Métodos Numéricos
Integração Numérica

Renato S. Silva, Regina C. Almeida

Integração Numérica

- se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe F tal que $F'(x) = f(x)$
- assim, $\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$
- pode não ser simples/fácil determinar F

Integração Numérica

- f só é conhecida na forma de tabelas num dado intervalo
- exemplo da fábrica despejando dejetos no leito de um rio

hora	quantidade de poluentes (Kg/hora)
08:00	2
10:00	3
13:00	4
17:00	1

- Solução: integrar numericamente!

Integração Numérica

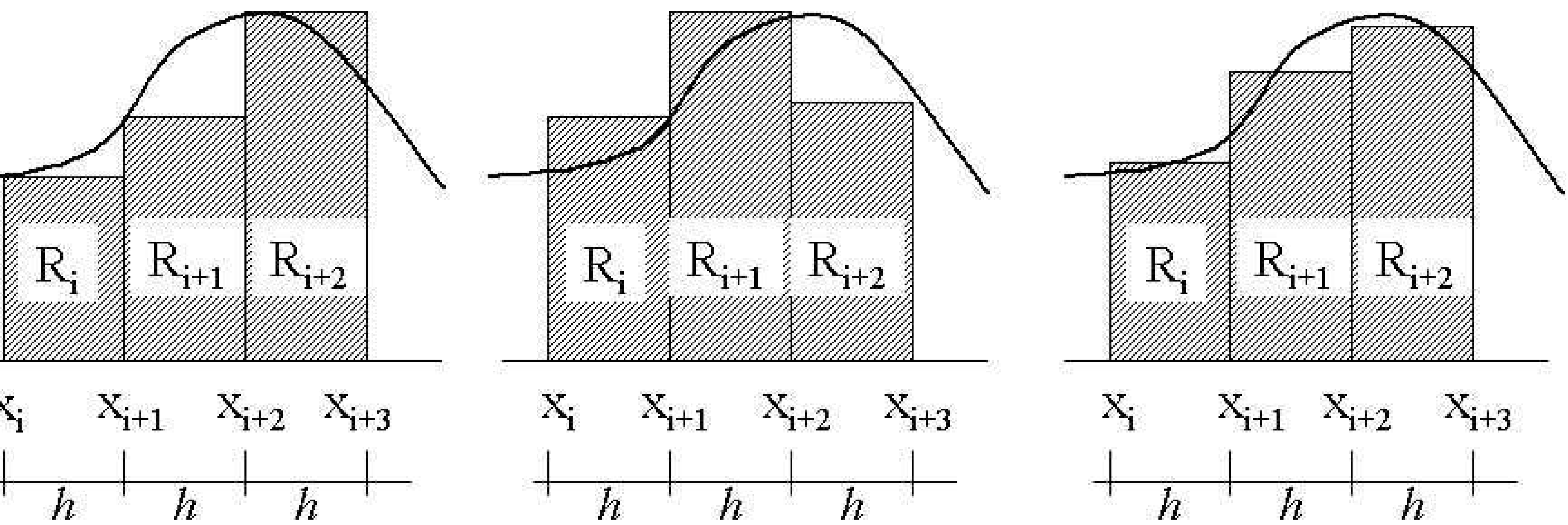
- queremos uma fórmula do tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n)\,,$$

$$x_i \in [a,b]\,, i = 0, 1, \ldots, n$$

- existem muitos métodos. O mais apropriado depende do que se sabe sobre a função f e de onde é possível calculá-la: se um número fixo de pontos é dado (espaçados regularmente ou não) ou se podemos escolhê-los

Regra dos Retângulos



A área do retângulo R_i é:

$$R_i = f(x_i)\ h \qquad R_i = f(x_{i+1})\ h \qquad R_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\ h$$

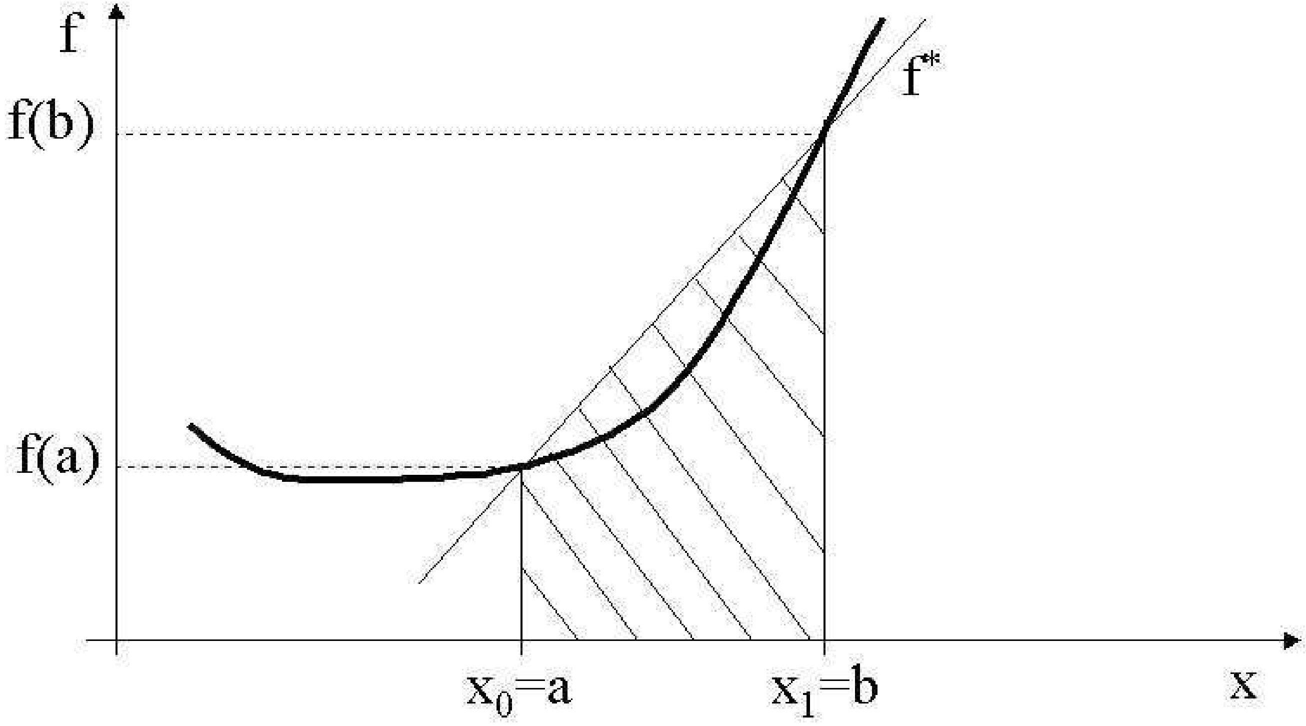
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$I(f) \approx f(a)\,[b-a] \qquad I(f) \approx f(b)\,[b-a] \qquad I(f) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)[b-a]$$

Integração Numérica

- regra dos retângulos:
  - f é aproximada por polinômio de grau zero (constante)
  - a integral, área sobre a curva, é aproximada pela área do retângulo
- regra dos trapézios:
  - f é aproximada por polinômio de grau um (linear)
  - a integral é aproximada pela área do trapézio

Regra do Trapézio



Integração por Polinômios de Lagrange

- interpolação de Lagrange para f em $x_0, \ldots, x_n$ em $[a, b]$ é

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \quad L_i(x_i) = 1 \text{ e } L_i(x_j) = 0, i \neq j$$

- então

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &\approx \int_a^b p(x)\, dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\; dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i) L_i(x)\; dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\; dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\; w_i \end{aligned}$$

- onde w_i é uma constante que depende de $x_0, \ldots, x_n$, a e b, mas **não** de $f(x)$
- w_i pode ser pré-calculado

Integração por Polinômios de Lagrange

- se os pontos forem igualmente espaçados, esta expressão para o cálculo da integral é denominada **fórmula de Newton-Cotes**

Integração por Polinômios de Lagrange

Exemplo: $x_0 = a$ e $x_1 = b$ (dois pontos)

$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \qquad w_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)$$

$$L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad w_1 = \int_a^b L_1(x)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{1} f(x_i)\ w_i = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

Regra do Trapézio Composta

- exemplo da fábrica despejando dejetos no leito de um rio

hora	quantidade de poluentes (Kg/hora)
08:00	2
10:00	3
13:00	4
17:00	1

Regra do Trapézio Composta

i	x_i	$f(x_i) = y_i$	$I_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$
0	0	2	
			$\frac{2-0}{2}[2+3] = 5$
1	2	3	
			$\frac{5-2}{2}[3+4] = 10.5$
2	5	4	
			$\frac{9-5}{2}[4+1] = 10$
3	9	1	
$\sum_{i=0}^{3} I_i =$			$25.5Kg$