第5节　　函数的逆运算

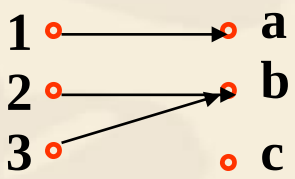
关系逆运算的定义：设 $R \subseteq X \times Y$，

其逆关系 $R^C \subseteq Y \times X$ 。 $R^C = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}$

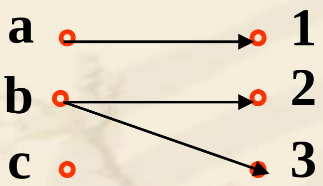
若 $f: X \to Y$， $f^C: Y \to X$ 是否是个函数？

看下面的例子：

$f: X \to Y$



$f^C: Y \to X$



显然 f^C 不是函数。

可见如果一个函数不是双射的，它的逆就不是函数。

1.逆函数定义：

设 $f:X\to Y$ 是双射函数，$f^C:Y\to X$ 也是函数，

称之为 f 的逆函数，记为f^{-1}。

f^{-1} 存在，也称 f 可逆。显然，f^{-1} 也是双射函数。

2. 性质

定理1 设 $f:X\to Y$ 是双射函数，则

$$(f^{-1})^{-1}= f \quad 。$$

证明：略

定理2　令 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 是两个双射函数，　则

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

此定理与关系复合运算的性质 $(R \circ S)^C = S^C \circ R^C$ 的证明类似，证明略。

定理3 设 $f:X\to Y$ 是双射函数，则有

$$f^{-1}\circ f= I_X \quad 且 \quad f\circ f^{-1} = I_Y。$$

证明：证 $f^{-1}\circ f= I_X$

先证明定义域、陪域相等。

因为 $f:X\to Y$ 是双射函数，所以 $f^{-1}:Y\to X$也是双射函数，而 $f^{-1}\circ f : X\to X$， $I_X : X\to X$

可见$f^{-1}\circ f$ 与 I_X 具有相同的定义域和陪域。

再证它们的映射相同：

任取 $x \in X$，因 $f:X \to Y$，所以存在 $y \in Y$，使得

$y = f(x)$， 又 f 可逆，故 $f^{-1}(y) = x$，于是

$f^{-1} \circ f\,(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_X(x)$ 。

综上 $f^{-1} \circ f = I_X$ 。

注：当 f 可逆，

$y=f(x) \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in f \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow x= f^{-1}(y)$。

类似的可以证明 $f \circ f^{-1} = I_Y$ 。

定理4 令 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ 是两个函数，

如果 $g\circ f = I_X$ 且 $f\circ g = I_Y$，则 $g = f^{-1}$ 且 $f = g^{-1}$。

证明：先证 f 和 g 都可逆。因为 $g\circ f = I_X$，I_X是双射函数，由函数复合定理4知，g 是满射的且 f 是入射的。同理由 $f\circ g = I_Y$ 知 f 是 满射的且 g 是入射的。因此 f 和 g 都是双射函数，均可逆。

其次 $f^{-1}:Y\to X$，与 g 具有相同的定义域和陪域。

$g^{-1}:X\to Y$，与 f 具有相同的定义域和陪域。

再次 证明它们的映射相同。

任取 $y \in Y$，

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(I_Y(y)) = f^{-1} \circ I_Y(y) = f^{-1} \circ (f \circ g)(y)$$

$$= (f^{-1} \circ f) \circ g(y) = I_X \circ g(y) = I_X(g(y)) = g(y)$$

同样 任取 $x \in X$，

$$g^{-1}(x) = g^{-1}(I_X(x)) = g^{-1} \circ I_X(x) = g^{-1} \circ (g \circ f)(x)$$

$$= (g^{-1} \circ g) \circ f(x) = I_Y \circ f(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$$

综上 $f^{-1} = g$， $g^{-1} = f$。

注意： $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$ 必须同时满足，

才有 $f^{-1} = g$ 及 $g^{-1} = f$。

反例：令 $X=\{1,2\}$，$Y=\{a,b,c\}$，

$f=\{<1,a>,<2,c>\}$，$g=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$

$g \circ f=\{<1,1>,<2,2>\}$，满足 $g \circ f = I_X$

但 f 与 g 均不是双射函数，

即 f 与 g 均不可逆。