Resposta Temporal de Sistemas de Segunda Ordem

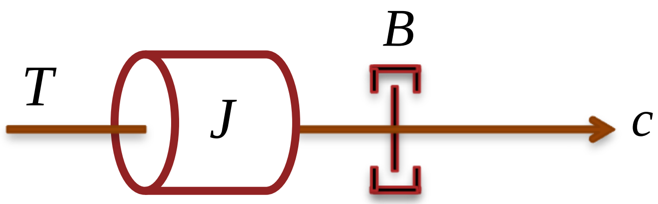
Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas

Sistema de Segunda Ordem

- Consideremos um sistema físico composto por um servomotor que tenha a função de deslocar a **posição angular** de um elemento físico de constante de inércia ***J*** e coeficiente de atrito ***B***.



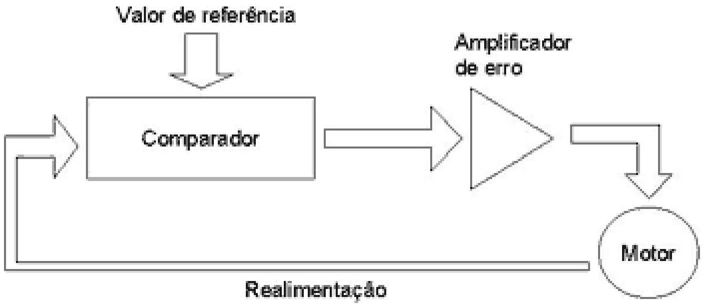
$$J\ddot{c}(t)+B\dot{c}(t)=T$$

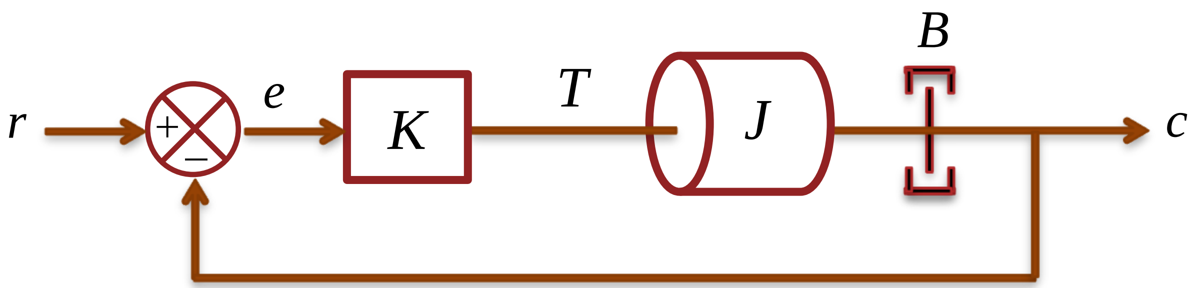
- Aplicando Laplace e isolando a função de transferência:

$$\frac{C(s)}{T(s)}=\frac{1}{s(Js+B)}$$

Sistema de Segunda Ordem

- Agora desejamos controlar a posição de saída ***c*** de acordo com a posição de entrada ***r***.





- A função de transferência em malha fechada será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

Sistema de Segunda Ordem

- Os pólos sistema de 2ª ordem serão:

$$s_1 = -\frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \qquad s_2 = -\frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}$$

- Logo, os pólos de malha fechada são complexos conjugados se $B^2 - 4JK < 0$ e são reais se $B^2 - 4JK \geq 0$.

❖ Forma padrão do sistema de 2ª ordem

- A análise de sistemas de 2ª ordem é feita referenciando-se a equação característica do sistema na forma padrão:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2$$

ω_n Freqüência natural não-amortecida

ζ Coeficiente de amortecimento

Sistema de Segunda Ordem

- Assim, para o sistema em análise:

$$s^2+(B/J)s+(K/J) \Rightarrow \begin{cases} \omega_n=\sqrt{K/J} \\ \zeta=\dfrac{B}{2\sqrt{JK}} \end{cases}$$

- Note que o coeficiente de amortecimento é a relação entre o amortecimento real *B* e o amortecimento crítico B_c:

$$B_c=2\sqrt{JK} \Rightarrow \zeta=\frac{B}{B_c}=\frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

- Assim, para o sistema em análise:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K/J}{s^2+(B/J)s+(K/J)} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

Sistema de Segunda Ordem

- Os pólos do sistema escrito na forma padrão serão dados por:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned}$$

- Note que o comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos dos parâmetros ζ e ω_n , através da análise dos pólos de malha fechada.

Sistema de Segunda Ordem

- Com base nos pólos de malha fechada, teremos:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

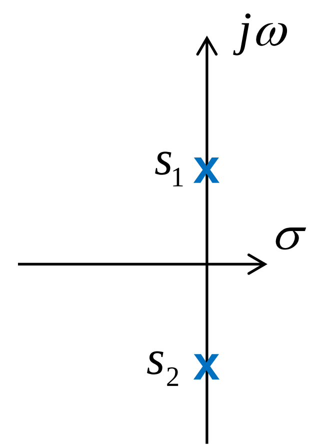
$\zeta = 0$ ⇒ Os pólos de malha fechada são **complexos e conjugados**, porém com **parte real nula**.

$$s_1 = j\omega_n$$

$$s_2 = -j\omega_n$$

⇒

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\;2}}{s^2 + \omega_n^{\;2}}$$



- A resposta impulsiva deste sistema, terá a forma de uma senóide. Logo, a resposta transitória é **oscilatória** e **não decai**.

- Chamaremos este sistema de **oscilatório**.

Sistema de Segunda Ordem

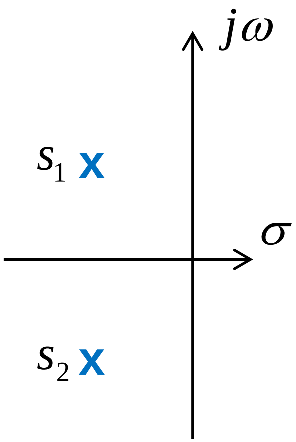
- Com base nos pólos de malha fechada, teremos:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$0 < \zeta < 1$ ⇒ Os pólos de malha fechada são **complexos e conjugados**, com **parte real negativa**.

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$



- A resposta impulsiva deste sistema, terá a forma de uma senóide amortecida. Logo, a resposta transitória é **oscilatória** e **amortecida**.

- Chamaremos este sistema de **subamortecido**.

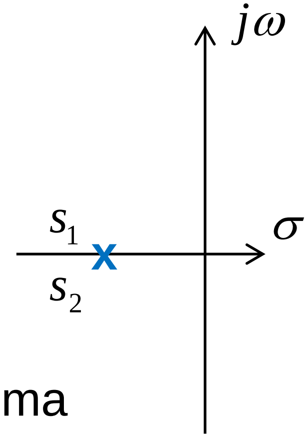
Sistema de Segunda Ordem

- Com base nos pólos de malha fechada, teremos:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad\qquad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\zeta = 1$ ⇒ Os pólos de malha fechada são **reais** e **iguais**.

$$s_1 = -\omega_n \qquad s_2 = -\omega_n \quad \Rightarrow \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{(s + \omega_n)^2}$$



- A resposta impulsiva deste sistema, terá a forma de uma exponencial decrescente. Logo, a resposta transitória **decai** e **não oscila**, porém está no limite de oscilar.
- Chamaremos este sistema de **criticamente amortecido**.

Sistema de Segunda Ordem

- Com base nos pólos de malha fechada, teremos:

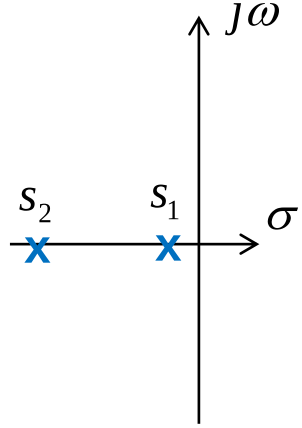
$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad\qquad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\zeta > 1$ ⇒ Os pólos de malha fechada são **reais** e **distintos**.

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

- A resposta impulsiva deste sistema, terá a forma de uma exponencial decrescente. Logo, a resposta transitória **decai** e **não oscila**.

- Chamaremos este sistema de **superamortecido**.



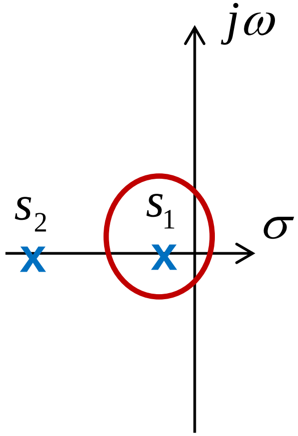
Sistema de Segunda Ordem

- Com base nos pólos de malha fechada, teremos:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\zeta > 1$ ⇒ Os pólos de malha fechada são **reais** e **distintos**.

- Note ainda que este sistema possui pólos com constantes de tempo distintas. A constante de tempo associada ao pólo $\mathbf{s_2}$ é **menor** do que a constante de tempo associada ao pólo $\mathbf{s_1}$.
- Logo, a exponencial associada a s_2 **decairá mais rapidamente** do que a exponencial associada a s_1 e a **velocidade** de resposta dependerá mais consideravelmente da **posição do pólo mais próximo a origem** (**pólo dominante**).



Resposta ao Degrau Unitário

- Considerando a Transformada de Laplace da função degrau unitário:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} \qquad \begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases}$$

- **1º Caso**: $\zeta = 0$ (Sistema oscilatório)

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - j\omega_n)(s + j\omega_n)} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \quad \Rightarrow \quad c(t) = 1 - \cos\omega_n t \qquad \text{para } t \geq 0$$

Resposta ao Degrau Unitário

- **2º Caso:** $0 < \zeta < 1$ (Sistema subamortecido)

$$C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}$$

- Definindo a **freqüência natural amortecida** e a **atenuação** como:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d)}$$

Resposta ao Degrau Unitário

- **2º Caso**: $0 < \zeta < 1$ (Sistema subamortecido)

- Expandindo em frações parciais:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\sigma - j\omega_d)(s+\sigma + j\omega_d)} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} - \frac{\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s+\sigma)^2 + \omega_d^2}$$

- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$c(t) = 1 - e^{-\sigma t}\left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t\right) \quad \text{para } t \geq 0$$

Resposta ao Degrau Unitário

- **2º Caso**: $0 < \zeta < 1$ (Sistema subamortecido)
- O erro estacionário é definido como:

$$e_{ss} = r(t) - c(t)\Big|_{t\to\infty} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = e^{-\sigma t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\Bigg|_{t\to\infty} = 0$$

- A freqüência de oscilação da resposta ao degrau de um sistema com **coeficiente de amortecimento nulo**, é a **própria freqüência natural não amortecida**. Se o sistema linear tiver **algum amortecimento**, será observada a **freqüência natural amortecida**. Caso o coeficiente de amortecimento seja aumentado acima da unidade, a resposta **não oscilará**.

Resposta ao Degrau Unitário

- **3º Caso**: $\zeta = 1$ (Sistema criticamente amortecido)

$$C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s-s_1)(s-s_2)} \quad \begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+\omega_n)^2}$$

- Aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+\omega_n)^2} \quad \Rightarrow \quad c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \quad \text{para } t \geq 0$$

- Note que a resposta **deixa de ser oscilatória**.

Resposta ao Degrau Unitário

- **4º Caso**: $\zeta > 1$ (Sistema superamortecido)

$$C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})}$$

- Expandindo em frações parciais e aplicando Transformada Inversa de Laplace:

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)} e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)} e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

Resposta ao Degrau Unitário

- **4º Caso**: $\zeta > 1$ (Sistema superamortecido)

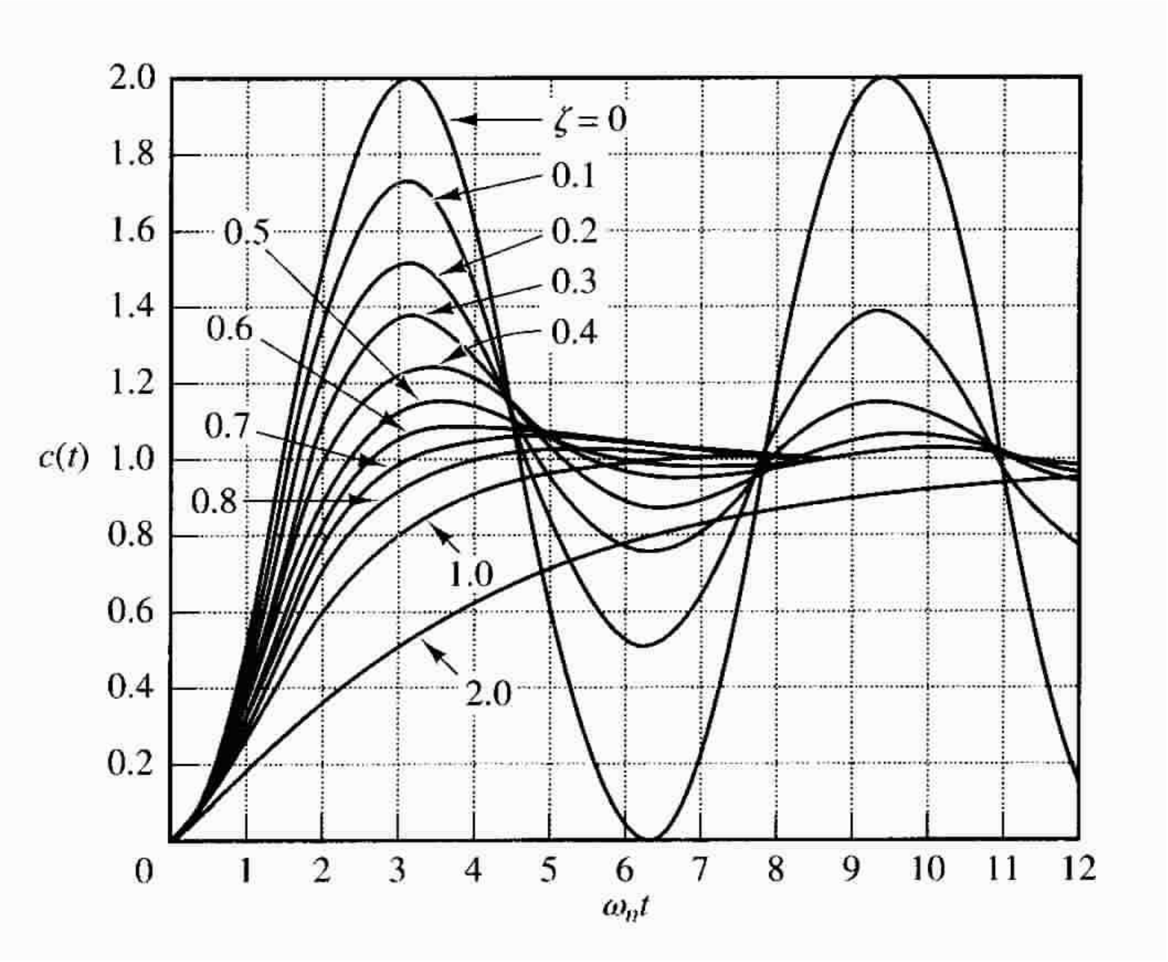
$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}$$

- A resposta inclui dois termos exponenciais decrescentes. Quando o coeficiente de amortecimento for muito maior do que 1, **uma das duas exponenciais decai mais rapidamente** (aquela associada à menor constante de tempo).

- Em projetos de controladores, pode-se simplificar o sistema de segunda ordem para um de primeira ordem considerando apenas o pólo mais significativo (**pólo dominante**).

Resposta ao Degrau Unitário

- A resposta transitória de um sistema de 2ª ordem ao degrau depende, portanto, do **coeficiente de amortecimento**.



Resposta ao Degrau Unitário

- Note que um sistema **subamortecido**, com coeficiente de amortecimento variando entre 0,5 e 0,8, se aproxima mais **rapidamente** do valor final do que um sistema criticamente amortecido ou supermortecido.

- Entre os sistemas que apresentam resposta sem oscilação, um sistema **criticamente amortecido** é o que fornece a resposta mais **rápida**. A resposta de um sistema superamortecido é sempre mais lenta, qualquer que seja o sinal de entrada.

Resposta ao Impulso Unitário

- Considerando a Transformada de Laplace da função impulso unitário:

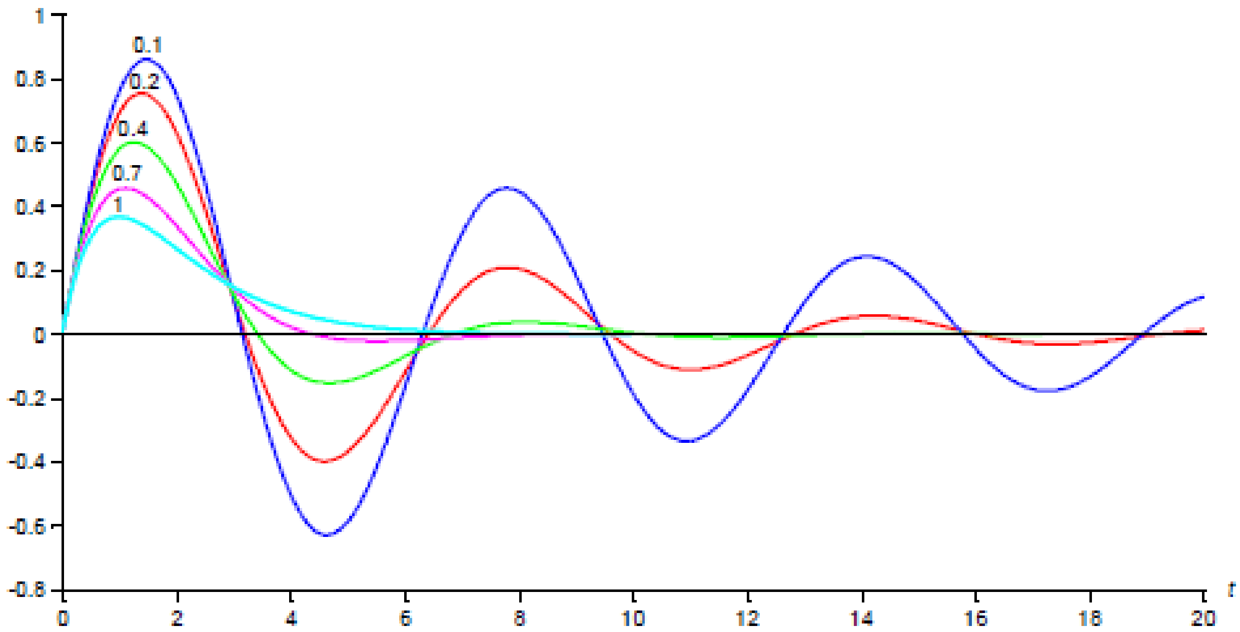
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$R(s) = 1$$

$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} \qquad \begin{cases} s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases}$$

- Para cada valor de coeficiente de amortecimento, a resposta temporal ao impulso unitário pode ser obtida derivando a resposta ao degrau unitário correspondente.

Resposta ao Impulso Unitário



- Para os casos de amortecimento crítico ou superamortecimento, a resposta ao impulso unitário é sempre positiva ou nula. Para o subamortecimento, a resposta oscila em torno do zero até se estabilizar.

Na próxima aula...

Especificações da Resposta Transitória e Sistemas de Ordem Superior

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas