第八章　群和环

第十节 子群及其证明

(3)

定理

设<G,★>是群，S是G的非空子集，如果对任意 a,b∈S，均有 a★b^{-1}∈S，则 <S,★>是 <G,★>的子群。

S是非空子集	√
★在S上封闭	?
幺元在S中	?
S中每个元素均可逆	?

定理： 设<G,★>是群，S是G的非空子集，如果对任意 $a,b\in S$，均有 $a★b^{-1}\in S$，则<S,★>是<G,★>的子群。

证明：

(1)先证幺元 $e\in S$

任取 $a\in S$，由已知得 $a★a^{-1}\in S$，而 $a★a^{-1}=e$，即 $e\in S$。

(2)再证S中任意元素均可逆

任意 $b\in S$，都有 $b^{-1}\in S$

任取 $b\in S$，由(1)知 $e\in S$，再由已知得 $e★b^{-1}\in S$，而 $e★b^{-1}= b^{-1}$，即 $b^{-1}\in S$

定理： 设<G,★>是群，S是G的非空子集，如果对任意 a,b∈S，均有$a★b^{-1}∈S$，则<S,★>是<G,★>的子群。

证明：

(3)最后证明 <S,★> 的封闭性

任意 a,b∈S，都有 a★b ∈S

任取 a,b∈S，由(2)知 $b^{-1}∈S$，由已知得 $a★(b^{-1})^{-1}∈S$，即得 a★b∈S

任意 b∈S，都有 $(b^{-1})^{-1}=b$

综上，<S,★> 是 <G,★> 的子群。

练习： 已知$<H_1,\bigstar>$和$<H_2,\bigstar>$ 是群$<G,\bigstar>$的子群，求证$<H_1 \cap H_2,\bigstar>$ 是$<H_1,\bigstar>$、$<H_2,\bigstar>$和$<G,\bigstar>$的子群。

证明方法

使用定义证明

使用定理证明

定理： 设 $<G,\bigstar>$ 是群，S是G的**非空子集**，如果**任意**$a,b \in S$, 有$a\bigstar b^{-1} \in S$, 则$<S,\bigstar>$ 是 $<G,\bigstar>$的子群。

$H_1 \cap H_2$是H_1、H_2及G的非空子集 ?

任意$a,b \in H_1 \cap H_2$, $a\bigstar b^{-1} \in H_1 \cap H_2$?

练习：已知$<H_1,\bigstar>$和$<H_2,\bigstar>$是群$<G,\bigstar>$的子群，求证$<H_1\cap H_2,\bigstar>$是$<H_1,\bigstar>$、$<H_2,\bigstar>$和$<G,\bigstar>$的子群。

证明:

(1) 先证明 $H_1\cap H_2$ 是 H_1、H_2 及 G 的非空子集

显然 $H_1\cap H_2\subseteq H_1$，$H_1\cap H_2\subseteq H_2$，

$H_1\cap H_2\subseteq G$;

因为$<H_1,\bigstar>$和$<H_2,\bigstar>$是群$<G,\bigstar>$的子群，所以幺元 $e\in H_1$ 并且 $e\in H_2$，

于是 $e\in H_1\cap H_2$，即 $H_1\cap H_2\neq \Phi$，

所以 $H_1\cap H_2$ 是 H_1、H_2 及 G 的非空子集。

练习：已知$<H_1,\star>$和$<H_2,\star>$是群$<G,\star>$的子群，求证$<H_1\cap H_2,\star>$是$<H_1,\star>$、$<H_2,\star>$和$<G,\star>$的子群。

证明：

(2) 再证明对任意 $a,b\in H_1\cap H_2$，$a\star b^{-1}\in H_1\cap H_2$

因为 $a,b\in H_1\cap H_2$，所以 $a,b\in H_1$且$a,b\in H_2$；

又因为 $<H_1,\star>$和$<H_2,\star>$是群$<G,\star>$的子群，所以 $b^{-1}\in H_1$，$b^{-1}\in H_2$；再由封闭性知

$a\star b^{-1}\in H_1$，$a\star b^{-1}\in H_2$，即有 $a\star b^{-1}\in H_1\cap H_2$

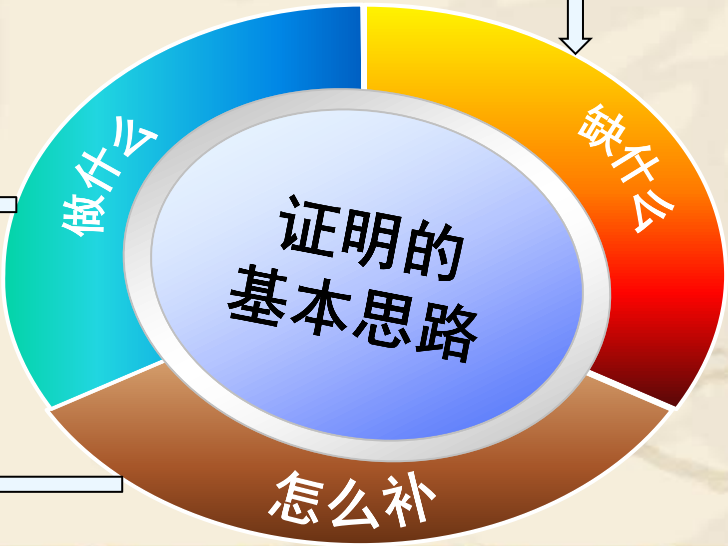
综上 $<H_1\cap H_2,\star>$是$<H_1,\star>$,$<H_2,\star>$和$<G,\star>$的子群。

四. 如何求解证明问题

将题中所给的已知条件与定义、定理做比较，确定缺少的要素。

明确证明的目标

利用已知及其它的定理、定义



第十节 结束