第四章　二元关系

第十五节 关系闭包运算的性质

第十五节 关系闭包运算的性质

一、关系闭包运算的性质

定理5. R是A上关系，则

(1) R是自反的，当且仅当 $r(R)=R$

(2) R是对称的，当且仅当 $s(R)=R$

(3) R是传递的，当且仅当 $t(R)=R$

证明定理5性质(3):

必要性：已知R是传递的，求证$t(R)=R$。因为R传递，所以R是包含R的最小的传递关系，R本身就是R的传递闭包，故$t(R)=R$。

充分性：已知$t(R)=R$，求证R是传递的。显然成立。

第十五节 关系闭包运算的性质

一、关系闭包运算的性质

定理6. R是A上关系，则

(1) R是自反的，则s(R)和t(R)也自反。

(2) R是对称的，则r(R)和t(R)也对称。

(3) R是传递的，则r(R)也传递。

一个自反关系的三个闭包都自反。(r(R)显然自反)

一个对称关系的三个闭包都对称。(s(R)显然对称)

一个传递关系的自反闭包传递，对称闭包不一定传递。

证明(1): 因为R自反,由定理5得r(R)=R,即

$R\cup I_A=R$, $r(s(R))=s(R)\cup I_A=(R\cup R^C)\cup I_A$

$=(R\cup I_A)\cup R^C=r(R)\cup R^C=R\cup R^C=s(R)$ ∴ s(R)自反，类似可以证明t(R)也自反。

第十五节 关系闭包运算的性质

一、关系闭包运算的性质

求证定理6 (3)：

(3) R是传递的，则r(R)也传递。

利用定理5的结论(3)： R是传递的，当且仅当 t(R)=R

考察t(r(R))= r(R)是否成立？

提示：这里用到了

$(R\cup I_A)^i = I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^i$，

这个公式可以用数学归纳法证明。

证明：$t(r(R))=t(R\cup I_A)$

$= (R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^2\cup(R\cup I_A)^3\cup\ldots$

$=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R\cup R^2)\cup(I_A\cup R\cup R^2\cup R^3)\cup\ldots$

$= I_A\cup R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots= I_A\cup t(R)$

$= I_A\cup R$

$=r(R)$

第十五节 关系闭包运算的性质

一、关系闭包运算的性质

定理7：设R_1、R_2是A上关系，如果$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明7(1)：
$r(R_1)=I_A \cup R_1 \subseteq I_A \cup R_2 = r(R_2)$

证明7(2)：
$s(R_1)= R_1^C \cup R_1 \subseteq R_2^C \cup R_2 = s(R_2)$

证明7(3)：首先证明若$R_1 \subseteq R_2$，则$R_1^i \subseteq R_2^i$。

任取$<x,y> \in R_1^i \Leftrightarrow$在$R_1$的有向图中,有一条从$x$到$y$的路径,包含i条边（i个序偶）：

$x \to e_1 \to e_2 \ldots \to e_{i-1} \to y$,又由于$R_1 \subseteq R_2$,所以这i个序偶也属于$R_2$,所以$<x,y> \in R_2^i$,所以$R_1^i \subseteq R_2^i$。

$t(R_1)= R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cup \ldots\ldots$，$t(R_2)= R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3 \cup \ldots\ldots$，可见，$t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

第十五节 关系闭包运算的性质

一、关系闭包运算的性质

sr(R)：s(r(R))，其他的类似。

定理8：设R是A上关系，则

$$(1)\ sr(R)=rs(R);\ (2)\ tr(R)=rt(R);\ (3)\ st(R)\subseteq ts(R)$$

证明定理8(1)：$sr(R)=r(R)\cup(r(R)^c=(R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^c$

$= (R\cup I_A)\cup(R^c\cup I_A{}^c) =R\cup I_A\cup R^c\cup I_A$

$= (R\cup R^{c)}\cup I_A= s(R)\cup I_A=r(s(R))=rs(R)$

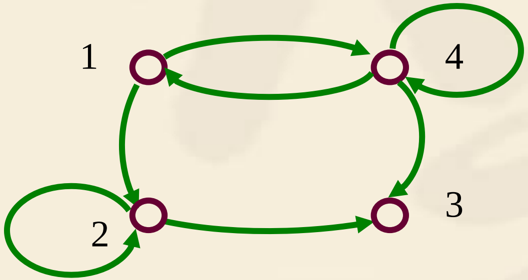
定理8(2)的证明作为课后练习。$(R\cup I_A)^i= I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^i$

证明定理8(3)：因 $R\subseteq s(R)$，由定理7(3)得 $t(R)\subseteq ts(R)$，再由定理7(2)，得$st(R)\subseteq sts(R)$；因$s(R)$对称，有定理6(2)得$ts(R)$ 也对称，由定理5(2)得$sts(R)=ts(R)$，所以有$st(R)\subseteq ts(R)$ 。

第十五节 关系闭包运算的性质

一、关系闭包运算的性质

作业：给定A中关系R如图所示。



要求：画出r(R)、s(R)、t(R)、sr(R)、rs(R)、tr(R)、rt(R)、st(R)、ts(R)的关系图，并验证定理8；