

第七章 代数系统

第五节 二元运算中的特殊元素 (3)

4、逆元

定义

设 \star 是 X 上有么元 e 的二元运算, $x \in X$, 如果有 $x_L^{-1} \in X$, 使得 $x_L^{-1} \star x = e$, 则称 x_L^{-1} 是 x 相对 \star 的左逆元。

如果有 $x_R^{-1} \in X$, 使得 $x \star x_R^{-1} = e$, 则称 x_R^{-1} 是 x 相对 \star 的右逆元。

如果 $x_L^{-1} = x_R^{-1} = x^{-1}$, 有 $x^{-1} \star x = x \star x^{-1} = e$, 称 x^{-1} 是 x 相对 \star 的逆元。也称 x^{-1} 与 x 互为逆元。如 $x^{-1} \in X$, 也称 x 可逆。

例：实数集合 R 上的 $+$ 和 \times ， $x \in R$

❖ 对加法 $+$ ： $x^{-1} = -x$

因为 $e=0$ ， $x + (-x) = 0$

❖ 对乘法 \times ： $x^{-1} = 1/x$ ($x \neq 0$)

❖ 因为 $e=1$ ， $x \times 1/x = 1$

从运算表找 x 的左逆元 x_L^{-1} :
 在 x 列向下找到 e 后, 再
 向左到左表头元素即是 x_L^{-1} 。

\circ	S	R	A	L x_R^{-1}
S	S	R	A	L
R	R	A	L	S
A	A	L	S	R
L x_L^{-1}	L	S	R	A

从运算表找 x 的右逆元 x_R^{-1} :
 在 x 行向右找到 e 后, 再向
 上到上表头元素即是 x_R^{-1} 。

么元为 S;
 $R^{-1}=L$; $L^{-1}=R$;
 $A^{-1}=A$

逆元唯一性定理

定理

设 \star 是 X 上有么元 e 且可结合的二元运算，如果 $x \in X$ ， x 的左、右逆元都存在，则 x 的左、右逆元必相等，且 x 的逆元是唯一的。

证明： 设 x_L^{-1} 、 x_R^{-1} 分别是 x 的左、右逆元，于是有

$$\begin{aligned} x_L^{-1} \star x &= x \star x_R^{-1} = e, \text{ 而 } x_R^{-1} = e \star x_R^{-1} \\ &= (x_L^{-1} \star x) \star x_R^{-1} = x_L^{-1} \star (x \star x_R^{-1}) = x_L^{-1} \star e = x_L^{-1} \end{aligned}$$

假设 X 有两个逆元 x_1 、 x_2 ，所以

$$x_1 \star x = e = x \star x_2$$

$$x_2 = e \star x_2 = (x_1 \star x) \star x_2 = x_1 \star (x \star x_2) = x_1 \star e = x_1$$

所以 x 的逆元是唯一的。

第五节 结束