第九章 格与布尔代数

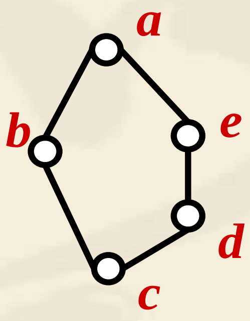
第五节

格的性质(3)

8. $\vee$和$\wedge$不满足分配律。但有**分配不等式**:

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$$



- 我们先看右图的例子:

$d\vee(b\wedge e)=d\vee c=d$, $(d\vee b)\wedge(d\vee e)=a\wedge e=e$

而 $d\preccurlyeq e$ 即 $d\vee(b\wedge e)\preccurlyeq(d\vee b)\wedge(d\vee e)$

证明: 由 $a\preccurlyeq a$, $b\wedge c\preccurlyeq b$ 得$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq a\vee b$

由 $a\preccurlyeq a$, $b\wedge c\preccurlyeq c$ 得 $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq a\vee c$

从而得到 $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

由对偶原理得 $a\wedge(b\vee c)\succcurlyeq(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

即 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$。

9. $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

证明

(1)先证 $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$

由 $a \preccurlyeq a$ 和 $a \preccurlyeq b$ 可知 a 是$\{a, b\}$的下界，故 $a \preccurlyeq a \wedge b$，

显然有$a \wedge b \preccurlyeq a$， 由反对称性得 $a \wedge b = a$

(2) 再证 $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$

根据吸收律有 $b = (a \wedge b) \vee b$

由 $a \wedge b = a$ 和上面的等式得 $a \vee b = b$，

(3) 最后证 $a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$

由 $a \preccurlyeq a \vee b$ 得 $a \preccurlyeq a \vee b = b$

第五节

结束