第三章 集合论初步

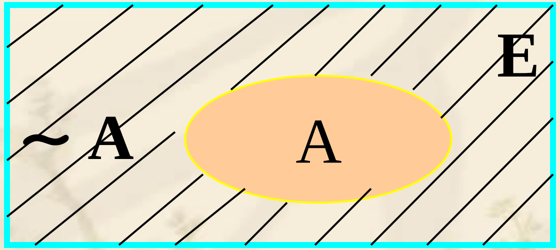
第六节 集合的绝对补集与对称差

第六节 集合的绝对补集与对称差

一. 求集合的绝对补集

1.定义：A是集合,由不属于A的元素构成的集合, 称之为A的绝对补集,记作~A。

实际上 ~A=E-A。



例如，E={1,2,3,4}

A={2,3},~A={1,4}

第六节 集合的绝对补集与对称差

一. 求集合的绝对补集

2. 集合绝对补集运算的谓词公式定义

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \land x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$$

$$x \in \sim A \Leftrightarrow x \notin A$$

第六节 集合的绝对补集与对称差

一. 求集合的绝对补集

3. 性质

设A、B、C是任意集合，则

(1) $\sim E=\Phi$　　　　(2) $\sim \Phi=E$

(3) $\sim(\sim A)=A$

(4) $A\cap\sim A=\Phi$　　　　(5) $A\cup\sim A=E$

(6) $A-B=A\cap\sim B$

性质(6)证明:

任取$x\in A-B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B$

$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$

第六节 集合的绝对补集与对称差

一. 求集合的绝对补集

3. 性质

(7) $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

(8) $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

证明(7)： 任取$x\in\sim(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow\neg(x\in A\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow(x\notin A\vee x\notin B)\Leftrightarrow x\in\sim A\vee x\in\sim B\ \Leftrightarrow x\in\ \sim A\cup\sim B$

第六节 集合的绝对补集与对称差

一. 求集合的绝对补集

3. 性质

(9) $A \subseteq B \Leftrightarrow {\sim}B \subseteq {\sim}A$

(10) ${\sim}A=B$ 当且仅当 $A \cup B=E$ 且 $A \cap B=\Phi$

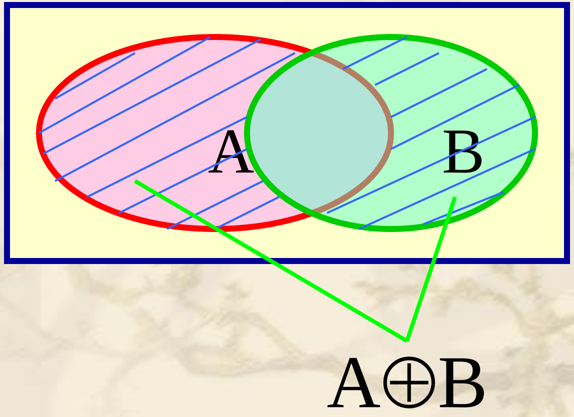
练习：证明性质(10)。

$A \subseteq B$
$\Leftrightarrow A-B=\Phi$
$\Leftrightarrow A \cap B=A$
$\Leftrightarrow A \cup B=B$
$\Leftrightarrow {\sim}B \subseteq {\sim}A$

第六节 集合的绝对补集与对称差

二. 对称差

1.定义：A、B是集合,由属于A而不属于B，或者属于B而不属于A的元素构成的集合,称之为A与B的对称差,记作$A\oplus B$。



例如：$A=\{1,2,3\}$,

$B=\{2,3,4\}$,

$A\oplus B=\{1,4\}$;

第六节　集合的绝对补集与对称差

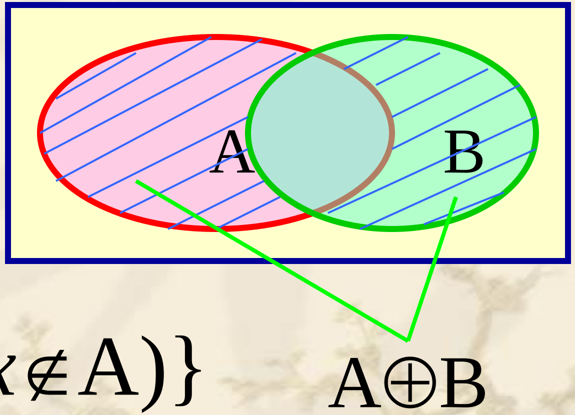
二. 对称差

2. 集合对称差运算的谓词公式定义

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$



第六节 集合的绝对补集与对称差

二. 对称差

3. 性质

(1) 交换律 对任何集合A、B，有$A\oplus B=B\oplus A$。

(2) 结合律 对任何集合A、B、C，有

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

(3) 同一律 对任何集合A，有$A\oplus\Phi=A$。

二. 对称差

3. 性质

(4) 对任何集合A，有$A \oplus A = \Phi$。

(5) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

解释：$\cap$对$\oplus$可分配、可提取的；

第六节 集合的绝对补集与对称差

二. 对称差

(5) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

证明性质(5)： $(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$= ((A\cap B)\cup(A\cap C))-((A\cap B)\cap(A\cap C))$

$= (A\cap(B\cup C))-(A\cap B\cap C)$

$= A\cap((B\cup C)-(B\cap C))$ 　　(∩对-是可分配、可提取的)

$= A\cap(B\oplus C)$

第六节 集合的绝对补集与对称差

二. 对称差

注意： ∪对⊕是不可分配，例如：

$$A \cup (A \oplus B)$$
$$= A \cup ((A - B) \cup (B-A))$$
$$= A \cup (A - B) \cup (B-A)$$
$$= A \cup (B - A)$$
$$= A \cup B$$

$$(A \cup A) \oplus (A \cup B)$$
$$= A \oplus (A \cup B)$$
$$= (A \cup A \cup B) - A \cup (A \cap B)$$
$$= (A \cup B) - A$$

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$