第九章 格与布尔代数

第八节

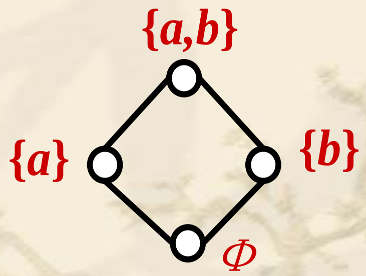
布尔代数(1)

一. 布尔代数概念

布尔代数

由布尔格 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统 $\langle B, \vee, \wedge, \bar{\ } \rangle$，称之为**布尔代数**。其中 $\bar{\ }$ 是取补元运算。如果B是有限集合，则称它是**有限布尔代数**。

例 令$B=\{0,1\}$，$\wedge$表示合取，$\vee$表示析取，$\neg$表示否定，$\langle B,\vee,\wedge,\neg \rangle$就是个布尔代数。$\langle P(E),\cup,\cap,\sim \rangle$ 也是个布尔代数。如图所示。



实例

例1 设 $S_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$是30的正因子集合，gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，问$<S_{30}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$是否构成布尔代数？为什么？

解 (1) 用Hasse图证明S_{30}关于gcd 和 lcm 运算构成格 (略)

(2) 证明S_{30}是分配格， $\forall x, y, z \in S_{30}$ 有

$$\mathrm{gcd}(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{gcd}(x, y), \mathrm{gcd}(x, z))$$

(3) 证明S_{30}是有补格，1为S_{30}中的全下界，30为全上界，1和30互为补元，2和15互为补元，3和10互为补元，5和6互为补元

所以 $<S_{30}, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$为布尔代数.

例2 设 B为任意集合,证明B的幂集格 $<P(B), \cap, \cup, \sim>$构成布尔代数， 称为集合代数。

证明 (1) $P(B)$中的子集关系是偏序关系， $P(B)$中元素关于$\cap$和$\cup$构成格

(2) 由于$\cap$和$\cup$互相可分配， 因此$P(B)$是分配格

(3) 全下界是空集$\varnothing$, 全上界是B

(4) 根据绝对补的定义, 取全集为B, $\forall x \in P(B)$, $\sim x$是x的补元

从而证明$P(B)$是有补分配格, 即布尔代数。

二. 布尔代数的性质

设$<B, \vee, \wedge, \bar{\ }>$布尔代数, 任意$x, y, z \in B$, 有

(1) 交换律 $x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$

(2) 结合律 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(3) 幂等律 $x \vee x = x, \ x \wedge x = x$

(4) 吸收律 $x \vee (x \wedge y) = x, \ x \vee (x \wedge y) = x$

(5) 分配律 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(6) 同一律 $x \vee 0 = x, \ x \wedge 1 = x$

(7) 零律 $x \vee 1 = 1, \ x \wedge 0 = 0$

(8) 互补律 $x \vee \bar{x} = 1 \qquad x \wedge \bar{x} = 0$

(9) 对合律 $\bar{\bar{x}} = x$

(10) 德-摩根定律 $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

下面证明德-摩根定律

$$
\begin{aligned}
&(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = ((x \vee y) \vee \bar{x}) \wedge ((x \vee y) \vee \bar{y}) \\
&= ((y \vee x) \vee \bar{x}) \wedge (x \vee (y \vee \bar{y})) \\
&= (y \vee (x \vee \bar{x})) \wedge (x \vee 1) \\
&= (y \vee 1) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1 \\
&(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (x \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \\
&= ((x \wedge \bar{x}) \wedge \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{y} \wedge \bar{x})) \\
&= (0 \wedge \bar{y})) \vee ((y \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x})) \\
&= 0 \vee (0 \wedge \bar{x})) = 0 \vee 0 = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$

同理可证 $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

第八节

结束