第九章 格与布尔代数

第七节

特殊的格(2)

二. 有界格

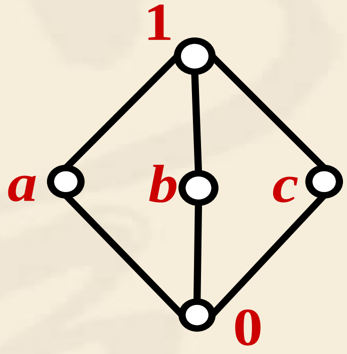
- 格的全上界与全下界

［全上界］设$<A, \preccurlyeq>$是格，如果存在元素$a \in A$对任何$x \in A$，$x \preccurlyeq a$，则称 a是格的全上界，记作1。

- 一个格如果有全上界，则是唯一的。

［全下界］设$<A, \preccurlyeq>$是格，如果存在元素$a \in A$对任何$x \in A$，$a \preccurlyeq x$，则称 a是格的全下界，记作0。

- 一个格如果有全下界，则是唯一的。



从格的图形看：全上界1，就是图的最上边元素(只一个)，全下界0，就是图的最下边元素(只一个)。

有界格

如果一个格存在全上界1与全下界0，则称此格为有界格。

- 设$<A, \preccurlyeq>$是有界格，则对任何$a \in A$, 有

因为 $a \preccurlyeq 1$, $\therefore\ a \wedge 1 = a \quad a \vee 1 = 1$

$0 \preccurlyeq a$, $\therefore\ a \wedge 0 = 0 \quad a \vee 0 = a$

- 是否所有格都是有界格？

所有有限个元素的格都是有界格，而无限个元素的格可能是无界格。例如$<I, \leqslant>$就是既无全上界与全下界。

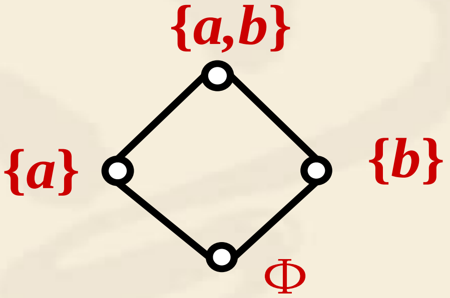
三. 有补格

❖ 集合的补集

若 $A\cup B=E$ $A\cap B=\Phi$ 则 $\sim A=B$，$\sim B=A$

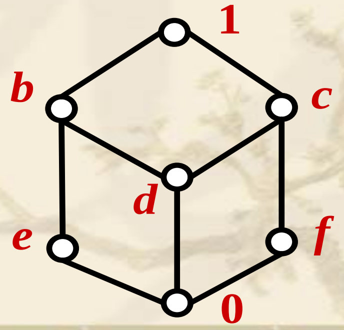
如 $E=\{a,b\}$ $\sim E=\Phi$， $\sim\Phi=E$

$\sim\{a\}=\{b\}$， $\sim\{b\}=\{a\}$



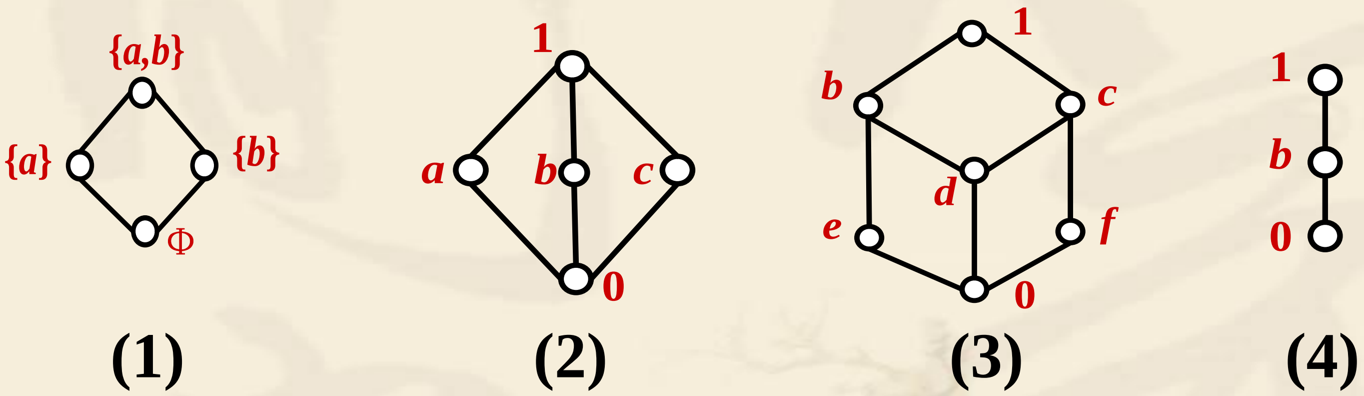
[元素的补元] 设 $<A,\preccurlyeq>$ 是个有界格，$a\in A$，如果存在 $b\in A$，使得 $a\vee b=1$，$a\wedge b=0$，则称a与b互为补元。

例：右图中 e的补元为 c，f； b的补元为 f；
f 的补元为 b，e； c的补元为 e； d无补元；
0 的补元为1； 1的补元为 0



有补格

一个有界格中，如果每个元素都有补元，则称之为有补格。



- 上述有界格中，(1)和(2)是有补格。其中(2)中的a, b, c的补元不唯一。
- 什么样的有补格中元素的补元唯一呢？－是有界分配格。

[定理] 设<A, ≼>是有界分配格，若A中元素 a 存在补元，则存在唯一的补元。

证明：假设 c 是 a 的补元，则有

$$a \vee c = 1,\ a \wedge c = 0$$

又若 b 是 a 的补元，有

$$a \vee b = 1,\ a \wedge b = 0$$

从而得到 $a \vee c = a \vee b,\ a \wedge c = a \wedge b$

由于A是分配格，$b = c$，即补元唯一

四. 布尔格

布尔格

如果一个格是有补分配格，则称之为布尔格。布尔格中每个元素都有唯一补元，元素a的补元记作 $\bar{a}$ 。

- 显然$<P(E), \subseteq>$是布尔格。

第七节

结束