第六章　　组合数学初步

第七节　组合恒等式

第七节 组合恒等式

一、组合恒等式

1. $C(n,k)=C(n,n-k) \quad n,k\in\mathbb{N},n\ge k$

2. $C(n,k)=\dfrac{n}{k}C(n-1,k-1) \quad n,k\in\mathbb{N},n\ge k$

3. $C(n,k)=C(n-1,k)+C(n-1,k-1) \quad n,k\in\mathbb{N},n\ge k$

第七节 组合恒等式

一、组合恒等式

使用组合分析的方法.

4. $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n \quad n \in N$,

二项式展开定理,
令x=1,y=1

证明4:设$S=\{1,2,\ldots,n\}$，下面计数S的所有子集.

一种方法就是分类处理，从n元集合中取出k个元素形成的子集个数是$C(n,k)$。根据加法法则，所有子集的个数是$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$

从另一个角度，依次考虑n个元素是否加入子集，根据乘法法则来统计子集的数量:由于每个元素有2种选择(在子集中/不在子集中)，所以可以形成的子集个数是$\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n}=2^n$。

5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0 \quad n \in N$

二项式展开定理,
令x=-1,y=1

第七节 组合恒等式

一、组合恒等式

6. $\sum_{l=0}^{n} C(l,k) = C(n+1,k+1) \quad n,k \in \mathbb{N}$

证明6: 组合分析方法.

最后,由加法原理, 得S 的 k+1元子集的个数

$$C(n,k)+C(n-1,k)+C(n-2,k)+\ldots+C(0,k)=\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}$$

令$S=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$为$n$+1元集. 等式右边 $C(n+1,k+1)$ 是 S 的 k+1元子集的个数.

现在, 考虑另一种分类计数的方法: 将所有的 k+1元子集分成如下n+1类:

第1类: 含a_1, 剩下 k个元素取自$\{a_2,\ldots,a_{n+1}\}$,有$C(n,k)$个。

第2类: 不含a_1,含a_2, 剩下k个元素取自$\{a_3, \ldots, a_{n+1}\}$,有$C(n-1,k)$个。

第3类: 不含a_1,不含a_2,含a_3 , 剩下k个元素取自$\{a_4, \ldots, a_{n+1}\}$,有$C(n-2,k)$个。

……

第n+1类: 不含$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 含a_{n+1},剩下k个元素取自空集, 有$C(0,k)$个。

第七节 组合恒等式

一、组合恒等式

7. $C(n,r)\times C(r,k)=C(n,k)\times C(n-k,r-k) \quad n\geq r\geq k, n,r,k\in N$

证明：组合分析法

等式右边$C(n,k)$的含义是：从n元集S中直接选择不同的k元子集的个数；

等式左边的含义：n 元集合中选取 r 元子集，然后在这 r 元子集中再选 k 元子集.

但是，不同的 r 元子集可能选出相同的k元子集，例如

$$\{a, b, c, d, e\}\rightarrow\{a, b, c, d\}\rightarrow\{b, c, d\}$$

$$\{b, c, d, e\}\rightarrow\{b, c, d\}$$

因此，需要计算采用等式左边的方法时同一个 k 元子集重复出现的次数,即有多少个 r 元子集会产生相同的 k元子集。设 k元子集为A,一个r 元子集中除了A的k个元素外,其他的元素都来自于S-A,共有$C(n\text{-}k,r\text{-}k)$种可能。也就是说, $C(n\text{-}k,r\text{-}k)$个r元子集会产生相同的 k 元子集。所以,等式的左边是$C(n,k)$的$C(n\text{-}k,r\text{-}k)$倍。得证。