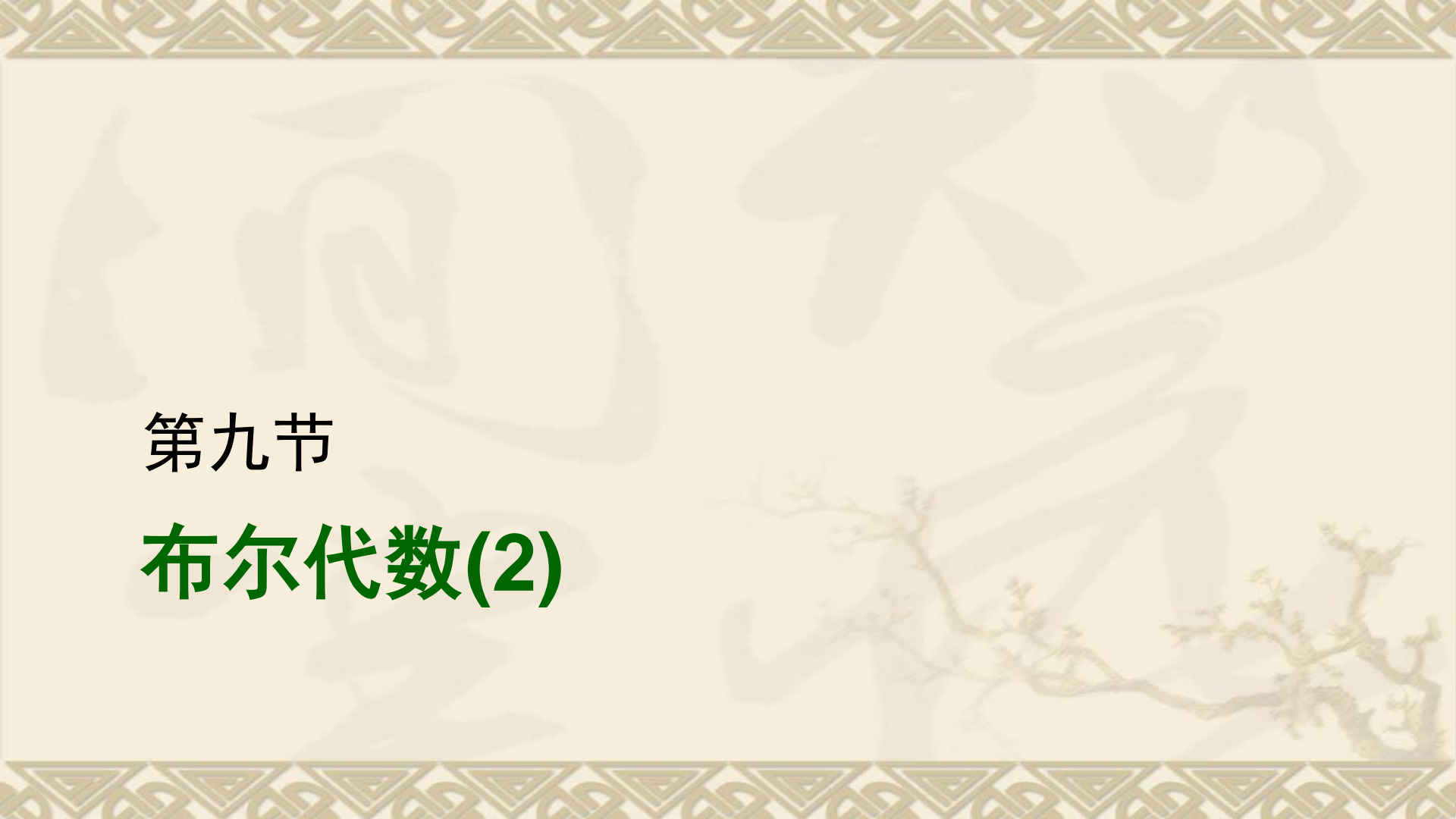



第九章 格与布尔代数



第九节

布尔代数(2)



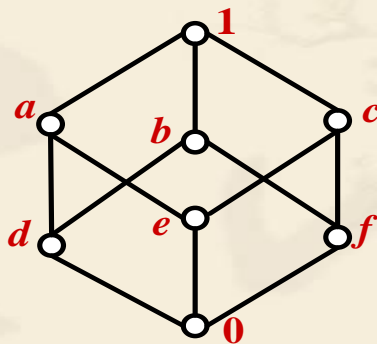
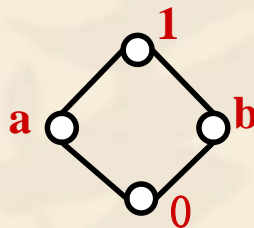
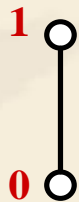
三. 有限布尔代数结构

原子

[定义1] 设 $\langle B, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 布尔代数，元素 $a \in B, a \neq 0$ ，对任何元素 $x \in B$ ，有 $x \wedge a = a$ ，或 $x \wedge a = 0$ ，则称 a 是原子。

[定义2] $\langle B, \leq \rangle$ 是布尔格，在 $\langle B, \leq \rangle$ 的哈斯图中称盖住全下界0的元素为原子。

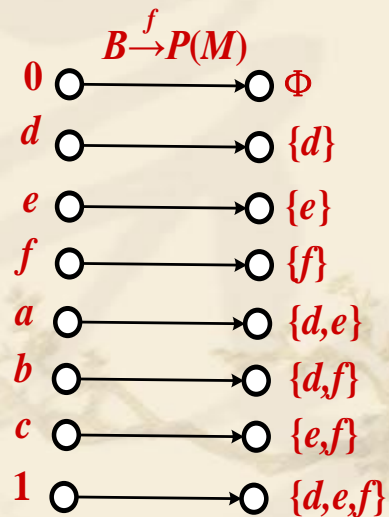
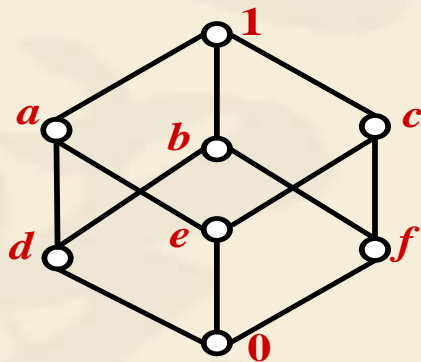
例



图中三个布尔代数的原子构成的集合分别为 $\{1\}$, $\{a, b\}$, $\{d, e, f\}$

[Stone定理] 设 $\langle B, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 是有限布尔代数， M 是 B 中所有原子构成的集合，则 $\langle B, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 与 $\langle P(M), \cup, \cap, \sim \rangle$ 同构。

例：如下图布尔代数 $\langle A, \leq \rangle$ ，构造幂集代数 $\langle P(M), \leq \rangle$ ， $P(M) = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{d,e\}, \{d,f\}, \{e,f\}, \{d,e,f\}\}$ ，以及如下映射 f ，那么 f 就是从 A 到幂集 $P(M)$ 的同构映射



[推论1] 任何有限布尔代数的元素个数为 2^n , $n \in \mathbb{N}$

证明：设 B 是有限布尔代数， M 是 B 的所有原子构成的集合，且 $|M| = n$, $n \in \mathbb{N}$ 。

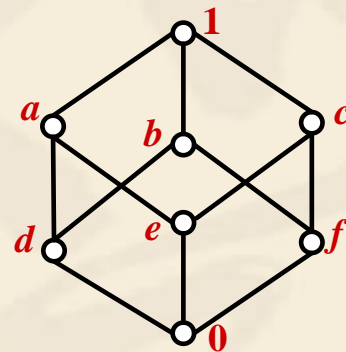
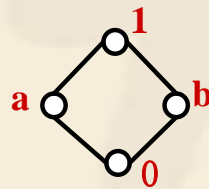
由定理得 $B \cong P(M)$ ，而 $|P(M)| = 2^n$ ，所以 $|B| = 2^n$ 。

[推论2] 两个有限布尔代数同构的充分且必要条件是元素个数相同。




结论：

- 有限布尔代数的基数都是2的幂；
- 对于任何自然数 n ，仅存在一个 2^n 元的布尔代数。

右图给出了 2 元,
4 元和 8 元的布
尔代数.



本节重点掌握布尔代数的性质, Stone定理及其推论



第九节 结束

