第七章 代数系统

以前学过许多代数：

初等代数、高等代数（线性代数）、

集合代数、命题代数、等等

它们研究的对象分别是实数、矩阵、集合、命题等等，以及在这些对象上定义的各种运算。

这一章我们将代数的研究引导到更高的层次，即抛开具体对象以及具体运算去研究代数——抽象代数。

第九节 代数系统同构的性质 (1)

设代数系统$<X,\bigstar>$，$<Y,\oplus>$，$X \subseteqq Y$，

$f: X \to Y$ 是同构映射，

即任取 $x_1, x_2 \in X$，

有 $f(x_1 \bigstar x_2) = f(x_1) \oplus f(x_2)$。

两个同构的代数系统，一些运算性质是可保持的。即在$<X,\bigstar>$中有的一些运算性质在$<Y,\oplus>$中也有，反之亦然。

1、保持可结合性

1) 如果运算★在 X 中可结合，则 ⊕ 在 Y 中也可结合。

证明：任取$y_1, y_2, y_3 \in Y$，因 $f: X \to Y$ 是满射，所以存在 $x_1, x_2, x_3 \in X$，使得 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，$y_3=f(x_3)$

$y_1 \oplus (y_2 \oplus y_3) = f(x_1) \oplus (f(x_2) \oplus f(x_3)) = f(x_1) \oplus f(x_2 \bigstar x_3)$

$= f(x_1 \bigstar (x_2 \bigstar x_3)) = f((x_1 \bigstar x_2) \bigstar x_3)$ （因★可结合）

$= f(x_1 \bigstar x_2) \oplus f(x_3) = (f(x_1) \oplus f(x_2)) \oplus f(x_3)$

$=(y_1 \oplus y_2) \oplus y_3$，所以 ⊕ 也可结合。

2、保持可交换性

2) 如果运算★在 X 中可交换，则 ⊕ 在 Y 中也可交换。

证明的方法与1)类似。大家自己证明。

第九节 结束