# 第九章  格与布尔代数

第三节

# 格的性质(1)

# 格的性质

$<A,\vee,\wedge>$是由格$<A,\preccurlyeq>$诱导的代数系统。$\forall a, b, c, d\in A$

1. $a\preccurlyeq a\vee b,\ b\preccurlyeq a\vee b,\ a\wedge b\preccurlyeq a,\ a\wedge b\preccurlyeq b$

   此性质由运算$\vee$和$\wedge$的定义直接得证。

2. 如果$a\preccurlyeq b$，$c\preccurlyeq d$，则$a\vee c\preccurlyeq b\vee d$，$a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d$

**证明：** 如果$a\preccurlyeq b$，又$b\preccurlyeq b\vee d$，由传递性得$a\preccurlyeq b\vee d$

类似由$c\preccurlyeq d$，$d\preccurlyeq b\vee d$，由传递性得$c\preccurlyeq b\vee d$,

这说明$b\vee d$是$a, c$的上界，而$a\vee c$是$a, c$的最小上界，

所以$a\vee c\preccurlyeq b\vee d$。类似可证$a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d$。

**推论：** 在一个格中，任何 $a, b, c \in A$，如果$b \preccurlyeq c$，则 $a \vee b \preccurlyeq a \vee c$，$a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c$。此性质称为格的**保序性**。

3. $\vee$和$\wedge$都满足**交换律**。即 $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$

此性质由运算$\vee$和$\wedge$的定义直接得证。

4. $\vee$和$\wedge$都满足**幂等律**。即 $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$

**证明：** 显然 $a \preccurlyeq a \vee a$, 又由 $a \preccurlyeq a$ 可得 $a \vee a \preccurlyeq a$,

根据反对称性有$a \vee a = a$,

由对偶原理，$a \wedge a = a$ 得证。

第三节

**结束**