

第四章 二元关系

第二十四节 偏序集中的重要元素

第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

1. 极大元与极小元

定义： 设 (P, \leq) 是半序集， $A \subseteq P$ ，若 $a \in A$ ，且在 A 中找不到一个元素 b ($b \neq a$)，使 $a \leq b$ ($b \leq a$)，则称 a 为 A 中的**极大元** (**极小元**)。

y 是 B 的极小元 $\Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge \neg \exists x(x \in A \wedge x \neq y \wedge x \leq y))$

y 是 B 的极大元 $\Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge \neg \exists x(x \in A \wedge x \neq y \wedge y \leq x))$

注意1： A 的极大元与极小元要在 A (子集) 中寻找，不要到 P (全集) 中寻找。

第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

1. 极大元与极小元

例：自然数集合 \mathbb{N} 及其上的整除 \mid 构成半序集 (\mathbb{N}, \mid) ， $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 则

A 中极大元：8, 6, 9, 5, 7

A 中极小元：2, 3, 5, 7

注意2：极大元，极小元并不要求唯一，且同一元素，可以既是极大元，又是极小元，如5, 7。

第二十四节 偏序集中的重要元素

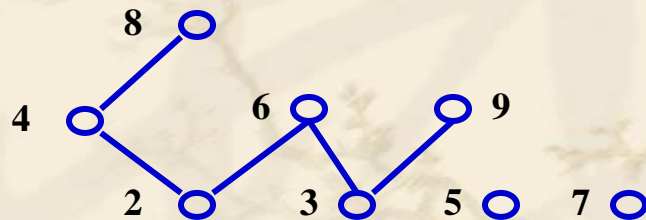
一. 偏序集中的重要元素

2. 最大元与最小元

定义： 设 (P, \leq) 是半序集， $A \subseteq P$ ，若 $a \in A$ ， $\forall b \in A$ ， $b \leq a$ ($a \leq b$)，则称 a 为 A 的最大元 (最小元)。

注意： A 的最大元与最小元一定在 A (子集) 中寻找，不要到 P (全集) 中寻找。

例如： $(N, |)$ ，其Hasse图如图所示



子集 A 中是不存在最大元 (最小元) 的。

第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

2. 最大元与最小元

定理: $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的非空子集, 如果 B 有最小元(最大元), 则最小元(最大元)是唯一的。

证明: 假设 B 有两个最小元 a, b , 则因为 a 是最小元, $b \in B$, 根据最小元定义, 有 $a \leq b$; 类似地, 因为 b 是最小元, $a \in B$, 根据最小元定义, 有 $b \leq a$ 。因为 \leq 有反对称性, 所以有 $a=b$ 。

同理, 可证最大元的唯一性。

第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

2. 最大元与最小元

小结： (A, \leq) 是偏序集， B 是 A 的非空子集，则

(1) B 的极小元总是存在的，就是子集Hasse图中处在最下层的元素； B 的极大元也总是存在的，就是子集Hasse图中处于最上层的元素。

(2) B 的最小元(最大元)有时可能不存在，只要有唯一的极小(大)元，则这个极小(大)元就是最小(大)元。否则，就没有最小(大)元。

第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

3. 上界与下界

定义：设 (P, \leq) 是半序集， $A \subseteq P$ ，若 $a \in P$ ，对 $\forall b \in A$ ，都有 $b \leq a$ ，则称 a 是 A 的上界；若 $a \in P$ ，对 $\forall b \in A$ ，对 $\forall b \in A$ ，都有 $a \leq b$ ，则称 a 为 A 的下界。

注意： A 的上下界要到 P (全集) 中寻找，不局限于 A (子集)。

第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

3. 上界与下界

例： $B = \{a, b, c\}$, 则 $(P(B), \subseteq)$ 是半序集, 其Hasse图如右

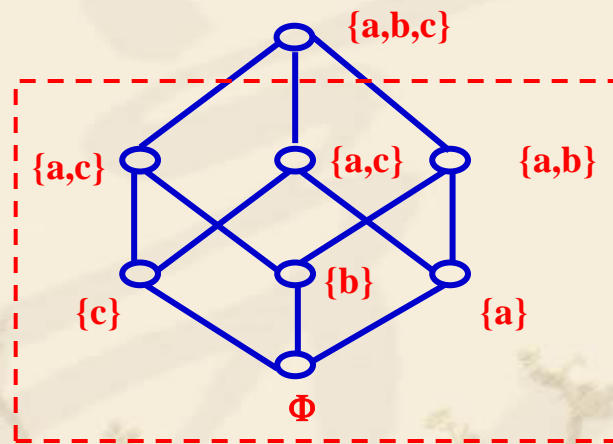
图所示。设 $A = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

(1) A 无最大元, 但存在 A 的上界 $\{a, b, c\}$;

(2) Φ 为 A 的最小元, 也是 A 的下界;

(3) 最大 (小) 元是 A 的一个上 (下) 界;

(4) 上 (下) 界可以不唯一, 也可以不存在;



第二十四节 偏序集中的重要元素

一. 偏序集中的重要元素

4. 上确界与下确界

定义： 设 (P, \leq) 是半序集， $A \subseteq P$ ，若 a 是 A 的一个上界，而 $\forall A$ 的上界 b ，都有 $a \leq b$ ，则称 a 是 A 的上确界；若 a 是 A 的一个下界，而 $\forall A$ 的下界 b ，都有 $b \leq a$ ，则称 a 是 A 的下确界。

说明：

上确界：所有上界中的最小者，最小上界；

下确界：所有下界中的最大者，最大下界；

另外，如果存在上（下）确界，则上（下）确界一定是唯一的；