

第10节 量词作用域的扩充与收缩

—— 量词与“ \vee, \wedge ”的关系，其中一个
运算对象不受该量词约束

量词辖域的扩充与收缩研究的是量词与“ \vee, \wedge ”的关系，其中一个运算对象不受该量词约束，有如下公式：

$$1. \forall x A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$

$$2. \forall x A(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B)$$

$$3. \exists x A(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \vee B)$$

$$4. \exists x A(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \wedge B)$$

我们以有限个体域证明公式

$$\forall x A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$

证明：设个体域为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,

$$\forall x A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \vee B) \wedge (A(a_2) \vee B) \wedge \dots \wedge (A(a_n) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$

其它公式：

$$5. B \rightarrow \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x (B \rightarrow A(x))$$

$$6. B \rightarrow \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x (B \rightarrow A(x))$$

$$7. \forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$$

$$8. \exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$$

例：证明公式7 $\forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$

证明：

$$\begin{aligned} & \forall x A(x) \rightarrow B \\ \Leftrightarrow & \neg \forall x A(x) \vee B \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg A(x) \vee B \\ \Leftrightarrow & \exists x (\neg A(x) \vee B) \\ \Leftrightarrow & \exists x (A(x) \rightarrow B) \end{aligned}$$