

第四章 二元关系

第十七节 等价关系

第十七节 等价关系

一、等价关系

1. 定义: 设 R 是 A 上的关系, 若 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 是 A 上的等价关系。

若 $a, b \in A$, R 是等价关系, 且 aRb , 则称 a 与 b 等价。

例子, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, R 是 A 上的模3同余关系, 即

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x - y \text{ 可被 } 3 \text{ 整除 (或 } x/3 \text{ 与 } y/3 \text{ 的余数相同)} \}$$

$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle \}$$

显然, $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow x \pmod{3} = y \pmod{3}$ 。

第十七节 等价关系

一、等价关系

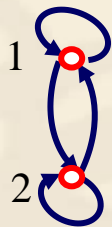
2. 等价关系的有向图

(1) 完全关系(全域关系 $A \times A$)图

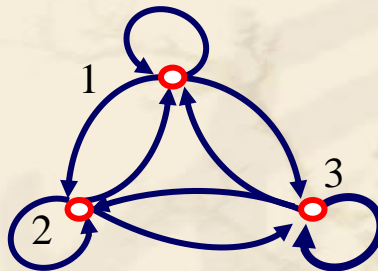
下面分别是当 A 中只有1、2、3个元素时的完全关系图。



$A = \{1\}$



$A = \{1, 2\}$



$A = \{1, 2, 3\}$

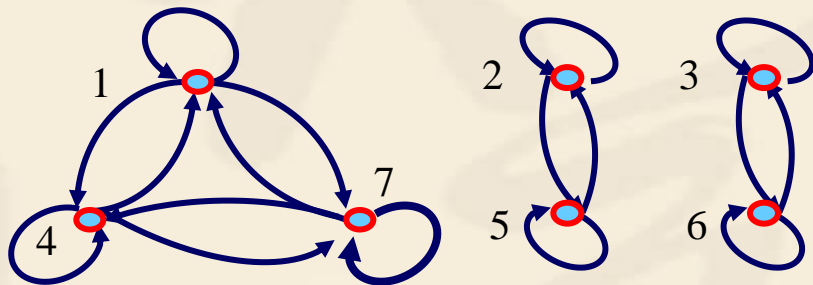
第十七节 等价关系

一、等价关系

2. 等价关系的有向图

模3同余关系R的关系图：

$$R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 1,7 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 4,7 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 6,3 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 7,1 \rangle, \langle 7,4 \rangle, \langle 7,7 \rangle \}$$



从关系图可看出R是自反、对称、传递的关系，所以R是等价关系。

等价关系R的有向图由若干个独立子图构成的，每个独立子图都是完全关系图。

第十七节 等价关系

一、等价关系

2. 等价关系的有向图

思考题： $A=\{1,2,3\}$, 可构造多少个 A 中不同的等价关系？

解：可以根据等价关系有向图的特点来考虑。如果等价关系 R 中有：

a) 三个独立子图的情形，则(1)个等价关系。

b) 二个独立子图的情形，则(3)个等价关系。

c) 一个独立子图的情形，则(1)个等价关系。

一共有(5)个中不同的等价关系。