# 第八章　群和环

# 第十三节 子群的陪集及拉格朗日定理(3)

## 定理4 拉格朗日定理(Lagrange定理)

设<G,★>是有限群，|G|=n，<H,★>是<G,★>的任意子群，且 |H|=m， 则 n=km (k∈I)。

证明：令 $H=\{h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m\}$，构造H在G中的不同的左陪集，因 H=eH 是个左陪集，如果存在 $a_1 \in G$ 而 $a_1 \notin H$ 构造左陪集 $a_1H$，由定理1及定理3知 $H \cap a_1H=\Phi$，并且$|a_1H|=m$。

如果存在 $a_2 \in G$ 而 $a_2 \notin H$ 且 $a_2 \notin a_1H$，构造左陪集 $a_2H$，于是 $H \cap a_2H=\Phi$，$a_1H \cap a_2H=\Phi$，并且$|a_2H|=m$。如此构造下去……，因为 G 是有限集合，这个构造不同左陪集的过程一定会终止。假设最后一个左陪集是 $a_{k-1}H$，则一共构造了 k 个互不相交的、均有m个元素的左陪集。于是

$G= H \cup a_1H \cup a_2H \cup \ldots \cup a_{k-1}H$，所以 |G|=k|H|，即 n=km。

拉格朗日定理说明：

n 阶群的子群阶数是 群阶数 的因子。

例：<$H_1$,★>与:<$H_2$,★>都是群<G,★>的子 群，

$|H_1|=5$，$|H_2|=6$，求$|H_1 \cap H_2|=?$

$|H_1 \cap H_2|=1$

下面的推论1说明：

群中元素的阶数必是群阶数的因子。

**推论1** 设<G,★>是 n 阶群，则对任意 $a\in G$，$|a|$ 必是 n 的因子，并且 $a^n=e$。

**证明** 任取 $a\in G$，由于有限群中元素的阶都是有限的。令 $|a|=m$。 构造集合 $H=\{a,a^2,a^3,\ldots, a^m=e\}$,

下面证明<H,★>是<G,★>的子群 (往证★在H上封闭)

任取 $a^i,a^j\in H$，$a^i★a^j = a^{i+j}$

(1) 如果 $i+j \le m$，则 $a^{i+j}\in H$,

(2) 如果 $i+j > m$，则 $0< i+j \le 2m$。

令 $i+j-m=t$，于是 $0\le t \le m$，$i+j=t+m$。

$a^{i+j} = a^{t+m} = a^t ★ a^m = a^t ★ e = a^t\in H$，所以 $a^{i+j}\in H$，于是★在 H 上封闭，因 H 是有限集合，所以<H, ★>是<G, ★>的子群。而 $|H|=m$，由 Lagrange定理知 m 是 n 的因子，即 $n=km$ $(k\in I)$,

$a^n = a^{km} = (a^m)^k= e^k=e$ 。

# 第十三节 结束