# 第7节 命题公式的等价

看下面三个公式的真值表：

| P | Q | $P\to Q$ | $\neg P\vee Q$ | $\neg Q\to\neg P$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | T | T |
| F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F |
| T | T | T | T | T |

从真值表可以看出，不论对P、Q 作何种赋值，$P\to Q$、$\neg P\vee Q$和$\neg Q\to\neg P$ 的真值都相同。

$$P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q\Leftrightarrow\neg Q\to\neg P$$

**等价定义：** A、B是含有命题变元 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 的命题公式，如不论给 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 何种赋值，A 和 B 的真值均相同，则称命题公式 A 与 B 等价，记作A⇔B。

- 若两个命题公式的真值表相同，则它们等价。

## 基础等价公式：

(1) 对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) 幂等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$ $\quad$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3)交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $\quad$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(4)结合律 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

(5)分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(6) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(7)底·摩根定律 $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$

(8) 同一律 $P\vee F\Leftrightarrow P$ $P\wedge T\Leftrightarrow P$

(9) 零律 $P\vee T\Leftrightarrow T$ $P\wedge F\Leftrightarrow F$

(10) 互补律 $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$ $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

(11) $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

(12) $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$

(13) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

(14) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

(15) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

上述基础等价公式都可以用构造两个命题公式的真值表的方法证明。

例： 证明底·摩根定律 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

证明：构造两个命题公式的真值表：

| P | Q | $P \vee Q$ | $\neg(P \vee Q)$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \wedge \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | F | T | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| T | T | T | F | F | F | F |

因为$\neg(P \vee Q)$ 与 $\neg P \wedge \neg Q$ 的真值表相同，所以等价。

## 等价公式的证明方法：

- 方法1：列真值表。
- 方法2：用等价公式变换。（用置换定律）

置换定律：A是一个命题公式，X是A中的一部分且也是合式公式，如果X⇔Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A⇔B。

例： 求证 $(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$

证明：$(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\wedge Q)$ (公式$E_{11}$)

$\Leftrightarrow(\neg\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ (底·摩根定律)

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ (对合律)

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg Q\vee Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P\wedge T$ (互补律)

$\Leftrightarrow P$ (同一律)

- 公式$E_{11}$： $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

**对偶式：**

**在一个只含有联结词 ¬ 、∨、∧的公式 A 中，将∨换成∧，∧换成∨，T 换成 F，F 换成 T，其余部分不变，得到另一个公式 A*，称 A 与 A* 互为对偶式。**

例如：

| A | A* |
| --- | --- |
| $P$ | $P$ |
| $\neg Q \wedge R$ | $\neg Q \vee R$ |
| $(P \vee T) \wedge \neg Q$ | $(P \wedge F) \vee \neg Q$ |

**定理** 令 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是一个只含有联结词 $\neg$、$\vee$、$\wedge$的命题公式，则

$$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

此定理可以反复地使用底-摩根定律证明。

**推论：** $A(\neg P_1, \neg P_2,\ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2,\ldots, P_n)$

应用上述定理可以直接将“¬”放到命题变元的前面。

例如：

$$\neg(((P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q))\vee R)$$

$$\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q))\wedge\neg R$$

等价“⇔”是关系符号，不是运算符号，它表明的是两个命题公式之间的关系。

**等价的性质：**

1) 有自反性：对任何命题公式A，均有 A⇔A。

2) 有对称性：若A⇔B，则 B⇔A。

3) 有传递性：若A⇔B且B⇔C，则 A⇔C。