第七章 代数系统

第七节 二元运算的特殊元小结

二元运算中的特殊元素小结

令 ★, ∘ 是定义在非空集合 X 上的二元运算，

1. 幂等元： $a \in X$，有 $a★a=a$。

2. 幺元： $e \in X$， $\forall x \in X$，有 $e★x = x★e = x$。

5. 零元： $\theta \in x$， $\forall x \in X$，有 $\theta★x = x★\theta = \theta$。

7. 逆元： $x \in X$，有 $x^{-1} \in X$，使得 $x^{-1}★x=x★x^{-1}=e$。

8. 可消去元： $a \in X$， $\forall x, y \in X$，有

$$a★x=a★y \Rightarrow x = y$$

或者 $$x★a=y★a \Rightarrow x = y$$ 。

例 子

例：下面是三个运算表

(1) 说明那些运算是可交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出每个运算的幺元、零元、所有可逆元素的逆元

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解：(1) $*$ 运算满足交换律、结合律，不满足幂等律.

$\circ$运算不满足交换律，满足结合律，满足幂等律.

$\cdot$运算满足交换律，满足结合律，不满足幂等律.

说明：关于结合律的判断，需要针对运算元素的每种选择进行验证，若$|A|=n$，一般需要验证n^3个等式。

单位元和零元不必参与验证.

通过对具体运算性质的分析也可能简化验证的复杂性。

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

∘	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

·	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

(2) * 运算的幺元为 b，没有零元，$a^{-1}=c$，$c^{-1}=a$，
$b^{-1}=b$。

∘ 运算的幺元和零元都不存在，a, b, c 均是左零元，也是右逆元。但没有可逆元素。

·运算的单位元为 a，零元为c，
$a^{-1}=a$，b, c不是可逆元素。

第七节 结束