

第五章 函数

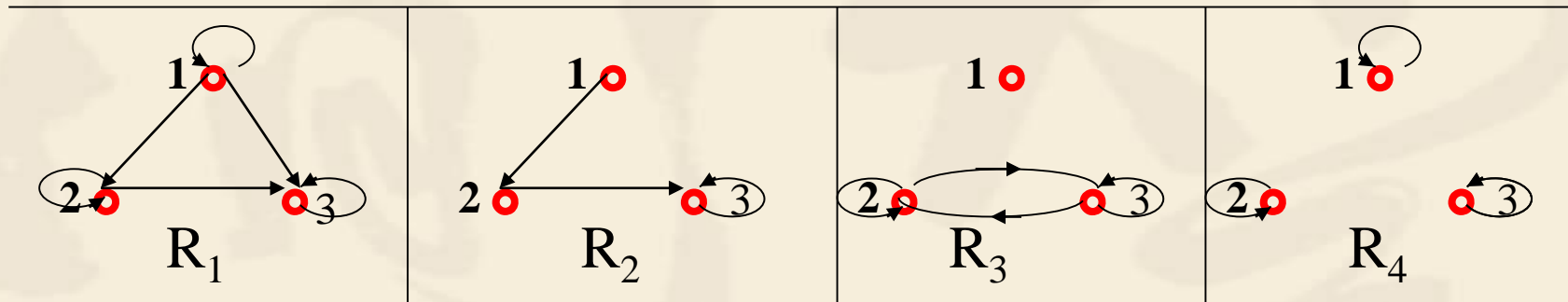
本章主要介绍：

函数的概念、
函数的复合运算、逆函数，
集合的基数。

第1节 函数的基本概念

- 1.函数：**令 X 、 Y 是集合， f 是从 X 到 Y 的关系，如果对任何的 $x \in X$ ，都存在唯一的 $y \in Y$ ，使得 $\langle x, y \rangle \in f$ ，则称 f 是从 X 到 Y 的函数(变换、映射)，记作 $f: X \rightarrow Y$ ，或 $X \xrightarrow{f} Y$ 。如果 $f: X \rightarrow X$ 是函数，则称 f 是 X 上的函数。
- 2.自变元与函数值(像源与映像)：** $f: X \rightarrow Y$ ，如果 $\langle x, y \rangle \in f$ ，称 x 是自变元(像源)，称 y 是 x 的函数值(映像)。 $\langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow y = f(x)$

$A=\{1,2,3\}$ 上的几个关系，哪些是A到A的函数？



函数关系图的特点：

每个结点均有且仅有一条往外发的弧线(包括环)。

函数关系矩阵的特点：

每行均有且仅有一个1。

3、定义域、值域和陪域(共域) : $f:X \rightarrow Y$,
f 的定义域(domain): 记作 $\text{dom } f$ 或 D_f ,
 $D_f = \text{dom } f = \{x | x \in X \wedge \exists y (y \in Y \wedge \langle x, y \rangle \in f)\}$

$$D_f = \text{dom } f = X$$

f 的值域(range): 记作 $\text{ran } f$, 或 R_f 或 $f(X)$

$$R_f = \text{ran } f = f(X) \\ = \{y | y \in Y \wedge \exists x (x \in X \wedge \langle x, y \rangle \in f)\}$$

$$R_f = \text{ran } f \subseteq Y$$

f 的陪域(codomain): Y 称之为 f 的陪域。

下面是大家熟悉的实数集合上的几个关系，
哪些是**R到R**的函数？

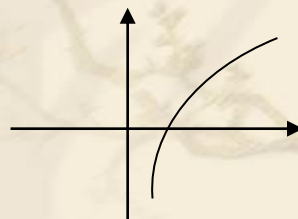
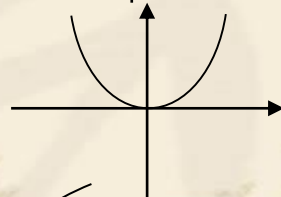
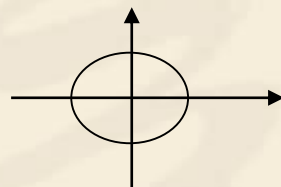
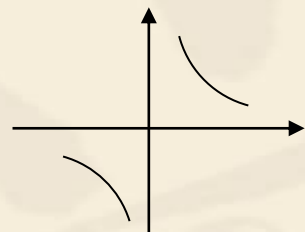
$$f = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{1}{x} \}$$

$$g = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 4 \}$$

$$h = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2 \}$$

$$r = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = \lg x \}$$

$$v = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y = \sqrt{x} \}$$



4、两个函数相等

设有两个函数 $f:A \rightarrow B$, $g:C \rightarrow D$, $f = g$ 当且仅当 $A=C$, $B=D$, 且对任何 $x \in A$, 有 $f(x)=g(x)$ 。

即它们的定义域、陪域相等、映射也相同。

5、从 X 到 Y 函数的集合 Y^X :

$$Y^X = \{ f \mid f: X \rightarrow Y \}$$

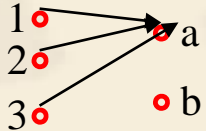
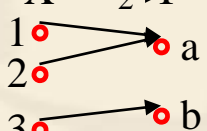
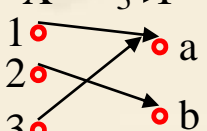
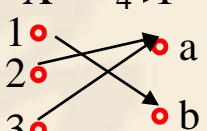
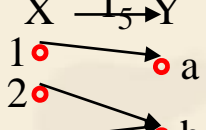
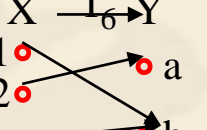
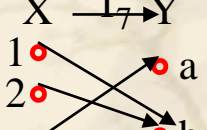
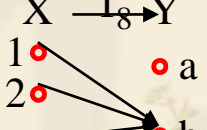
Y^X : 是由所有从 X 到 Y 的函数构成的集合。

如果 X 和 Y 是有限集合, $|X|=m$, $|Y|=n$, 因为 X 中的每个元素对应的函数值都有 n 种选择, 于是可构成 n^m 个不同的函数,

因此 $|Y^X| = |Y|^{|X|} = n^m$,

可见符号 Y^X 有双重含义。

例： $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$, 列出所有从 X 到 Y 的函数如下：

$X \xrightarrow{f_1} Y$ 	$X \xrightarrow{f_2} Y$ 	$X \xrightarrow{f_3} Y$ 	$X \xrightarrow{f_4} Y$ 
$X \xrightarrow{f_5} Y$ 	$X \xrightarrow{f_6} Y$ 	$X \xrightarrow{f_7} Y$ 	$X \xrightarrow{f_8} Y$ 

$$Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$$