第12节 主合取范式

二、主合取范式

- 大项定义：是 n 个命题变元的析取式，其中每个变元必出现且仅出现一次(以本身或否定形式)，称该析取式为大项。

- 有 n 个变元，则有 2^n 个大项。

- 大项的编码：大项的编码正好与小项相反，用 0 表示变元本身，1 表示变元的否定形式。

如：$M_{00} \Leftrightarrow P \vee Q$　　$M_{01} \Leftrightarrow P \vee \neg Q$

$M_{10} \Leftrightarrow \neg P \vee Q$　　$M_{11} \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

显然，$M_i \Leftrightarrow \neg m_i$

例：$M_{011} \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee \neg R \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg m_{011}$

		M_{00}	M_{01}	M_{10}	M_{11}
	P Q	$P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$
00	F F	F	T	T	T
01	F T	T	F	T	T
10	T F	T	T	F	T
11	T T	T	T	T	F

1. 每个大项当且仅当其赋值与编码相同时，其真值为 F；其余 2^n-1 组赋值均使该大项的真值为 T。
2. 全体大项的合取式必为永假式

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge \ldots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$$

主合取范式定义：若一个命题公式的合取范式为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n (n \geq 1)$，其中每个 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 都是大项，则称之为该命题公式的主合取范式。

求主合取范式的步骤：

(1) 先写出给定公式的合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$。

(2) 为使每个 A_i 变成大项，对缺少变元的项 A_i 补全变元，比如缺变元 R，用"$\vee (R \wedge \neg R)$"的形式补R。

(3) 用分配律等公式加以整理。

例：求$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$的主合取范式

$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$ -------去掉其它连结词

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$ ------- “¬”移到命题变元前面

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ ------- 化成合取范式

$\Leftrightarrow(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$ ---补变元

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge$

$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$ ---用分配率整理

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

主合取范式的真值表求法：

(1) 列出给定公式的真值表。

(2) 找出该公式真值表中的每个为“F”行的赋值所对应的大项。

(3) 用“$\wedge$”联结上述大项，即可。

定理 在真值表中，一个使公式的真值为 F 的赋值所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

例：求 $P\rightarrow Q$ 和 $P\leftrightarrow Q$ 的主合取范式

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
0	0	T	T
0	1	T	F
1	0	F	F
1	1	T	T

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow M_{10} \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow M_{01} \wedge M_{10}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

思考:

1. 永真公式的主析取范式是什么样 ？ 是否有主合取范式？

2. 永假公式的主合取范式是什么样 ？ 是否有主析取范式？

3. 若已知主合取范式，能否直接写出主析取范式？

例：已知 A(P,Q,R) 的主析取范式中含有下面小项 m_1， m_3，m_5， m_7，求它的和主合取范式。

解： 在真值表中，除了使命题公式 A 为真的赋值，其余的就是使 A 为假的赋值。而主析取范式中包含的小项的编码，就是使命题公式 A 为真的赋值

例：已知 A(P,Q,R) 的主析取范式中含有下面小项 m_1， m_3， m_5， m_7，求它的和主合取范式。

解： 所以赋值1，3，5，7，即 001，011，101，111 就是使 A 为真的赋值。 0，2，4，6，即 000，010，100，110 是使 A 为假的赋值。

$$A(P,Q,R) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100} \wedge M_{110}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

例： A，B，C，D 四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？ ① 若 A 去则 C 和 D 中要去一个人。② B 和 C 不能都去。 ③ C 去则 D 要留下。

解：令 A，B，C，D 分别表示 A去，B去，C去，D去。

① $A \rightarrow (C \overline{\vee} D) \Leftrightarrow A \rightarrow ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$

② $\neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg C$

③ $C \rightarrow \neg D \Leftrightarrow \neg C \vee \neg D$

总的条件为：

$(\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$

将几个条件的合取式化成析取范式：

$$(\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge \neg D))$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg C) \vee$$

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee$$

$$(\neg C \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg D)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee$$

$$(C \wedge \neg D \wedge \neg B)$$

最后的派法要使得

$(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee$

$(C \wedge \neg D \wedge \neg B)$

为 T。

可以取 $\neg A \wedge \neg C$为 T，得 B 和 D 去。

可以取 $\neg C \wedge D$ 为 T，得 A 和 D 去，或者 B 和 D 去。

可以取 $C \wedge \neg D \wedge \neg B$ 为 T，得 A 和 C 去 。

最后得到三种派法：

A和C去、A和D去、B和D去。