第6节 命题公式及其赋值

一、命题公式

先看一个命题公式：

P：3是素数。

$(P \rightarrow F) \vee (Q \leftrightarrow R) \wedge T$

在命题公式中有三种数据类型：

- 命题常项：即命题的真值。
- 常值命题：即具体命题。
- 命题变元：用大写字母表示的任一命题。命题变元本身不是命题，因为它没有固定真值，只有给它赋值，才变成命题。

将一个命题常项或常值命题赋予命题变元的过程称为给命题变元赋值，也称为对命题变元作指派。

例 令 P：北京比天津人口多。

Q：2+2=4。

R：乌鸦是白色的。

求下面复合命题的真值：

$(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee \neg R) \rightarrow P)$

解：P的真值为T，Q的真值为T，R的真值为F。

$(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee \neg R) \rightarrow P) \Leftrightarrow$

$(F \rightarrow (T \vee F)) \wedge ((T \vee T) \rightarrow T) \Leftrightarrow T$

合式公式（合法的命题公式）定义：

(1) 单个命题变元、常值命题及命题常项是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$\neg$A是合式公式。

(3) 若A和B是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$
$(A\leftrightarrow B)$都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的符号串是合式公式。

合式公式也称为命题公式，简称为公式。

例：下面的式子是合式公式：

$(P \wedge Q)$,

$(\neg P \rightarrow R)$,

$((P \wedge Q) \vee R)$

为了简化命题公式，约定：

(1) 最外层括号可省；

(2) 不影响运算次序的括号可省。

运算次序由高到低为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

合式公式：

$(P\wedge Q)$，$(\neg P\rightarrow R)$，$((P\wedge Q)\vee R)$

可以简化成：

$P\wedge Q$,

$\neg P\rightarrow R$,

$(P\wedge Q)\vee R$,

$P\wedge Q\vee R$

二、命题公式的真值表

一个含有命题变元的命题公式不是命题，因为它没有固定真值，但是给其中的所有命题变元赋值以后它就有了唯一的真值。将所有各种赋值情况汇列成表，即为该命题公式的真值表。

例：命题 公式 $(\neg P \rightarrow Q) \vee Q$ 的真值表如下所示：

P	Q	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$(\neg P \rightarrow Q) \vee Q$
F	F	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	F	T	T

构造真值表的步骤：

- 由于每个命题变元都有两种赋值可能性(T,F)，所以含有 n(n ≥1) 个命题变元的命题公式真值表有2^n行。
- 将n个命题变元按字母次序排列。
- 将 F 记为 0，T 记为 1，按照二进制数的次序赋值。
- 赋值从 00…0 开始，然后按二进制加法依次加 1，直到 11…1 为止。
- 对每个赋值，计算命题公式的真值。

例：构造 P→(Q→R) 的真值表

	P	Q	R	Q→R	P→(Q→R)
0 0 0	F	F	F	T	T
0 0 1	F	F	T	T	T
0 1 0	F	T	F	F	T
0 1 1	F	T	T	T	T
1 0 0	T	F	F	T	T
1 0 1	T	F	T	T	T
1 1 0	T	T	F	F	F
1 1 1	T	T	T	T	T