Funções de Transferência de Sistemas Mecânicos

Prof. Nilo Rodrigues

Sistemas de Controle e Automação

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas

Modelagem de Sistemas Mecânicos

- A lei fundamental que governa os sistemas mecânicos é a **segunda Lei de Newton**.

$$ma = \sum F$$

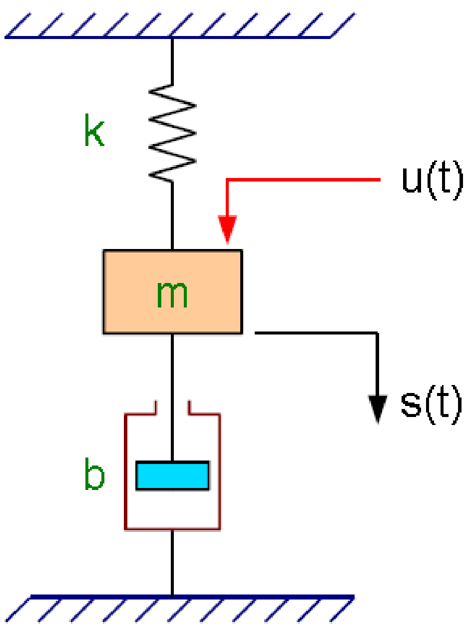
- **Sistema Massa-Mola-Amortecedor**:

  - **Mola**: A força exercida por uma mola é proporcional à **deformação** da mesma.

$$F_m(t) = k \cdot s(t)$$

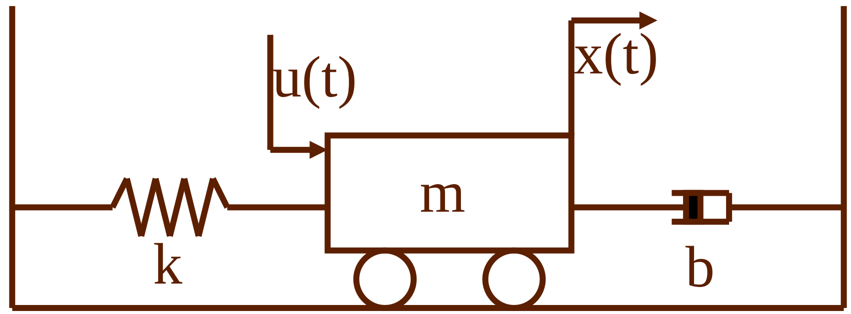
  - **Amortecedor**: A força exercida pelo amortecedor é proporcional à **velocidade** da haste do pistão.

$$F_a(t) = b \cdot \frac{d}{dt} s(t) = b \cdot \dot{s}(t)$$

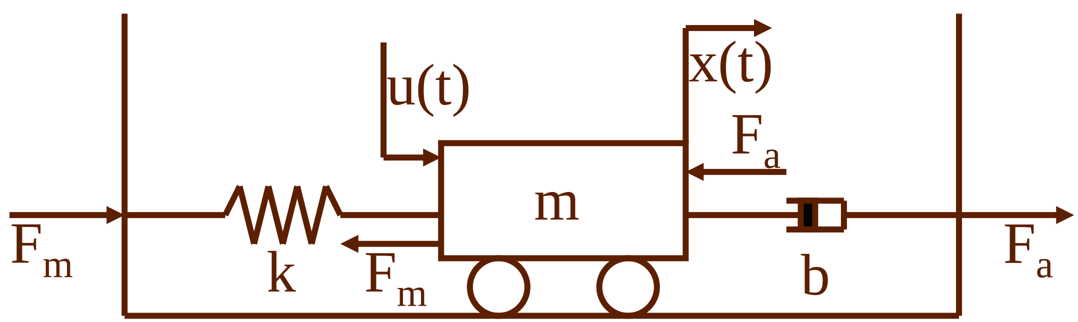


Modelagem de Sistemas Mecânicos

- **Exemplo 1**:
  - Determinar a função de transferência do sistema abaixo:



  - **1º Passo**: Determinar quais forças atuam no sistema.



Modelagem de Sistemas Mecânicos

- **Exemplo 1**:

  - **2º Passo**: Escrever o balanço das forças que agem sobre o sistema de interesse.

$$F_R = u(t) - F_m - F_a$$

  - **3º Passo**: Escrever as equações diferenciais associadas a cada elemento físico que compõe o sistema.

$$F_m(t) = k \cdot x(t)$$

$$F_a(t) = b \cdot \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \quad F_R = u(t) - kx(t) - b\dot{x}(t)$$

  - **4º Passo**: Aplicar a 2ª Lei de Newton.

$$m\ddot{x}(t) = u(t) - kx(t) - b\dot{x}(t)$$

Modelagem de Sistemas Mecânicos

- **Exemplo 1**:

  - **5º Passo**: Aplicar a Transformada de Laplace considerando as condições iniciais nulas.

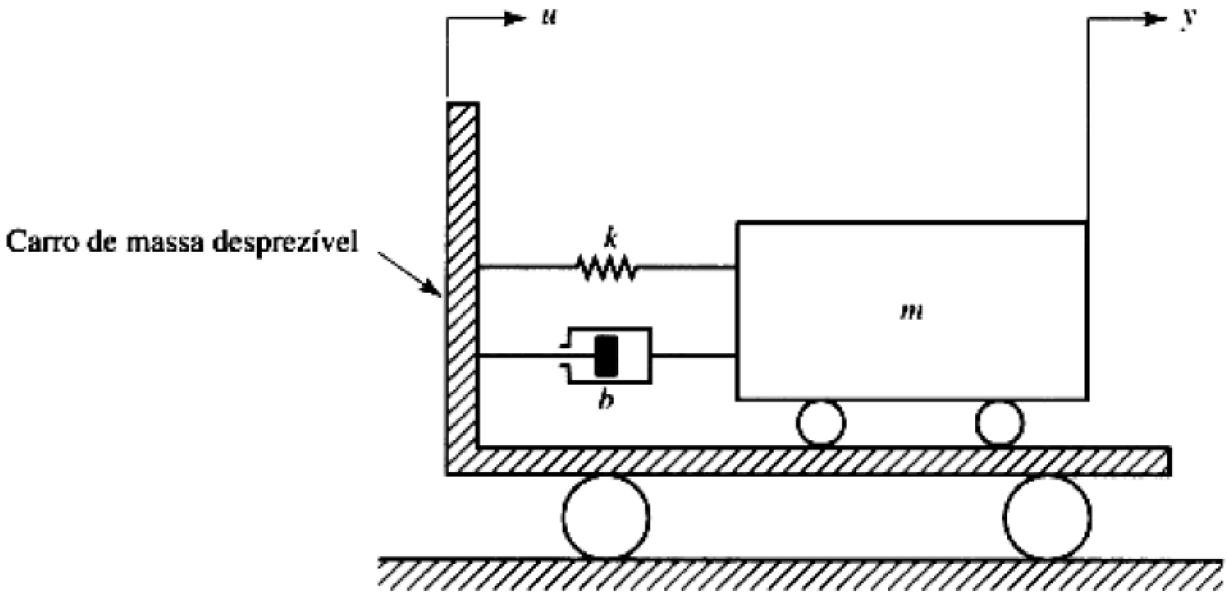
$$m\ddot{x}(t) = u(t) - kx(t) - b\dot{x}(t) \quad \Rightarrow \quad ms^2X(s) = U(s) - kX(s) - bsX(s)$$

  - **6º Passo**: Escrever a relação entre a saída e entrada do sistema.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Modelagem de Sistemas Mecânicos

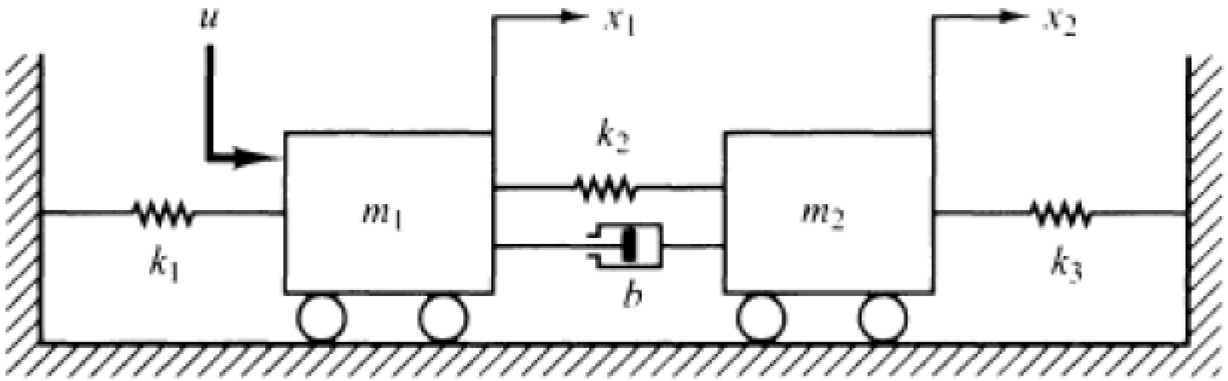
- **Exemplo 2**:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b/_m\, s + k/_m}{s^2 + b/_m\, s + k/_m}$$

Modelagem de Sistemas Mecânicos

- **Exemplo 3**:



$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$

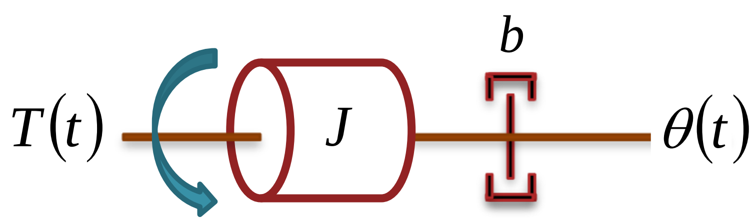
$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$

Sistemas Mecânicos de Rotação

- A lei fundamental que governa os sistemas mecânicos de rotação também é a **segunda Lei de Newton**, aplicada ao **torque**.

$$J\ddot{\theta}(t) = \sum T$$

- **Sistema Massa Girante com Atrito**:



$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs}$$

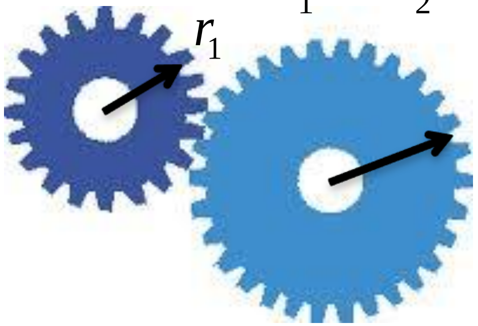
  - **Atrito**: O torque de resistência exercido pelo atrito no eixo é proporcional à **velocidade angular** do eixo.

$$T_b(t) = b \cdot \frac{d}{dt}\theta(t) = b \cdot \dot{\theta}(t)$$

Sistemas Mecânicos de Rotação

- **Sistema com Engrenagens**:
  - A **velocidade linear** de cada eixo é a mesma.

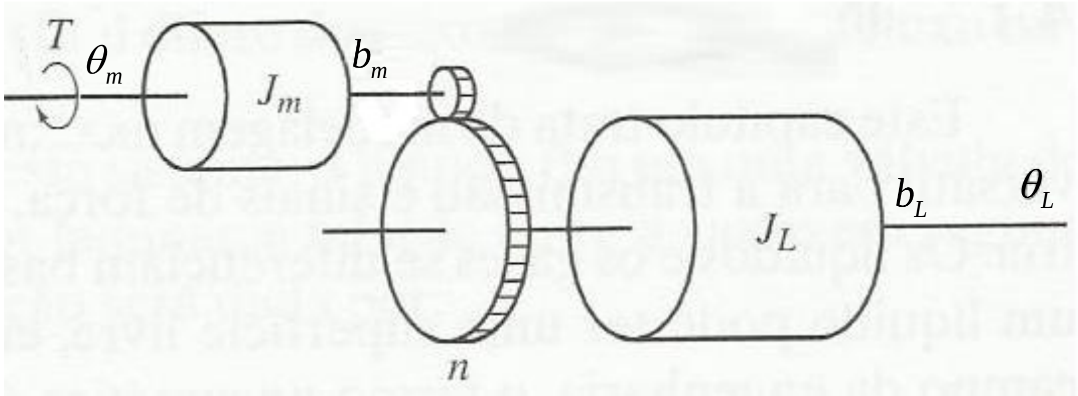
$$\theta_2 = n\theta_1$$



  - A **força** no encontro de cada eixo é a mesma.

$$T_{21} = nT_{12}$$

  - **Exemplo**:



Sistemas Mecânicos de Rotação

- **Sistema com Engrenagens**:
  - **Exemplo**:

$$\frac{\Theta_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{\left(J_m + n^2 J_L\right)s^2 + \left(b_m + n^2 b_L\right)s}$$

  - **Observações**:
    - ✓ A função de transferência está referenciada ao **eixo-m**. Logo, a saída será a posição angular do **motor**.
    - ✓ Se quisermos a FT em termos da posição angular da **carga**, basta utilizar: $\theta_m = \frac{1}{n}\theta_L$

$$\frac{\Theta_L(s)}{T(s)} = \frac{1/n}{\left(1/n^2\, J_m + J_L\right)s^2 + \left(1/n^2\, b_m + b_L\right)s}$$

Sistemas Mecânicos de Rotação

- **Sistema com Engrenagens**:
  - **Observações**:
    - ✓ Podemos identificar o momento de inércia e coeficiente de atrito viscoso **equivalentes**, referenciados a qualquer dos eixos:

Momento de Inércia e coeficiente de atrito do motor referenciado à carga ➡

$$J_{mL} = \frac{1}{n^2} J_m \qquad b_{mL} = \frac{1}{n^2} b_m$$

Momento de Inércia e coeficiente de atrito da carga referenciada ao motor ➡

$$J_{Lm} = n^2 J_L \qquad b_{Lm} = n^2 b_L$$

Na próxima aula...

Funções de Transferência de Sistemas Elétricos e Servossistemas

Prof. Nilo Rodrigues

Universidade de Fortaleza
Centro de Ciências Tecnológicas