第六章　组合数学初步

第八节　多项式定理

第八节 多项式定理

多项式展开定理

定理5 设n为正整数，x_i为实数，$i=1, 2, \ldots, t$.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

其中, $n_1, n_2, \ldots, n_t$是满足方程 $n_1+n_2+\ldots+n_t=n$ 的一切非负整数解.

证明： 展开式中的项 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$ 是如下构成的:

在n个因式中选n_1个因式贡献x_1,

从剩下$n-n_1$个因式选n_2个因式贡献x_2,

…,

从剩下的$n-n_1-n_2-\ldots-n_{t-1}$个因式中选 n_t个因式贡献 x_t.

第八节 多项式定理

多项式展开定理

定理5 设n为正整数，x_i为实数，$i=1, 2, \ldots, t.$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

其中, n_1 , n_2 , …,n_t 是满足方程 $n_1+n_2+\ldots+n_t=n$ 的一切非负整数解.

证明： 根据乘法原理,这样获得的 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ \ldots x_t^{n_t}$ 的个数是

$$C(n,n_1)\times C(n-n_1,n_2)\times\cdots\times C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1},n_t)$$

$$=\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\times\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\times\cdots\times\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1})!}{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}-n_t)!n_t!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$$

第八节 多项式定理

多项式展开定理

推论： 多项式展开式中不同的项数为方程

$$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$$

的非负整数解的个数 $C(n+t-1,n)$。

解释： 这是因为 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$ 的指数和$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$的非负整数解之间存在着一一对应关系。

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

例6 求 $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ 中 $x_1^3x_2x_3^2$ 的系数.

解 由多项式定理得

$$\frac{6!}{3!1!2!}\times 2^3\times(-3)\times 5^2=-36000$$