第四章　二元关系

第二节 集合的笛卡尔积

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

1. 定义:设集合A、B，由A的元素为第一元素，B的元素为第二元素组成的全部序偶的集合，称为A和B的笛卡尔积，记作$A \times B$

$$A \times B=\{<x,y>|x \in A \wedge y \in B\}$$

例1 设$A=\{0,1\}$，$B=\{a,b\}$，求$A \times B$，$B \times A$，$A \times A$。

解： $A \times B=\{<0,a>,<0,b>,<1,a>,<1,b>\}$

$B \times A=\{<a,0>,<b,0>,<a,1>,<b,1>\}$

$A \times A=\{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,1>\}$

可见， $A \times B \neq B \times A$。所以，集合笛卡尔积运算不满足交换律。

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

此外，

$(A\times B)\times C=\{<<a,b>,c> \mid <a,b> \in A\times B \wedge c\times C\}$

$A\times(B\times C)=\{<a,<b,c>> \mid a\in A \wedge <b,c> \in B\times C\}$,

因 $<a,<b,c>>$不是有序三元组，所以$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

可见，集合笛卡尔积也不满足结合律。

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

2. 集合笛卡尔积运算的性质

(1) 如果A、B都是有限集，且$|A|=m$, $|B|=n$，则$|A\times B|=mn$。

证明：由笛卡尔积的定义及排列组合中的乘法原理得证。

(2) $A\times \Phi=\Phi\times B=\Phi$

证明：以$A\times\Phi=\Phi$为例，根据集合笛卡尔积的定义，$A\times\Phi$由A的元素为第一元素，Φ的元素为第二元素组成序偶的集合，由于Φ中没有任何元素，因此$A\times\Phi=\Phi$。

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

2. 集合笛卡尔积运算的性质

(3) $\times$对$\cup$和$\cap$满足分配律

设A,B,C是任意集合，则

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

2. 集合笛卡尔积运算的性质

证明： $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

任取 $<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

2. 集合笛卡尔积运算的性质

(4) 若$C \neq \Phi$，则$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$

证明充分性：
已知$A \subseteq B$，求证 $A \times C \subseteq B \times C$。
任取$<x,y> \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$
$\Rightarrow x \in B \wedge y \in C$　(因已知$A \subseteq B$)
$\Leftrightarrow <x,y> \in B \times C$　所以，$A \times C \subseteq B \times C$。

证明必要性：
已知$C \neq \Phi$，由$A \times C \subseteq B \times C$　求证$A \subseteq B$。
取C中元素y，并任取$x \in A$
$\Rightarrow x \in A \wedge y \in C \Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in A \times C$
$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in B \times C$　（因已知$A \times C \subseteq B \times C$）
$\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \Rightarrow x \in B$　所以，$A \subseteq B$。

综上，$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$；类似可证$A \subseteq B \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$。

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

2. 集合笛卡尔积运算的性质

(5) 设A、B、C、D为非空集合，则 $A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow A\subseteq C \land B\subseteq D$

证明充分性：
已知 $A\times B\subseteq C\times D$，证明 $A\subseteq C\land B\subseteq D$
任取 $x\in A$，任取 $y\in B$，则有
$x\in A\land y\in B \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B$
$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D$ （由 $A\times B\subseteq C\times D$）
$\Leftrightarrow x\in C\land y\in D$ 所以，$A\subseteq C\land B\subseteq D$。

证明必要性：
已知 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$ 证明 $A\times B\subseteq C\times D$
任取 $\langle x,y\rangle\in A\times B$
$\Leftrightarrow x\in A\land y\in B$
$\Rightarrow x\in C\land y\in D$ （由 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$）
$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D$ 所以，$A\times B\subseteq C\times D$

综上，$A\times B\subseteq C\times D\Leftrightarrow A\subseteq C\land B\subseteq D$。

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

2. 集合笛卡尔积运算的性质

(6) 由于×不满足结合率，所以约定

$$((\ldots(A_1\times A_2)\times\ldots\times A_{n-1})\times A_n)=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$$

如果$A_1=A_2=\ldots=A_n$, 则$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = A^n$

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

3. 集合笛卡尔积运算的应用

(1) 设$A_1=\{x|x$是学号$\}$，$A_2=\{x|x$是姓名$\}$，$A_3=\{$男,女$\}$，
$A_4=\{x|x$是出生日期$\}$，$A_5=\{x|x$是班级$\}$，$A_6=\{x|x$是籍贯$\}$

则$A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5\times A_6$中一个元素：

<001，王强，男，1981:02:16，计201301，辽宁>

这就是学生档案数据库的一条信息，所以学生的档案就是$A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5\times A_6$的一个子集。

第二节 集合的笛卡尔积

二、集合的笛卡儿积

3. 集合笛卡尔积运算的应用

(2) 令A={a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}，即英文字母表。那么，一个英文单词可以看成有序n元组，如：

英文单词	有序n元组	
at	$\langle a, t\rangle$	$\in A^2$
boy	$\langle b, o, y\rangle$	$\in A^3$
data	$\langle d, a, t, a\rangle$	$\in A^4$
computer	$\langle c, o, m, p, u, t, e, r\rangle$	$\in A^7$

全部英文单词的集合可以看成是$A\cup A^2\cup\cdots\cup A^n$的一个子集。