Transformada Z, funções de transferência e diagrama de blocos

Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas
Curso de Engenharia de Computação

Transformada Z

- Enquanto nos sistemas analógicos a estabilidade e resposta transitória dependem do ganho e dos valores dos componentes, nos sistemas com dados amostrados a estabilidade e a resposta transitória dependem também da taxa de amostragem.

- A transformada Z deve levar em consideração a taxa de amostragem e promover a mesma facilidade que a Transformada de Laplace oferece no tratamento das funções de transferência.

- A transformada de Laplace do sinal amostrado ideal é dada por:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Transformada Z

- Fazendo $z = e^{Ts}$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

- A equação acima define a Transformada Z. Assim, é possível, a partir de uma função *f(kT)*, definir uma função *F(z)* e vice-versa (semelhante à Transformada de Laplace no tempo contínuo).

- **Exemplo**: Transformada Z de uma rampa unitária amostrada.
  - Para a rampa unitária: $f(kT) = kT$
  - A saída do amostrador ideal é dada por: $f(t)^* = \sum_{k=0}^{\infty} kT\delta(t - kT)$

Transformada Z

- Aplicando a Transformada de Laplace:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-kTs}$$

- Aplicando a Transformada Z:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k}$$

- Assim, teremos:

$$F(z) = T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = T\left(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots\right)$$

- Multiplicando ambos os membros por *z*:

$$zF(z) = T\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \ldots\right)$$

Transformada Z

- Subtraindo ambos os membros por *F(z)*:

$$zF(z)-F(z)=(z-1)F(z)=T\left(1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\right)$$

- Utilizando a soma da progressão geométrica:

$$1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

- Finalmente a Transformada Z da rampa unitária amostrada pode ser escrita como:

$$F(z)=T\frac{z}{(z-1)^2}$$

- Note que qualquer função amostrada em *s* pode ser convertida em uma função em z.

Transformada Z

	f(t)	F(s)	F(z)	f(kT)
1.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$u(kT)$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	kT
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}
5.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$(-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n e^{-akT}$
6.	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$	$\operatorname{sen} \omega kT$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$	$\cos \omega kT$
8.	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-akT} \operatorname{sen} \omega kT$
9.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-akT} \cos \omega kT$

Transformada Z

	Teorema	Nome
1.	$z\{af(t)\} = aF(z)$	Teorema da linearidade
2.	$z\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z)$	Teorema da linearidade
3.	$z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{aT}z)$	Diferenciação complexa
4.	$z\{f(t - nT)\} = z^{-n}F(z)$	Translação real
5.	$z\{tf(t)\} = -Tz\dfrac{dF(z)}{dz}$	Diferenciação complexa
6.	$f(0) = \lim\limits_{z \to \infty} F(z)$	Teorema de valor inicial
7.	$f(\infty) = \lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1})F(z)$	Teorema de valor final

Transformada Z Inversa

- A obtenção da função amostrada no tempo a partir de sua transformada Z pode ser obtida por dois métodos:
    - (a) Expansão em frações parciais;
    - (b) Método da série de potências (uso computacional).

- Lembre-se de que, como a transformada Z veio de um sinal amostrado, o sinal correspondente no tempo será válido somente nos instantes de amostragem.

- Para fazer um paralelo, note que na Transformada de Laplace, a função no tempo obtida pela transformada inversa era válida apenas para $t \geq 0$.

Transformada Z Inversa

- **Método de Expansão em Frações Parciais**:
  - Quando utilizamos a transformada inversa de Laplace, tínhamos o objetivo de escrever a função em "s" na forma da soma de resíduos em pólos definidos, na forma:

$$\frac{r_i}{s + p_i}$$

  - Fazíamos este artifício, pois conhecíamos a Transformada Inversa desta função e poderíamos escrever seu correspondente no tempo:

$$r_i e^{-p_i t}$$

  - Para a Transformada Z utilizaremos o mesmo princípio, utilizando a relação da função amostrada:

$$e^{-akT} \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Transformada Z Inversa

❖ **Método de Expansão em Frações Parciais**:

- Assim, para determinar a Transformada Z Inversa, devemos escrever a equação em “z” na forma:

$$F(z) = \frac{Az}{z - z_1} + \frac{Bz}{z - z_2} + \ldots$$

- Note que cada z_i substituirá e^{-aT} na transformada inversa, e assim teremos:

$$z_i^{\ k} \leftrightarrow \frac{z}{z - z_i}$$

- Outro ponto importante a lembrar é que quando encontramos os resíduos da função em “s”, não tínhamos “s” no numerador. Assim, para tornar o método válido em “z”, precisamos fazer:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} + \ldots$$

Transformada Z Inversa

- **Método de Expansão em Frações Parciais**:
  - **Exemplo**: Encontre a função no domínio do tempo amostrada:

$$F(z) = \frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}$$

- Inicialmente faremos:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0{,}5}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}$$

- Em seguida, expandimos em frações parciais:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z-0{,}5} + \frac{B}{z-0{,}7}$$

- Cada resíduo será:

$$A = (z-0{,}5)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0{,}5} = -2{,}5 \qquad B = (z-0{,}7)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0{,}7} = 2{,}5$$

Transformada Z Inversa

- **Método de Expansão em Frações Parciais**:
  - **Exemplo**: Encontre a função no domínio do tempo amostrada:

$$F(z)=\frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}$$

- Assim:

$$F(z)=\frac{-2{,}5z}{z-0{,}5}+\frac{2{,}5z}{z-0{,}7}$$

- Aplicando a transformada Z inversa, tem-se que a função no domínio do tempo nos instantes de amostragem é:

$$f(kT)=2{,}5(0{,}7)^k-2{,}5(0{,}5)^k$$

Transformada Z Inversa

- **Método de Expansão em Frações Parciais**:

  - **Exemplo**: Encontre a função no domínio do tempo amostrada:

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-0,5)(z-0,7)}$$

- A função de saída do amostrador ideal é dada como:

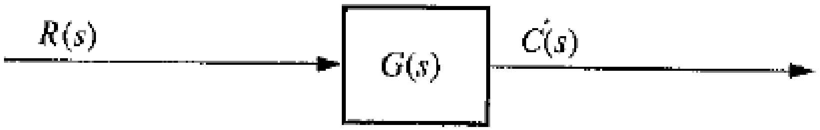
$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[2,5(0,7)^k - 2,5(0,5)^k\right]\delta(t-kT)$$

- As quatro primeiras amostras do sinal serão:

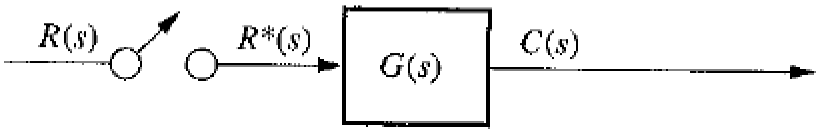
$$f^*(t) = 0\delta(t) + 0,5\delta(t-T) + 0,6\delta(t-2T) + 0,545\delta(t-3T)$$

Função de Transferência

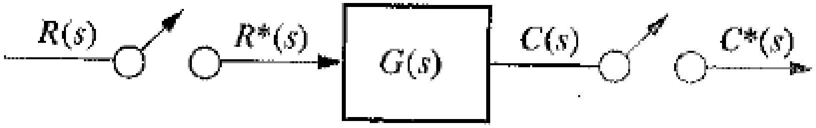
- Considere o seguinte sistema contínuo:



- Se a entrada do sistema for amostrada, a saída ainda será um sinal contínuo.



- Se ficarmos satisfeitos em obter a saída somente nos instantes de amostragem e não entre eles, podemos representar o sistema com a saída amostrada em sincronismo com a entrada, por meio de um amostrador imaginário.



Função de Transferência

- **Função de Transferência Pulsada**:
  - A entrada amostrada para o sistema é dada por:

$$r(t)^* = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT)$$

  - A entrada do sistema é formada por uma série de impulsos. Como a resposta temporal de um impulso é determinada pela própria função de transferência no domínio do tempo, a resposta do sistema, no tempo contínuo, será a soma das respostas ao impulso geradas pela entrada:

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g(t - nT)$$

  - Amostrando o sinal de saída, ou seja, fazendo *t*=*kT*:

$$c(kt) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)g(kT - nT)$$

Função de Transferência

Função de Transferência Pulsada:

- Aplicando a Transformada Z:

$$C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c(kT)z^{-k} \quad \Rightarrow \quad C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)g[(k-n)T]z^{-k}$$

- Fazendo *m* = *k* – *n*:

$$C(z)=\sum_{m+n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)g(mT)z^{-(m+n)}$$

$$\Downarrow$$

$$C(z)=\left\{\sum_{m=0}^{\infty}g(mT)z^{-m}\right\}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)z^{-n}\right\}$$

Função de Transferência

❖ Função de Transferência Pulsada:

- Utilizando o conceito da Transformada Z:

$$C(z) = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m} \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) z^{-n} \right\} \Rightarrow C(z) = G(z)R(z)$$

- Logo, a transformada Z da saída amostrada é o produto da transformada da entrada amostrada pela função de transferência pulsada do sistema;

- **Exemplo**: Dado um z.o.h em cascata com a função de transferência:

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

determinar função de transferência de dados amostrados se o período de amostragem for 0,5s.

Função de Transferência

- **Função de Transferência Pulsada**:
  - A função de transferência do sistema será:

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{s+2}{s+1}$$

  - Fazendo:

$$G(s) = \left(1-e^{-Ts}\right)\frac{s+2}{s(s+1)}$$

  - Substituindo $z = e^{Ts}$ e aplicando a Transformada Z:

$$G(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot T_z\left\{\frac{s+2}{s(s+1)}\right\}$$

  - Utilizando a expansão em frações parciais:

$$\frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ B = -1 \end{array}$$

Função de Transferência

- **Função de Transferência Pulsada**:
  - Aplicando a Transformada de Laplace Inversa:

$$\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1} \Rightarrow 2-e^{-t}$$

  - Amostrando o sinal:

$$2-e^{-t} \Rightarrow 2u(kT)-e^{-kT}$$

  - Aplicando a Transformada Z:

$$T_z\left\{\frac{s+2}{s(s+1)}\right\}=T_z\left\{2u(kT)-e^{-kT}\right\}=2\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}$$

  - Utilizando *T = 0,5seg*:

$$T_z\left\{\frac{s+2}{s(s+1)}\right\}=2\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0{,}607}=\frac{z^2-0{,}213z}{(z-1)(z-0{,}607)}$$

Função de Transferência

- **Função de Transferência Pulsada**:
  - A função de transferência pulsada, em Z, será:

$$G(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot T_z \left\{ \frac{s+2}{s(s+1)} \right\} \Rightarrow G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{z^2 - 0{,}213z}{(z-1)(z-0{,}607)}$$

$$G(z) = \frac{z-0{,}213}{z-0{,}607}$$

- De posse da função de transferência pulsada, podemos encontrar a transformada Z da resposta fazendo:

$$C(z) = G(z)R(z)$$

- A resposta discreta no domínio do tempo pode ser encontrada aplicando a transformada Z inversa.

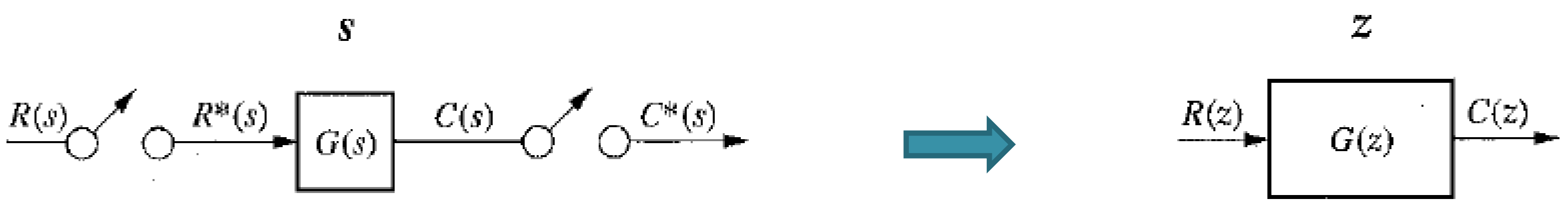
Redução de Diagrama de Blocos

- A redução de diagrama de blocos em sistemas digitais permite que obtenhamos funções de transferência em malha fechada a partir de um arranjo de subsistemas com um computador na malha.

- Deve-se tomar cuidado para não cometer erros ao se ligar com arranjos de funções de transferência em Z:

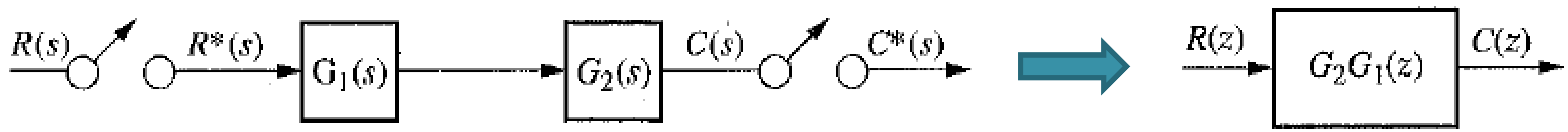
$$T_z\{G_1(s)G_2(s)\} \neq G_1(z)G_2(z)$$

- Considere o seguinte sistema padrão:

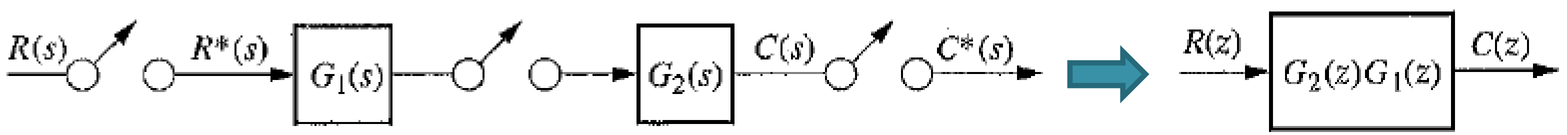


Redução de Diagrama de Blocos

- Se não houver amostrador entre duas funções de transferência, elas se comportam como um bloco único e a função de transferência pulsada deve ser obtida sobre a associação em série de ambas (nunca individualmente):

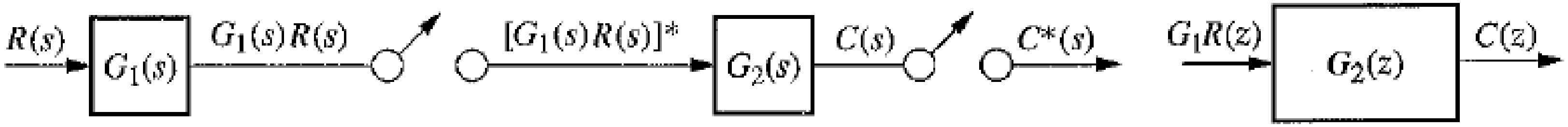


- A associação em série no domínio discreto só é possível se tivermos amostradores entre as duas funções de transferência:



Redução de Diagrama de Blocos

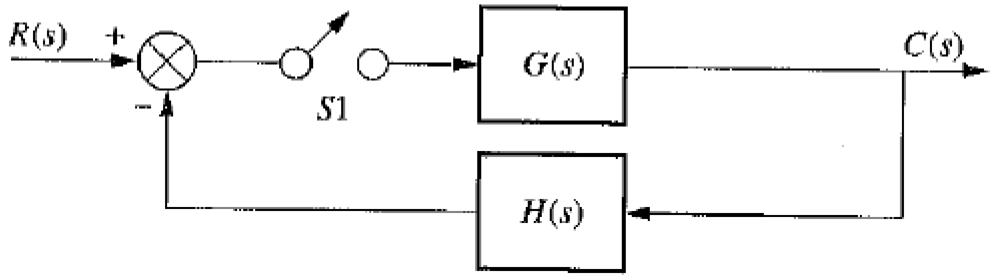
- Uma outra possibilidade é amostrar o sinal de saída de um sistema analógico para aplicação em um sistema digital:



- Utilizando estas formas básicas, podemos obter relações para sistemas digitais com retroalimentação, obtendo a função de transferência pulsada em malha fechada a partir das transformadas Z das funções individuais.

Redução de Diagrama de Blocos

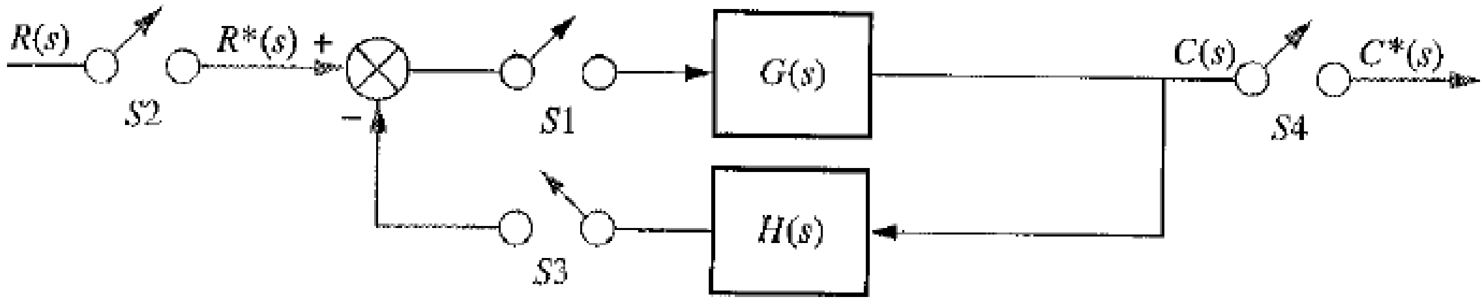
- **Exemplo**: Determine a transformada Z do sistema:



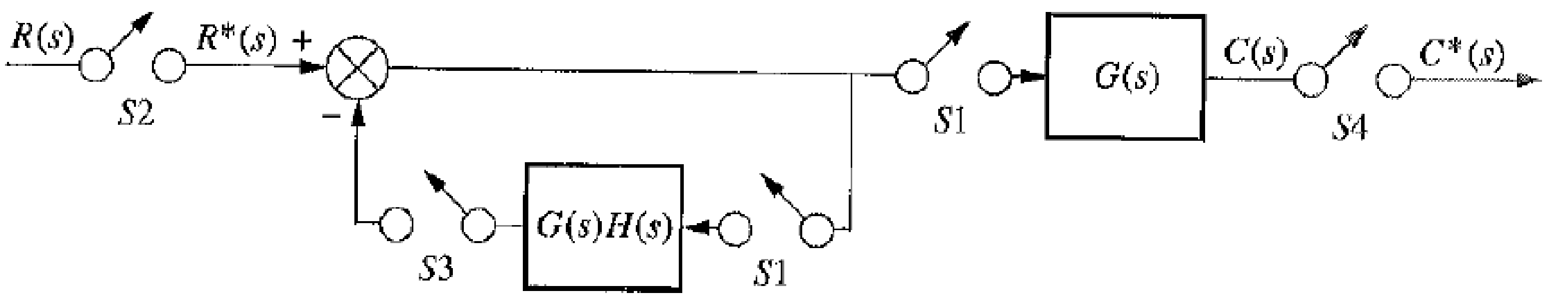
- Uma ação que sempre podemos fazer é colocar um amostrador imaginário na saída de qualquer subsistema que tenha uma entrada amostrada, desde que o sinal de saída não seja entrada analógica de outro bloco.

- Outra medida possível é inserir amostradores imaginários na entrada de blocos somadores cuja saída seja amostrada, tendo em vista que o processo de soma dos sinais é equivalente.

Redução de Diagrama de Blocos



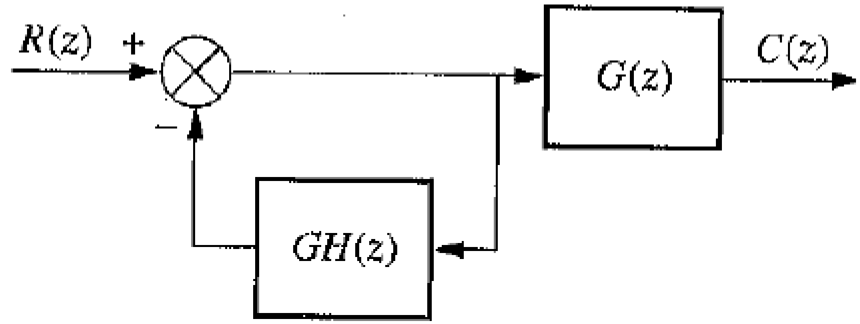
- Note que podemos deslocar o amostrador S1 e o bloco G(s) para a direita do ponto de ramificação:



- Cada função de transferência em “s” possui agora um amostrador na entrada e outro na saída. Assim, em “Z”:

Redução de Diagrama de Blocos

$$T_z\{G(s)H(s)\} = GH(z) \qquad T_z\{G(s)\} = G(z)$$



- Na forma acima, podemos utilizar as simplificações para sistemas retroalimentados discutidas no domínio contínuo. Logo: