第八章　群和环

第九节 子群及其证明

(2)

三. 子群的证明

证明方法

- 使用定义证明
  - 注意：必须清晰、准确的理解定义
- 使用定理证明
  - 注意：必须满足定理的前提条件

- 用子群的定义证明：
  即证明运算在非空子集上满足
  封闭性、有幺元、子集中每个元素均可逆。

定理

设<G,★>是群，B是G的有限子集，如果★在B上满足封闭性，则<B,★>是<G,★>的子群。

B是非空子集	√
★在B上封闭	√
幺元在B中	?
B中每个元素均可逆	?

定理：设<G,★>是群，B是G的有限子集，如果★在B上满足封闭性，则<B,★>是<G,★>的子群。

证明：

(1)先证幺元 e∈B

任取 b∈B，因为★在B上封闭，所以对任意 i≥1 有 b^i∈B，因 i 可以取无穷多个值，而 B 中元素个数有限，所以必存在正整数 i,j (i<j)，使得 $b^i = b^j$ ，

j-i≥1，所以 b^{j-i}∈B。

因<G,★>是群，于是 b^{-1}、$(b^i)^{-1}$∈G，于是

$b^{j-i} = b^j★(b^{-1})^i = b^i★(b^i)^{-1} = e$，而 b^{j-i}∈B，所以e∈B。

定理：设<G,★>是群，B是G的有限子集，如果★在B上满足封闭性，则<B,★>是<G,★>的子群。

证明

(2)再证B中每个元素均可逆 ← 任意 $b\in B$，都有 $b^{-1}\in B$。

任取 $b\in B$，由(1)知 $b^{j-i}=e$ $(j-i\geq 1)$

a) 如果 $j-i=1$，则 $b^{j-i}=b=e$，即 $b^{-1}=b$，于是 $b^{-1}\in B$。

b) 如果 $j-i>1$，有 $b^{j-i-1}\in B$，而

$b\star b^{j-i-1}=b^{j-i-1}\star b=b^{j-i}=e$，即 $b^{-1}=b^{j-i-1}$，

于是 $b^{-1}\in B$。

综上，<B,★>是<G,★>的子群。

例：群 <N_6,$+_6$> 的运算表如右图：求 <N_6,$+_6$> 的子群。

解：根据上面定理，使得 $+_6$ 运算封闭的子集可构成子群。

除了平凡子群 <{0},$+_6$> 及 <N_6,$+_6$> 外，考察子集 H_1={0,3}，H_2={0,2,4}，从运算表知，$+_6$ 运算在 H_1、H_2 上封闭，所以 <H_1,$+_6$>，<H_2, $+_6$> 是 <N_6,$+_6$> 的子群。

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

<N_6,$+_6$>运算表

$+_6$	0	3
0	0	3
3	3	0

<H_1,$+_6$>运算表

$+_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

<H_2, $+_6$>运算表

第九节 结束