

第11节 主析取范式

一、主析取范式

❖ 小项：是 n 个命题变元的合取式，其中每个变元必出现且仅出现一次(以本身或否定形式)，称这个合取式为小项。

例如，含有两个变元的小项：

$P \wedge Q$ 、 $P \wedge \neg Q$ 、 $\neg P \wedge Q$ 、 $\neg P \wedge \neg Q$

❖ 若有 n 个变元，则有 2^n 个小项。

小项编码：

- ❖ 含有 n 个变元的小项的角标用 n 位二进制码表示。
- ❖ 变元按字母次序排列。
- ❖ 用 1 表示变元本身，0 表示变元的否定形式。

例： $m_{00} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$, $m_{01} \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$,

$m_{10} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$, $m_{11} \Leftrightarrow P \wedge Q$

$m_{101} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$, $m_{100} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

		m_{00}	m_{01}	m_{10}	m_{11}
	P Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
00	F F	T	F	F	F
01	F T	F	T	F	F
10	T F	F	F	T	F
11	T T	F	F	F	T

1. 每个小项当且仅当其赋值与编码相同时，其真值为 T；而其余 2^n-1 组赋值均使该小项的真值为 F。

2. 全体小项的析取式为永真式，记为：

$$\sum m_i \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee \dots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$$

主析取范式定义： 若一个命题公式的析取范式为 $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n (n \geq 1)$ ，其中每个 A_i ($i=1,2,\dots,n$) 都是小项，则称之为该命题公式的主析取范式。

主析取范式的求法：

(1) 先写出给定公式的析取范式

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n。$$

(2) 为使每个 A_i 都变成小项，对缺少变元的项

A_i 要补全变元，比如缺变元 R ，就用

“ $\wedge(R \vee \neg R)$ ” 的形式补 R 。

(3) 用分配律等公式加以整理。

例：求 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式。

解： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ ---去掉其它连结词

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$ ---补变元

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

--- 用分配律展开

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

求主析取范式的真值表法：

- (1) 列出给定公式的真值表。
- (2) 找出该公式真值表中每个为“T”行的赋值所对应的小项。
- (3) 用“ \vee ”联结上述小项，即可。

例：求 $P \rightarrow Q$ 和 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	T	T
0	1	T	F
1	0	F	F
1	1	T	T

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow m_{00} \vee m_{01} \vee m_{11}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow m_{00} \vee m_{11} \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

定理 在真值表中，一个使公式的真值为 T 的赋值所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式。

思考题：永真公式的主析取范式是什么样的？