第8节　可数集合及其基数

1.自然数集合N的基数

因为 N 不可能与某个自然数 n 等势。所以 N 的基数不能是有限数，就用一个“无限大”的数$\aleph_0$ (读:阿列夫零)表示，即$K[N]=\aleph_0$。

2.可数集: 与自然数集合N等势的集合，称之为可数集。

$A=\{0,2,4,6,8,\ldots\ldots\}$ $f:N\to A$ $f(n)=2n$

$B=\{1,3,5,7,9,\ldots\ldots\}$ $g:N\to B$ $g(n)=2n+1$

$C=\{10^0,10^1,10^2,10^3,\ldots\ldots\}$ $h:N\to C$ $h(n)=10^n$

集合A，B， C 都是可数集合。

3. 可数集的判定

定理1 集合 A 是可数集的充分且必要条件是可将 A 中的元素写成序列的形式，即 $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

证明：因为这样 A 就可以与 N 之间建立一一对应。证明很简单，从略。

例如

整数集合 $I \sim N$。因为 I 可以写成：

$$I=\{0,-1,1,-2,2,-3,3,-4,4, \ldots\},$$

所以 I 是可数集。

有理数集合 Q~N。

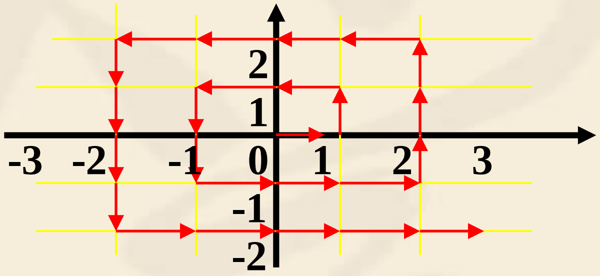
因为每个有理数都可以写成分数形式，可以如下图从0/1开始按照箭头指定次序排列Q中的元素(如果这个有理数在前面出现，就跳过去)：

…	-3/1	-2/1	-1/1	0/1	1/1	2/1	3/1	…
…	-3/2	-2/2	-1/2	0/2	1/2	2/2	3/2	…
…	-3/3	-2/3	-1/3	0/3	1/3	2/3	3/3	…
…	-3/4	-2/4	-1/4	0/4	1/4	2/4	3/4	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

所以有理数集合 Q 是可数集。

同样 I×I~N,

因I×I可以如右图排列:



4. 至多可数集：有限集合和可数集合统称为至多可数集。