第六章　组合数学初步

第四节 多重集

第四节 多重集

一、多重集

多重集是数学中集合概念的推广。集合中，相同元素只能出现一次(互异性)。在多重集中，相同的元素可以多次出现。多重集概念的引入，是为了讨论允许重复的选取问题。

1. 定义

相同元素可以重复多次出现的集合称为**多重集**, 通常表示为

$$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\},$$

其中, $a_1,a_2, \ldots, a_k$表示 k 种不同的元素, $n_i\,(0 < n_i \leqq +\infty)$表示元素 a_i 在S中的出现次数,称为 a_i 的重复度。当$n_i=+\infty$时,表示S中有足够多的 a_i 以备选取。

例如，{1,2,3}是一个集合,{1,1,1,2,2,3}是一个多重集。其中,元素1的重复度是3, 2的重复度是2, 3的重复度是1。

第四节 多重集

一、多重集

1. 定义

另外,设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}(0 < n_i \leqq +\infty)$是多重集,那么S的子集 $X=\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}(0 \le x_i \le +\infty)$也是多重集。如果元素 a_i 不出现在子集X,则 $x_i=0$。

第四节 多重集

一、多重集

2. 多重集的r排列和r组合

多重集 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$, $n=n_1+n_2+\ldots n_k$表示 S 中元素总数.

(1) 从S 中有序选取的r个元素称为多重集 S 的一个 r 排列.

$r=n$ 的排列称为多重集 S 的全排列;

(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个r 组合;

第四节 多重集

一、多重集

2. 多重集的r排列的计算式

定理2： 设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集, $n=n_1+n_2+\ldots n_k$表示S中元素总数.

(1) S的全排列数是 $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$

(2) 若$r \le n_i$, $i=1,2,\ldots,k$, 那么S的r排列数是k^r

第四节 多重集

一、多重集

2. 多重集的r排列的计算式

定理2： 设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，

(1) S 的全排列数是 $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!}$

(2) 若$r\le n_i$，$i=1,2,\ldots,k$，那么S 的 r 排列数是 k^r

证明定理 2(1): 因为多重集S中有 n 个元素,所以S的全排列中必有 n 个位置,选择其中的 n_1 个位置放置 a_1 ,共有$C(n,n_1)$ 种方法。在剩下的$n-n_1$个位置中选择 n_2 个位置放置 a_2 ,共有$C(n-n_1,n_2)$种方法, …,以此类推,有$C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}, n_k)$ 方法放a_k。

根据乘法原理, 多重集S的全排列数为

$$C(n,n_1)\times C(n-n_1,n_2)\times\ldots\times C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\times\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\times\ldots\times\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!\ 0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

证明定理 2(2): 多重集S的 r 排列中 r 个位置,每个位置都有 k 种元素备选,

根据乘法原理,得多重集S的 r排列数为 k^r 。

第四节 多重集

一、多重集

2. 多重集的r排列的计算式

多重集S全排列数 $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ 恰好是多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ 中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 项的系数，所以也称为多项式系数。

第四节 多重集

一、多重集

2. 多重集的r组合的计算式

定理3： 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$, $0<n_i\leq+\infty$, 当 $r\leq n_i$, S的r组合数为 $N = C(k+r-1,r)$。

证明： S的一个 r 组合是一个子多重集 $\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}$， 其中 $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$, x_i 为非负整数, 这个方程称为不定方程。 它的每一组非负整数解都对应着一个S的 r组合。 那下面的问题就是, $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$ 有多少个非负整数解呢?

第四节 多重集

一、多重集

2. 多重集的r组合的计算式

证明：可以把$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解和 r个1、k个0的排列之间建立一一对应关系：

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{x_1\text{个}1},0,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{x_2\text{个}1},0,\ldots,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{x_i\text{个}1},0,\ldots,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{x_k\text{个}1}$$

即用k-1个0将 r 个1分成 k 段,每段中1的个数分别是$x_1,x_2,\ldots,x_\mathrm{k}$。不难看出，这$k$个0和$r$ 个1组成的序列的任何一种排列,都是一组x_1 , x_2 , … , x_k的非负整数解.所有k-1个0 和r 个1构成了一个多重集X={r · 1, k-1 · 0},所以,据定理2,这k-1个0 和 r 个1的全排列数,也就是多重集X的全排列数 $N=\dfrac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=C(k+r-1,r)$

第四节 多重集

二、应用

例5. 排列26个字母，使得 a 与 b 之间恰有7个字母，求方法数.

解：固定a 和b, 中间选7个字母,由于a 和b之间的位置关系有两种可能,从剩余的24个字母中有序的选7个的排列数是$P(24,7)$,所以共有$2\times P(24,7)$种方法;然后,再把它作为一个整体, 与其余26-9=17个字母全排列,共有18!种可能.所以,排列26个字母,使得 a 与 b 之间恰有7个字母的方法数共 $2\times P(24,7)\times 18!$种.