第六章　　组合数学初步

第三节　排列与组合

第三节 排列与组合

一、定义

设S为包含n个元素的集合(简称n元集),

(1) 从S中有序选取的r个元素称为S的一个r 排列.

S的不同r排列总数记作$P(n,r)$.

特别的,$r=n$时的排列称为S的全排列.

(2) 从S中无序选取的r个元素称为S的一个r组合.

S的不同r组合总数记作 $C(n,r)$.

第三节 排列与组合

二、计算方法

定理1 设n, r为自然数,规定$0!=1$,则

$$(1)\quad P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

$$(2)\quad C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

组合数$C(n,r)$恰好是二项式$(x+y)^n$展开式中$x^r y^{n-r}$的系数,所以也称之为**二项式系数**。

第三节 排列与组合

二、计算方法

证明定理1(1):

$$(1)\quad P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

因为$n<r$时不存在满足条件的排列组合,下面只考虑 $n\geq r$ 的情况.

(1) 排列的第一个元素有 n 种选择的方式. 排列的第二个元素有$n-1$种选法, …, 第r个元素的方式数 $n-r+1$种选择. 根据乘法原理,总的选择数$P(n,r)$为

$$P(n,r)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}\qquad(n\geq r)$$

第三节　排列与组合

二、计算方法

$$(2)\quad C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!} & n\ge r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

证明定理1(2):

因为$n<r$时不存在满足条件的排列组合,下面只考虑$n\ge r$的情况.

(2)因为可以分两步来构造r排列:首先,无序地选出r个元素,即r组合;然后,再构造这r个元素的全排列. 无序选择r个元素的方法数是$C(n,r)$;针对每种选法,能构造$r!$个不同的全排列. 所以,根据乘法原理,不同的r排列数为$P(n, r)=C(n,r)\times r!$,所以,r组合数是

$$(2)\quad C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(n-r)!}\quad (n\ge r)$$

第三节 排列与组合

二、计算方法

(1)证明：$\frac{n}{r}C(n-1,r-1)=\frac{n}{r}\times\frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!(r-1)!}=\frac{n}{r}\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}=C(n,r)$

推论：设n, r为自然数，则

(1) $C(n,r)=\frac{n}{r}C(n-1,r-1)$

(2) $C(n,r)=C(n,n-r)$

(3) $C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$

(2)证明(组合分析法)：设$S=\{1, 2, \ldots, n\}$是n元集合,对于S的任意 r 组合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$,都必存在且仅存在一个$S$ 的 $n-r$ 组合 $S-A$ 与之对应,即两者是一一对应关系；因此, S 的 r 组合数恰好与 S 的 $n-r$ 组合数相等,(2)得证.

(3)证明：设 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$是n元集合,对于S 的所有 r组合可以分成两类：① 含有元素1的 r组合, 它的其余的 r-1 个元素就来自于 n-1元集$\{2,3,\ldots,n\}$,所以有$C(n-1, r-1)$种 r-1组合；② 不含元素1的 r 组合,有$C(n-1, r)$个。根据加法原理, r 组合数$C(n,r) = C(n-1, r-1)+C(n-1, r)$,(3)得证 。