Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wiederholung und Erweiterung (Begriffe) Wahrscheinlichkeit (Laplace Experiment (Seite 175), Axiome von Kolmogorow (Seite 176), Additionssatz (178), Multiplikationssatz (179), Bedingte Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramme, Pfadregel, Abhängige und Unabhängige Ereignisse, Beispiele)

# Wahrscheinlichkeitsbegriff

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich grundlegend mit Zufallsexperimenten bzw. zufälligen Ereignissen beschäftigt. Es wird versucht, die Wahrscheinlichkeit, mit der ein definiertes Ereignis eintritt, mithilfe von mathematischen Methoden zu beschreiben.

## Zufallsexperiment

Ein Zufallsexperiment ist ein mathematischer Versuch, dessen Ausgang vom Zufall abhängt, also nicht vorhersehbar ist.

### Eigenschaften eines Zufallsexperiments

* Der Versuch muss unter gleichen Bedingungen beliebig of wiederholt werden können
* Alle möglichen Ergebnisse müssen bekannt sein
* Das Ergebnis lässt sich nicht mit Sicherheit vorhersagen

### Beispiele

* Werfen einer Münze / eines Würfels
* Ziehen einer Karte

### Mehrstufige Zufallsexperimente

Es gibt einstufige und mehrstufige Zufallsexperimente. Setzt sich ein Zufallsexperiment aus mehreren, hintereinander durchgeführten Zufallsexperimenten zusammen wird es mehrstufigex Zufallsexperiment genannt.

#### Beispiel

Zwei Karten werden hintereinander aus einem Stapel gezogen. (Die Menge der Karten verändert sich nach dem Ersten mal Ziehen. Somit ändert sich beim zweiten Zufallsexperiment auch die Menge der Karten, aus denen gezogen wird)

## (Zufalls-) Ereignis

Ein spezifischer Versuchsausgang eines Zufallsexperiments wird als Ergebnis oder Elementarereignis bezeichnet. Ein Ereignis beschreibt ein oder mehrere Ergebnisse. Es ist also eine Teilmenge des sogenannten Ereignisraums (Der Ereignisraum ist die Menge aller möglichen Ergebnisse).

### Beispiele

#### Beispiel – Werfen eines Würfels

|  |  |
| --- | --- |
| Bedingung | Ereignismenge |
| Die gewürfelte Zahl ist 3 | {3} |
| Die gewürfelte Zahl ist größer als 4 | {5, 6} |
| Die gewürfelte Zahl ist gerade | {2, 4, 6} |

# Laplace-Experiment

## Vorraussetzungen

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Resultate die Gleiche Wahrscheinlichkeit haben, einzutreten. Viele allgemeine Experimente lassen sich auf ein Laplace Experiment zurückführen.

Ereignisse, die für den Ausgang des Zufallsexperiments von Bedeutung sind, werden oft auch „günstige Fälle“ genannt.

## Mathematische Definition

Die Wahrscheinlichkeit P eines Laplace-Experiments wird wie folgt festgelegt:

### Beispiel – Würfel

Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6 beträgt:

# Axiome von Komogorow

## Axiom – Begriffserklärung

Ein Axiom ist eine Grundaussage, die, ohne bewiesen werden zu müssen als wahr angesehen wird. Auch in der Wahrscheinlichkeitsrechung finden solche Annahmen Anwendung. Sie wurden von einem russischen Mathematiker (Kolmogorow) erstmals niedergeschrieben.

## Die Axiome von Kolmogorow

* Jedem Ereignis wird eine Wahrscheinlichkeit als reele Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet
* Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das garantiert eintritt ist 1
* Die Wahrscheinlichkeit, dass eines von mehreren sich ausschließenden Ereignissen eintritt, entspricht der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten

Außerdem gilt folgendes:

Die Gegenwahrscheinlichkeit eines Ereignisses (also dass dieses Ereignis nicht eintritt) wird so berechnet:

Daraus folgt, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ergebnisses 0 beträgt.

# Additionssatz

Schließen sich zwei Ereignisse gegenseitig aus, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass entweder Ereignis A oder Ereignis B eintritt, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

Dieses Verfahren lässt sich auch auf Mehrere sich ausschließende Ereignisse anwenden.

### Einander nicht ausschließende Ereignisse

Schließen sich zwei oder mehrere Ereignisse nicht aus, muss bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Eintritts des gesuchten Ereignisses je nach Situation anders vorgegangen werden.

#### Beispiel: nicht ausschließendes Ereignis (Würfel)

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Würfel entweder eine Augenzahl größer 4 gewürfelt wird, oder eine ungerade Augenzahl.

Die Wahrscheinlichkeit für P(5) muss subtrahiert werden, da sie in beiden Ereignismengen enthalten ist, und nicht doppelt berücksichtigt werden darf.

# Multiplikationssatz

Ist ein Ereignis gesucht, das nicht aus verschiedenen Fällen besteht die eintreten können, sondern bei dem das Ergebnis des Zweiten Experiments von dem des ersten abhängt, spricht man von bedingter Wahrscheinlichkeit.

## Erklärung am Beispiel „Würfel“

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit 2 mal hintereinander die Augenzahl 6 zu würfeln?

Anwenden der Grundformel für Laplace-Experimente:

Mithilfe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

## Abhängige und Unabhängige Ereignisse

### Unabhängige Ereignisse

Im obigen Beispiel hängen die Würfe der Würfel nicht voneinander ab. Es handelt sich um ein unabhängiges Experiment. Die Wahrscheinlichkeit beim ersten mal einen Sechser zu wüfeln ist gleich wie beim zweiten mal. Die Ereignisse beeinflussen sich nicht.

### Abhängige Ereignisse & Bedingte Wahrscheinlichkeit

Hängt ein Ereignis A von einem Ereignis B ab, so handelt es sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Eintretens von A, vorausgesetzt B ist bereits eingetreten.

Man schreibt Mathematisch: „A unter der Bedingung B“:

Wird die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A berechnet so geschieht dies wie folgt:

#### Beispiel – Geimpfte und Erkrankte

In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 gegen eine Krankheit impfen lassen. In einer Befragung erlangte man später folgende Ergebnisse:

I – Geimpft; K - Erkrankt

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | K | Nicht K | Summe |
| I | 60 | 540 | 600 |
| Nicht I | 120 | 180 | 300 |
| Summe | 180 | 720 | 900 |

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geimpfte Person trotzdem an der Krankheit erkrankt.

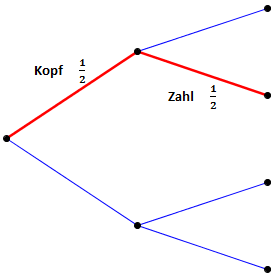
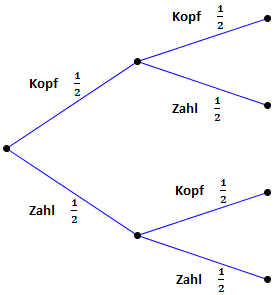
Lösung:

# Baumdiagramme

Sind die Wahrscheinlichkeiten bei einem Experiment mit bedingter Wahrscheinlichkeit bekann, so lässt sich ein Baumdiagramm aufzeichnen.

## Beispiel: Münzwurf

Wird eine Münze geworfen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit Kopf oder Zahl als Ergebnis zu bekommen immer 50%. Möchte man nun die Wahrscheinlichkeit erhalten, dass man zuerst Kopf, und dann Zahl erhält sieht das so aus:



Um die Wahrscheinlichkeit des Eintreten eines Falles im Baumdiagramm zu berechnen gibt es die Pfadregeln.

## Pfadregeln

1. Erste Pfadregel: „Und“-Verknüpfung  
   Will man die Wahrscheinlichkeit am Ende eines Pfads erlangen (Wie im Beispiel zuerst Kopf, dann Zahl) so werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert  
   ()
2. Zweite Pfadregel: „Oder“-Verknüpfung  
   Setzt sich ein Ereignis aus mehreren Ereignissen zusammen, so addiert man die zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten (im Beispiel 1x Kopf und einmal Zahl, unabhängig der Reihenfolge:

# Quellen

<https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeitstheorie>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Ereignis_(Wahrscheinlichkeitstheorie)>

<https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/wahrscheinlichkeitsrechnung.html>

<http://www.mathe-online.at/mathint/wstat1/i.html>

<https://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/kolmogorow/axiome_von_kolmogorow.php>

<https://matheguru.com/stochastik/abhangige-und-unabhangige-ereignisse.html>

<http://www.mathe-lerntipps.de/wahrscheinlichkeitsrechnung/mehrstufige-zufallsexperimente.html>

<https://www.mathebibel.de/bedingte-wahrscheinlichkeit>

<https://matheguru.com/stochastik/abhangige-und-unabhangige-ereignisse.html>

Seiten 175 – 182 im Buch