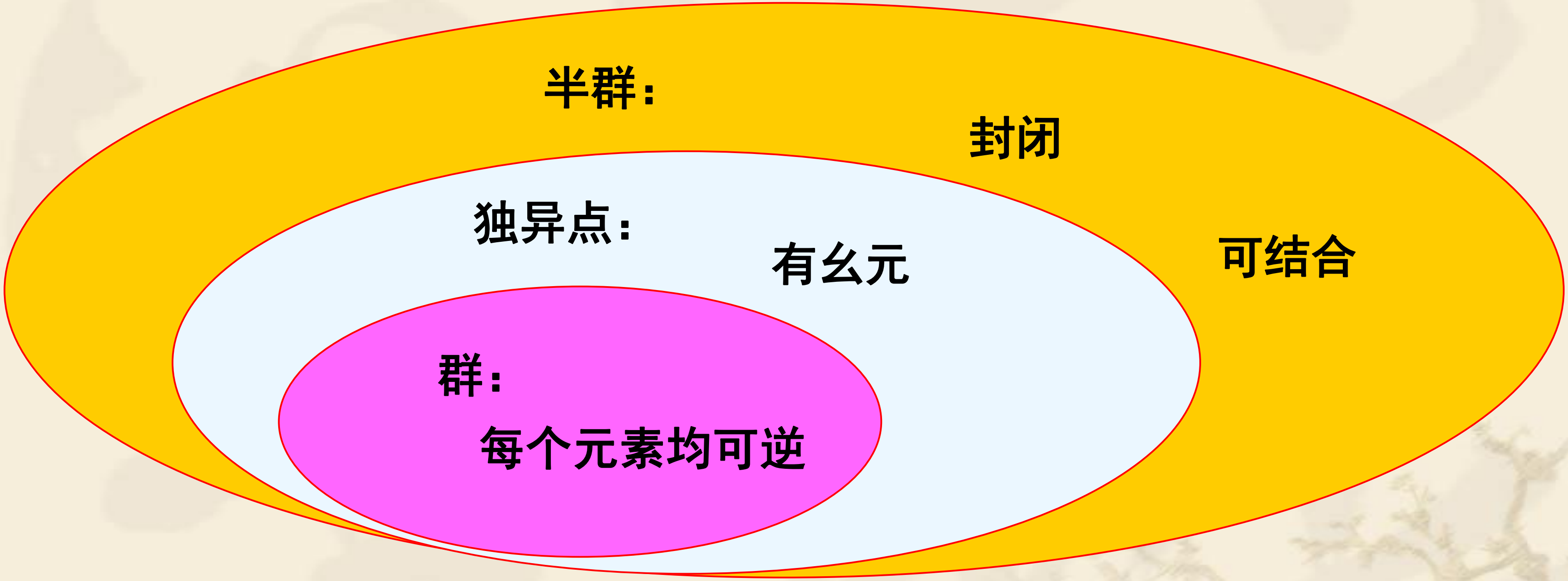
第八章　群和环

第三节 群的定义及性质(1)

群是抽象代数中最重要的代数系统。



一、概念

1. 群的定义： 设 <G,★> 是代数系统，如果★运算在G 上满足**封闭性、可结合性、<G,★>中有幺元** 且 **G 中的每个元素均可逆**，则称<G,★>是群。

2. 定义：

(1) 设<G,★> 是群，若集合G是有限集，则称<G,★>是有限群。反之称为无限群。

(2) 只含有幺元的群叫平凡群。

(3) 若★运算是可交换的，则称 <G,★> 是交换群 或 阿贝尔 （Abel）群

思考

$\langle R,+\rangle$、$\langle P(E),\oplus\rangle$是否是群？

$\langle R,\times\rangle$是独异点，幺元是 1，零元是 0。因为 0 没有逆元，所以$\langle R,\times\rangle$ 不是群。

$\langle P(E),\cap\rangle$是独异点，幺元是 E。对任意集合 $A\in P(E)$ 且A不等于全集 E，是否有这样的集合使得 $A\cap ? = E$ ？

没有这样的集合，即 A 没有逆元。所以$\langle P(E),\cap\rangle$ 不是群。

二、群的性质

群除了具有封闭、可结合、有幺元、每个元素均可逆这四个性质外，还有一些其它性质。

1. 群中无零元。

定理 设<G,★>是群，如果|G| ≥2，则 G 中无零元。

证明：（反证法）假设G中有零元θ，则对任何x∈G，有 θ★x＝x★θ＝θ≠e，所以零元 θ 就不存在逆元，这与<G,★>是群矛盾。所以群<G,★>中无零元。

第三节 结束