

第六章 组合数学初步

第五节 多重集的计算

第五节 多重集的计算

一、多重集

2. 多重集的 r 排列的计算式

定理2: 设 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 为多重集, $n=n_1+n_2+\dots+n_k$ 表示 S 中元素总数.

(1) S 的全排列数是 $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

(2) 若 $r \leq n_i, i=1, 2, \dots, k$, 那么 S 的 r 排列数是 k^r

第五节 多重集的计算

一、多重集

2. 多重集的 r 排列的计算式

定理2: 设 $S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 为多重集,

(1) S 的全排列数是 $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

(2) 若 $r \leq n_i, i=1,2,\dots,k$, 那么 S 的 r 排列数是 k^r

证明定理 2(1): 因为多重集 S 中有 n 个元素,所以 S 的全排列中必有 n 个位置,选择其中的 n_1 个位置放置 a_1 ,共有 $C(n, n_1)$ 种方法。在剩下的 $n-n_1$ 个位置中选择 n_2 个位置放置 a_2 ,共有 $C(n-n_1, n_2)$ 种方法, ...,以此类推,有 $C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}, n_k)$ 方法放 a_k 。

根据乘法原理, 多重集 S 的全排列数为

$$C(n, n_1) \times C(n-n_1, n_2) \times \dots \times C(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}, n_k) = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \dots \times \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k! 0!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

证明定理 2(2): 多重集 S 的 r 排列中 r 个位置,每个位置都有 k 种元素备选,

根据乘法原理,得多重集 S 的 r 排列数为 k^r 。

第五节 多重集的计算

一、多重集

2. 多重集的 r 排列的计算式

多重集 S 全排列数 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 恰好是多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ 中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 项的系数, 所以也称为多项式系数。

第五节 多重集的计算

一、多重集

2. 多重集的 r 组合的计算式

定理3: 多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$, $0 < n_i \leq +\infty$, 当 $r \leq n_i$, S 的 r 组合数为 $N = C(k+r-1, r)$ 。

证明: S 的一个 r 组合是一个子多重集 $\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\}$, 其中 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$, x_i 为非负整数, 这个方程称为不定方程。它的每一组非负整数解都对应着一个 S 的 r 组合。那下面的问题就是, $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 有多少个非负整数解呢?

第五节 多重集的计算

一、多重集

2. 多重集的 r 组合的计算式

证明：可以把 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 的非负整数解和 r 个1、 k 个0的排列之间建立一一

对应关系：

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{x_1 \uparrow 1}, \underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{x_2 \uparrow 1}, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{x_i \uparrow 1}, 0, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{x_k \uparrow 1}$$

即用 $k-1$ 个0将 r 个1分成 k 段,每段中1的个数分别是 x_1, x_2, \dots, x_k 。不难看出, 这

k 个0和 r 个1组成的序列的任何一种排列,都是一组 x_1, x_2, \dots, x_k 的非负整数解.

所有 $k-1$ 个0 和 r 个1构成了一个多重集 $X = \{r \cdot 1, k-1 \cdot 0\}$,所以,据定理2,这 $k-1$ 个

0 和 r 个1的全排列数,也就是多重集 X 的全排列数 $N = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = C(k+r-1, r)$

第五节 多重集的计算

二、应用

例5. 排列26个字母, 使得 a 与 b 之间恰有7个字母, 求方法数.

解: 固定 a 和 b , 中间选7个字母, 由于 a 和 b 之间的位置关系有两种可能, 从剩余的24个字母中有序的选7个的排列数是 $P(24, 7)$, 所以共有 $2 \times P(24, 7)$ 种方法; 然后, 再把它作为一个整体, 与其余 $26 - 9 = 17$ 个字母全排列, 共有 $18!$ 种可能. 所以, 排列26个字母, 使得 a 与 b 之间恰有7个字母的方法数共 $2 \times P(24, 7) \times 18!$ 种.