第9节　不可数集合及其基数

1. 实数轴上的(0,1)区间中的实数是不可数的。

证明：假设(0,1)是可数的，则可以将它的元素写成如下序列形式：$\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$，其中 $x_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots\ldots$，

$a_{ik}\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$k=1,2,3,4,\ldots$

即 $0<x_i<1$，$i=1,2,3,\ldots$

于是 $x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots\ldots$

$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots\ldots$

$x_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots$

$x_n=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots$

构造一个数$b=0.b_1b_2b_3b_4\ldots b_n\ldots\ldots$，其中

$b_1\neq a_{11}, b_2\neq a_{22}, b_3\neq a_{33},\ldots, b_n\neq a_{nn}\ldots$

于是

$b\neq x_1, b\neq x_2, b\neq x_3, \ldots, b\neq x_n\ldots$

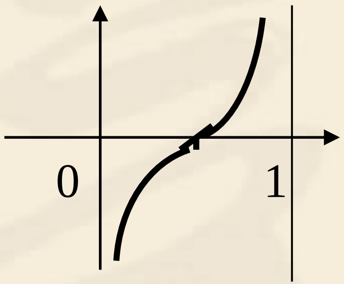
所以 $b\notin(0,1)$

矛盾，因此 (0,1) 是不可数的。

2. 连续统基数

(0,1)区间的基数是一个比 N 的基数 $\aleph_0$ 更大的无限大的数，用 $\aleph$(阿列夫) 表示。即 $\aleph>\aleph_0$。

例： 整个实数集合 R~(0,1)。



证明：构造函数 f: (0,1) →R

$$f(x)=tg(\pi x-\pi/2)$$

显然 f 是双射的，所以 (0,1)~R。

实数轴上的任何一段连续区间 (a,b) 的基数都是 $\aleph$，称之为**连续统基数**。

3. 几个公式

(1) $K[A_1] = K[A_2] = \ldots = K[A_n] = \aleph$，则

$$K[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] = \aleph$$

(2) $K[A] = K[B] = \aleph$， 则 $K[A \times B] = \aleph$

(3) $K[A]=\aleph$，$K[B]=\aleph_0$ (或 $K[B]=n$)，即B是至多可数集，则 $K[A-B]=\aleph$