# 南昌大学第七届程序设计竞赛题解

Leave-Time

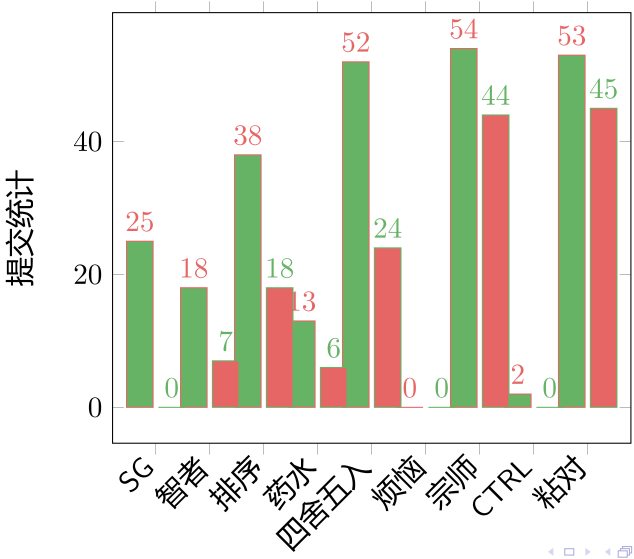
南昌大学 ACM+ 竞赛基地

2024/05/27

# 介绍

本次比赛我们共收到来自 55 个队伍的 1020 份提交，其中正确提交 159 份，占比 16%

# 统计


提交统计
40
20
0
25
0
18
7
38
18
13
6
52
24
0
0
54
44
2
0
53
45
SG
智者
排序
药水
四舍五入
烦恼
宗师
CTRL
粘对

# A. SG-GAME

设当前的盒子容量为 $s_i$，求出一个最大的 $t$ 满足：$t+t<s_i$，如果当前盒子里有 $c_i$ 颗石头，

1. $c_i > t$ 则必胜;
2. $c_i = t$ 则必败;
3. $c_i < t$ 不能确定，将 $t$ 作为 $s_i$ 递归调用函数。

当满足 $ci > t$ 时，return $s_i - c_i$ 作为当前状态的 sg 值。因为：当 $c_i$ 在 $s_i$ 点时，为有向图的端点，出度为 0，也就是必败点，所以 sg 值为 0;
当 $c_i$ 位于 $s_i - 1$ 时，ci 的端点可能的 sg 值构成的集合为 $\{0\}$，所以当前 sg 值为 1;
当 $c_i$ 位于 $s_i - 2$ 时，ci 的端点可能的 sg 值构成的集合为 $\{0, 1\}$，所以当前的 sg 值为 2;
可得，$c_i$ 所在位置的 $s_g$ 值为 $s_i - c_i$;

# B. 智者与农民：寻找农作物的智慧之旅

问题是寻找一组连续的篮子序列，其中至少有 k 个篮子包含的农作物种类是所有篮子中出现最多的。为了解决这个问题，我们可以通过滑动窗口解决。

1. 寻找最大频率的农作物种类：首先确定所有篮子中最多的农作物种类数。
使用 for 循环遍历一次获得最大农作物种类数 mx
2. 滑动窗口统计：使用滑动窗口（由左右指针 left 和 right 定义）来统计含最大频率农作物种类的篮子数量，并在达到至少 k 个这样的篮子时，计算符合条件的连续子数组数量。
窗口从左侧开始扩展，每次循环检查当前元素是否为 mx。如果是，则增加 cntMx 计数。当 cntMx 达到 k 时，开始从当前窗口的末尾位置 i 计算所有可能的符合条件的子数组，并逐步移动窗口的起始位置 left 直到 cntMx 小于 k。
3. 计数与输出：每次找到符合条件的窗口时，计算该窗口能生成的所有子数组的数量（数组长度-right+1，因为题目要求是大于等于 k 的子数组，那么右指针和右指针一直到数组结尾的这部分子数组是都满足条件的），并累加到 ans。最后输出最大农作物种类数、符合条件的序列总数和 ans。

算法时间复杂度主要由窗口滑动决定，虽然嵌套了 while 循环，但每个元素最多被访问两次（一次加入窗口，一次移出窗口），因此时间复杂度接近于 O(n)。

# C. 数组排序

记录第一个最小值的位置为 $pos$，因为每次都是把第一个数放在最后，再依次向前移动，如果最小值变成了第一个元素，那么操作之后，其实没有变化，所以如果 $pos$ 之后存在逆序对，就无法达成单调不下降，即为 $-1$，否则只需要把前面 $pos-1$ 个数移到后面即可，答案为 $pos-1$

# D. 魔法药水

二分答案，每一次操作只会对前面的药水有影响，而对其后面的没有影响，所以在二分判断答案 $k$ 是否可行时，可以从后往前遍历，每瓶药水都尽可能的往前倒入，这样才能使得前面的药水尽可能的多，但 $d$ 的最大值为 $a[i]/3$，所以需要取 $min$，即 $d = min(a[i]/3, (b[i] - k)/3)$

# E. 四舍五入

根据四舍五入的规则，从前往后找到第一个大于等于 $5$ 的数字，最大的数即为从该位置依次往前进位直到小于 $5$ 为止。

# F. 小 M 的烦恼

为了方便叙述对于每个 $1 \le i \le n$, 我们令 $b[i] = a[n-i+1]$，那么我们只需找到边长长度 $k$ 能够放入剩余格子中最大的正方形，也就是说找到一个 $k$ 满足 $k \le b[k]$，并且 $b[k+1] < k+1$, 那么这个 $k$ 就是最少需要放置的皇后数量。下面给出证明：

1. 为了覆盖这 $k * k$ 的格子，至少需要放置 k 个皇后（必要性）
2. 对于别的格子，如果我们放置这 $k$ 个皇后在最大正方形的对角线上，就可以完全覆盖其他的（充分性）

现在我们考虑如何计算放置这 $k$ 个皇后的方案数，也就是我们放置的这 $k$ 个皇后要满足以下两个条件之一：

1. 前 $k$ 行，每行要包含一个皇后
2. 前 $k$ 列，每列要包含一个皇后

接下来可以利用容斥原理来得到：满足 $1$ 的方案数 $+$ 满足 $2$ 的方案数 $-$ 同时满足 $1$ 和 $2$ 的方案数，最后一项显然为 $k!$。

对于满足（1）的方案数：我们令 $t = b[k+1]$，$t$ 就是必须要包含一个皇后的列数，我们令 $f[i][j]$ 表示前 $i$ 行中有 $j$ 列至少包含一个皇后的方案数, 并且这 $j$ 列要在前 $t$ 列的范围内，但动态规划的时间复杂度为 $O(n*n)$，不能通过该题。

接下来考虑如何进行优化：
我们现在只需要求在每行放置皇后使得前 $t$ 列至少包含一个皇后 (也就是满足 $1$ 的方案数)。考虑容斥原理，答案就是随意放置皇后的方案数，减去有一列没被覆盖的方案数，加上有两列没被覆盖的方案数……

由于列是互不相同的，我们只需要关注没被覆盖的列数 $p$，由乘法原理这 $p$ 列不包含任何皇后的方案数为 $(b_1 - p) * (b_2 - p) * \ldots * (b_k - p)$。则总的方案数为：
$\sum_{p=0}^{t} (-1)^p * \binom{t}{p} * (b_1 - p) * (b_2 - p) * \ldots * (b_k - p)$.

令 $f(x) = (b_1 - x) * (b_2 - x) * \ldots * (b_k - x)$，我们可以使用分治 $NTT$ 在 $O(k * logk * logk)$ 时间复杂度求出多项式 $f(x)$ 各个项的系数，然后利用多项式快速多点求值求出 $f(0), f(1), \ldots, f(t)$，快速求多点值时间复杂度为 $O(k * logk * logk)$，可以通过此题。
由于评测机以及尽量不去卡多项式板子，所以 $n$ 的范围只设置到 $60000$。

# G. 一代宗师

签到题。第一个条件：$x$ 与 $y$ 均为非 0 第二个条件：$|x + 99y - d| \leq k$

# H. 你也喜欢打篮球吗?

设在第 $i$ 秒拦截成功的概率为 $P_i$ 可以到达第 $i$ 秒的期望为 $dp_i$ 则可以得到状态转移方程:

$$dp_i = dp_{i-1} + (1 - P_i) + P_i * (dp_{i-1} + (1 - P_i)) + \ldots$$

化简后得到:

$$dp_i = \frac{y_i(dp_{i-1} + 1) - x_i}{y_i - x_i}$$

求 $dp_n$ 即可题解后附此题的完整证明，由于是手写无法完全转换。

# I. 粘对

遍历这首诗，如果当前这一句是第奇数句，判断与下一句之间是否满足”对“规则；如果当前这一句是第偶数句，判断与下一句之间是否满足”粘“规则。