第四章　二元关系

第十九节 等价类的性质

第十九节 等价类的性质

二、等价类

3.等价类性质

(1) R是A上等价关系，任意$a \in A$，若$x,y \in [a]_R$，必有$<x,y> \in R$。

含义：同一个等价类中的元素，彼此有等价关系R。

证明：任取$x,y \in [a]_R$，由等价类定义得$<a,x> \in R$, $<a,y> \in R$,由R对称得

$<x,a> \in R$，又由R传递得$<x,y> \in R$。

第十九节 等价类的性质

二、等价类

3.等价类性质

(2) R是A上等价关系，任意$a,b \in A$，$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$，　当且仅当 $\langle a,b \rangle \notin R$。

证明:

已知$\langle a,b \rangle \notin R$,假设$[a]_R \cap [b]_R \neq \Phi$,则存在$x \in [a]_R \cap [b]_R$，即$x \in [a]_R \wedge x \in [b]_R$,
则$\langle a,x \rangle \in R$ 且$\langle b,x \rangle \in R$,由R对称得$\langle x,b \rangle \in R$,又由R传递得$\langle a,b \rangle \in R$,与已知矛盾,所以$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$ 。

已知$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$,假设$\langle a,b \rangle \in R$,由等价类定义得$b \in [a]_R$, 又因为bRb,所以$b \in [b]_R$,所以$b \in [a]_R \cap [b]_R$,与已知矛盾,所以$\langle a,b \rangle \notin R$ 。

第十九节 等价类的性质

二、等价类

3.等价类性质

(3) $[a]_R=[b]_R$ 当且仅当 $<a,b>\in R$。

证明:

若$<a,b>\in R$, 任取$x\in[a]_R$,有$<a,x>\in R$,由对称性得$<b,a>\in R$,再由传递性得$<b,x>\in R$,$\therefore x\in[b]_R$,可见,$[a]_R\subseteq[b]_R$。类似可证, $[b]_R\subseteq[a]_R$。故, $[a]_R=[b]_R$。

如果$[a]_R=[b]_R$,由于$a\in[a]_R=[b]_R$, 所以有$<b,a>\in R$,由对称性得$<a,b>\in R$。

第十九节 等价类的性质

二、等价类

3.等价类性质

(4) A中任何元素a， a必属于且仅属于一个等价类。

证明： A中任何元素a,由于有aRa,所以$a \in [a]_R$。

如果 $a \in [b]_R$,所以有$<a,b> \in R$,由性质(3)得： $[a]_R=[b]_R$。

(3) $[a]_R=[b]_R$ 当且仅当 $<a,b> \in R$。

第十九节 等价类的性质

二、等价类

3.等价类性质

(5) 任意两个等价类 $[a]_R$、$[b]_R$，要么 $[a]_R=[b]_R$，要么 $[a]_R\cap[b]_R=\Phi$。

（因为要么 $<a,b>\in R$，要么 $<a,b>\notin R$。）

(6) R的所有等价类构成的集合是A的一个划分。

(由性质(4)(5)即得。这个划分称之为**商集**)

(4) A中任何元素a，a必属于且仅属于一个等价类。