

第七章 代数系统

第十一节 代数系统同构的性质(3)

6、保持分配率

6) 令 $\langle X, +, \times \rangle$ 和 $\langle Y, \oplus, \diamond \rangle$ 是含有两个运算的代数系统，其中 $+$ 、 \times 、 \oplus 、 \diamond 都是二元运算，如果运算 $+$ 对 \times 可分配，则 \oplus 对 \diamond 也可分配。

证明：任取 $y_1, y_2, y_3 \in Y$ ，因 $f: X \rightarrow Y$ 是满射，所以存在 $x_1, x_2, x_3 \in X$ ，使得 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3)$

$$\begin{aligned} y_1 \oplus (y_2 \diamond y_3) &= f(x_1) \oplus (f(x_2) \diamond f(x_3)) \\ &= f(x_1) \oplus f(x_2 \times x_3) = f(x_1 + (x_2 \times x_3)) = f((x_1 + x_2) \times (x_1 + x_3)) \\ &= f(x_1 + x_2) \diamond f(x_1 + x_3) = (f(x_1) \oplus f(x_2)) \diamond (f(x_1) \oplus f(x_3)) \\ &= (y_1 \oplus y_2) \diamond (y_1 \oplus y_3), \text{ 所以 } \oplus \text{ 对 } \diamond \text{ 也可分配。} \end{aligned}$$

7、保持吸收率

7) 令 $\langle X, +, \times \rangle$ 和 $\langle Y, \oplus, \blacklozenge \rangle$ 是含有两个运算的代数系统，其中 $+$ 、 \times 、 \oplus 、 \blacklozenge 都是二元运算，如果运算 $+$ 和 \times 满足吸收率，则 \oplus 和 \blacklozenge 也满足吸收率。

证明与6)类似，略。

同构性质的保持是双向的，即 Y 中运算的性质也可以保持到 X 中运算。

由于同态关系 \sim 不满足对称性，所以同态性质的保持只是单向的。

即 Y 中 \oplus 的性质， X 中 \star 不一定有。

第十一节 结束