第八章　群和环

第十八节 环与域(2)

零因子

设 $<A,+,\cdot>$是环，

+ 运算的幺元 0，恰是 · 运算的零元，称 0 是环的零元。

显然　若 $a=0 \vee b=0$ 则 $a\cdot b=0$。

反之，如果 $a\cdot b=0$，是否有 $a=0 \vee b=0$？

不一定。

例如：$<\mathcal{P}(A), \oplus, \cap>$是环，$\Phi$ 是零元。

设 $A=\{a,b\}$，$\{a\}$ 和 $\{b\}$ 都不是零元，但

$\{a\}\cap\{b\}=\Phi$。

称 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 是零因子。

零因子定义： 设<A,+,·>是环，有 $a,b\in A$， 使得 $a\neq 0 \wedge b\neq 0$，但 $a\cdot b=0$， 则称 a， b 是零因子。

无零因子：

设<A,+,·>是环，

对任意 $a,b\in A$，若 $a\neq 0 \wedge b\neq 0$ 必有 $a\cdot b\neq 0$，则称环 <A,+,·> 中无零因子。

或者，

对任意 $a,b\in A$，若 $a\cdot b=0$ 必有 $a=0 \vee b=0$，则称环 <A,+,·>中无零因子

三. 特殊环

定义 设 $\langle A,+,\cdot\rangle$ 是环,

(1) 若 · 运算满足交换律，则称 $\langle A,+,\cdot\rangle$ 是 **交换环**。

(2) 若$\langle A,\cdot\rangle$存在幺元，则称 $\langle A,+,\cdot\rangle$ 是 **含幺环**。

(3) 若 $\forall a,b\in A$， $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=$

$\langle A,+,\cdot\rangle$ 是**无零因子环**。

(4) 若 $\langle A,+,\cdot\rangle$ 是交换环、含幺环、

则称 $\langle A,+,\cdot\rangle$ 是**整环**。

(5) 若 $\langle A-\{0\},\cdot\rangle$是交换群，则称 $\langle A,+,\cdot\rangle$ 是**域**。

因为 0 是 $\langle A,\cdot\rangle$的零元，它没有逆元，如要$\langle A,\cdot\rangle$构成群，必须将零元抠掉。

第十八节 结束