第七章 代数系统

第二节 二元运算性质

二元运算的性质

1 封闭性

定义

设★是X上的二元运算，如果对任何 $x, y \in X$，有 $x★y \in X$，则称★在 X 上封闭。

例如，自然数集合N上的加法和乘法封闭，而减法不封闭。从运算表可以很容易看出运算是否封闭。

思考

如 运算表中没有新元素出现 是否封闭？

2 交换性

定义

设★是 X 上的二元运算，如果对任何 $x, y \in X$，有 $x★y=y★x$，则称★<u>在 X上可交换</u>。

加法、乘法、交、并、对称差是可交换。

∩	Φ	{a}	{b}	{a,b}
Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
{a}	Φ	{a}	Φ	{a}
{b}	Φ	Φ	{b}	{b}
{a,b}	Φ	{a}	{b}	{a,b}

∘	S	R	A	L
S	S	R	A	L
R	R	A	L	S
A	A	L	S	R
L	L	S	R	A

思考

如何由运算表看交换性？

从对角线对称

3 可结合性

定义

设★是 X 上的二元运算，如果对任何 $x,y,z \in X$，有 $(x★y)★z = x★(y★z)$，则称 ★ 在 X 上可结合。

下列运算是可结合的：
数值的加法、乘法，集合的交、并、对称差，关系的复合、函数的复合，命题的合取、析取。

- 若★是可结合的运算，元素 x 的★运算，通常可以写成乘幂的形式。如下：

$$x★x=x^2 \qquad x^2★x=x★x^2=x^3$$

$$x^m★x^n=x^{m+n} \qquad (x^m)^n=x^{mn}$$

思考

对于加法 +： $1^3=(\quad)$

对于乘法×： $1^3=(\quad)$

4 分配律

定义

设★和∘都是 X 上的二元运算，若对任何 $x,y,z \in X$，有

$$x★(y∘z)=(x★y)∘(x★z) \qquad \text{（左分配律）}$$

$$(x∘y)★z=(x★z)∘(y★z) \qquad \text{（右分配律）}$$

则称 ★ 对 ∘ 可分配。

例如：乘法对加法可分配。集合的∪与∩互相可分配。命题的∧与∨互相可分配。

5 吸收律

定义

设★和∘都是 X 上的二元运算，

若对任何 $x, y \in X$ 均有 $x★(x∘y)=x$

$x∘(x★y)=x$

则称 ★和∘满足吸收律。

例如： 集合的∪与∩满足吸收律。

命题的∧与∨满足吸收律

例 子

例：I为整数集合，I 上的二元运算 $\oplus$ 和 $\circ$ 定义为：对任何 $a,b\in I$,

$$a\oplus b=a+b-1，a\circ b=a+b-ab,$$

求证：$\oplus$ 和 $\circ$ 在 I 上是封闭的、可结合的，并且 $\circ$ 对 $\oplus$ 可分配。

证明：1)封闭性：任取 $a,b\in I$，$a+b-1\in I$,
所以 $a\oplus b\in I$。 $a+b-ab\in I$， 所以 $a\circ b\in I$。
即 $\oplus$ 和 $\circ$ 在 I 上封闭。

2)可结合性：任取 $a,b,c\in I$,

$$a\oplus(b\oplus c) = a+(b+c-1)-1 = (a+b-1)+c-1$$
$$=(a\oplus b)\oplus c$$

$$a\circ(b\circ c) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$
$$=a+b+c-bc-ab-ac+abc$$
$$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c =(a\circ b)\circ c$$

即 $\oplus$ 和 $\circ$ 在 I 上可结合。

3)证$\circ$对$\oplus$可分配：任取$a,b,c \in I$,

$$
\begin{aligned}
a\circ(b\oplus c) &= a+(b+c-1)-a(b+c-1) \\
&= a+b+c-1-ab-ac+a \\
&= (a+b-ab)+(a+c-ac)-1 \\
&= (a\circ b)\oplus(a\circ c)
\end{aligned}
$$

即$\circ$对$\oplus$可分配。

运算性质小结

令$\star$, $\circ$ 是定义在非空集合 X 上的二元运算：

1. 封闭性：$\forall x,y\in X$，有 $x\star y\in X$。
2. 可交换性：$\forall x,y\in X$，有 $x\star y = y\star x$。
3. 可结合性：$\forall x,y,z\in X$，有 $(x\star y)\star z = x\star(y\star z)$。
4. 分配律：$\star$对$\circ$可分配：$\forall x,y,z\in X$，有

   $x\star(y\circ z) = (x\star y)\circ(x\star z)$ 及 $(x\circ y)\star z = (x\star z)\circ(y\star z)$。
5. 吸收律：$\forall x,y\in X$，有 $x\star(x\circ y) = x$ 及 $x\circ(x\star y) = x$。

第二节 结束