第八章　群和环

第十一节 子群的陪集及拉格朗日定理(1)

一. 子群的陪集

1. 定义： 设<H,★>是群<G,★>的子群，a∈G，定义集合:

$$aH=\{a\star h|h\in H\}$$

$$Ha=\{h\star a|h\in H\}$$

称 aH(Ha) 为 a 确定的 H 在 G 中的左(右)陪集。

我们只讨论左陪集，对于右陪集有相似的结论

例：考察$<N_6, +_6>$的子群 $<H_2, +_6>$， $H_2=\{0,2,4\}$ 。

求 H_2 的所有左陪集。

$0H_3=\{0+_60,\ 0+_62,\ 0+_64\}=\{0,2,4\}$

$1H_3=\{1+_60,\ 1+_62,\ 1+_64\}=\{1,3,5\}$

$2H_3=\{2+_60,\ 2+_62,\ 2+_64\}=\{2,4,0\}$

$3H_3=\{3+_60,\ 3+_62,\ 3+_64\}=\{3,5,1\}$

$4H_3=\{4+_60,\ 4+_62,\ 4+_64\}=\{4,0,2\}$

$5H_3=\{5+_60,\ 5+_62,\ 5+_64\}=\{5,1,3\}$

可以看出：

$0H_3=2H_3=4H_3=\{0,2,4\}$

$1H_3=3H_3=5H_3=\{1,3,5\}$

任意两个左陪集，要么相等，要么不相交。

思考

两个左陪集在什么情况下相等？

在什么情况下不相交？

定理1

<H,★>是群<G,★>的子群，任何 $a,b\in G$，有

(1) $aH=bH$ 当且仅当 $a\in bH$

(2) $aH\cap bH=\Phi$ 当且仅当 $a\notin bH$

证明(1)

a) 必要性，已知 $aH=bH$，因 $e\in H$，于是 $a=a\star e\in aH$，所以 $a\in bH$。

b) 充分性，设 $a\in bH$，(往证aH=bH)先证 $aH\subseteq bH$，设任意 $x\in aH$，于是有 $h_1\in H$，使得 $x=a\star h_1$，由于$a\in bH$，于是有 $h_2\in H$，使得 $a=b\star h_2$，于是 $x=(b\star h_2)\star h_1=b\star(h_2\star h_1)$ 由<H,★> 是群，$h_2\star h_1\in H$，于是 $x\in bH$，所以$aH\subseteq bH$。同理可证 $bH\subseteq aH$，于是 $aH=bH$。

定理1 <H,★>是群<G,★>的子群，任何 $a,b\in G$，有

(1) $aH=bH$ 当且仅当 $a\in bH$。

(2) $aH\cap bH=\Phi$ 当且仅当 $a\notin bH$。

证明(2)

a) 必要性，已知 $aH\cap bH=\Phi$，假设 $a\in bH$，

由于 $e\in H$，于是 $a=a\star e\in aH$，于是 $a\in aH\cap bH$，与 $aH\cap bH=\Phi$ 矛盾，所以 $a\notin bH$。

b) 充分性，已知 $a\notin bH$，（往证 $aH\cap bH=\Phi$ ）

假设 $aH\cap bH\neq\Phi$，则至少有 $x\in aH\cap bH$，于是 $x\in aH$ 且 $x\in bH$，即存在 $h_1,h_2\in H$ 使得 $x=a\star h_1$，$x=b\star h_2$，于是 $a\star h_1=b\star h_2$。又 $h_1^{-1}\in H$，所以 $a=b\star(h_2\star h_1^{-1})$。而 $h_2\star h_1^{-1}\in H$ 于是 $a\in bH$，与 $a\notin bH$ 矛盾。因此 $aH\cap bH=\Phi$。

从上面定理可以看出：一个子群的任意两个左陪集，

要么相等，要么不相交。

当 $a \in bH$，$aH=bH$；

当 $a \notin bH$，$aH \cap bH=\Phi$。

第十一节 结束