Estabilidade de Sistemas

Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas

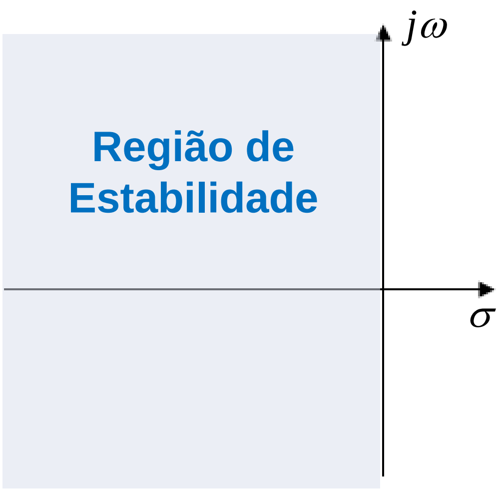
Análise da Estabilidade Absoluta

- A **estabilidade** de um sistema linear de malha fechada pode ser determinada a partir da **localização dos pólos** de malha fechada no *plano-s*.

- Relembrando...

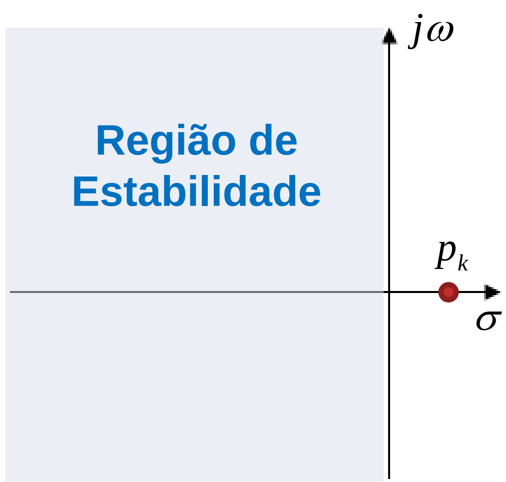
$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s+p_i} \quad \Longrightarrow \quad c(t) = a + \sum_{i=1}^{n} r_i e^{-p_i t}$$

- Se todos os pólos estiverem localizados no semiplano **esquerdo** do *plano-s*, ou seja, se todos tiverem parte real negativa, a exponencial correspondente que representa a resposta temporal será **decrescente** e tenderá a **zero** com o passar do tempo.



Análise da Estabilidade Absoluta

- Se qualquer um dos pólos de malha fechada estiver no semiplano **direito** do *plano-s*, então, com o decorrer do tempo, eles darão origem ao modo dominante e resposta transitória **aumentará** monotonicamente ou oscilará com amplitude **crescente**.



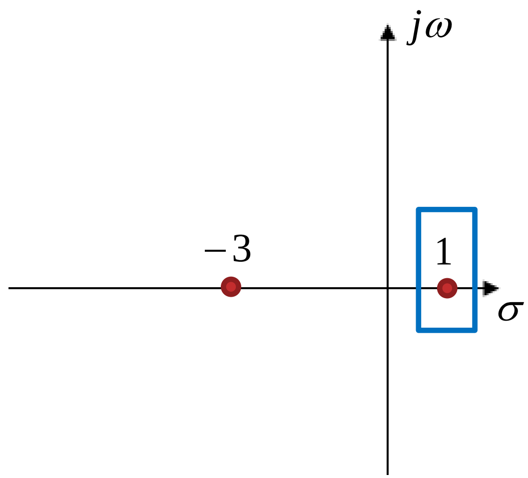
$$c(t) = a + \sum_{i=1}^{k-1} r_i e^{-p_i t} + \boxed{r_k e^{p_k t}} + \sum_{i=k+1}^{n} r_i e^{-p_i t}$$

- Logo, para garantir a **estabilidade** é necessário que todos os pólos de malha fechada estejam localizados no semiplano **esquerdo** do *plano-s*.

Análise da Estabilidade Absoluta

- **Exemplo**: Analise a estabilidade do sistema cuja função de transferência em malha fechada é dada abaixo.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s - 3}$$



Sistema instável

Análise da Estabilidade Absoluta

- A estabilidade ou instabilidade de um sistema linear é propriedade do **próprio sistema** e **não depende da entrada**. Os pólos da entrada contribuem somente para os termos da resposta em **regime permanente**.

$$C(s)=\boxed{\frac{a}{s}}+\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s+p_i}}$$

Pólo da entrada

Pólos do sistema

- O problema da estabilidade absoluta pode ser resolvido prontamente pela escolha dos pólos de malha fechada no semiplano esquerdo do plano-s.

Critério de Estabilidade de Routh

- A análise de estabilidade a partir da localização dos pólos de malha fechada no *plano-s* tem um **inconveniente**: É necessário **fatorar** o polinômio denominador para encontrar os pólos de malha fechada !

- O critério de estabilidade de Routh nos possibilita determinar o **número de pólos** de malha fechada que se situam no **semiplano direito** do plano-s, sem ter que fatorar o polinômio do denominador.

- Vamos analisar um sistema com a seguinte função de transferência em malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Critério de Estabilidade de Routh

- Pelo critério de estabilidade de Routh, as informações sobre a estabilidade absoluta podem ser obtidas diretamente a partir dos **coeficientes da equação característica**.

  - **Passo 1**: Escreva o polinômio da equação característica da seguinte maneira:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

  - **Passo 2**: Verifique se todos os coeficientes da equação característica **existem** e se todos têm **sinais positivos** (condição necessária, mas não suficiente).

    - Se algum dos coeficientes for zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então existirá uma ou várias raízes imaginárias ou que tenham partes reais positivas.

Critério de Estabilidade de Routh

- **Passo 3**: Se todos os coeficientes forem positivos, organize-os em linhas e colunas conforme abaixo:

$$
\begin{array}{lccccc}
s^n & \boxed{a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots} \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Coeficientes do polinômio característico

$$
\left\{
\begin{array}{l}
b_1 = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\[2ex]
b_2 = \dfrac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\[2ex]
b_3 = \dfrac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\[2ex]
\ldots
\end{array}
\right.
$$

Critério de Estabilidade de Routh

- **Passo 3**: Se todos os coeficientes forem positivos, organize-os em linhas e colunas conforme abaixo:

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
c_1 = \dfrac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\
c_2 = \dfrac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\
c_3 = \dfrac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\
\dots
\end{array}
\right.
$$

Critério de Estabilidade de Routh

- **Passo 3**: Se todos os coeficientes forem positivos, organize-os em linhas e colunas conforme abaixo:

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
d_1 = \dfrac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\
d_2 = \dfrac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \\
d_3 = \dfrac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1} \\
\dots
\end{array}
\right.
$$

Critério de Estabilidade de Routh

- **Passo 3**: Se todos os coeficientes forem positivos, organize-os em linhas e colunas conforme abaixo:

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$
\left\{ g_1 = \frac{f_1 e_2 - e_1 \cdot 0}{f_1} \right.
$$

Critério de Estabilidade de Routh

$$
\begin{array}{c|cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

- O critério de estabilidade de Routh afirma que o número de raízes com **partes reais positivas** é igual ao número de **mudanças no sinal** dos coeficientes da primeira coluna da matriz.
- Note que durante o procedimento uma linha inteira pode ser dividida ou multiplicada por um número positivo, de modo que simplifique os cálculos numéricos subseqüentes, sem alterar a conclusão sobre a estabilidade.

Critério de Estabilidade de Routh

- **Exemplo**: Analise a estabilidade do sistema cuja função de transferência em malha fechada é dada abaixo.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

- ✓ A primeira condição foi satisfeita: Todos os coeficientes **existem** e são **positivos** !
- ✓ Mas... Pelo critério de estabilidade de Routh:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \;\; (\div 2) \\ s^2 & b_1 & b_2 & \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & d_1 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & b_1 & b_2 & \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & d_1 & & \end{array}$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 &= \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{1} = 1 \\ b_2 &= \frac{1 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{1} = 5 \end{aligned} \right.$$

Critério de Estabilidade de Routh

- **Exemplo**: Analise a estabilidade do sistema cuja função de transferência em malha fechada é dada abaixo.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

  - ✓ A primeira condição foi satisfeita: Todos os coeficientes **existem** e são **positivos** !
  - ✓ Mas... Pelo critério de estabilidade de Routh:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & b_1 & b_2 & \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & d_1 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & d_1 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{1} = -3 \\ d_1 = \dfrac{5 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{5} = 5 \end{cases}$$

Critério de Estabilidade de Routh

- **Exemplo**: Analise a estabilidade do sistema cuja função de transferência em malha fechada é dada abaixo.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

  - ✓ A primeira condição foi satisfeita: Todos os coeficientes **existem** e são **positivos** !
  - ✓ Mas... Pelo critério de estabilidade de Routh:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & c_1 & & \\ s^0 & d_1 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} s^4 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ s^3 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ s^2 & \boxed{1} & 5 & \\ s^1 & \boxed{-3} & & \\ s^0 & \boxed{5} & & \end{array}$$

Existem **duas** raízes com partes reais positivas. Logo, o sistema é **instável** !

Critério de Estabilidade de Routh

- **Casos Especiais**

  - Se **um termo** na primeira coluna de qualquer linha for **nulo**, mas os termos restantes **não forem nulos ou não existirem**, então o termo nulo será substituído por um **número positivo muito pequeno**.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & \boxed{\varepsilon} & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

  - O sinal do coeficiente acima de ε é o mesmo do coeficiente abaixo, indicando que existe um **par de raízes imaginárias**.

Critério de Estabilidade de Routh

- **Casos Especiais**

  - Se **um termo** na primeira coluna de qualquer linha for **nulo**, mas os termos restantes **não forem nulos ou não existirem**, então o termo nulo será substituído por um **número positivo muito pequeno**.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 - 3s + 2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lcc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & \varepsilon & 2 \\ s^1 & -3 - 2/\varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

  - Ocorreram duas mudanças de sinal, logo o sistema possui dois pólos no semiplano direito do plano-s.

Critério de Estabilidade de Routh

- ## Casos Especiais

  - Se **todos** os coeficientes em uma linha calculada forem **nulos**, isso indica que há raízes de um **mesmo valor radialmente opostas**. Elas podem ser reais de sinais opostos (instável) ou imaginárias de sinais opostos (oscilatório).

  - Neste caso pode-se continuar o cálculo do resto da matriz, formando-se um **polinômio auxiliar** a partir da derivada do polinômio da linha anterior.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

Critério de Estabilidade de Routh

- **Casos Especiais**

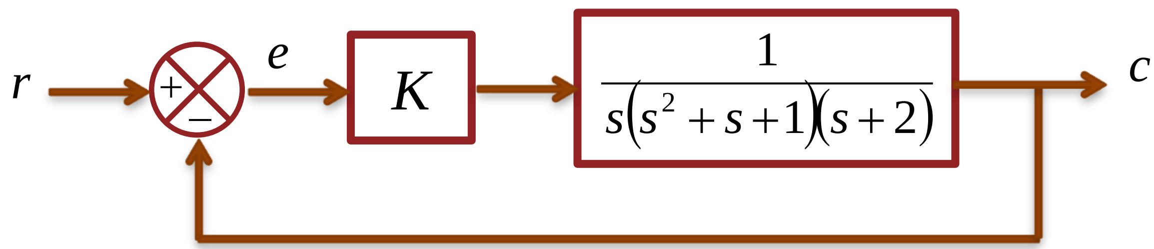
  - Se **todos** os coeficientes em uma linha calculada forem **nulos**, isso indica que há raízes de um **mesmo valor radialmente opostas**. Elas podem ser reais de sinais opostos (instável) ou imaginárias de sinais opostos (oscilatório).

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{llll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112{,}7 & & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

  - O sistema possui uma raiz com parte real positiva, sendo **instável**.

Critério de Estabilidade de Routh

- O critério de Routh pode ser utilizado para determinar o limite de variação de parâmetros de forma a manter o sistema estável.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & K \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & 7/3 & K & \\
s^1 & 2-\frac{9}{7}K & & \\
s^0 & K & &
\end{array}$$

- Para que o sistema seja estável: $0 < K < \dfrac{14}{9}$

Na próxima aula...

Erros Estacionários

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas