第4节　　函数的复合运算

关系的复合运算定义：设 $R \subseteq X \times Y$，$S \subseteq Y \times Z$

$$R \circ S = \{\langle x,z\rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y(y \in Y \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)\}$$

由于函数是特殊的关系，函数的复合运算定义为：

1、定义： $f:X \to Y$， $g:Y \to Z$ 是函数，则

$$g \circ f = \{\langle x,z\rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y(y \in Y \wedge \langle x,y\rangle \in f \wedge \langle y,z\rangle \in g)\}$$

称g在函数 f 的左边可复合 (左复合)。

注意：这里把 g 写在f的左边了，所以叫左复合。

这样写是为了照顾数学习惯：

$$g\circ f(x) = g(f(x))$$

设：$g\circ f(x)= z$ 于是$<x,z>\in g\circ f$， 即

$\exists y\in Y$， 使得 $<x,y>\in f \wedge <y,z>\in g$

即 $y=f(x)$ 且 $z=g(y)$， 于是 $z=g(f(x))$

因此 $g\circ f(x)= g(f(x))$

定理1：两个函数的复合是一个函数。

证明： 令 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 是两个函数，往证 $g\circ f\subseteq X\times Z$ 仍然是函数。

(1) 对任意 $x\in X$，存在 $y\in Y$，使得 $y=f(x)$。因 $y\in Y$，所以存在 $z\in Z$，使得 $z=g(y)$，即 $z=g(f(x))=g\circ f(x)$

(2) 若有$x\in X$，使得 $<x,z_1>\in g\circ f$，$<x,z_2>\in g\circ f$，并且 $z_1\neq z_2$，根据复合定义，一定有y_1、$y_2\in Y$，使得 $<x,y_1>\in f$，$<x,y_2>\in f$，$<y_1,z_1>\in g$，$<y_2,z_2>\in g$。因 f 是函数，所以$y_1=y_2$，再由 g 是函数，所以$z_1=z_2$，矛盾。综上，$g\circ f$ 是函数。

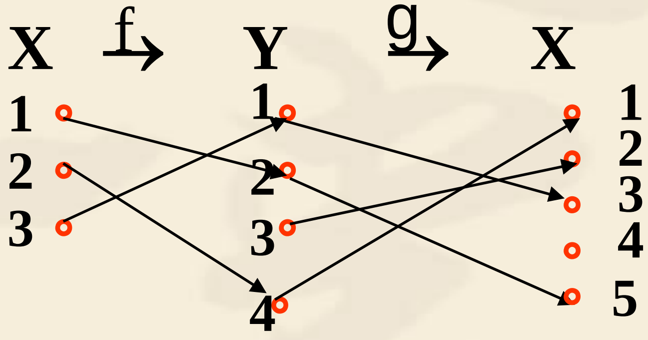
2、求函数复合运算的方法

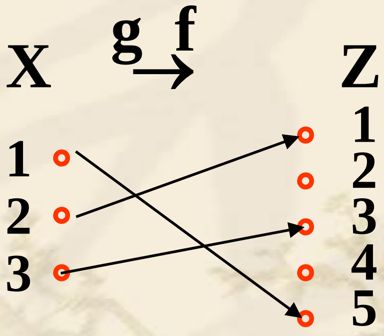
与求关系复合运算的方法相同，可以直接“过河拆桥”，或者用关系图或关系矩阵去求，但要注意写成左复合。

例 f:X→Y, g:Y→Z，X={1,2,3}，Y={1,2,3,4,}，Z={1,2,3,4,5,}

f= {<1,2>,<2,4>,<3,1>}，g={ <1,3>,<2,5>,<3,2>,<4,1> }

用有向图求复合：





g∘f ={<1,5>,<2,1>,3,3>}

3、函数复合运算的性质

定理2　函数的复合运算满足可结合性。

设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$h:Z\to W$ 是函数，

则　$(h\circ g)\circ f = h\circ (g\circ f)$

证明：与关系的复合有可结合性的证明类似，但要注意，要用函数相等的定义去证明。

定理3、设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 是两个函数，则

(1)如果f 和 g是 满射的，则 $g\circ f$ 也是满射的；

(2)如果f 和 g是入射的，则 $g\circ f$ 也是入射的；

(3)如果f 和 g是双射的，则 $g\circ f$ 也是双射的。

证明：(1) 设 f 和 g 是满射的，因 $g\circ f:X\to Z$,

任取 $z\in Z$，因 $g:Y\to Z$ 是满射的，所以存在 $y\in Y$,

使得 $z=g(y)$，又因 $f:X\to Y$是满射的，所以存在 $x\in X$,

使得 $y=f(x)$，于是有 $z = g(y) = g(f(x)) = g\circ f\,(x)$,

因此 $g\circ f$ 是满射的。

(2) 设 f 和 g是入射的，因 $g \circ f : X \to Z$,

任取 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$，因 $f:X \to Y$ 是入射的，

所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$，又因 $g:Y \to Z$ 是入射的，

而 $f(x_1)$，$f(x_2) \in Y$，所以 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$，即

$g \circ f\,(x_1) \neq g \circ f\,(x_2)$，所以 $g \circ f$ 也是入射的。

(3) 如果f 和 g是双射的，则 $g \circ f$ 也是双射的。

由(1)(2)可得此结论。

定理4 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 是两个函数，则

(1)如果 $g\circ f$ 是满射的，则 g 是 满射的；

(2)如果 $g\circ f$ 是入射的，则 f 是入射的；

(3)如果 $g\circ f$ 是双射的，则 f 是入射的且g是满射的。

记住：前满后入。

该定理的证明是今天的作业，同学们自己证明。

定理5　$f:X\to Y$ 是函数，则 $f\circ I_X = f$ 且 $I_Y\circ f = f$。

证明：先证明定义域、陪域相等；

因为 $I_X:X\to X$，　$f:X\to Y$，所以

$f\circ I_X : X\to Y$，　$I_Y\circ f : X\to Y$

可见 $f\circ I_X$、$I_Y\circ f$ 与 f 有相同的定义域和陪域。

再证它们的映射相同；

任取 $x\in X$，　$f\circ I_X(x) = f(I_X(x)) = f(x)$

$I_Y\circ f(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$

综上　$f\circ I_X = f$　且 $I_Y\circ f = f$。