第六章　　组合数学初步

第二节　乘法原理

第二节 乘法原理

一、乘法原理/分步计数原理

乘法原理： 事件A有 m 种产生方式，事件 B 有n 种产生方式，则“事件A与B”有 m×n 种产生方式。

注　意： 乘法原理的使用条件是事件 *A* 与 *B* 产生方式彼此独立，也就是说事件A与事件B各自的产生方式不互相影响；

推广： 事件 A_1有 p_1种产生方式,事件 A_2有 p_2 种产生方式,…, 事件A_k 有 p_k 种产生的方式,则“事件A_1与 A_2与…与A_k”有$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ 种产生的方式.

第二节 乘法原理

一、乘法原理/分步计数原理

乘法原理**适用于分步计数问题**。

方法：　把一个事件的产生方式分解为若干独立步骤，对每步分别进行计数,然后使用乘法原理.

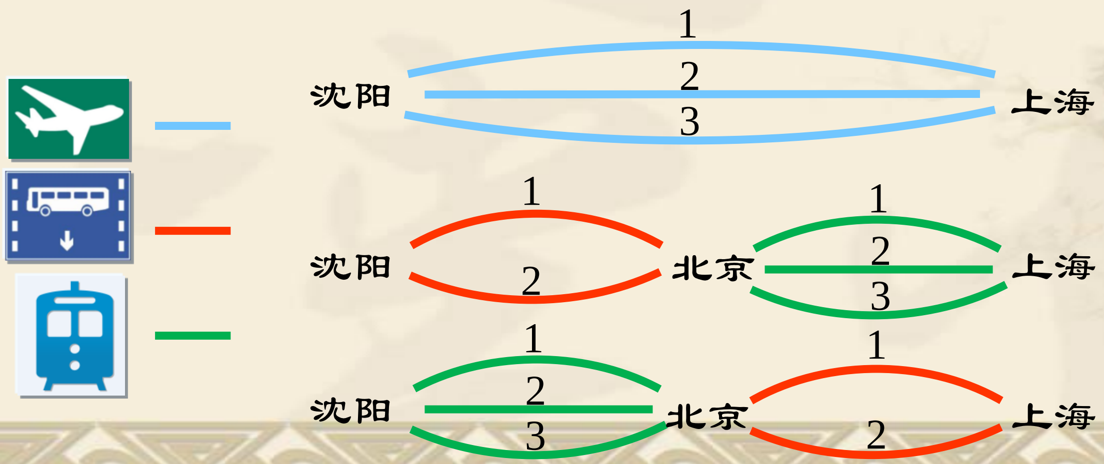
对于一些复杂的问题,需要分类与分步结合使用：

- ✓先分类,每类内部再分步；
- ✓先分步,每步内部再分类；

第二节 乘法原理

一、乘法原理/分步计数原理

例1：从沈阳到上海,可以选择乘坐飞机直达,有3种选择;也可以选择路面交通在北京中转,其中沈阳到北京乘长途汽车有2种选择,乘高铁有3种选择;从北京到上海,乘长途汽车有2种选择,乘高铁有3选择,问从沈阳到上海共有多少种交通选择？



解:有3+5 ×5=28种不同的交通方法。

第二节 乘法原理

一、乘法原理/分步计数原理

例2： 设A为含有n个元素的集合，问：A上的自反关系有多少个？

解：定义在A上的关系的关系矩阵中共有n^2个元素,其中主对角线上有n个元素。如果是自反关系,那么,主对角线上n个元素的取值只有一种可能：1；非主对角线上的元素共有n^2-n个,取值有两种可能：1和0。所以,根据乘法法则,自反关系的个数是 $\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n^2-n}=2^{n^2-n}$ 。

第二节 乘法原理

一、乘法原理/分步计数原理

例3： 设A为含有n个元素的集合，问： A上的对称关系有多少个？

解：定义在A上的关系的关系矩阵中共有n^2个元素,其中主对角线上有n个元素。如果是对称关系,则在关系矩阵中,第 i 行第 j 列的元素=第 j 行第i列的元素$(i\neq j)$,即 $r_{ij} = r_{ji}$。那么,能够独立选择取值是0或1的元素有$(n^2-n)/2$个，主对角线的n个元素也有两种取值选择：0/1,所以总计有$(n^2+n)/2$个元素有2种取值选择(0/1)。根据乘法法则,构成矩阵的方法数是

$$\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{(n^2+n)/2}=2^{(n^2+n)/2}$$

第二节 乘法原理

一、乘法原理/分步计数原理

例4：设A为含有n个元素的集合，问：A上的反对称关系有多少个？

解：定义在A上的关系的关系矩阵中共有n^2个元素,其中主对角线上有n个元素。非主对角线的元素分成 $(n2–n)/2$组,每组包含两个元素r_{ij}和r_{ji}。根据反对称的性质,r_{ij}与r_{ji}的取值有3种可能:(1,0),(0,1),(0,0)。所有这些位置元素的选择方法数为 $3^{(n^2-n)/2}$ 。主对角线上有n个元素,取值选择有两种：0/1，共有 2^n。

最终，由乘法原理得，总方法数 $2^n 3^{(n^2-n)/2}$ 。