第八章　群和环

第五节 群的定义及性质(3)

4. 群方程有唯一解

定理

设<G,★>是个群，则对任何a,b∈G,

(1) 存在唯一元素 x∈G，使得 a★x=b .....(1)

(2) 存在唯一元素 y∈G，使得 y★a=b .....(2)

证明：先证明 (1) 式有解

因<G,★>是群，对任意 a,b∈G，有a^{-1}∈G，所以 a^{-1}★b∈G，将 a^{-1}★b 代入(1)中得：

a★x= a★(a^{-1}★b)= (a★a^{-1})★b= e★b=b ,

所以 x=a^{-1}★b 是方程 (1) 的解。

再证明 (1) 式的解有唯一性

设 (1) 式有两个解 x_1，x_2∈G，于是有 a★x_1=b，a★x_2=b

所以 a★x_1= a★x_2，由可消去性得 x_1=x_2。

类似的可证明(2)。

思考

方程 $a\star x=b$ 的解 为 $a^{-1}\star b$

方程 $y\star a=b$ 的解 是什么?

$b\star a^{-1}$

例：设群 $G=\langle \mathcal{P}(\{a,b\}), \oplus \rangle$，其中 $\oplus$ 为对称差运算。解下列群方程：

$$\{a\}\oplus X=\Phi，\quad Y\oplus\{a,b\}=\{b\}$$

$\langle \mathcal{P}(\{a,b\}), \oplus\rangle$幺元是 Φ,

因对任意集合 $A\in\mathcal{P}(\{a,b\})$，$A\oplus A=\Phi$，所以 $A^{-1}=A$

解： 根据前述定理

$$X=\{a\}^{-1}\oplus \Phi =\{a\}\oplus \Phi =\{a\},$$

$$Y=\{b\}\oplus\{a,b\}^{-1}=\{b\}\oplus\{a,b\}=\{a\}$$

第五节 结束