南 昌 大 学 物 理 实 验 报 告

课程名称：　普通物理实验（3）

实验名称：　傅里叶变换

学院：　理学院　专业班级：　物理学 151 班

学生姓名：　黄泽豪　学号：　5502115014

实验地点：　B410　座位号：　11

实验时间：　第十四周星期四上午九点四十五开始

【实验目的】

1.学习傅里叶分析的原理和方法。

2.测量几种实验室中常见信号及频谱。

3.掌握 Cassy Leb 计算机测量和数据处理系统的原理和使用方法。

4.利用 Mathematica 软件编程来模拟有限项傅里叶级数对于信号的逼近情况。

【实验仪器】

Cassy Leb 实验仪及计算机数据采集和测量系统

【实验原理】

在科学技术的各个领域，存在各种复杂的信号。不管信号多复杂都可以分解为不同频率的正弦分量。频谱函数描述了信号含有的正弦分量的频率和振幅的关系，是信号最基本的特性之一。因此各种信号可分解为一系列不同频率的正弦交流信号。

对于周期为2π函数$f(t)$，满足狄利克雷条件，则可展开为傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$ 其中傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt \qquad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt \qquad n=1,2,3\cdots$$

如图 1 为周期为2π，振幅为 1 的方波，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-1, & (-\pi\le t<0)\\ 1, & (0\le t<\pi)\end{cases}$$

其傅里叶展开式为

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2\mathrm{n}-1)t\right]$$

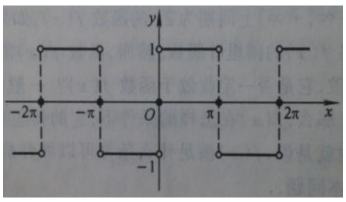


图 1

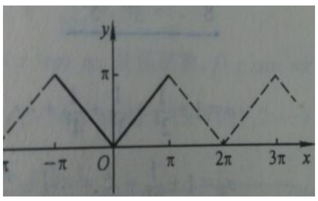


图 2

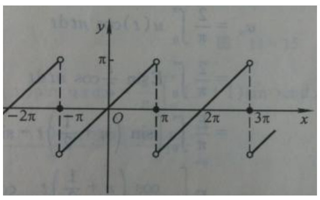


图 3

如图 2 为周期为2π，振幅为π的三角波，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-t, & (-\pi\le t<0)\\ \mathrm{t}, & (0\le t\le\pi)\end{cases}$$

其傅里叶展开式为

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right]$$

如图 3 为周期为2π，振幅为π的锯齿波，其数学表达式为

$$f(t)=t \qquad (-\pi\le t<\pi)$$

其傅里叶展开式为

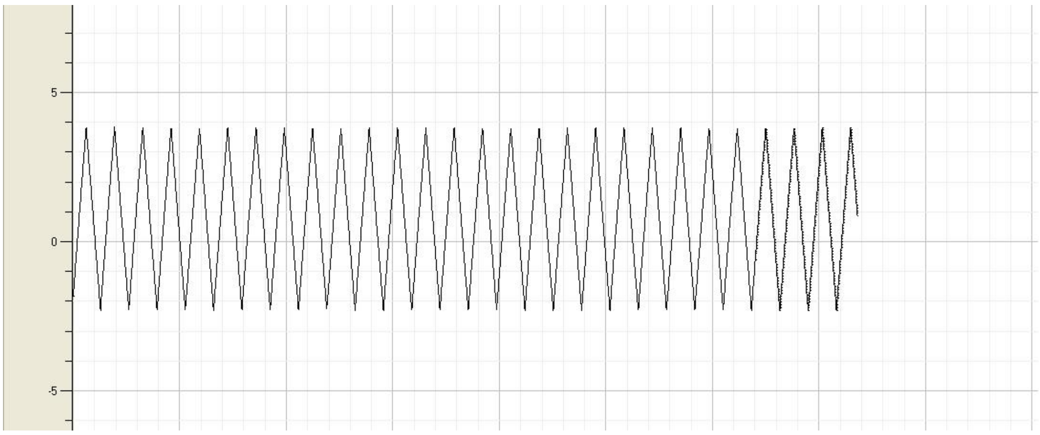
$$f(t)=2\left[\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\right]$$

【实验内容及步骤】

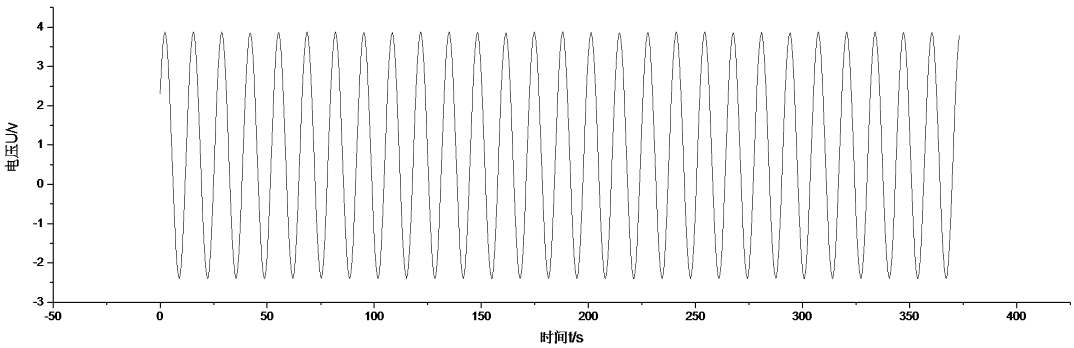
1.打开计算机点击 Cassy Leb 图标，进入应用程序及进行方波分析。
2.本实验分别进行方波，三角波和锯齿波的分析。
3.利用 Mathematica 软件编程来模拟有限项傅里叶级数对于信号的逼近情况

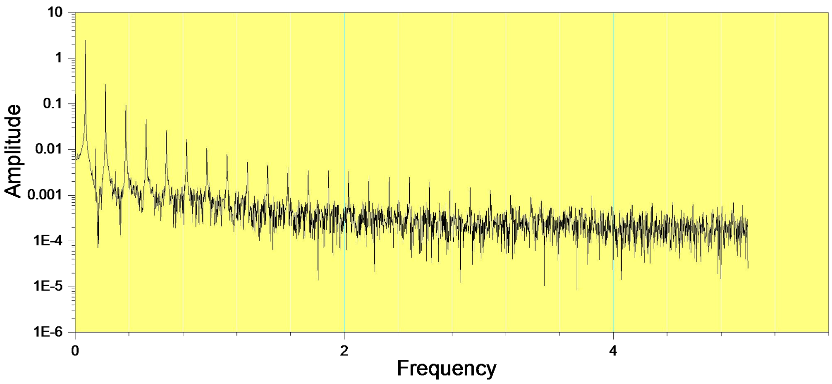
【数据处理】

正弦波图像：

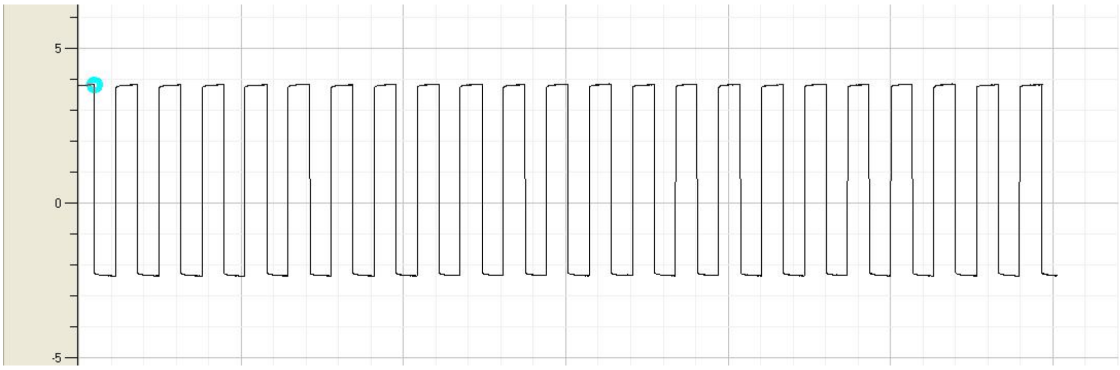


将实验数据导入 Origin，画图，并做快速傅里叶变换：

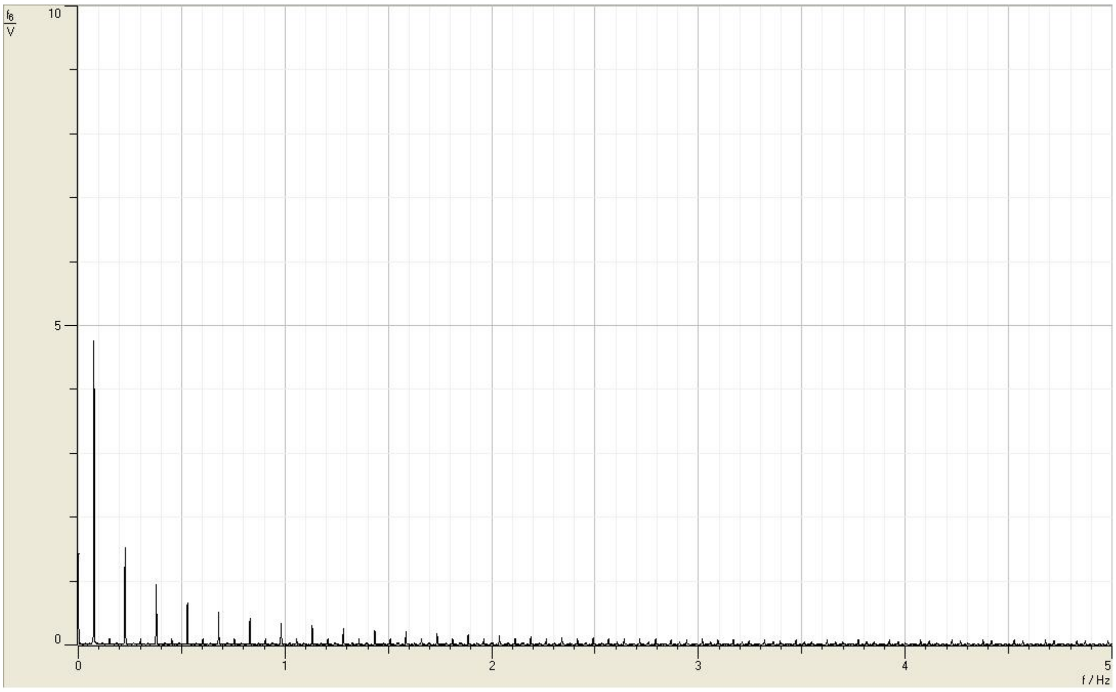




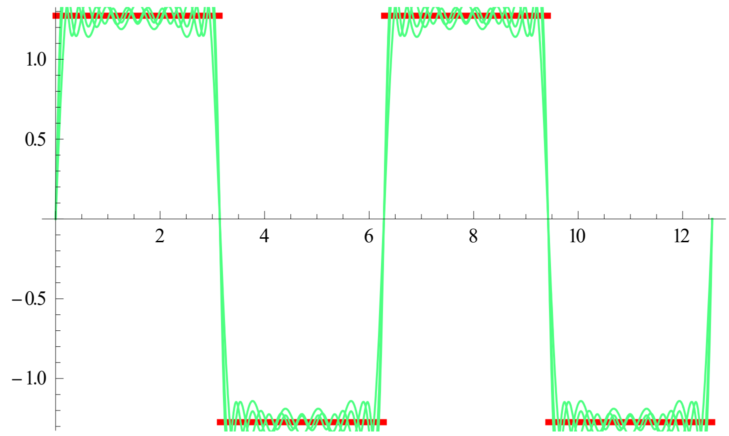
方波图像：



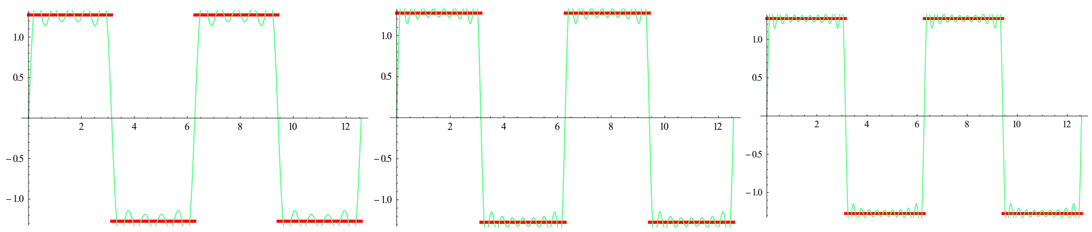
做快速傅里叶变换：



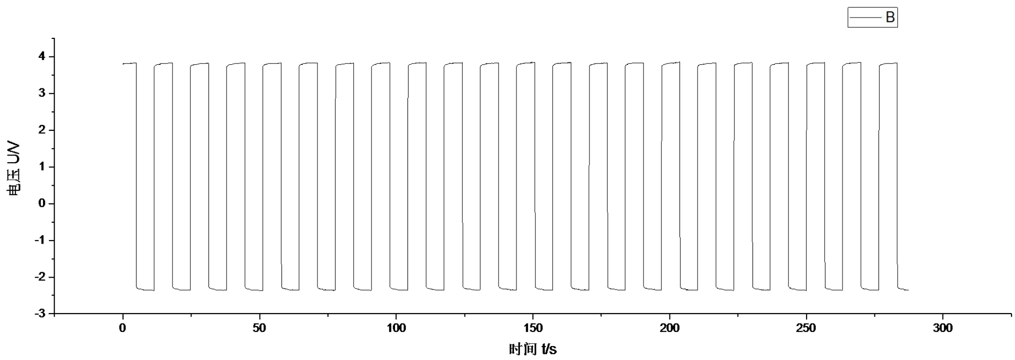
用 Mathematica 做傅里叶变换图像拟合：

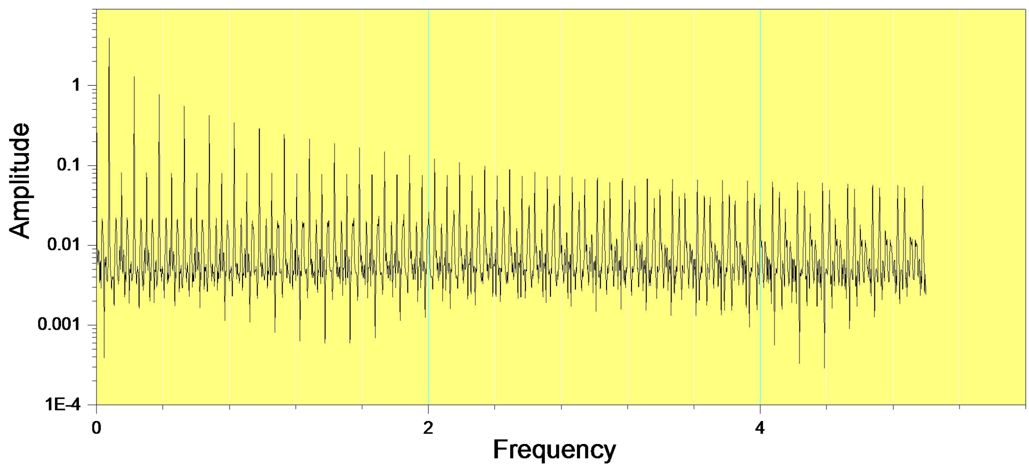


取傅里叶变换的前 10、15、20 项作图得：

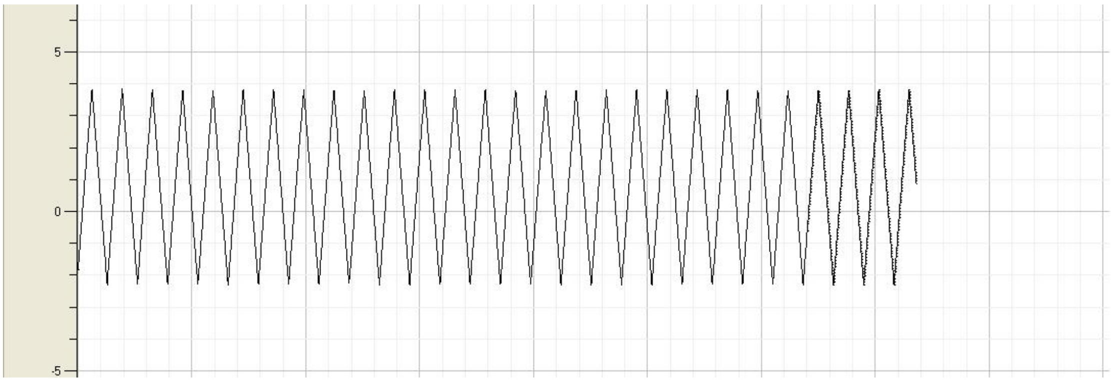


将实验数据导入 Origin，画图，并做快速傅里叶变换：

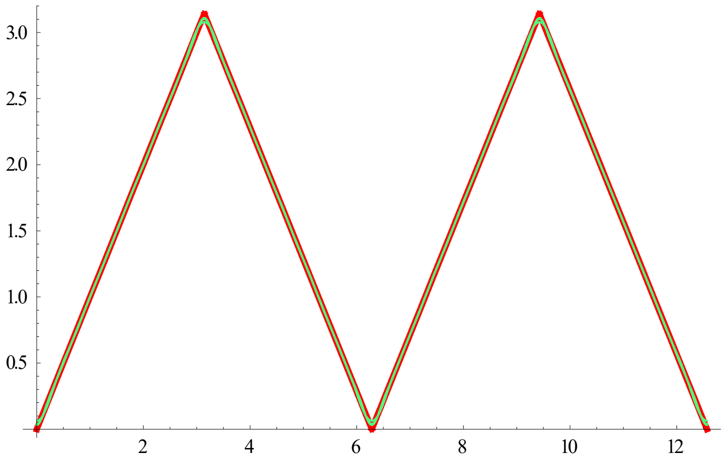




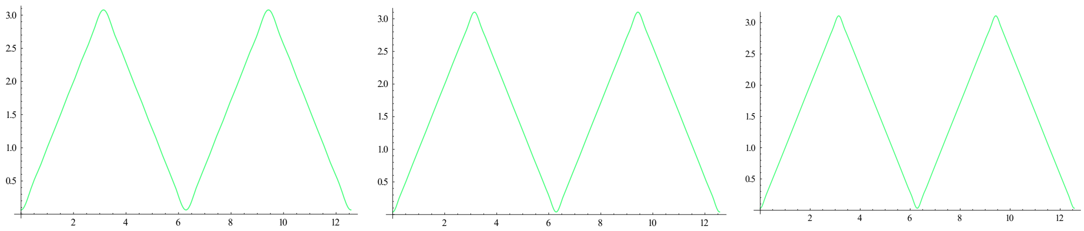
三角波图像：



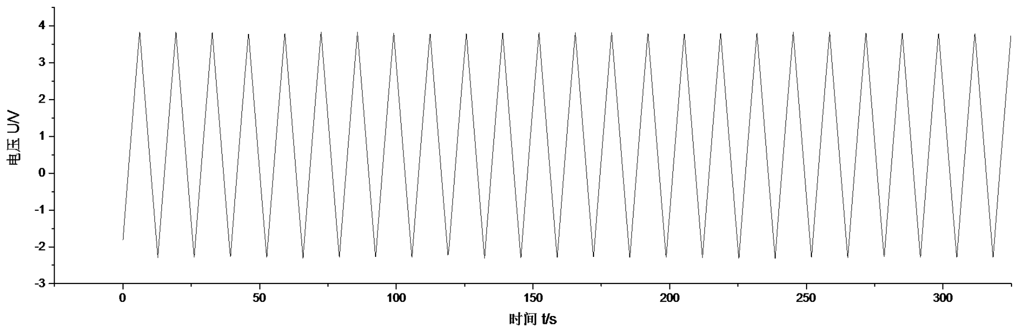
用 Mathematica 做傅里叶变换图像拟合：

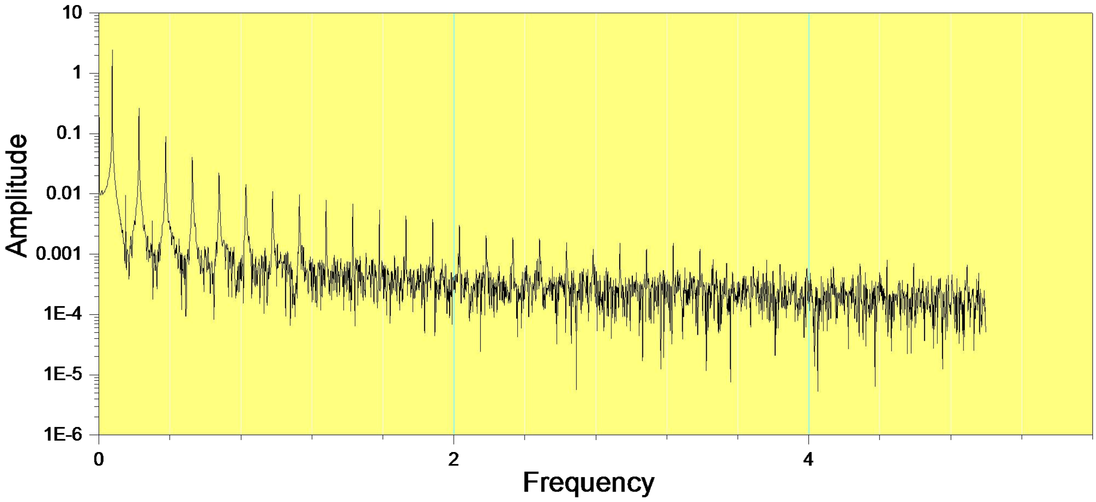


取傅里叶变换的前 10、15、20 项作图得：

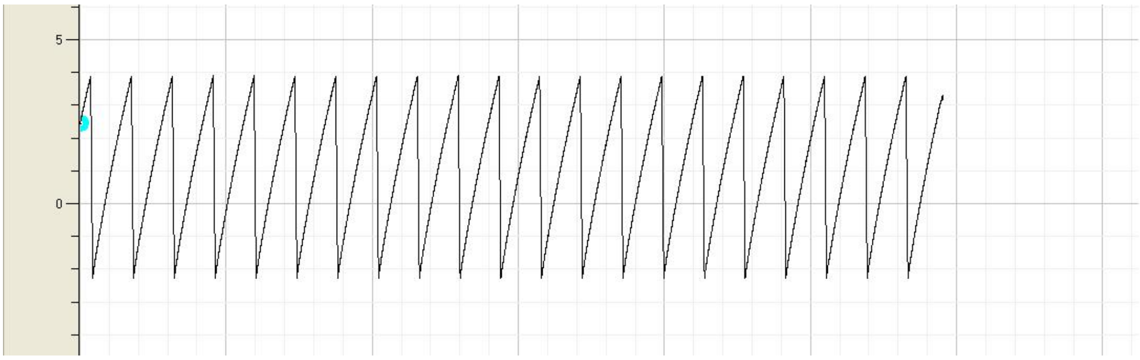


将实验数据导入 Origin，画图，并做快速傅里叶变换：



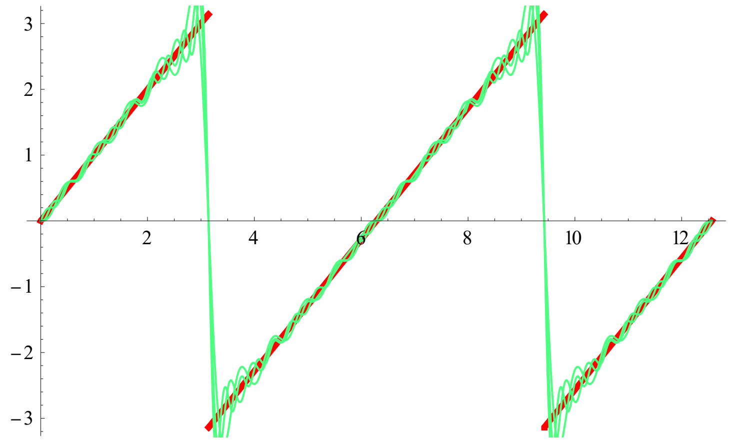


锯齿波图像：

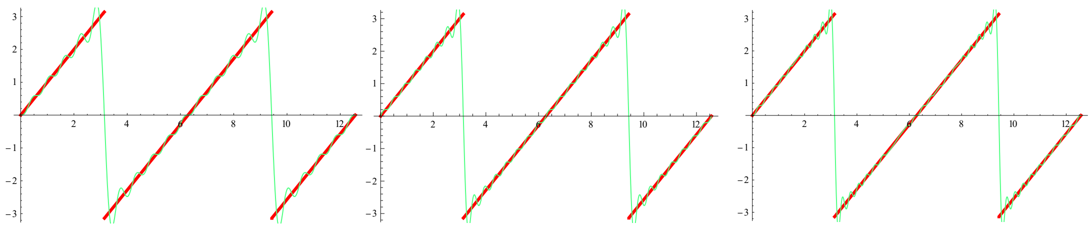


做快速傅里叶变换：

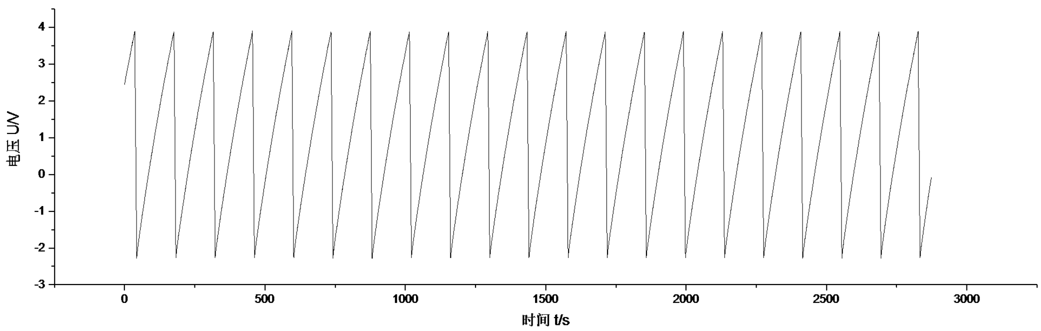
用 Mathematica 做傅里叶变换图像拟合：

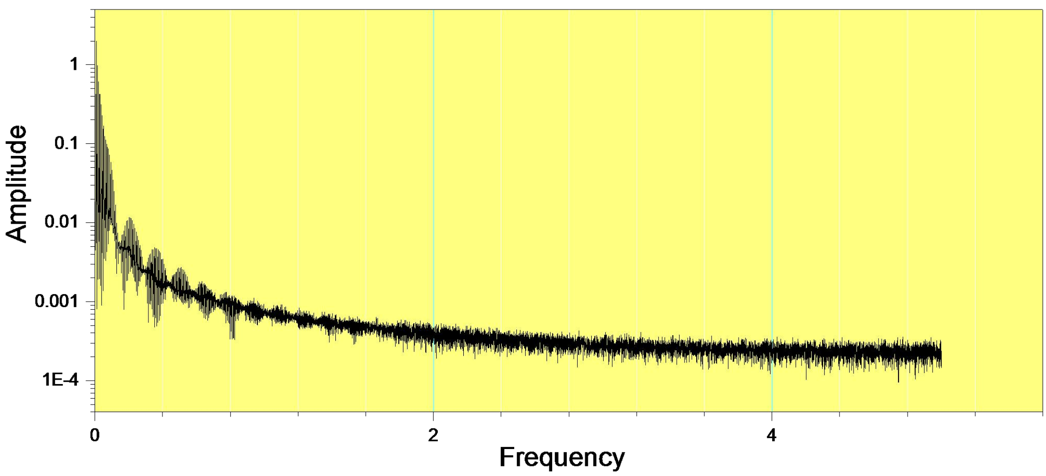


取傅里叶变换的前 10、15、20 项作图得：



将实验数据导入 Origin，画图，并做快速傅里叶变换：



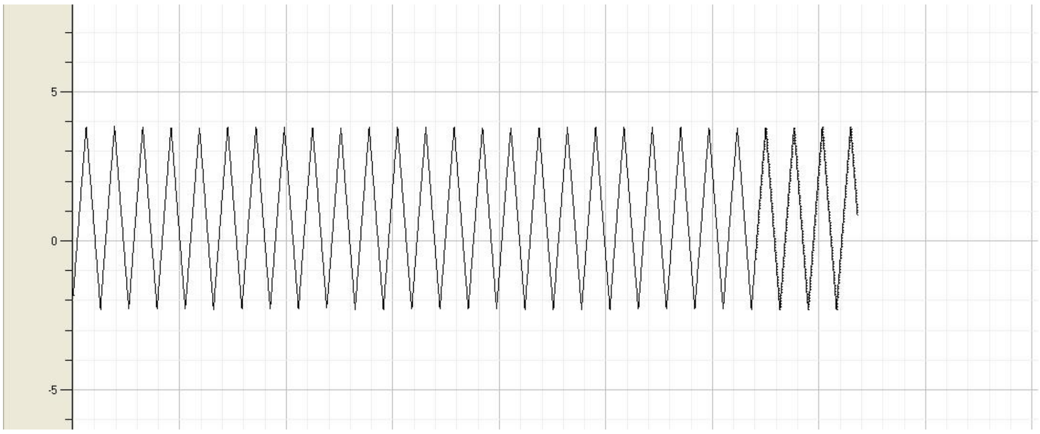


【实验结果分析与讨论】

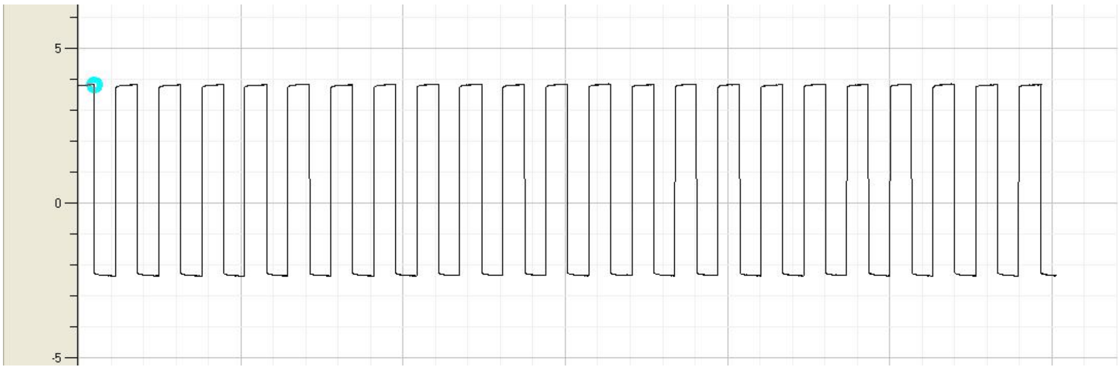
一个周期的方波、锯齿波、三角波可以由频率成整数倍的正弦谐波叠加而成。随着谐波的增多，叠加而成的波形逐渐接近原波形形状。

【原始数据】

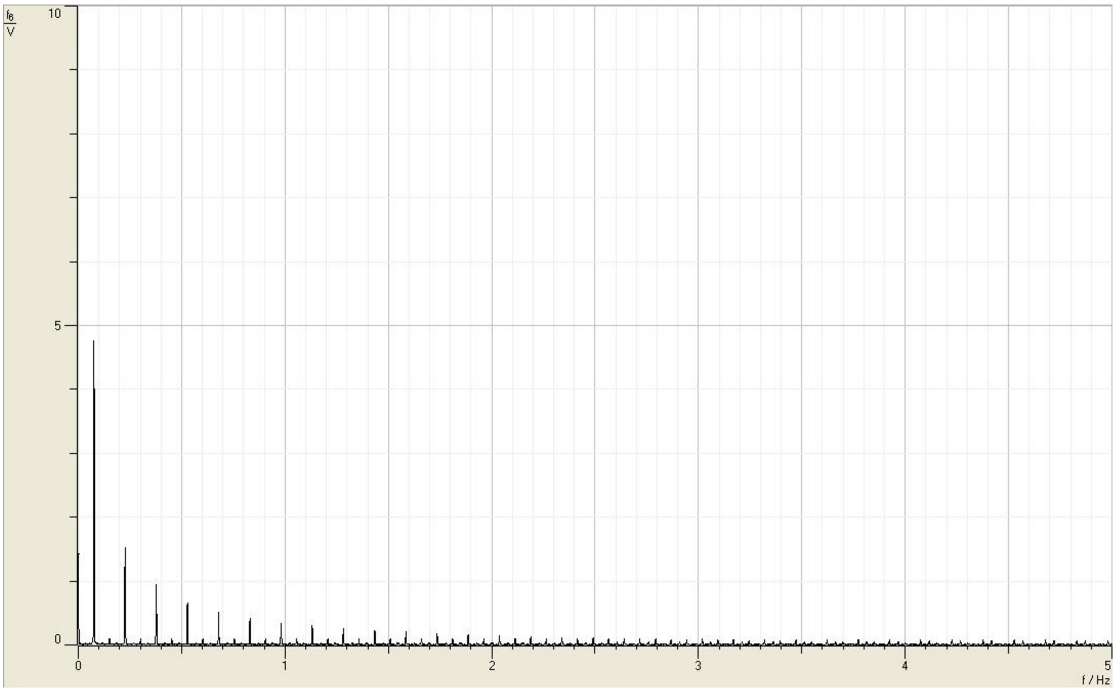
正弦波图像：



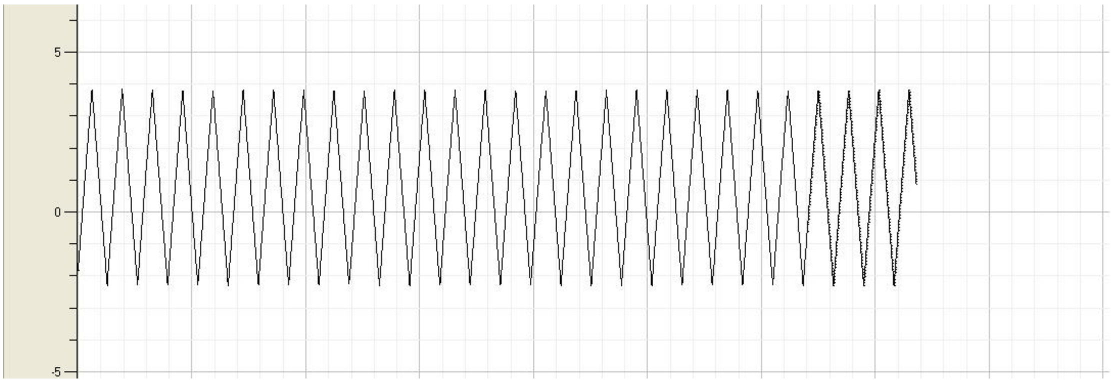
方波图像：



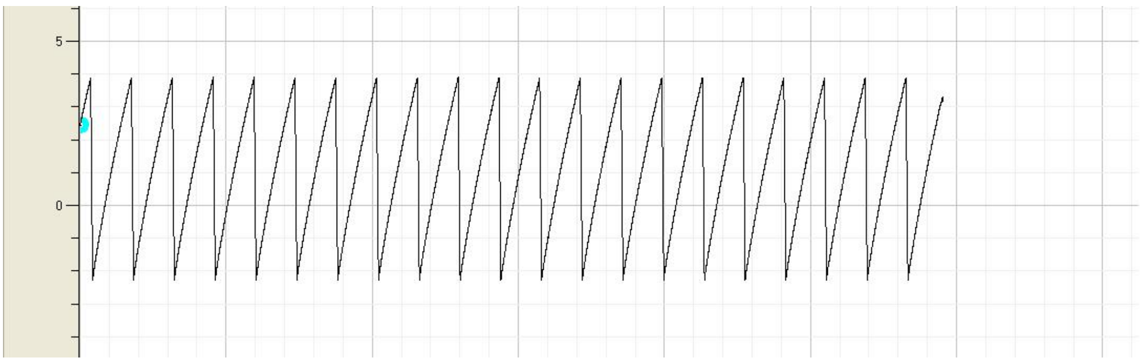
做快速傅里叶变换：



三角波图像：



锯齿波图像：



做快速傅里叶变换：

【附录】

1.方波的 Mathematica 程序代码：

```
Clear[s,f,n,k,x,t,a,b,A,B]
f[t_]:=Piecewise[{{4/Pi,0   t<Pi||2*Pi   t<3*Pi},{-4/Pi,Pi   t<2*Pi||3*Pi
t<4*Pi}}]
a[0]=Integrate[f[t],{t,0,2*Pi}]/Pi;
a[n_]:=Integrate[f[t]*Cos[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
b[n_]:=Integrate[f[t]*Sin[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
s[x_]:=a[0]/2+Sum[a[k]*Cos[k*x]+b[k]*Sin[k*x],{k,1,n}]
A=Plot[f[t],{t,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[1,0,0],Thickness[0.009]}]
Do[Plot[Evaluate[s[x]],{x,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.5,0,0.5]}],{n,10,20,5}]
T=Table[s[x],{n,10,20,5}];
B=Plot[Evaluate[T],{x,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.3,1,0.5]}]
Show[A,B]
```

2.三角波的 Mathematica 程序代码：

```
Clear[s,f,n,k,x,t,a,b,A,B]
f[t_]:=Piecewise[{{t,0   t<Pi},{2*Pi-t,Pi   t<2*Pi},{t-2*Pi, 2*Pi   t<3*Pi},{4*Pi -
t,3*Pi   t<4*Pi}}]
a[0]=Integrate[f[t],{t,0,2*Pi}]/Pi;
a[n_]:=Integrate[f[t]*Cos[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
b[n_]:=Integrate[f[t]*Sin[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
s[x_]:=a[0]/2+Sum[a[k]*Cos[k*x]+b[k]*Sin[k*x],{k,1,n}]
```

```
A=Plot[f[t],{t,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[1,0,0],Thickness[0.009]}]
Do[Plot[Evaluate[s[x]],{x,-Pi,Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.5,1,0]}],{n,10,20,5}]
T=Table[s[x],{n,10,20,5}];
B=Plot[Evaluate[T],{x,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.3,1,0.5]}]
Show[A,B]
```

3.锯齿波的 Mathematica 程序代码：

```
Clear[s,f,n,k,x,t,a,b,A,B]
f[t_]:=Piecewise[{{t,0   t<Pi},{t-2*Pi,Pi   t<3*Pi},{t-4*Pi,3*Pi   t<4*Pi}}]
a[0]=Integrate[f[t],{t,0,2*Pi}]/Pi;
a[n_]:=Integrate[f[t]*Cos[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
b[n_]:=Integrate[f[t]*Sin[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
s[x_]:=a[0]/2+Sum[a[k]*Cos[k*x]+b[k]*Sin[k*x],{k,1,n}]
A=Plot[f[t],{t,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[1,0,0],Thickness[0.009]}]
Do[Plot[Evaluate[s[x]],{x,-Pi,Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.5,1,0]}],{n,10,20,5}]
T=Table[s[x],{n,10,20,5}];
B=Plot[Evaluate[T],{x,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.3,1,0.5]}]
Show[A,B]
```