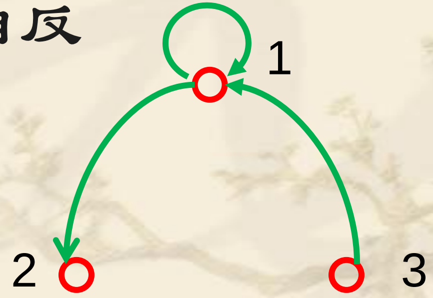
第四章　二元关系

第十四节 关系的闭包运算

第十四节 关系的闭包运算

- 关系的闭包是通过关系的复合和求逆运算构成的一个新的关系，新关系满足某些特性。
- 在此，学习求关系的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

具体来说，给定A中关系R，如图所示，显然，R不是自反的，不是对称的，也不是传递的。本节学习R的自反(对称、传递)闭包的定义和计算方法。



第十四节 关系的闭包运算

一、关系闭包运算的定义

定义： 给定A中关系R，若A上另一个关系R′，满足：

(1) $R \subseteq R'$；

(2) R′是自反的；

(3) R′是“最小的”(包含的序偶最少)，即对于任何A上自反的关系R″，如果$R \subseteq R''$，就有$R' \subseteq R''$。

则称R′是R的自反闭包，记作r(R)。

如果R′是包含R的最小的对称关系，则称R′是R的对称闭包，记做s(R)；

如果R′是包含R的最小的传递关系，则称R′是R的传递闭包，记做t(R)；

第十四节 关系的闭包运算

二、关系闭包运算的计算方法

定理1. 给定 A中关系R,则 $r(R)=R\cup I_A$。

证明：令$R'=R\cup I_A$, 显然R'是自反的和$R\subseteq R'$。

下面证明R'是“最小的”：假设有A上的另一个自反关系R''且$R\subseteq R''$,又因为$I_A\subseteq R''$,所以 $R\cup I_A\subseteq R''$,即$R'\subseteq R''$。

综上， R'就是R的自反闭包，即$r(R)=R\cup I_A$。

定理2. 给定 A中关系R，则 $s(R)=R\cup R^C$。

证明方法与定理1类似。

第十四节 关系的闭包运算

二、关系闭包运算的计算方法

定理3.给定 A中关系R， 则 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$。

证明： 令$R'=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$,

(1) 显然有 $R\subseteq R'$；

(2) 证R'是传递的

任取$x,y,z\in A$,设有$<x,y>\in R'$, $<y,z>\in R'$, 由R'定义得必存在整数i,j使得$<x,y>\in R^i$, $<y,z>\in R^j$,根据关系的复合得$<x,z>\in R^{i+j}$, 又因$R^{i+j}\subseteq R'$,所以$<x,z>\in R'$,

所以， R'传递。

第十四节 关系的闭包运算

二、关系闭包运算的计算方法

定理3.给定A中关系R，则 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$。

证明:(3) 证R'是最小的,设A上另一个包含R的传递关系R''。(?: $R'\subseteq R''$)

任取$<x,y>\in R'$,由$R'=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$,必存在整数$i$,使得$<x,y>\in R^i$,

根据关系的复合得,A中必存在i-1个元素$e_1, e_2,\ldots,e_{i-1}$，使得

$$<x, e_1>\in R\wedge<e_1,e_2>\in R\wedge\ldots\wedge<e_{i-1},y>\in R。$$

因$R\subseteq R''$,所以有$<x, e_1>\in R''\wedge<e_1,e_2>\in R''\wedge\ldots\wedge<e_{i-1},y>\in R''$。

由于R''传递，所以有$<x,y>\in R''$。所以，$R'\subseteq R''$。

综上所述，$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots=\cup R^i$

设$x,y\in A$,如果$<x,y>\in R^k\Leftrightarrow$在R的有向图上有从x到y的路径(包含k条边)

第十四节 关系的闭包运算

二、关系闭包运算的计算方法

疑问：用上述公式计算t(R)，要计算R的无穷大次幂,似乎无法实现。真实情况是这样的吗？请看下面的例子:

设A={1,2,3} A中关系R_1,R_2,R_3,如下：

$$R_1=\{<1,2>,<1.3>,<3,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2.3>,<3,1>\}$$

$$R_3=\{<1,2>,<2.3>,<3,3>\}$$

分别计算R_1,R_2,R_3的传递闭包。

$R_1^2=\{<1,2>\}$,$R_1^3=R_1^4=\Phi$,
则$t(R_1)=R_1\cup R_1^2\cup R_1^3=R_1$

$R_2^2=\{<1,3>,<2,1>,<3,2>\}$
$R_2^3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
$R_2^3=I_A$, $R_2^4=R_2$ ...
则$t(R_2)=R_2\cup R_2^2\cup R_2^3$

$R_3^2=\{<1,3>,<2,3>,<3,3>\}$
$R_3^3=R_3^2$,则$t(R_3)=R_3\cup R_3^2$

第十四节 关系的闭包运算

二、关系闭包运算的计算方法

定理4.给定 A中关系R,如果A是有限集合，|A|=n，则

$$t(R)=R\cup R^2\cup \ldots \cup R^n$$

此外，求关系R的传递闭包t(R)，还可以基于R的关系矩阵，使用Warshall算法求得。