第八章　群和环

代数系统是由一个非空集合加上一个或几个运算构成的。

从这节起，我们要介绍一些特殊的代数系统。

所谓特殊，是指这些代数系统中的运算具有特殊的性质。

我们要介绍下列一些代数系统：

特殊代数系统
一个运算
半群
独异点
群
两个运算
环
域
三个运算
布尔代数

第一节　半群和独异点

(1)

1、半群(Semi-group)

定义：设S是非空集合， ★是S上的二元运算，如果★在S上满足 封闭性、可结合性，则称 <S,★> 是半群。

2. 独异点 (Monoid)

定义：设<M,★>是个半群，如果★运算有幺元，则称<M,★>是独异点，也称它是含幺半群。

思考

<N,+>、<R,×>、<P(E), ∩>、<P(E), ⊕>是否是半群？是否是独异点？

“+”法运算在自然数集合N上是封闭的、并且“+”法运算是可结合的，所以<N,+>是半群。

同样道理， <R,×>、<P(E), ∩>、<P(E), ⊕> 均是半群。

<N,+>的幺元是 0；<R,×>的幺元是 1；<P(E), ∩>的幺元是 E；<P(E), ⊕>的幺元是 Φ。 所以它们都是独异点。

因为“÷”、“-”均不满足结合律，所以<R,÷ >、<N, - >不是半群，更不是独异点

N_k 是模 k 同余关系中的余数等价类，

即： $N_k=\{[0],[1],[2],\ldots,[k-1]\}$，

简记成：$N_k=\{0,1,2,\ldots, k-1\}$

N_k 上的模 k 加法运算 $+_k$ 定义为：

任取 x , y∈N_k， $x +_k y= (x + y)(\mathrm{mod}\ k)$；

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

解：从运算表可以看出，$+_6$运算在集合 $N_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ 上是封闭的；幺元是 0；

可以验算，$+_6$ 运算在集合 N_6 上是可结合的。

例如 $(2 +_6 3) +_6 4=5 +_6 4=3$，$2 +_6(3 +_6 4)=2 +_6 1=3$，其它可类似验算。 所以 $<N_6,+_6>$ 是独异点。

第一节 结束