第七章 代数系统

第六节 二元运算的其它性质

5、可消去元

定义

设★是X上的二元运算，$a\in X$，如果对任何 $x, y\in X$，有 $(a★x = a★y)\Rightarrow x = y$ 或者

$$(x★a = y★a)\Rightarrow x = y。$$

则称 a 是相对★的<u>可消去元</u>。

如果对任何 $a\in X \wedge a\neq\theta$， a 均是可消去元，则称★运算在 X 上有可消去性。

例如 乘法运算，对任意实数 $a\neq 0$， a 就是可消元。

因为当 $a\neq 0$ ，若 $ax=ay$ 则有 $x=y$。

所以乘法在实数集合上有可消去性。

而集合族上的∪和∩运算都不满足可消去性。

因为 $A\cup B=A\cup C$ 或 $A\cap B=A\cap C$,

不一定有 $B=C$。

定理

设★是 X 上可结合的二元运算，如果 $a\in X$，且 $a^{-1}\in X$，则 a 是可消元。

证明： 如 $a\in X$，且 $a^{-1}\in X$，任取 $x,y\in X$，设有 $a\star x=a\star y$，则 $a^{-1}\star(a\star x)= a^{-1}\star(a\star y)$

$(a^{-1}\star a)\star x=(a^{-1}\star a)\star y$，所以

$e\star x=e\star y$，即 $x=y$，所以 a 相对★是可消元。

如果有 $x\star a=y\star a$，可类似证明。

第六节 结束