第八章　群和环

第六节 群的定义及性质(3)

5. 有限群运算表的特征

定理 设<G,★>是有限群，则G中每个元素在★运算表中的每一行(列)都必出现且仅出现一次。

证明： 令 $G=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}$，

★的运算表如图。

对于 a_i 行，任取 $a_k \in G$，

由性质4 知 存在唯一元素 $a_j \in G$，

使得 $a_i ★ a_j = a_k$ 。 这说明

a_k 在 a_i 行 a_j 列出现，并且在 a_i 行

仅出现在 a_j 列上。即 a_i 行不可能出现两个相同元素。

同理可证 G中任意元素必在每列出现且仅出现一次。

★	a_1	a_2	…	a_j	…	a_t	…	a_n
a_1								
…								
a_i				a_k		a_k		
…								
a_n								

定理 $\langle G,\star\rangle$是个群，对任何 $a,b\in G$，有

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $(a\star b)^{-1}= b^{-1}\star a^{-1}$

证明：(1) 因为 a^{-1} 与 a 互为逆元，所以 $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) 验证 $b^{-1}\star a^{-1}$ 是 $a\star b$ 的逆元：

$(a\star b)\star(b^{-1}\star a^{-1})=a\star(b\star b^{-1})\star a^{-1}=a\star e\star a^{-1}$

$= a\star a^{-1}=e$

$(b^{-1}\star a^{-1})\star(a\star b)=b^{-1}\star(a^{-1}\star a)\star b=b^{-1}\star e\star b$

$=b^{-1}\star b=e$

所以 $b^{-1}\star a^{-1}$ 是 $a\star b$ 的逆元，即 $(a\star b)^{-1}=b^{-1}\star a^{-1}$

推论： $\langle G,\star\rangle$是个群，对任何 $a\in G$，有

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$$

因为 $(a^2)^{-1} =(a\star a)^{-1} = a^{-1}\star a^{-1} = (a^{-1})^2$

……

$(a^n)^{-1}=(a\star a\star \dots\star a)^{-1}=(a^{-1}\star a^{-1}\star \dots\star a^{-1})=(a^{-1})^n=a^-$

规定1： $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ 。

规定2： $a^0 =e$ 。

因为对任何 $a\in G$，有

$$e=a\star a^{-1}=a^{1+(-1)} =a^0 \text{。}$$

第六节 结束