第九章 格与布尔代数

第四节

格的性质(2)

5. ∨和∧都满足**结合律**。即

$$(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c),\quad (a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$$

证明： 由最小上界的定义有

$$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee b \succcurlyeq a \quad (1) \qquad (a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee b \succcurlyeq b \quad (2)$$

$$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq c \quad (3)$$

由式(2)和(3)有 $(a\vee b)\vee c \succcurlyeq b\vee c \quad (4)$

由式(1)和(4)有 $(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee(b\vee c)$

同理可证 $(a\vee b)\vee c \preccurlyeq a\vee(b\vee c)$

根据反对称性 $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$

由对偶原理 $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

6. $\vee$和$\wedge$都满足**吸收律**。即 $a\vee(a\wedge b)=a,\ a\wedge(a\vee b)=a$

证明： 显然 $a\vee(a\wedge b)\geqslant a$

由 $a\leqslant a,\ a\wedge b\leqslant a$，可得 $a\vee(a\wedge b)\leqslant a$

由此可得 $a\vee(a\wedge b)=a$； 根据对偶原理， $a\wedge(a\vee b)=a$

7. $<A,\vee,\wedge>$是代数系统，如果$\vee$和$\wedge$是满足吸收律的二元运算，则$\vee$和$\wedge$必满足幂等律。

证明： 任取$a,b\in A$ 由于$\vee$和$\wedge$满足吸收律，则有

$$a\vee(a\wedge b)=a \text{ -------(1)} \qquad a\wedge(a\vee b)=a \text{ --------(2)}$$

由于上式中的b是任意的，可以令$b=a\vee b$ 代入(1)式得

$a\vee(a\wedge(a\vee b))=a$， 由(2)式得 $a\vee a=a$ 。

同理可证 $a\wedge a=a$

第四节

结束