第4节 量词的作用域

一、量词的作用域(辖域)

在谓词公式中，量词的作用范围称之为量词的作用域，也叫量词的辖域。

例：$\forall xA(x)$ 中 $\forall x$ 的辖域为 $A(x)$。

$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$ 中 $\exists x$ 的辖域为 $(A(x)\rightarrow B(x))$

例：

$$\forall x\underbrace{((P(x)\land Q(x))\to\exists y\underbrace{R(x,y)}_{\exists y\text{的辖域}})}_{\forall x\text{的辖域}}$$

$$\forall x\underbrace{\exists y\underbrace{\forall z\underbrace{(A(x,y)\to B(x,y,z))}_{\forall z\text{的辖域}}}_{\exists y\text{的辖域}}}_{\forall x\text{的辖域}}\land C(t)$$

一般地，

- 如果量词后边只是一个原子谓词公式时，该量词的辖域就是此原子谓词公式。 例如：$\forall x A(x)$
- 如果量词后边是括号，则此括号所表示的区域就是该量词的辖域。 例如：$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$
- 如果多个量词紧挨着出现，则后边的量词及其辖域就是前边量词的辖域。

例如： $\forall x\exists y\forall z(A(x,y)\rightarrow B(x,y,z))\wedge C(t)$

二、自由变元与约束变元

在谓词公式中的个体变元可以分成两种，一种是受到量词约束的，一种是不受量词约束的。

例：$\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists y P(y)) \wedge Q(z)$

$F(x,y)$中的 x 在 $\forall x$ 的辖域内，受到 $\forall x$ 的约束，而 y 不受 $\forall x$ 的约束。

$P(y)$中的 y 在 $\exists y$ 的辖域内，受 $\exists y$ 的约束。

$Q(z)$中的 z 不受量词约束。

定义：如果客体变元 x 在 ∀x 或者 ∃x 的辖域内，则称 x 在此辖域内约束出现，并称 x 在此辖域内是约束变元。否则 x 是自由出现，并称 x 是自由变元。

例：$\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yP(y))\wedge Q(z)$

F(x,y) 中的 x 和 P(y) 中的 y 是约束变元。

而 F(x,y) 中的 y 和 Q(z) 中的 z 是自由变元。

几点说明：

(1) 一个n元谓词 $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，若在前边添加 k 个量词，使其中的 k 个个体变元变成约束变元，则此 n元谓词就变成了n-k 元谓词。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。

例：假设 $P(x,y,z)$表示 $x+y=z$，个体域是整数集。

$\forall x\exists yP(x,y,z)$表示“对任意给定的整数x，都可以找到整数y，使得 $x+y=z$”。

如果令 $z=1$，则 $\forall x\exists yP(x,y,1)$就变成了命题“任意给定的整数 x，都可以找到整数 y，使得 $x+y=1$”。

- 可见每当给 z 指定某个整数 a 后，$\forall x\exists yP(x,y,a)$就变成了一个命题。所以谓词公式 $\forall x\exists yP(x,y,z)$是只含有个体变元 z 的一元谓词。

例： $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yP(y))\wedge Q(z)$

y 既是自由变元，也是约束变元。为避免混淆，需要对约束变元换名。

约束变元的换名规则：

设 A 为一谓词公式，**将 A 中某量词辖域内的一个约束变元的所有出现及相应的指导变元**全部改成 A 中没出现过的某个变元符号，A 中其余部分不变，记所得公式为 A′，则 $A \Leftrightarrow A'$。

例：(1) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yP(y))\wedge Q(z)$

对约束变元 y 进行改名，谓词公式变为：

$\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists tP(t))\wedge Q(z)$

(2) $\forall x(\underbrace{P(x)\rightarrow Q(x,y)}_{x\text{ 的辖域}})\vee(R(x)\wedge A(x))$

对约束变元 x 进行改名，谓词公式变为：

$\forall z(P(z)\rightarrow Q(z,y))\vee(R(x)\wedge A(x))$

对自由变元也可以换名，此换名叫代入。

自由变元的代入规则：

设 A 为一谓词公式，将 A 中某个自由出现的个体变元的所有出现用某个 A 中没出现过的变元符号代替，A 中其余部分不变，记所得公式为 A′，则 A⇔A′。

例：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x,y))\vee(R(x)\wedge A(x))$

对自由变元 x 作代入，谓词公式变为

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x,y))\vee(R(z)\wedge A(z))$