第三章 集合论初步

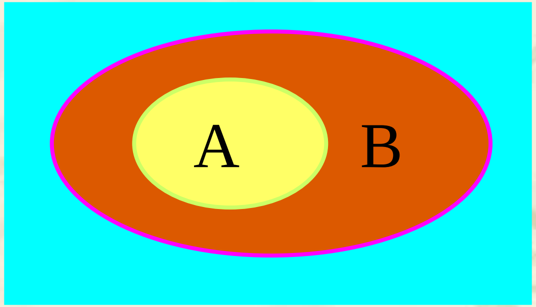
第二节 集合间的关系

第二节 集合间的关系

一. 包含关系(子集关系)

1. 定义：A、B是集合，如果A中元素都是B中元素，则称B包含A，A包含于B，也称A是B的子集。记作$A\subseteq B$。

例如，N是自然数集合，R是实数集合，则$N\subseteq R$。



包含关系的文氏图

第二节 集合间的关系

一. 包含关系(子集关系)

2. 包含关系的谓词公式定义：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

第二节 集合间的关系

一. 包含关系(子集关系)

3. 性质

(1)有自反性，对任何集合A，有$A\subseteq A$。

(2)有传递性，对任何集合A、B、C，有$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

(3)有反对称性，对任何集合A、B，有$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则$A=B$。

二. 相等关系

1. 定义：A、B是集合，如果它们的元素完全相同，则称A与B相等。记作A=B。

2. 集合相等关系的谓词公式定义

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

第二节 集合间的关系

二. 相等关系

3. 集合相等关系的判定

定理：$A=B$，当且仅当$A\subseteq B$且 $B\subseteq A$。

证明：充分性：已知$A\subseteq B$且 $B\subseteq A$，求证$A=B$;

假设$A\neq B$，则至少有一个元素e，使得$e\in A$而$e\notin B$；或者$e\in B$而$e\notin A$。
如果$e\in A$而$e\notin B$，则与$A\subseteq B$矛盾；如果$e\in B$而$c\notin A$，则与 $B\subseteq A$矛盾。
综上，$A=B$。

必要性：已知$A=B$，求证$A\subseteq B$且 $B\subseteq A$;

根据集合包含关系的自反性，有$A\subseteq A$；又因为$A=B$，则有$A\subseteq B$;

同理，可得$B\subseteq A$。

二. 相等关系

4. 性质

(1) 有自反性，对任何集合A，有A=A。

(2) 有传递性，对任何集合A、B、C，如果有A=B且B=C，则A=C。

(3) 有对称性，对任何集合A、B，如果有A=B，则B=A。

第二节 集合间的关系

三. 真包含关系(真子集关系)

1. 定义：A、B是集合，如果$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称B真包含A，或A真包含于B，也称A是B的真子集，记作$A\subset B$。

2. 集合真包含关系的谓词公式定义

$$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$$

第二节 集合间的关系

三. 真包含关系(真子集关系)

3. 性质

传递性：对任何集合A、B、C，如果有$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$。