第9节 重言蕴涵式

定义：当且仅当 $A \rightarrow B$ 是重言式，则称 A 重言(永真)蕴涵 B ，记作 $A \Rightarrow B$。

- 即　若 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$，则 $A \Rightarrow B$。

重言蕴涵式的两种基本证明方法：

考察A→B的真值表，如果 A→B为永真式，则真值表中第三行的情况就不会出现。于是有下面两种证明方法：

A	B	A→B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

1. 假设前件 A 为真，若在此假设下能推出后件 B 也为真，则 $A \Rightarrow B$ 成立。

例1　求证 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

证明：假设 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为T，则P为T 并且 $(P \rightarrow Q)$ 为T，于是Q为T，所以 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 成立。

例2　求证：

$((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：设前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为真。则 $((A \wedge B) \to C)$、$\neg D$、$(\neg C \vee D)$ 均为真。

$\neg D$ 为 T，则 D 为 F，由 $\neg C \vee D$ 为 T，于是 $\neg C$ 为 T，即 C 为 F，再由 $((A \wedge B) \to C$ 为 T，则 $(A \wedge B)$ 为 F，即 $\neg(A \wedge B)$ 为 T，于是 $\neg A \vee \neg B$ 为 T，因此

$((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$。

2. 假设后件 B 为假，若在此假设下能推出前件 A 也为假，则 $A \Rightarrow B$ 成立。

例：求证 $P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$

证明：假设 $P \vee Q$ 为 F，

则 P为 F， Q 为 F，所以

$P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$ 成立。

例2 求证：$((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$

证明：假设后件 $\neg A\vee\neg B$ 为 F，则 A 与 B 均为 T。

1. 如 C 为 F，则 $(A\wedge B)\to C$ 为 F，

所以前件 $((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)$ 为 F

2. 如 C 为 T，则 ⑴ 若 D 为 T，则 $\neg D$ 为 F，

所以前件 $((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)$ 为 F。

⑵ 若 D 为 F，则 $\neg C\vee D$ 为 F，

所以前件 $((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)$ 为 F。

综上

$((A\wedge B)\to C)\wedge\neg D\wedge(\neg C\vee D)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$ 成立。

基础重言蕴涵式：

$I_1\ P\wedge Q\Rightarrow P$

$I_2\ P\wedge Q\Rightarrow Q$

$I_3\ P\Rightarrow P\vee Q$

$I_4\ Q\Rightarrow P\vee Q$

$I_5\ \neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$

$I_6\ Q\Rightarrow P\rightarrow Q$

$I_7\ \neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$

$I_8\ \neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$

$I_9\ P,Q\Rightarrow P\wedge Q$

$I_{10}\ \neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$

$I_{11}\ P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$

$I_{12}\ \neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$

$I_{13}\ (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow P\rightarrow R$

$I_{14}\ A\rightarrow B\Rightarrow(A\vee C)\rightarrow(B\vee C)$

$I_{15}\ A\rightarrow B\Rightarrow(A\wedge C)\rightarrow(B\wedge C)$

- 重言蕴含“⇒”是关系符，不是运算符。

重言蕴含的性质：

1) 有自反性：对任何命题公式 A，有 $A \Rightarrow A$。

2) 有传递性：若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$。

3) 有反对称性：若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则 $A \Leftrightarrow B$。

4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$。

5) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$，则 $A \vee C \Rightarrow B$。

定理：设 A，B 为任意两个命题公式， $A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$。

证明：若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，而

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$，于是 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$ 且 $B \rightarrow A \Leftrightarrow T$，即 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 成立。

若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$ 且 $B \rightarrow A \Leftrightarrow T$，于是 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow T$。而

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$，于是 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，即知 $A \Leftrightarrow B$ 成立。

思考：(1) 若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 是否有 $A \Leftrightarrow B$？

解：若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 则 $\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow T$ 而

$$\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$\Leftrightarrow (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$$

于是 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，即 $A \Leftrightarrow B$

(2) 若 $\neg A \Rightarrow \neg B$ 是否有 $A \Rightarrow B$？

解：若 $\neg A \Rightarrow \neg B$ 则 $\neg A \rightarrow \neg B \Leftrightarrow T$ 而

$\neg A \rightarrow \neg B \Leftrightarrow B \rightarrow A$，于是 $B \rightarrow A \Leftrightarrow T$，

即 $B \Rightarrow A$ 而不是 $A \Rightarrow B$