$ obtemos

$$\left(s^2 + 4s + 4\right) Y(s) = G(s) + 5 + 2s$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{s^2+4s+4} + \frac{5+2s}{s^2+4s+4} \\ &= \frac{G(s)}{(s+2)^2} + \frac{5+2s}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{5+2s}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

Multiplicando-se por $(s+2)^2$ obtemos

$$5 + 2s = A(s+2) + B = As + (2A + B)$$

Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A & & & = & 2 \\ 2A & + & B & = & 5 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 2$ e $B = 1$. Assim,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (e^{-2t}t * g)(t) + 2e^{-2t} + e^{-2t}t \\ &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)}(t-\tau)g(\tau)d\tau + 2e^{-2t} + e^{-2t}t \end{aligned}$$

2. (a) A equação característica é $r^2 - 6r + 8 = 0$, que tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. A equação homogênea correspondente tem solução geral

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{4t}.$$

Uma solução particular da equação não homogênea é da forma $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$. Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação:

$$(7A - 6B)\cos t + (6A + 7B)\sin t = \sin t$$

De onde obtemos $A = 6/85$ e $B = 7/85$. A solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

$$y'(0) = 0 = \frac{7}{85} + 2c_1 + 4c_2$$

$$y(0) = 0 = \frac{6}{85} + c_1 + c_2$$

$c_1 = -1/10$ e $c_2 = 1/34$.

$$y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t - \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t}$$

(b)

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 6\left(sY(s) - y(0)\right) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 6s + 8\right)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{\left(s^2 - 6s + 8\right)\left(s^2+1\right)}$$

$$\frac{1}{\left(s^2 - 6s + 8\right)\left(s^2+1\right)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Multiplicando-se por $\left(s^2 - 6s + 8\right)\left(s^2+1\right)$ obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= A(s-4)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2-6s+8) \\ &= (A+B+C)s^3 + (-4A-2B-6C+D)s^2 + \\ &\quad +(A+B+8C-6D)s + (-4A-2B+8D) \end{aligned}$$

Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} A & + & B & + & C & & & = & 0 \\ -4A & - & 2B & - & 6C & + & D & = & 0 \\ A & + & B & + & 8C & - & 6D & = & 0 \\ -4A & - & 2B & & & + & 8D & = & 1 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = -1/10$, $B = 1/34$, $C = 6/85$ e $D = 7/85$. Assim,

$$Y(s) \;=\; -\frac{1}{10}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{34}\frac{1}{s-4} + \frac{6}{85}\frac{s}{s^2-1} + \frac{7}{85}\frac{1}{s^2-1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t} + \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t$$

Referências

[1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.

[3] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Makron Books, São Paulo, 3a. edition, 2001.