第三章 集合论初步

第八节 包含排斥定理

第八节 包含排斥定理

有限集合的计数问题：

1.文氏图法

2.包含排斥定理(容斥定理)

1.文氏图法

Step1：根据已知条件构建文氏图；

Step2：填充已知区域的元素数，
未知区域用变量来表示；

Step3：对未知变量列方程组，求解；

第八节 包含排斥定理

例：对24名科技人员掌握外语情况调查发现：

英、日、德、法四种外语中，每个人至少会一种；

会英、日、德、法语的人数分别是13、5、10、9人；

同时会英、日语的有2人；同时会英、法语的有4人；

同时会德、法语的有4人；同时会英、德语的有4人；

会日语的人不会德语，也不会法语；

问这24人中，只会一种外语的人各是多少人？

同时会英、法、德三种语言的人有多少人？

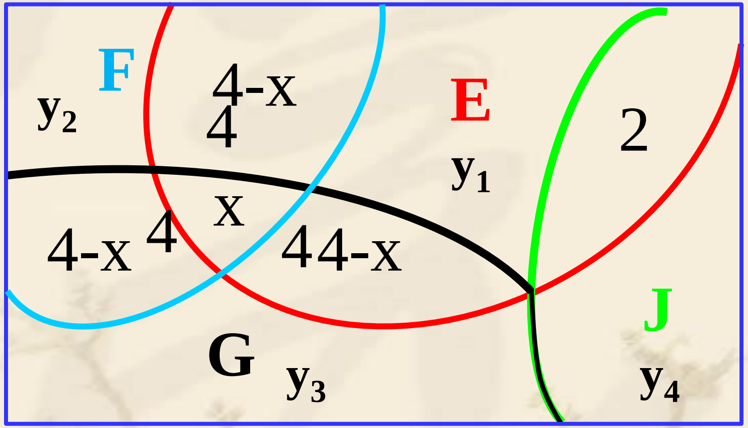
第八节 包含排斥定理

1.文氏图法

Step1：根据已知条件构建文氏图；

Step2：填充已知区域的元素数，未知区域用变量来表示；

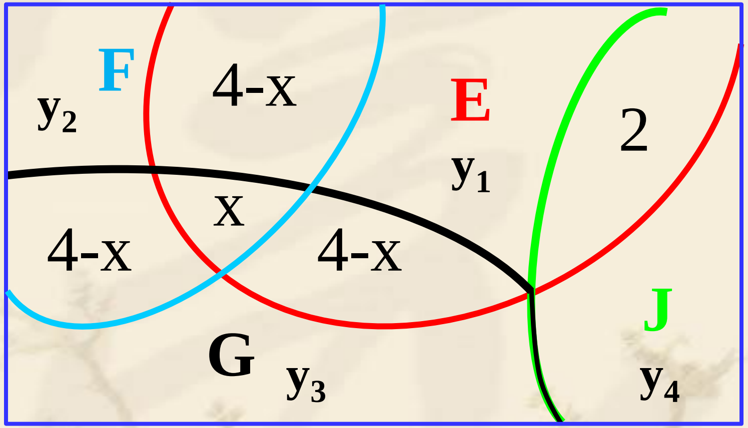
设 $|E\cap F\cap G|=x$ 只会英、日、德、法一种外语的人分别是 y_1, y_2, y_3, y_4。



1.文氏图法

Step3：对未知变量列方程组，求解；

$$\begin{cases} y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4-x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4-x) + x = 10 \\ y_4 + 2 = 5 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3(4-x) + x + 2 = 24 \end{cases}$$



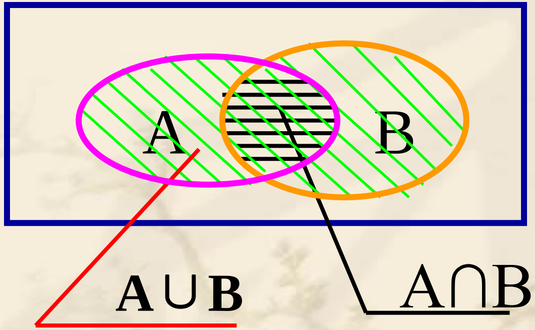
解得：$y_1 = 4$，$y_2 = 2$，$y_3 = 3$，$y_4 = 3$, $x=1$

第八节 包含排斥定理

2. 包含排斥定理(容斥定理)

应用举例：有A, B两个商店，求他们共经营的商品种类是多少？

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$



那么如果是3个商店呢？

第八节 包含排斥定理

2. 包含排斥定理(容斥定理)

如果有A、B、C三个有限集合，则

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| \\
&= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-(|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|) \\
&= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$

第八节 包含排斥定理

包含排斥定理：

一般地，有n个有限集合A_1、A_2、… A_n，$|A_1|$、$|A_2|$、… $|A_n|$分别是这n个集合的元素个数，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

第八节 包含排斥定理

例.求1到1000之间不能被5、6、8整除的数的个数。

解：设全集 $E=\{x|\ x$是1到1000的整数$\}$ $|E|=1000$

A_5、A_6、A_8是E的子集并分别表示可被5、6、8整除的数的集合。

$\lfloor x \rfloor$ 表示对x向下取整。

LCM(x,y):表示x,y两个数的最小公倍数。

第八节 包含排斥定理

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200 \qquad |A_5 \cap A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \qquad |A_5 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{LCM}(5,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125 \qquad |A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{LCM}(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

$$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{LCM}(5,6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

第八节 包含排斥定理

不能被5、6、8整除的数的集合为$\sim(A_5 \cup A_6 \cup A_8)$

$$|\sim(A_5 \cup A_6 \cup A_8)| = |E| - |A_5 \cup A_6 \cup A_8|$$

其中，$|A_5 \cup A_6 \cup A_8| =$

$$(|A_5|+|A_6|+|A_8| - |A_5 \cap A_6| - |A_5 \cap A_8| - |A_6 \cap A_8| + |A_5 \cap A_6 \cap A_8|)$$

$$= (200+166+125-33-25-41+8)=400$$

$$|\sim(A_5 \cup A_6 \cup A_8)| = 1000-400=600$$