TRANSFORMADAS DE FOURIER

Definição: É a transformação que leva uma imagem a ser representada no domínio da freqüência. Isto é possível porque uma imagem pode ser decomposta em funções senos e cossenos com diferentes freqüências e amplitudes. A vantagem principal de se trabalhar no domínio da freqüência é que a convolução de duas funções no domínio espacial pode ser transformada em multiplicação no domínio da freqüência.

1 – A Transformada de Fourier Contínua

A T.F. de uma função unidimensional f(t) é definida como

$$\Im\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j2\pi.s.t}dt \qquad (1)$$

onde $j^2 = -1$. A Transformada Inversa de Fourier (T. I. F.) é

$$\Im^{-1}\{F(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(s).e^{j2\pi.s.t}ds \qquad (2)$$

A única diferença entre a T.F. e a T. I. F. é o sinal do expoente.

Exemplo: A T. F. de uma Gaussiana

$$f(t) = e^{-\pi.t^2}$$

$$F(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi.t^2}.e^{-j2\pi.s.t}dt$$

ou

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi.(t^2+j.2.s.t)}dt$$

Multiplicando o lado direito por $e^{-\pi.s^2}.e^{\pi.s^2}$ = 1, produz

$$F(s) = e^{-\pi.s^2}.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi.(t+j.s)^2}dt$$

e fazendo u = t + j.s   du = dt

$$F(s) = e^{-\pi.s^2}.\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi.u^2}\,du = 1\right]$$

$$\Rightarrow F(s) = e^{-\pi.s^2}$$

$\boxed{f(t) \Leftrightarrow F(s)}$ par da T. F.

2) A Transformada de Fourier Discreta (T. F. D.)

$$\mathrm{F_n} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{f_i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.2.\pi.\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{N}}\mathrm{n}} \qquad (3)$$

A inversa da T.F.D. é

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{j.2.\pi.\frac{i}{N}n} \qquad (4)$$

onde $0 \le i, n \le N-1$ são índices. f_i é uma seqüência de comprimento N, obtida através de amostragem da função contínua em intervalos iguais.

3) A Transformada Rápida de Fourier (F.F.T.)

O número de multiplicações e adições necessárias para implementar (3) e (4) é da ordem de $O(N^2)$.
Existe uma classe de algoritmos chamada de FFT que reduz substancialmente esse esforço. Implementa-se o algoritmo fazendo-se $N = 2^p$, onde p é um inteiro. A equação (3) pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{0,0} & \cdots & W_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N-1,0} & \cdots & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ou $\vec{F} = \mathscr{W}.\ \vec{f}$

onde os termos de $\mathscr{W}$ são

$$\boxed{W_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j.2.\pi.\frac{n.i}{N}}}$$

Como a função exponencial é periódica no produto de *n* e *i*, há boa simetria em $\mathscr{W}$. Essa matriz pode ser fatorada em um produto de *p* matrizes N x N, que contêm valores repetidos, incluindo zeros e um.
Portanto, o fator pelo qual a FFT reduz o esforço computacional é

$$\frac{N^2}{p.N} = \frac{N^2}{N.\log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}$$

Para N = 1024 ==> p = 10 e $\frac{N}{\log_2 N} \cong 102{,}4$

4) Transformadas de Fourier de funções usuais

Função	**f(t)**	**F(s)**
Gaussiana	$e^{-\pi.t^2}$	$e^{-\pi.s^2}$
Pulso Retangular	$\Pi(t)$	$\frac{\text{sen}(\pi.s)}{\pi.s}$
Pulso Triangular	$\Lambda(t)$	$\frac{\text{sen}^2(\pi.s)}{(\pi.s)^2}$
Impulso	$\delta(t)$	1
Degrau Unitário	u(t)	$\frac{1}{2}.\left[\delta(s) - \frac{j}{\pi.s}\right]$
Cosseno	$\cos(2.\pi.f.t)$	$\frac{1}{2}.[\delta(s+f) - \delta(s-f)]$
Seno	$\text{sen}(2.\pi.f.t)$	$\text{j}.\frac{1}{2}.[\delta(s+f) - \delta(s-f)]$
Exponencial Complexa	$e^{j.2\pi.f.t}$	$\delta(s-f)$

5) Propriedades da T. F. (Algumas)

a) Par ou Impar

Uma função $f_e(t)$ é par se e somente se

$$f_e(t) = f_e(-t)$$

e uma função é ímpar se e somente se

$$f_o(t) = - f_o(-t)$$

Uma função que não seja nem par nem ímpar pode ser quebrada em duas componentes pares e ímpares, respectivamente, por

$$f_e(t) = \frac{1}{2}.\left[f(t) + f(-t)\right]$$

e

$$f_o(t) = \frac{1}{2}.\left[f(t) - f(-t)\right]$$

onde

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \qquad (6)$$

Este efeito na TF pode ser analisado como abaixo:

$$e^{j.x} = \cos(x) + j.\mathrm{sen}(x) \qquad \text{(Relação de Euler)}$$

Da eq. (1)

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j2\pi.s.t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\cos(2\pi.s.t).dt - j.\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\mathrm{sen}(2\pi.s.t).dt$$

e expressando a eq. acima como em (6)

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t).\cos(2\pi.s.t).dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t).\cos(2\pi.s.t).dt - j.\int_{-\infty}^{\infty} f_e(t).\mathrm{sen}(2\pi.s.t).dt$$
$$- j.\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t).\mathrm{sen}(2\pi.s.t).dt$$

O segundo e terceiro termos são integrais infinitas com multiplicação de duas funções ímpar e par, o que resulta em zero. Logo,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t).\cos(2\pi.s.t).dt - j.\int_{-\infty}^{\infty} f_o(t).\mathrm{sen}(2\pi.s.t).dt$$

$$F(s) = F_e(s) + j.F_o(s)$$

$$\Rightarrow \Im[f(t)] = \Im[f_e(t) + f_o(t)] = F_e(s) + j.F_o(s) \quad ,$$

onde $f_e(t) = \frac{1}{2}.[f(t) + f(-t)]$ e $f_o(t) = \frac{1}{2}.[f(t) - f(-t)]$

b) O Teorema da Adição

Se $\Im[f(t)] = F(s)$ e $\Im[g(t)] = G(s)$

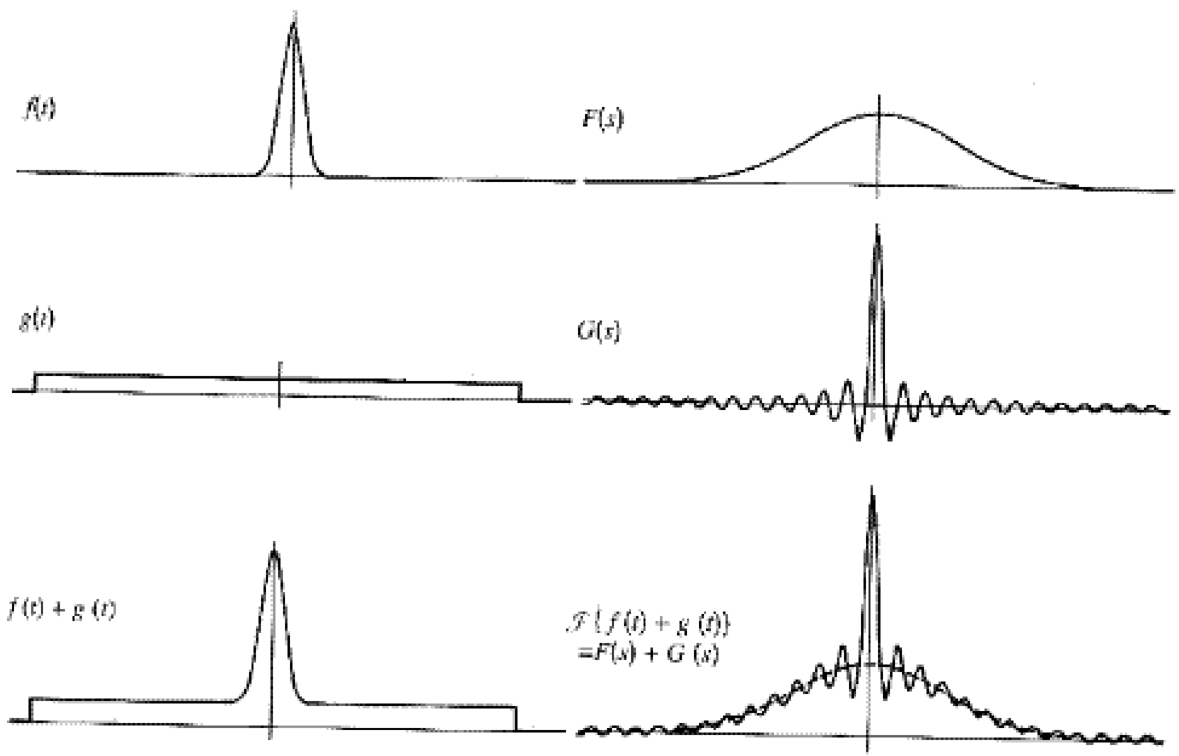
então

$$\Im[f(t) + g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + g(t)]e^{-j.2.\pi.s.t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j.2.\pi.s.t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t).e^{-j.2.\pi.s.t}dt = F(s) + G(s)$$

Isto leva a

$$\Im\{c.f(t)\} = c.F(s) \quad , \text{ (c = cte.)}$$



c) O Teorema do Deslocamento

$$\Im\left[f(t-a)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t-a)\right]e^{-j.2.\pi.s.t}dt$$

onde *a* é o deslocamento. Multiplicando o lado direito por

$$e^{j.2.\pi.a.s}.e^{-j.2.\pi.a.s}=1$$

produz

$$\Im\left[f(t-a)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t-a)\right] e^{-j.2.\pi.s.(t-a)}.e^{-j.2.\pi.a.s} dt$$

e fazendo u = t – a   du = dt

$$\Im\left[f(t-a)\right] = e^{-j.2.\pi.a.s} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(u)\right] e^{-j.2.\pi.s.u}.du = e^{-j.2\pi.a.s}.F(s)$$

d) Teorema da Convolução

$$\Im\left[f(t)*g(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u).g(t-u).du.e^{-j.2.\pi.s.t}.dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u).e^{-j.2.\pi.s.t}.dt.du$$

Pelo teorema do deslocamento

$$\Im\left[f(t)*g(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{-j.2.\pi.s.u}.G(s).du = G(s).\int_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{-j.2.\pi.s.u}.du$$

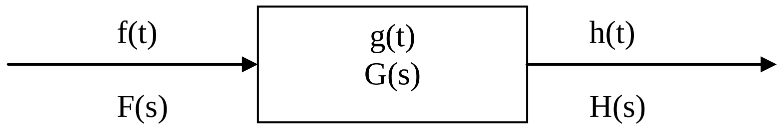
o que significa que

$$\Im\left[f(t)*g(t)\right] = F(s).G(s)$$

Logo, a convolução em um domínio significa multiplicação em outro. Segue que

$$\Im^{-1}\left[F(s).G(s)\right] = f(t)*g(t)$$

6) Sistemas Lineares e Transformada de Fourier



$$h(t) = f(t) * g(t) \qquad\qquad H(s) = F(s).G(s)$$

f(t) = sinal de entrada
F(s) = espectro do sinal de entrada
g(t) = resposta ao impulso
G(s) = função de transferência
h(t) = sinal de saída
H(s) = espectro do sinal de saída

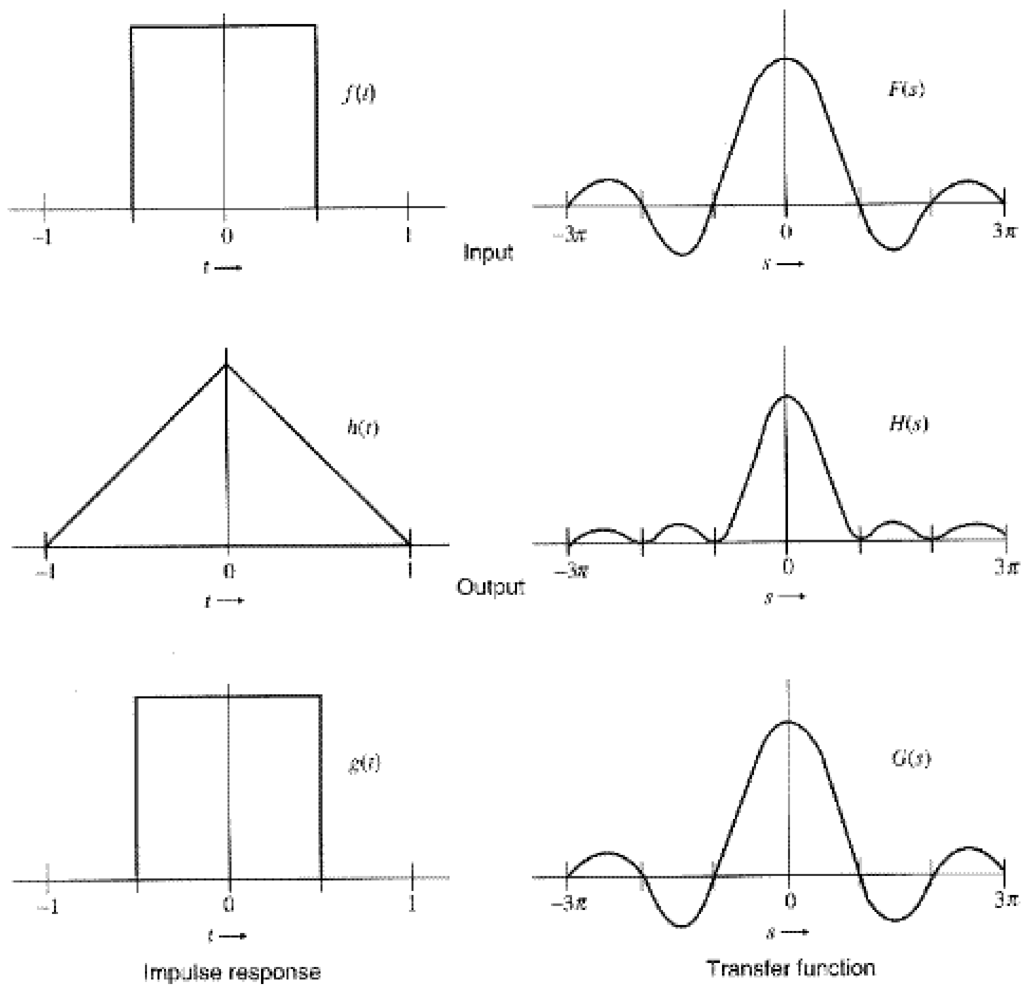
$$G(s) = \frac{H(s)}{F(s)} \qquad ; \qquad F(s) \neq 0$$

e portanto,

$$g(t) = \Im^{-1}\left\{\frac{\Im\{h(t)\}}{\Im\{f(t)\}}\right\}$$

f(t) conhecida ; h(t) medida ; g(t) calculada por integração numérica

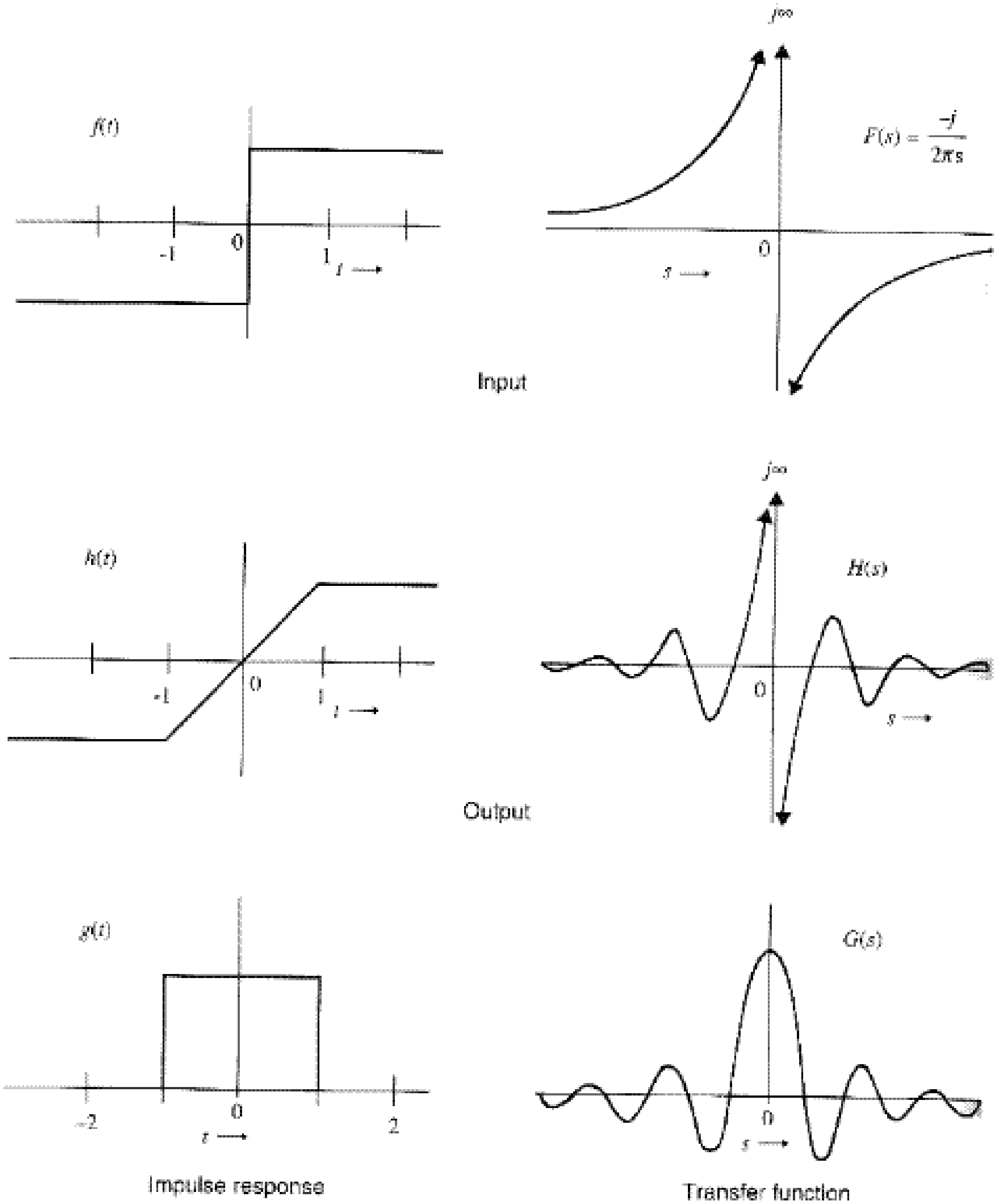
Exemplo: f(t) = $\Pi(t)$ entrada
H(t) = $\Lambda(t)$ saída



$$g(t) = \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{\frac{\text{sen}^2(\pi.s)}{(\pi.s)^2}}{\frac{\text{sen}(\pi.s)}{\pi.s}}\right\} = \Pi(t)$$

é a resposta ao impulso.

Exemplo:



$$f(t) = u(t) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, t < 0 \\ 0, t = 0 \\ +\frac{1}{2}, t > 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{-j}{2.\pi.s}$$

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, t < -1 \\ \frac{t}{2}, -1 \le t \le 1 \\ +\frac{1}{2}, t > 1 \end{cases}$$

que tem o espectro

$$H(s) = -j.\frac{\text{sen}(\pi.s)}{2.(\pi.s^2)}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{H(s)}{F(s)} = \frac{\text{sen}(\pi.s)}{\pi.s}$$

$$\Rightarrow g(t) = \Pi(t)$$

7) Transformada de Fourier em 2 dimensões

Definição

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y).e^{-j.2.\pi.(ux+vy)} dx.dy$$

e

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v).e^{j.2.\pi.(ux+vy)} du.dv$$

onde f(x,y) é uma imagem e F(u,v) é seu espectro. F(u,v) é, em geral, uma função complexa de duas variáveis u e v. A variável u corresponde à freqüência ao longo do eixo x, e igualmente v ao eixo y.

Transformada de Fourier bi-dimensional

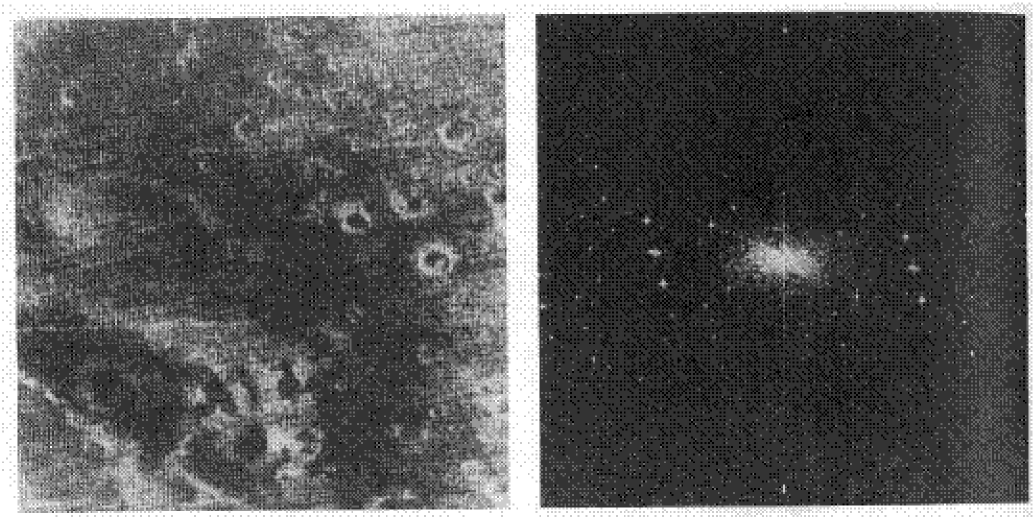


Imagem — Espectro de amplitude bi-dimensional

8) Transformada de Fourier discreta em 2-D

g(i,k) ==> matriz N,N

$$G(m,n) = \frac{1}{N}.\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} g(i,k).e^{-j.2.\pi.(m.\frac{i}{N}+n.\frac{k}{N})}$$

e a T.F.D. inversa é

$$g(i,k) = \frac{1}{N}.\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} G(m,n).e^{j.2.\pi.(i.\frac{m}{N}+k.\frac{n}{N})}$$

9) Separabilidade

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{N}}.\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{1}{\sqrt{N}}.\sum_{k=0}^{N-1} g(i,k).e^{-j.2.\pi.(\frac{n.k}{N})}\right].e^{-j.2.\pi.(m.\frac{i}{N})}$$

ou seja, as operações horizontais e verticais podem ser separadas. O termo entre colchetes é a T.F. unidimensional calculada nas linhas da imagem. O resultado é calculado como o integrando da TF unidimensional nas colunas da imagem . FFT unidimensional pode ser utilizada nesta abordagem. A inversa da equação acima também é separável.

10) Interpretação

Uma Transformada de Fourier pode ser vista como um espectro de freqüência, que pode ser representado na forma:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|.e^{j\arg F(j\omega)}$$

Exemplo: Suponha $\Im[f(t)] = F(j\omega) = \dfrac{1}{a + j.\omega}$

Amplitude:

$$\frac{1}{a + j.\omega} = \frac{a - j.\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j.\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

De a + i.b ==> $|a + i.b| = \sqrt{a^2 + b^2}$

==> $|F(j.\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + \omega^2)}}$

Ângulo de Fase:

De (a + i.b) ==> $\theta = \text{arc.tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ==> $\theta = \arg F(j\omega) = \text{arctg}\left(-\dfrac{\omega}{a}\right) = -\text{arctg}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

==> $F(j\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.e^{-j.\text{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$

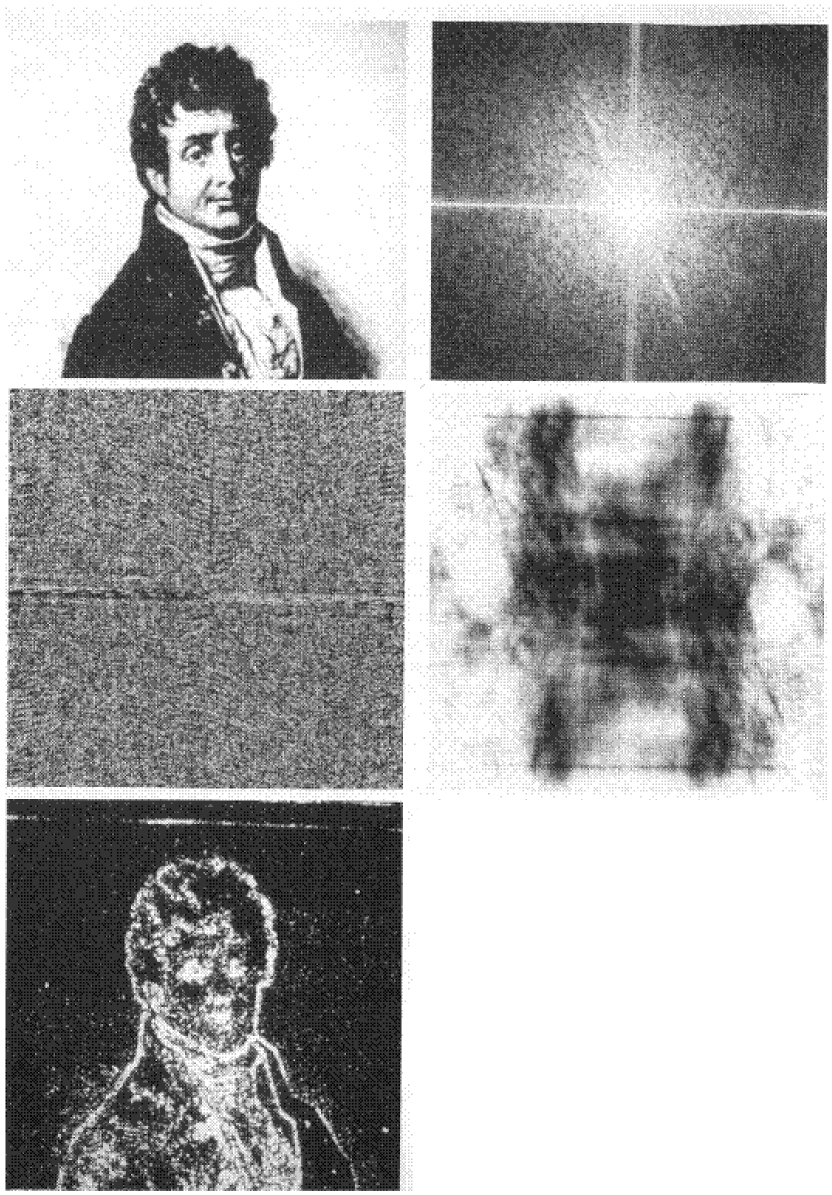
a)

b)

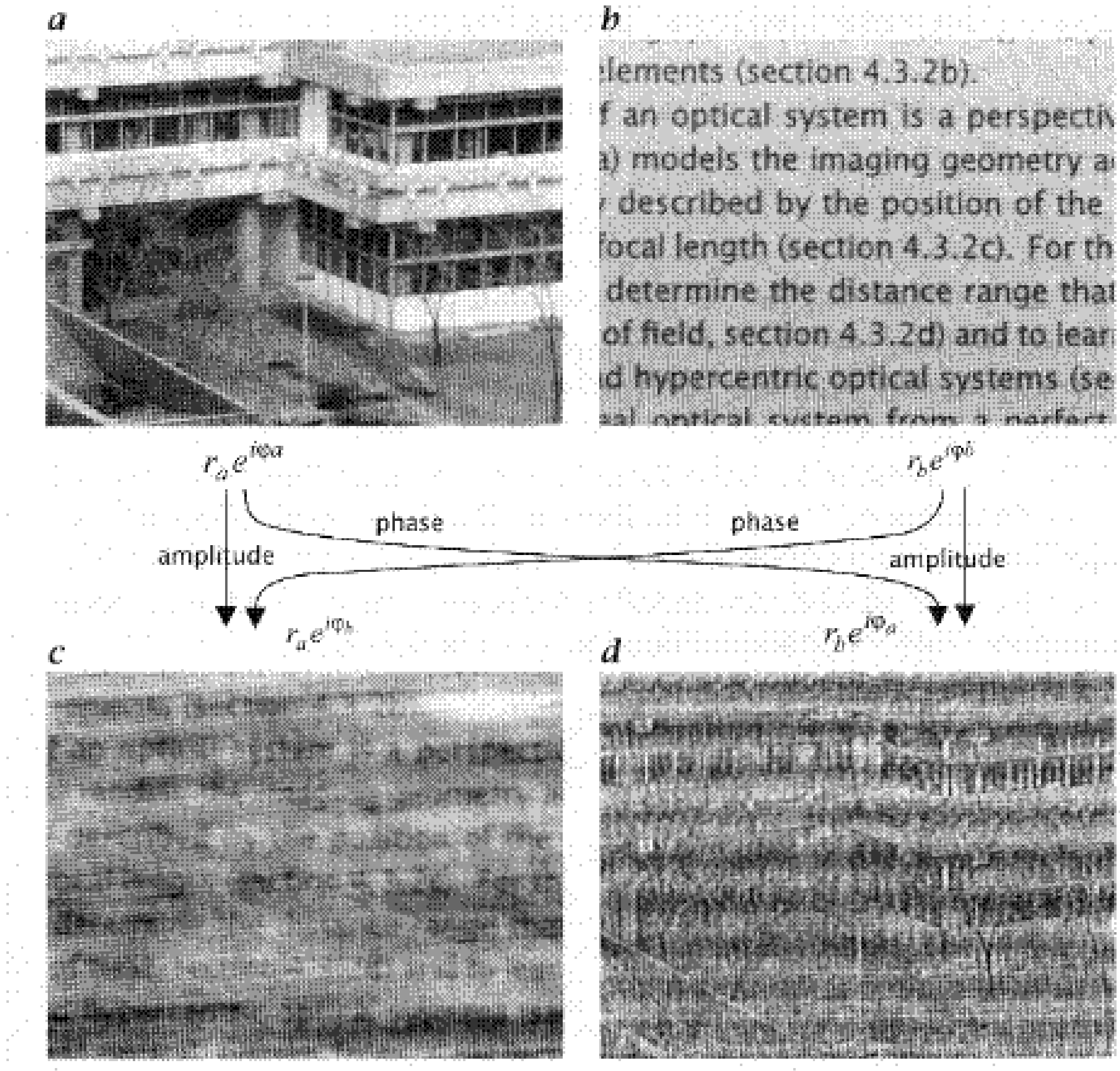
c)

d)

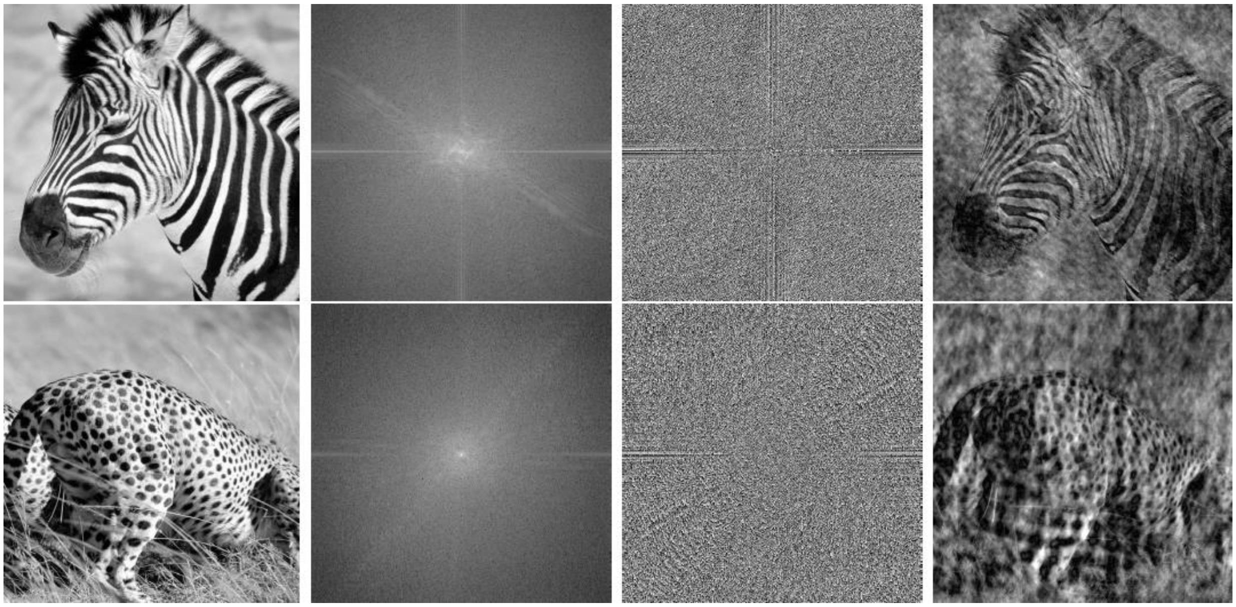
e)



-Jean Baptiste Joseph Fourier: a) imagem de entrada; b) espectro de amplitude; c) espectro de fase; d) reconstrução apenas da amplitude; e) reconstrução apenas da fase.



-Ilustração da importância da fase e amplitude no espaço de Fourier para o conteúdo da imagem. a) e b) duas imagens originais; c) imagem composta usando a fase da imagem b) e a amplitude da imagem a); d) imagem composta usando a fase da imagem a) e a amplitude da imagem b).



a b c d

(a) Imagem original; (b) espectro de amplitude da imagem original; (c) espectro de fase, escalonado de forma a que $-\pi$ seja escuro e π seja claro; (d) imagem obtida alternando o espectro de amplitude entre as duas imagens originais. Apesar da troca produzir bastante ruído, ela não altera a interpretação da imagem, sugerindo que o espectro de fase é mais importante para a percepção do que o espectro de amplitude.

11) Correlação e Espectro de Potência

Algumas ferramentas analíticas são importantes para estudar os efeitos de ruídos em um sistema linear.

a) Autocorrelação

- Autoconvolução

$$f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).f(\tau - t).dt$$

- Função de Autocorrelação

$$R_f(\tau) = f(t) * f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).f(t+\tau).dt$$

Essa função é sempre par e tem seu máximo em $\tau = 0$. Uma propriedade é

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau).d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t).dt \right]^2$$ energia

Toda função tem uma única função de autocorrelação, mas a recíproca não é verdadeira.

b) Espectro de Potência

A T.F. da função de autocorrelação é

$$P_f(s) = \Im\{R_f(\tau)\} = \Im\{f(t) * f(-t)\} = F(s).F(-s) = F(s).F^*(s) = |F(s)|^2$$

e é chamada "função de densidade espectral" ou "espectro de potência" de f(t). Se f(t) é real, sua função de autocorrelação é real e par, e portanto, seu espectro de potência é real e par. Novamente, qualquer f(t) tem um único espectro de potência, mas a recíproca não é o caso.

c) Correlação cruzada

Dadas duas funções f(t) e g(t), sua função de autocorrelação é dada por

$$R_{fg}(\tau) = f(t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).g(t+\tau).dt$$

Em determinado sentido, a função de correlação cruzada indica o grau relativo para o que duas funções concordam para várias magnitudes de desalinhamento (shifting)

A TF da F. C. cruzada á a “FDE cruzada” ou “Espectro de Potência Cruzada”

BIBLIOGRAFIA

Kenneth R. Castleman, “Digital Image Processing”, Prentica-Hall, USA, 1996.

B. Jähne, "Digital Image Processing", Springer-Verlag, Berlin, 1997.

Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1986.

Glyn J., Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison-Wesley, 1993

Churchill, R. V., Fourier Series and Boundary-Value Problems, McGraw-Hill, 1963.