第七章 代数系统

第八节 代数系统的基本概念

1、代数系统（结构）的概念

定义

X 是非空集合，X 及 X 上的 m 个运算 f_1, f_2, … , f_m 构成代数系统U，记作 $U=\langle X, f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$（$m \ge 1$）

注意：这 m 个运算 $f_1, f_2, \dots, f_m$ 的元数可能不同，比如 f_1 是一元运算，f_2 是二元运算，… , f_m 是 k 元运算。

例如 $\langle N,+,\times \rangle$，$\langle \mathscr{P}(E), \sim, \cup, \cap, \oplus \rangle$

定义 $U=\langle X, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ 是个代数系统，如果 X 是个有限集合，则称 U 是有限代数系统。

定义 给定两个代数系统 $U=\langle X, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$，$V=\langle Y, g_1, g_2, \ldots, g_m \rangle$，如果对应的运算 f_i 和 g_i 的元数相同 $(i=1,2,3,\ldots,m)$，则称 U 与 V 是同类型代数系统。

例如 $\langle \mathscr{P}(E), \sim, \cap, \cup \rangle$ 与 $\langle \{T,F\}, \neg, \wedge, \vee \rangle$ 是同类型的代数系统。

2、代数系统的同态与同构

观察下面两个代数系统：

$<R^+, \times>$、 $< R, + >$

R为实数集合，R^+为大于0的实数集合，×、+为普通的实数乘法、加法运算。

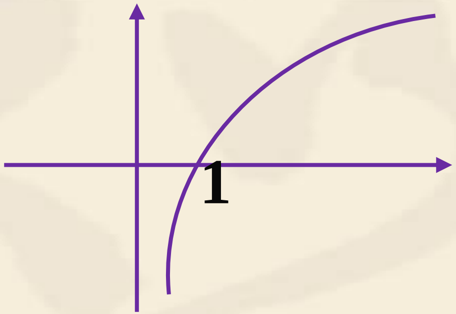
表面上看这两个代数系统完全不同，实际它们运算的性质却完全一样，都满足：可交换、可结合、有幺元、每个元素可逆。

思考

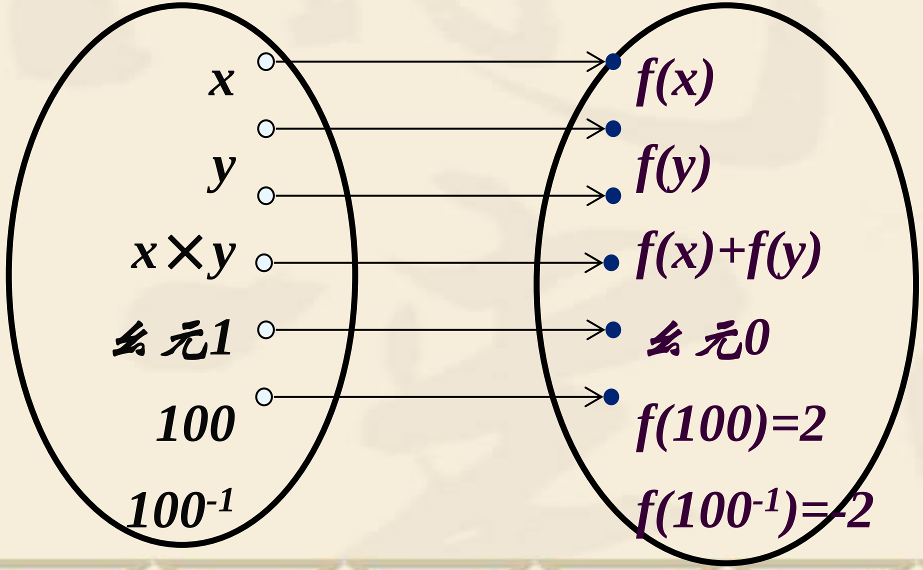
如何能看出它们间有相同的性质呢？

建立$R^+ \to R$上的映射：

$f(x)=\lg x$（双射）



$<R^+, \times> \longrightarrow <R, +>$



对任何 $x,y \in R^+$,

$f(x \times y)=\lg(x \times y)$

$= \lg x+\lg y=f(x)+f(y)$

系统$<R^+, \times>$和$<R, +>$同态。同时$<R^+, \times>$和$<R, +>$也同构

2、 代数系统的同态与同构

定义

设$<X,\star>$，$<Y,\circ>$是两个代数系统，$\star$和$\circ$都是二元运算，如果存在映射 $f:X\to Y$，使得对任何 $x_1, x_2 \in X$，有 $f(x_1 \star x_2)=f(x_1)\circ f(x_2)$ 则称 f 是从$<X,\star>$到$<Y,\circ>$的同态映射，简称这两个代数系统同态。记作$X \backsim Y$。

并称$<f(X),\circ>$为$<X,\star>$的同态像。

- 如果 f 是满射的，称此同态是满同态。
- 如果 f 是入射的，称此同态是单一同态。
- 如果 f 是双射的，称此同态是同构，记作 $X \cong Y$。
- 若 f 是 $<X,\bigstar>$ 到 $<X,\bigstar>$ 的同态(同构)，则称之为自同态(自同构)。

N_k上的运算$+_k$和$\times_k$

- 设I是整数集合，R是I上模 k (k是正整数)同余关系，因R是I上等价关系，所以得商集I/R，将I/R记作N_k，即：
$N_k=\{[0],[1],[2],\ldots,[k\text{-}1]\}$
- 在N_k上定义运算$+_k$和$\times_k$，我们分别称之为以k为模的加法和乘法。定义为：

任取$[x]$,$[y]\in N_k$，$[x]+_k[y]=[(x+y)(\text{mod } k)]$；
$[x]\times_k[y]=[(x\times y)(\text{mod } k)]$

- 为了方便，将$N_k=\{[0],[1],[2],\ldots,[k\text{-}1]\}$简记成：

$$N_k=\{0,1,2,\ldots,k\text{-}1\}$$

例如代数系统 $< N_4 , +_4 >$:

$N_4=\{0,1,2,3\}$

任何 $x,y \in N_4$， $x +_4 y = (x + y)(\mathrm{mod}\ 4)$

$<N_4,+_4>$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

代数系统同态举例

$<N_4,+_4>$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

证明

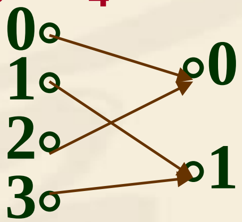
$<N_4, +_4> \backsim <B,\oplus>$

$< B, \oplus >$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

构造映射

$g: N_4 \to B$



$g(1+_4 2)=g(3)=1$

$g(1)\oplus g(2) =1\oplus 0=1$

于是 $g(1+_4 2)=g(1)\oplus g(2)$

$g(2+_4 2)=g(0)=0$

$g(2)\oplus g(2)=0\oplus 0=0$

于是 $g(2+_4 2)=g(2)\oplus g(2)$

其余类似可以验证，因幺元不需验证，所以共需验证 9 个式子，然后可得出 $N_4 \backsim B$

代数系统同构举例

例：证明 $\langle N_4, +_4 \rangle$ 与 $\langle X, \circ \rangle$ 同构。

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\circ$	S	R	A	L
S	S	R	A	L
R	R	A	L	S
A	A	L	S	R
L	L	S	R	A

构造映射

$N_4 \xrightarrow{f} X$

$0 \mapsto S$

$1 \mapsto R$

$2 \mapsto A$

$3 \mapsto L$

f 是双射

$$f(1+_4 2)=f(3)=L$$
$$f(1)\circ f(2)=R\circ A=L$$
于是 $f(1+_4 2)=f(1)\circ f(2)$

$$f(2+_4 2)=f(0)=S$$
$$f(2)\circ f(2)=A\circ A=S$$
于是 $f(2+_4 2)=f(2)\circ f(2)$

其余式子可类似验证，最后可得出 $N_4 \cong X$

注意： 代数系统 $\langle X,\star\rangle$ 和 $\langle Y,\circ\rangle$ 同构的必要条件：

1. X 和 Y 的基数相同， 即 $K[X]=K[Y]$。
2. 运算 $\star$ 和 $\circ$ 是同类型的。
3. 存在双射 $f:X\to Y$，且满足同构关系式。

并不是所有的双射 $f:X\to Y$ 都满足同构关系式。

在构造双射时，要注意：
幺元与幺元对应；零元与零元对应；
逆元也要相互对应。

3、含有两个运算的代数系统的同构

定义

令 $<X,+,\times>$ 和 $<Y,\oplus,\blacklozenge>$ 是含有两个运算的代数系统，其中 +、×、⊕、♦ 都是二元运算，如果存在双射 $f:X\to Y$，使得对任何 $x_1,x_2\in X$，满足

$f(x_1+x_2)=f(x_1)\oplus f(x_2)$。（注意：+与⊕对应）

$f(x_1\times x_2)=f(x_1)\blacklozenge f(x_2)$。（注意：×与♦对应）

则称这两个代数系统同构。

定理 代数系统间的同构关系$\cong$是等价关系。

证明：略。

第八节 结束