Funções de Transferência de Sistemas Elétricos e Servossistemas

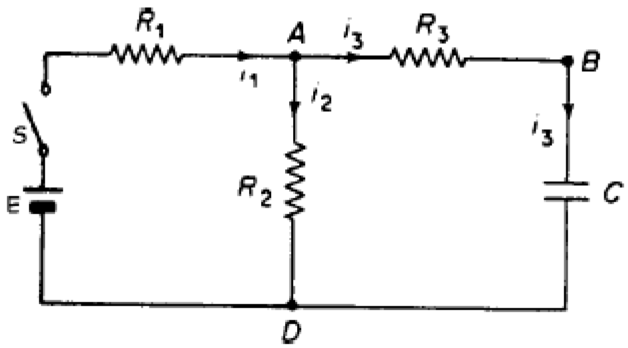
Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas

Modelagem de Sistemas Elétricos

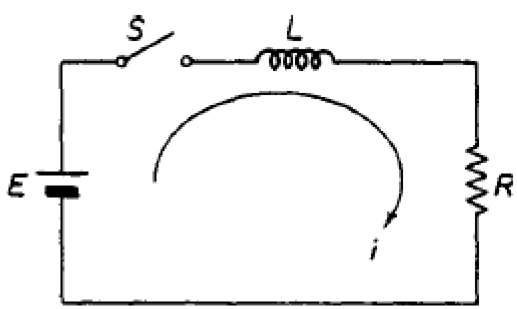
- As leis fundamentais que governam os circuitos elétricos são as leis de **Kirchhoff** das correntes e tensões.
  - **Lei das Correntes (lei dos nós)**: A soma algébrica de todas as correntes que entram e saem de um nó é zero.



$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

- As leis fundamentais que governam os circuitos elétricos são as leis de **Kirchhoff** das correntes e tensões.
  - **Lei das Tensões (lei das malhas)**: A soma algébrica de todas as tensões ao longo da malha de um circuito elétrico é zero.



$$E(t) = v_L(t) + v_R(t)$$

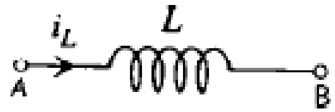
Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Elementos elétricos passivos**:
  - **Resistor**: A queda de tensão é proporcional à **corrente**.

$$v_A(t)-v_B(t)=R\cdot i_R(t) \quad\Rightarrow\quad i_R(t)=\frac{v_A(t)-v_B(t)}{R}$$

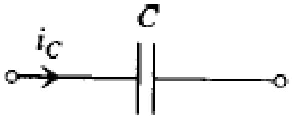
  - **Indutor**: A queda de tensão é proporcional à **variação** de corrente.

$$v_A(t)-v_B(t)=L\cdot\frac{d}{dt}i_L(t) \quad\Rightarrow\quad i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t\left[v_A(t)-v_B(t)\right]dt$$



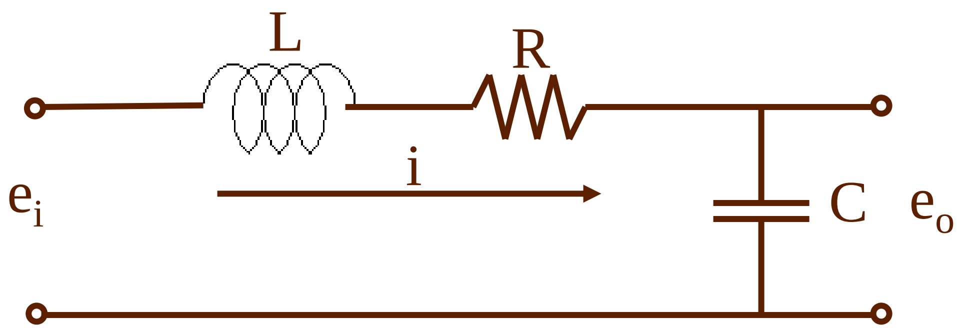
  - **Capacitor**: A queda de tensão é proporcional à **integração** de corrente.

$$v_A(t)-v_B(t)=\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_C(t)dt \quad\Rightarrow\quad i_C(t)=C\frac{d}{dt}\left[v_A(t)-v_B(t)\right]$$



Modelagem de Sistemas Elétricos

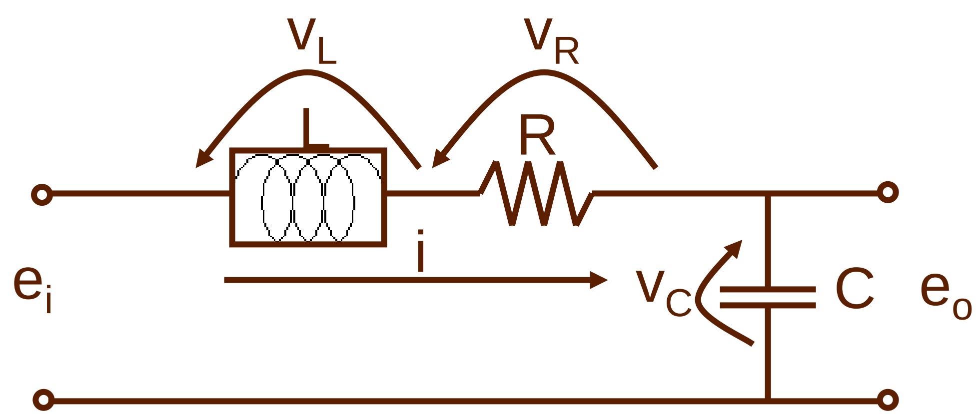
- **Exemplo 1**:
  - Determinar o modelo matemático para o sistema abaixo:



Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 1**:

  - **1º Passo**: Identificar todas as correntes e quedas de tensão presentes no sistema.



  - **2º Passo**: Identificar a entrada e saída e selecionar qual lei aplicar (tensões ou correntes).

Entrada $e_i(t)$

Saída $e_o(t)$

→ **Lei das Malhas**

Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 1**:

  - **3º Passo**: Escrever as equações para cada ramo do circuito elétrico de acordo com a lei escolhida.

$$e_i(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$
$$e_o(t) = v_C(t)$$

  - **4º Passo**: Substituir os sinais pelas relações de cada componente elétrico.

$$v_R(t) = R \cdot i(t) \qquad v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \qquad v_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 1**:
  - **5º Passo**: Escrever as equações diferencial do sistema relacionando entrada e saída.

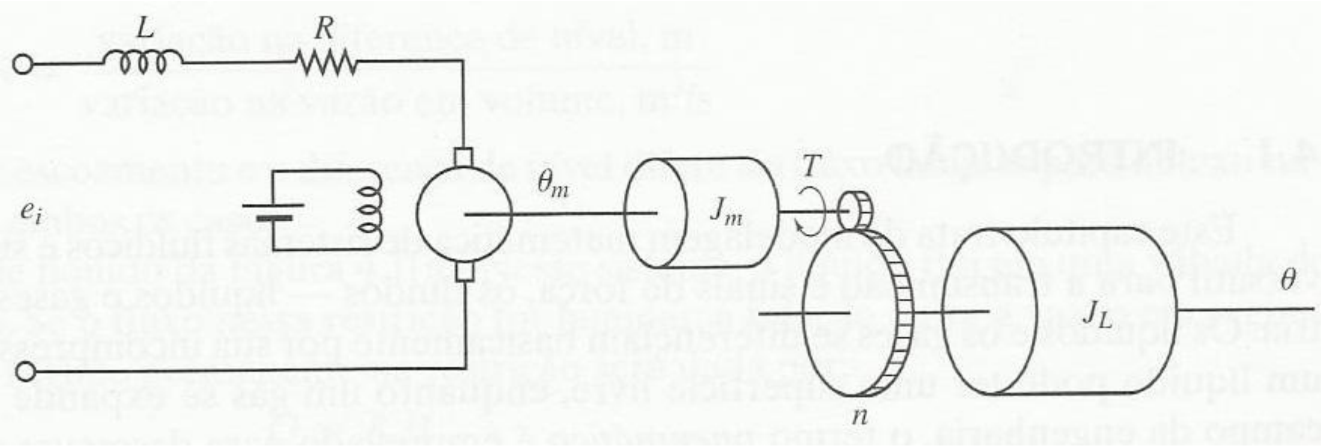
$$LC\ddot{e}_o(t)+RC\dot{e}_o(t)+e_o(t)=e_i(t)$$

  - **6º Passo**: Aplicar a Transformada de Laplace, considerando condições iniciais nulas e escrever a relação entre a saída e entrada do sistema.

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 2**: Servosistema com motor CC.



- **Modelagem do Motor CC**:
  - Para uma corrente de campo constante, o **conjugado** desenvolvido pelo motor é **proporcional** à **corrente** da armadura.

$$T_m(t) = K_T i_a(t)$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 2**: Servosistema com motor CC.

  - **Modelagem do Motor CC**:

    - ✓ Quando a armadura gira, uma **tensão proporcional** ao produto do fluxo pela **velocidade angular** é induzida na armadura. Assim, para um fluxo constante:

$$e_b(t) = K_V \dot{\theta}_m(t)$$

  - **Modelagem do Sistema Mecânico de Rotação**:

$$\frac{\Theta_L(s)}{T_m(s)} = \frac{1/n}{\left(1/n^2 \, J_m + J_L\right)s^2 + \left(1/n^2 \, b_m + b_L\right)s} \Rightarrow \frac{\Theta_L(s)}{T_m(s)} = \frac{1/n}{J_{eq_L} s^2 + b_{eq_L} s}$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 2**: Servosistema com motor CC.

  - **Lei das Tensões para o Motor CC**:

$$e_i(t) = L\dot{i}_a(t) + Ri_a(t) + e_b(t)$$

  - **Aplicando as equações do modelo do motor CC**:

$$T_m(t) = K_T i_a(t)$$

$$e_b(t) = K_V \dot{\theta}_m(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{K_T}\dot{T}_m(t) + \frac{R}{K_T}T_m(t) = e_i(t) - K_V\dot{\theta}_m(t)$$

  - **Aplicando Laplace com condições iniciais nulas**:

$$T_m(s) = \left(\frac{K_T}{Ls+R}\right)\cdot\left[E_i(s) - K_V s\Theta_m(s)\right]$$

Modelagem de Sistemas Elétricos

- **Exemplo 2**: Servosistema com motor CC.
  - **Substituindo no modelo mecânico de rotação**:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_i(s)} = \frac{K_T/n}{s\left(J_{eq_L}s + b_{eq_L}\right)\left(Ls + R\right) + K_T K_V s}$$

Na próxima aula...

Diagrama de Blocos

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas