第七章 代数系统

第十节 代数系统同构的性质
(2)

3、保持幺元存在性

3) 如果 $<X,\bigstar>$ 中有幺元 $e_{\bigstar}$，则 $<Y,\oplus>$ 也有幺元 $e_{\oplus}$ 且 $f(e_{\bigstar})=e_{\oplus}$。

证明：任取 $y\in Y$，因 $f:X\to Y$ 是满射，所以存在 $x\in X$，使得 $y=f(x)$。而

$$y\oplus f(e_{\bigstar})=f(x)\oplus f(e_{\bigstar})=f(x\bigstar e_{\bigstar})=f(x)=y$$

$$f(e_{\bigstar})\oplus y=f(e_{\bigstar})\oplus f(x)=f(e_{\bigstar}\bigstar x)=f(x)=y$$

所以 $f(e_{\bigstar})$ 是 $<Y,\oplus>$ 的幺元。即 $f(e_{\bigstar})=e_{\oplus}$。

4、保持零元存在性

4) 如果 $<X,\bigstar>$ 中有零元 $\theta_\bigstar$ ，则 $<Y,\oplus>$ 也有零元 $\theta_\oplus$ 且 $f(\theta_\bigstar)=\theta_\oplus$。

证明：任取 $y\in Y$，因 $f:X\to Y$ 是满射，所以存在 $x\in X$，使得 $y=f(x)$ 。而

$$y\oplus f(\theta_\bigstar)=f(x)\oplus f(\theta_\bigstar)=f(x\bigstar\theta_\bigstar)=f(\theta_\bigstar)$$

$$f(\theta_\bigstar)\oplus y=f(\theta_\bigstar)\oplus f(x)=f(\theta_\bigstar\bigstar x)=f(\theta_\bigstar)$$

所以 $f(\theta_\bigstar)$是$<Y,\oplus>$中的零元。即 $f(\theta_\bigstar)=\theta_\oplus$ 。

5、保持逆元存在性(映像的逆元=逆元的映像)

5)　如果<X,★>中每个 $x\in X$ 可逆，即 $x^{-1}\in X$，
则 <Y, ⊕> 中每个 $y\in Y$ 也可逆，即 $y^{-1}\in Y$。
并且如果 $y=f(x)$，则 $y^{-1}=(f(x))^{-1}=f(x^{-1})$。

证明：任取 $y\in Y$，因 $f:X\to Y$ 是满射，所以存在 $x\in X$，使得 $y=f(x)$。

(往证 $y\oplus f(x^{-1})=e_{\oplus}$ 和 $f(x^{-1})\oplus y=e_{\oplus}$)

设运算★的幺元 $e_{\star}$，运算⊕的幺元 $e_{\oplus}$，于是有 $f(e_{\star})=e_{\oplus}$。

$$y\oplus f(x^{-1})=f(x)\oplus f(x^{-1})=f(x\star x^{-1})=f(e_{\star})=e_{\oplus}$$

$$f(x^{-1})\oplus y=f(x^{-1})\oplus f(x)=f(x^{-1}\star x)=f(e_{\star})=e_{\oplus}$$

所以 $y^{-1}=(f(x))^{-1}=f(x^{-1})$。

第十节 结束