# 实验四 高斯消元法(2 课时)

## 一、实验目的

1.掌握高斯选主元消去法公式的用法，适用范围及精确度。
2.通过高斯选主元消去法求矩阵方程的解，验证高斯消去法。

## 二、实验要求

1.写出高斯选主元消去法解线性方程组算法，编写程序上机调试出结果
2.进一步加深对高斯消去法的理解。

## 三、实验原理

**(一)高斯消元法**
Gauss 消去法就是将方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

通过(n-1)步消元，将上述方程组转化为上三角方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{(12)}^{(11)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

再回代求此方程组的解。
**(二)选列主元素高斯消去法**
给定线性方程组 Ax=b，记 A(1)=A，b(1)=b，列主元 Gauss 消去法的具体过程如下:
首先在增广矩阵 B(1)=(A(1),b(1))的第一列元素中，取

$$\left|a_{k1}^{(1)}\right| = \max_{1\le i\le n}\left|a_{i1}^{(1)}\right| \text{ 为主元素，} r_k \leftrightarrow r_1.$$

然后进行第一步消元得增广矩阵 B(2)=(A(2),b(2))。 再在矩阵 B(2)=(A(2),b(2))的第二列元素中，取

$$\left|a_{k2}^{(2)}\right| = \max_{2\le i\le n}\left|a_{i2}^{(2)}\right| \text{ 为主元素，} r_k \leftrightarrow r_2.$$

然后进行第二步消元得增广矩阵 B(3)=(A(3),b(3))。按此方法继续进行下去，经过 n-1 步选主元和消元运算,得到增广矩阵 B(n)=(A(n),b(n)).则方程组 A(n)x=b(n)是与原方程组等价的上三角形方程组,可进行回代求解.

易证，只要 A|≠0,列主元 Gauss 消去法就可顺利进行

**(三)例子**

采用 4 位十进制浮点计算，分别用顺序 Gauss 消去法和列主元 Gauss 消去法求解线性方程组:

$$\begin{cases} 0.012x_1 + 0.01x_2 + 0.167x_3 = 0.6781 \\ x_1 + 0.8334x_2 + 5.91x_3 = 12.1 \\ 3200x_1 + 1200x_2 + 4.2x_3 = 981 \end{cases}$$

方程组具有四位有效数字的精确解为 x1*=17.46，x2*=-45.76，x3*=5.546

解(1)用顺序 Gauss 消去法求解，消元过程为

$$\begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.167 & 0.6781 \\ 1.000 & 0.8334 & 5.910 & 12.10 \\ 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \\ 0 & 0.1000\times10^{-3} & -8.010 & -44.41 \\ 0 & -1467 & -4453\times10 & -1798\times10^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \\ 0 & 0.1000\times10^{-3} & -8.010 & -44.41 \\ 0 & 0 & -1175\times10^5 & -6517\times10^5 \end{pmatrix}$$

回代得:x3=5.546，x2=100.0，x1=-104.0

(2)用列主元 Gauss 消去法求解，消元过程为

$$\begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \\ 1.000 & 0.8334 & 5.910 & 12.10 \\ 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\overset{\text{选主元}}{\sim}} \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 1.000 & 0.8334 & 5.910 & 12.10 \\ 0.0120 & 0.0100 & 0.1670 & 0.6781 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 0 & 0.4584 & 5.909 & 11.79 \\ 0 & 0.55 \times 10^{-2} & 0.1670 & 0.6744 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 0 & 0.4584 & 5.909 & 11.79 \\ 0 & 0 & 0.0961 & 0.5329 \end{pmatrix}$$

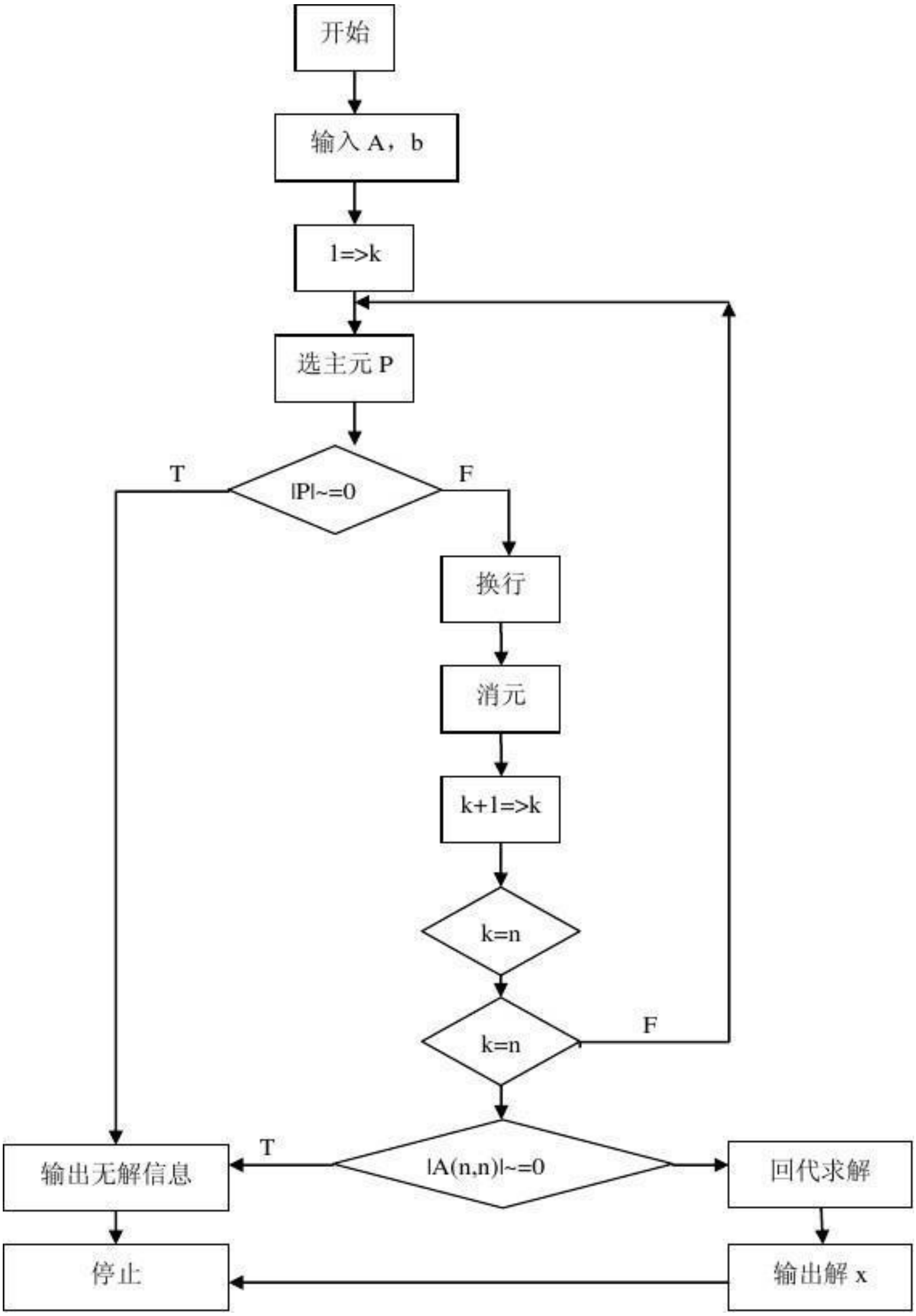
$$\sim \begin{pmatrix} 3200 & 1200 & 4.200 & 981.0 \\ 0 & 0.4584 & 5.909 & 11.79 \\ 0 & 0 & 0.0961 & 0.5329 \end{pmatrix}$$

回代得:x3=5.545，x2=-45.77，x1=17.46

# 四、实验内容

**(一)算法流程图**

高斯列主元消去法 N-S 图




**(二)编程作业**

编写选列主元的高斯消去法。求出下列线性方程组 Ax=b 的解 x。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;


int main() {
    int n = 3;
    double A[3][3] = {{3, 1, 6},
                      {2, 1, 3},
                      {1, 1, 1}};   // 系数矩阵 A
    double b[] = {2, 7, 4};  // 常数项向量 b
    // 高斯列主元消去法函数求解线性方程组
   for (int k = 0; k < n - 1; k++) {
        // 寻找主元所在的行
       int maxRow = k;
        double maxVal = abs(A[k][k]);
        for (int i = k + 1; i < n; i++) {
            if (abs(A[i][k]) > maxVal) {
                maxRow = i;
                maxVal = abs(A[i][k]);
            }
        }
        // 交换最大行和当前行
       swap(A[k], A[maxRow]);
       swap(b[k], b[maxRow]);
        // 消元
       for (int i = k + 1; i < n; i++) {
            double factor = A[i][k] / A[k][k];
            for (int j = k; j < n; j++) {
                A[i][j] -= factor * A[k][j];
            }
            b[i] -= factor * b[k];
        }
    }
    // 回代
   double x[n];
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
        x[i] = b[i];
        for (int j = i + 1; j < n; j++) {
            x[i] -= A[i][j] * x[j];
        }
        x[i] /= A[i][i];
    }
```

```cpp
    // 输出解向量
    cout << "解向量 x: " << endl;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "x" << i + 1 << " = " << x[i] << endl;
    }
    return 0;
}
```

```
E:\CLionProject\C++Pro
解向量 x:
x1 = 19
x2 = -7
x3 = -8

进程已结束，退出代码为 0
```