第14节 谓词演算的推理理论

我们已经讲过命题演算的推理理论，现在我们来研究一下在谓词演算中如何进行推理？我们知道谓词逻辑与命题逻辑的最大区别就在于对命题表达的不同，实际上也就是多了量词的处理问题。对谓词演算的推理也是增加了量词的处理。我们增加了四个规则： US、ES、EG、UG，用于脱掉和添加量词。

在谓词演算的推理中，我们采用的推理方法：

直接推理、条件论证、反证法

所用公式：基础等价公式，基础永真蕴含公式。

推理规则：P、T、US、ES、EG、UG、CP、反证法以及其它一些规则。

US、ES、EG、UG 规则用于处理量词。用US、ES 规则消去量词；如果结论中有量词，再把量词添上， EG、UG 规则用于添加量词。

一. 全称特指规则 US

(Universal Specialization)

形式： $\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

(其中 c 是个体域内任意指定个体)

含义：如果 $\forall x A(x)$ 为真，则对个体域内任意指定个体 c，有 $A(c)$ 为真。

作用：去掉全称量词。

二. 存在特指规则ES

(Existential Specialization)

形式： $\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$

(其中 c 是个体域内使A(c)为T的某个体)

含义：如果 $\exists xA(x)$ 为真，则在个体域内一定有某个体 c，使得 A(c) 为真。

作用：去掉存在量词。

要求：用 ES 指定的个体 c，不应该是在此之前用US 规则或者用 ES 规则指定过的个体。

错误推理示例1：

令 $A(x)$：x是自然数。$B(x)$：x是整数。

论域：实数集合。

两个前提： $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$，$\exists xA(x)$

(1)	$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	P	
(2)	$A(c)\rightarrow B(c)$	US(1)	指定c=0.1
(3)	$\exists xA(x)$	P	
(4)	$A(c)$ ×	ES(3)	A(0.1)为F

错误推理示例2：

令A(x)：x是自然数。B(x)：x是整数。

论域：实数集合。

两个前提：$\exists xA(x)$，$\exists xB(x)$

(1) $\exists xB(x)$	P	
(2) $B(c)$	ES(1)	指定c=-1
(3) $\exists xA(x)$	P	
(4) $A(c)$ ×	ES(3)	A(-1)为F

三. 存在推广规则 EG

(Existential Generalization)

形式： $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$

(其中 c 是个体域内某个体)

含义：如果在个体域内某个体 c 使得 A(c) 为真，则 $\exists x A(x)$ 为真。

作用：添加存在量词。

四. 全称推广规则 UG (Universal Generalization)

形式： $A(c) \Rightarrow \forall x A(x)$

(其中c是个体域内任意某个个体)

含义：如果个体域内任意个体 c 均使得A(c)为真，则∀xA(x)为真。

作用：添加全称量词。

要求：c 是个体域内任意的某个个体，否则不可全称推广。

例1. 所有金属都导电；铜是金属；故铜导电。

解： 令 M(x)：x是金属。C(x)：x导电。a：铜。

符号化为：

$$\forall x(M(x)\rightarrow C(x)),\quad M(a) \Rightarrow C(a)$$

(1)	$M(a)$	P
(2)	$\forall x(M(x)\rightarrow C(x))$	P
(3)	$M(a)\rightarrow C(a)$	US(2)
(4)	$C(a)$	T(1)(3)I

例2、证明 $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$，$\exists xA(x) \Rightarrow \exists xB(x)$

(1) $\exists xA(x)$	P
(2) $A(c)$	ES(1)
(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	P
(4) $A(c)\rightarrow B(c)$	US(3)
(5) $B(c)$	T(2)(4)I
(6) $\exists xB(x)$	EG(5)

例2如果按下面方法推理，是否正确？

$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$， $\exists xA(x) \Rightarrow \exists xB(x)$

(1) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	P
(2) $A(c)\rightarrow B(c)$	US(1)
(3) $\exists xA(x)$	P
(4) $A(c)$	ES(3)
(5) $B(c)$	T(2)(4)I
(6) $\exists xB(x)$	EG(5)

问题在哪里？

例3. $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

用条件论证证明：

(1) $\forall xP(x)$	P(附加前提)
(2) $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(3) $P(a)\rightarrow Q(a)$	ES(2)
(4) $P(a)$	US(1)
(5) $Q(a)$	T(3)(4)I
(6) $\exists xQ(x)$	EG(5)
(7) $\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$	CP

例4. $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

用反证法证明：

(1) $\neg(\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x))$	P(假设前提)
(2) $\neg(\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))$	T(1) E
(3) $\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$	T(2) E
(4) $\forall xP(x)$	T(3) I
(5) $\neg\exists xQ(x)$	T(3) I
(6) $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(7) $P(a)\rightarrow Q(a)$	ES(6)
(8) $P(a)$	US(4)
(9) $Q(a)$	T(7)(8) I
(10) $\exists xQ(x)$	EG(9)
(11) $\neg\exists xQ(x)\wedge\exists xQ(x)$	T(5)(10) I