第8节 有限个体域下

谓词演算的消去量词公式

有限个体域消去量词的等价公式

设论域为 $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，则

1. $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge A(a_n)$
2. $\exists x B(x) \Leftrightarrow B(a_1) \vee B(a_2) \vee \ldots\ldots \vee B(a_n)$

谓词逻辑与命题逻辑的区别在于命题的表达不同。谓词公式与命题公式的最大区别在于多了量词，

例：令 A(x)：表示x是整数，

B(x)：表示x是奇数，

个体域为 {1,2,3,4,5}，

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(1) \wedge A(2) \wedge A(3) \wedge A(4) \wedge A(5)$$

$$\exists x B(x) \Leftrightarrow B(1) \vee B(2) \vee B(3) \vee B(4) \vee B(5)$$

$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge A(a_n)$

证明：若 $\forall xA(x)$ 为 T，则个体域中每个个体均为 T。于是$A(a_1)$为 T， $A(a_2)$为 T，…， $A(a_n)$为 T，所以 $A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge A(a_n)$为 T。

若 $\forall xA(x)$ 为 F，则个体域中一定存在着某个个体 a_i，使得 $A(a_i)$ 为 F，于是$A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge A(a_n)$为 F。

综上，$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots\ldots \wedge A(a_n)$ 成立。

例：论域$D=\{1,2\}$，

$P(1,1)=T \quad P(1,2)=T \quad P(2,1)=F \quad P(2,2)=F$

求 $\forall x \exists y P(y,x)$ 的真值.

解：$\forall x \exists y P(y,x)$

$\Leftrightarrow \exists y P(y,1) \wedge \exists y P(y,2)$

$\Leftrightarrow ((P(1,1) \vee P(2,1)) \wedge ((P(1,2) \vee P(2,2))$

$\Leftrightarrow (T \vee F) \wedge (T \vee F)$

$\Leftrightarrow T \wedge T \Leftrightarrow T$