第四章　二元关系

第二十节 商集

第二十节 商集

一、商集

定义： R是A上等价关系，由R的所有等价类构成的集合称之为A关于R的商集。记作A/R。即

$$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$$

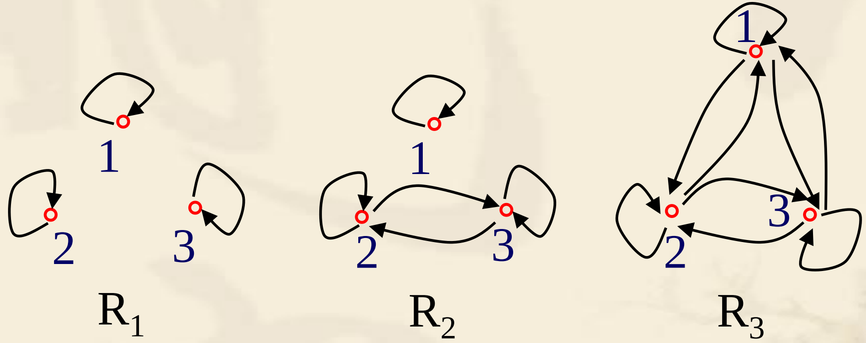
例如， A={1,2,3,4,5,6,7} , R是A上的模3同余关系，则

$$A/R=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R\}=\{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}$$

第二十节 商集

一、商集

练习: X={1,2,3},X上关系R_1、R_2 、R_3，如图所示。



$X/R_1=\{[1]_{R1},[2]_{R1},[3]_{R1}\}=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

$X/R_2=\{[1]_{R2} ,[2]_{R2}\}=\{\{1\},\{2,3\}\}$

$X/R_1=\{[1]_{R3}\}=\{\{1,2,3\}\}$

第二十节 商集

一、商集

定理: 集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R。

证明：由等价类性质可得：

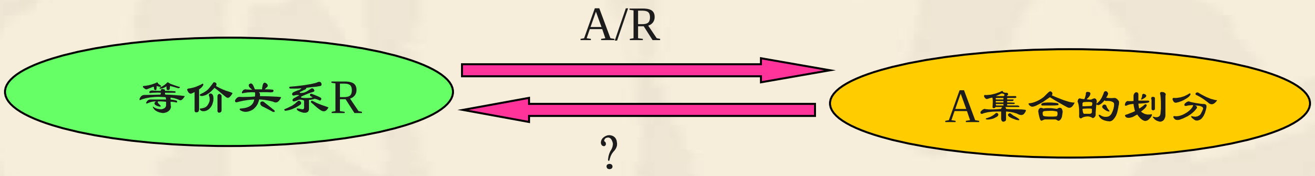
(1) A/R中任意元素$[a]_R$，有$[a]_R \subseteq A$。

(2) 设$[a]_R,[b]_R$是A/R的两个不同元素，有$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$

(3) 因为A中每个元素都属于一个等价类，所以所有等价类的并集必等于A。

第二十节 商集

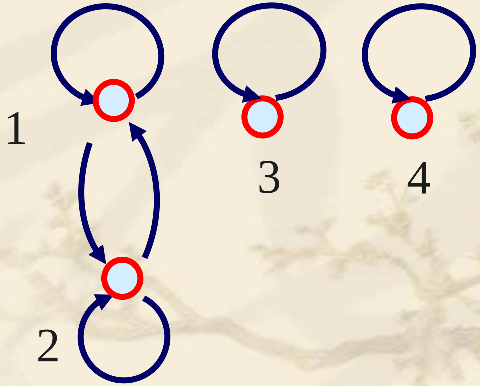
二、由划分确定等价关系



例如，$X=\{1,2,3,4\}$,

$A=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, X的一个划分，
求X上一个等价关系R,使得$X/R=A$。

显然，由图可得：$R=\{1,2\}^2\cup\{3\}^2\cup\{4\}^2$。



第二十节 商集

二、由划分确定等价关系

若$A=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$是X的一个划分，则可以构造一个X上的等价关系R，使得$X/R=A$。

构造方法：$R=A_1^2\cup A_2^2\cup,\ldots,\cup A_n^2$ 其中$A_i^2 = A_i \times A_i$,

第二十节 商集

二、由划分确定等价关系

定理： 集合X的一个划分可以确定X上的一个等价关系。

证明： 设$A=\{A_1, A_2,\dots,A_n\}$是X的一个划分，构造关系$R=A_1^2\cup A_2^2\cup\dots\cup A_n^2$，

其中，$A_i^2=A_i\times A_i$，

证R自反 任取$a\in X$，因为A是X的划分，必存在$A_i\in A$使$x\in A_i$，于是$\langle a,a\rangle\in A_i\times A_i$，又$A_i\times A_i\subseteq R$，所以有aRa。

证R对称 任取$a,b\in X$，设aRb，必存在$A_i\in A$使得$\langle a,b\rangle\in A_i\times A_i$，于是$a,b\in A_i$，$\therefore$ bRa，R是对称的。

证R传递 任取$a,b,c\in X$，设aRb，bRc，必存在$A_i\in A$使得$\langle a,b\rangle\in A_i\times A_i$，$\langle b,c\rangle\in A_i\times A_i$，于是$a,b,c\in A_i$，所以$\langle a,c\rangle\in A_i\times A_i$，又$A_i\times A_i\subseteq R$ $\therefore$ 有aRc 所以R传递。