第七章 代数系统

第四节 二元运算中的特殊元素(2)

3、零元

定义

设★是 X 上的二元运算，如果有 $\theta_L \in X$，使得对任何 $x \in X$，有 $\theta_L \star x = \theta_L$，则称 θ_L 是相对★的左零元。

如果有 $\theta_R \in X$，使得对任何 $x \in X$，有 $x \star \theta_R = \theta_R$，则称 θ_R 是相对★的右零元。

如果 $\theta_L = \theta_R = \theta$，对任何 $x \in X$，有 $\theta \star x = x \star \theta = \theta$，称 θ 是相对★的零元。

例如：实数集合上的乘法×，零元是0；

因为$a\times 0=0\times a=0$ (a为任意实数)

- 集合族上的并运算∪，零元是全集E；

  因为$E\cup A=A\cup E=E$

- 集合族上的交运算∩，零元是Φ；

  因为$\Phi\cap A=A\cap\Phi=\Phi$ (A为任意集合)

从运算表找左零元 θ_L：

θ_L所在行的各元素均与左表头元素相同。

如a, b, d行，所以 a, b, d是 θ_L

∘	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	b	a	d	c
d	d	d	d	d

从运算表找右零元 θ_R：

θ_R所在列的各元素均与上表头元素相同。

如 a, c 列，所以 a, c 是 θ_R

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	d	c	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	a

定理

设★是 X 上的二元运算，如果有左零元 $\theta_L \in X$，也有右零元 $\theta_R \in X$，则 $\theta_L = \theta_R = \theta$，且零元 θ 是唯一的。

（证明与前定理类似，从略。）

定理

设 ★是集合X 上的二元运算，且 |X|>1。如果该代数系统中存在幺元 e 和零元 θ，则 $\theta \neq e$。

证明：用反证法。

假设 $\theta=e$，那么对任意 $x \in X$，必有

$x = e \star x = \theta \star x = \theta = e$，

这说明 X中的所有元素都是相同的，这与 $|X|>1$ 矛盾。所以 $\theta \neq e$。

- 当 $|X| > 1$，幺元与零元一定是不同的；
- 当 $|X| = 1$，这个集合中只包含一个元素，如果运算是封闭的，

则这个元素既是幺元也是零元。

★	a
a	a

第四节 结束