第九章　格与布尔代数

第二节

格的基本概念(2)

二. 格的对偶

- 设$<A,\preccurlyeq>$是格，$\preccurlyeq$的逆关系记作$\succcurlyeq$，$\succcurlyeq$也是偏序关系。$<A,\succcurlyeq>$也是格，$<A,\succcurlyeq>$的Hasse图是将$<A,\preccurlyeq>$的Hasse图颠倒180°。

格的对偶

如果将命题P中的$\preccurlyeq$换成$\succcurlyeq$，$\wedge$换成$\vee$，$\vee$换成$\wedge$，得到命题P'，称P'为P的**对偶命题**。

对偶原理：如果P对任何格为真，则P'对任何格也为真。

例如：$P: a\wedge b\preccurlyeq a$ $\qquad$ $P': a\vee b\succcurlyeq a$

$\{a,b\}$的最大下界$\preccurlyeq a$ $\qquad$ $\{a,b\}$的最小上界$\succcurlyeq a$

三. 格的同态与同构

设$<A_1, \preccurlyeq_1>$ 和$<A_2, \preccurlyeq_2>$是两个格，由它们诱导的代数系统分别是$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$和 $<A_2,\vee_2,\wedge_2>$，如果存在映射 $f: A_1 \to A_2$ 使得对任何$a, b \in A_1$,

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$$

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$$

则称 f 是$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$到 $<A_2,\vee_2,\wedge_2>$的**同态映射**。

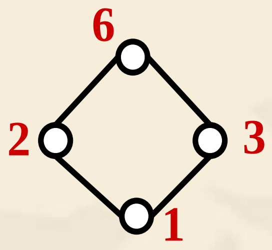
也称$< f(A_1), \preccurlyeq_2>$是$<A_1, \preccurlyeq_1>$ 的同态像。

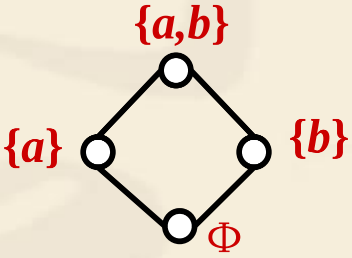
如果 f 是双射，就称 f 是$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$到 $<A_2,\vee_2,\wedge_2>$的**格同构**，也称格$<A_1, \preccurlyeq_1>$ 和 $<A_2, \preccurlyeq_2>$**同构**。

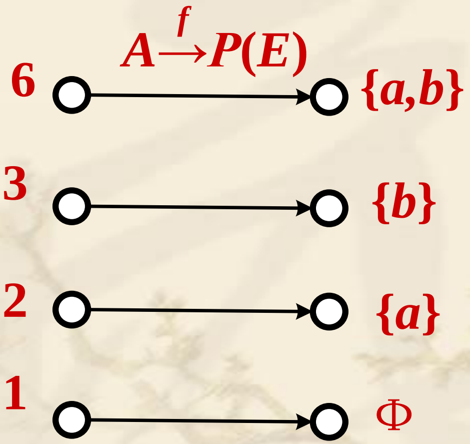
例 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$，$A=\{1,2,3,6\}$，$\preccurlyeq$是$A$上整除关系。

$\langle P(E), \subseteq \rangle$, $E=\{a,b\}$

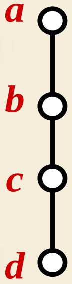
它们诱导的代数系统分别是$\langle A, \vee, \wedge \rangle$和$\langle P(E), \cup, \cap \rangle$

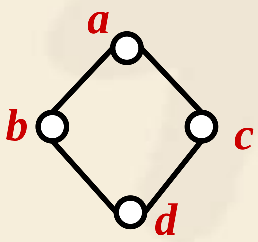




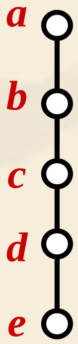


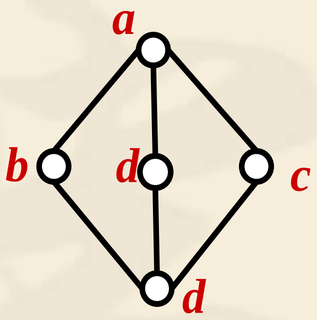
- 具有四个元素的格分别同构于下面两种形式之一

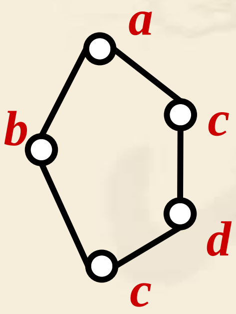


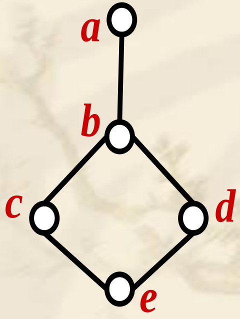


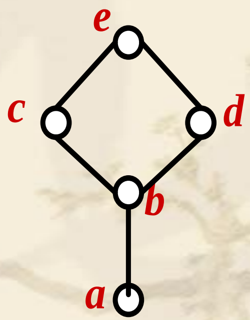
- 具有五个元素的格分别同构于下面五种形式之一











第二节

结束