

第四章 二元关系

第二十三节 次序关系

第二十三节 次序关系

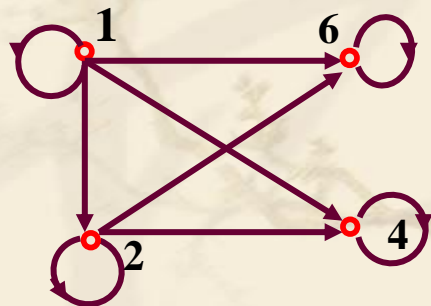
一. 偏序(半序)关系(partial order relation)

定义： R 是 A 上自反、反对称和传递的关系，则称 R 是 A 上的偏序关系，并称 $\langle A, R \rangle$ 是偏序集。

例如，数值的 \leq 、 \geq 关系和集合的 \subseteq 都是偏序关系。

用符号 “ \leq ” 表示任意偏序关系，但要注意，这里的 “ \leq ” 不一定是“小于或等于”的含义。

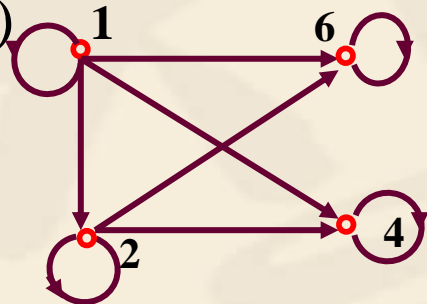
例1 $A = \{1, 2, 4, 6\}$, \leq 是 A 上的整除关系，其关系图如右图，显然 \leq 是自反、反对称和传递的，即它是个偏序关系。



第二十三节 次序关系

一. 偏序(半序)关系(partial order relation)

例1 $A=\{1,2,4,6\}$, \leq 是 A 上的整除关系, 其关系图如右图, 显然 \leq 是偏序关系。



偏序关系有向图的特点:

📖 每个节点都有环(自反性);

📖 不同节点之间可以没有边, 如果有边, 至多只有一条边; (反对称性)

📖 由于有 $(a,b) \in R$ 和 $(b,c) \in R$, 则 $(a,c) \in R$; (传递性)

第二十三节 次序关系

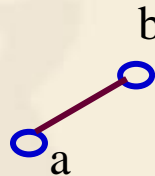
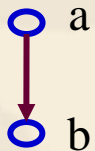
一. 偏序(半序)关系(partial order relation)

偏序关系的简化关系图：

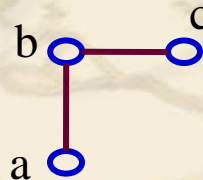
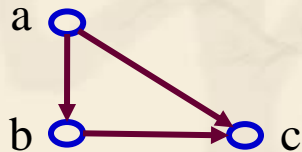
(1)自反性：每个顶点都有环，省去。

(2)反对称性：两个不同顶点间只可能有一条边，那么按照左→右，或下→上的方向依偏序关系安置顶点，可省略箭头。

例如，如果 $a \leq b$ ，则



(3)传递性：由于有 $(a,b) \in R$ ， $(b,c) \in R$ 则 $(a,c) \in R$ ，故只画 (a,b) ， (b,c) 对应的边，省略边 (a,c) 。



第二十三节 次序关系

一. 偏序(半序)关系(partial order relation)

定义： Hasse图

设 \leq 是 A 上的一个偏序关系，如果 $a \leq b$ ，则将 a 画在 b 的下面，且不 $\exists c$ ，使 $a \leq c$ ， $c \leq b$ ，则 a ， b 间用直线连接。并符合简化的关系图的绘制，称这样得到关系图为Hasse图。

第二十三节 次序关系

一. 偏序(半序)关系(partial order relation)

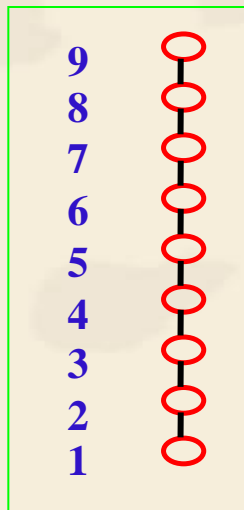
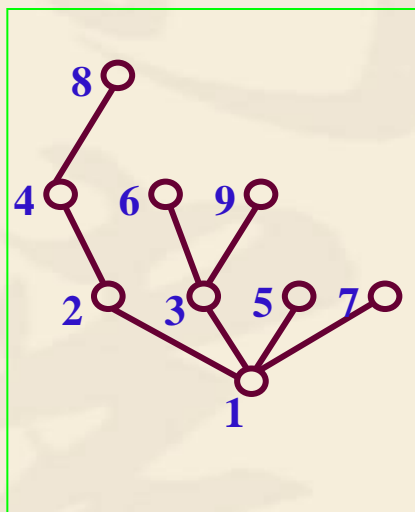
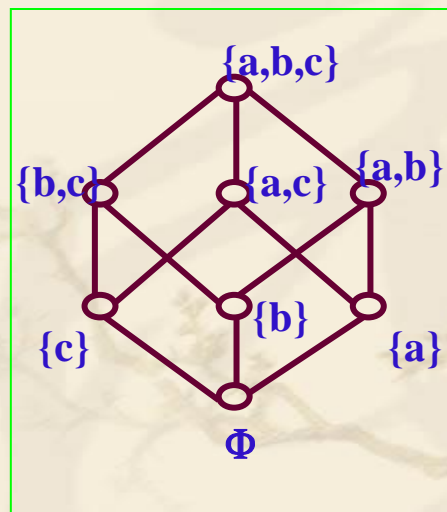
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$R_1 = \{ \langle a, b \rangle \mid a \leq b, a, b \in A \}$$

$$R_2 = \{ \langle a, b \rangle \mid a \mid b, a, b \in A \}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$R_3 = \{ \langle s_1, s_2 \rangle \mid s_1 \subseteq s_2, s_1, s_2 \in p(B) \}$$

 R_1  R_2  R_3

第二十三节 次序关系

二. 全序(线序、链)关系

定义：集合 A 上半序关系 R ，如果 $\forall a, b \in A$ ，都有 $a \leq b$ ，或 $b \leq a$ ，则称 R 为 A 上的全序关系。

全序与半序的含义： $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

如果 R 是 A 上的全序关系，那么就是说 A 中任意两个元素均具有 R 关系，例如 A 集合上的 $R_1 = \{ \langle a, b \rangle \mid a \leq b, a, b \in A \}$ 关系；

如果 R 是 A 上的半序关系，那么就是说 A 中的部分元素具有 R 关系，例如 A 集合上的 R_2 中，1和2，2和6，4和8都具有整除关系，但2与3，5与7，7与9等不具有整除关系。