

第13节 命题逻辑推理（一）

——直接推理

推理就是根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程。称这些已知的判断为前提。得到的新判断为前提的有效结论。

推理的过程就是证明永真蕴含式的过程。

令 H_1, H_2, \dots, H_n 是已知的命题公式(前提), 若有 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ 则称 C 是 H_1, H_2, \dots, H_n 的有效结论, 简称结论。

两个推理规则：

- ❖ **P规则(引入前提规则)**：在推理过程中，可以随时引入前提。
- ❖ **T规则(引入结论规则)**：在推理过程中，如果前面有一个或几个公式重言蕴涵公式 S ，则可将 S 纳入推理过程中。

基础重言蕴涵式(I类公式)

$$I_1 \quad P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$I_3 \quad P \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_5 \quad \neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$I_7 \quad \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$$

$$I_9 \quad P, Q \Rightarrow P \wedge Q$$

$$I_{11} \quad P, (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

$$I_{13} \quad P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$I_{14} \quad P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$$

$$I_{15} \quad A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$$

$$I_{16} \quad A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$$

$$I_2 \quad P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$I_4 \quad Q \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_6 \quad Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$I_8 \quad \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$$

$$I_{10} \quad \neg P, (P \vee Q) \Rightarrow Q$$

$$I_{12} \quad \neg Q, (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$$

基础等价公式(E类公式):

对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

交换律 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

结合律 $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

分配律 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

底-摩根定律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

幂等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$

同一律 $P \vee F \Leftrightarrow P$

零律 $P \vee T \Leftrightarrow T$

互补律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge T \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge F \Leftrightarrow F$$

$$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q ,$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$$

推理方法：

直接推理

间接推理

条件论证

反证法

一. 直接推理

直接推理是由一组前提，利用 P 规则、T 规则直接推演得到有效结论的方法。

推理实际上就是证明永真蕴含的过程。为了使推理过程更加简单、明确，推理会采用另外一种书写格式。

例1 求证 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \Rightarrow R$

证明:

序号	前提或结论	注释列
(1)	P	P
(2)	$P \rightarrow Q$	P
(3)	Q	$T(1)(2)I$
(4)	$Q \rightarrow R$	P
(5)	R	$T(3)(4)I$

(公式: $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$)

推理格式：

- ❖ 第一列为步骤号；
- ❖ 第二列为给定前提或得出的结论；
- ❖ 第三列为注释列，标明是前提还是得到的结论，以及此结论是从哪几步得到的，所用公式得类型。

例2 求证: $\neg(P \wedge Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$

(1) $\neg R$	P
(2) $Q \vee R$	P
(3) Q	T(1)(2)I
(4) $\neg(P \wedge Q)$	P
(5) $\neg P \vee \neg Q$	T(4)E
(6) $\neg P$	T(3)(5)I

假设 $\neg(P \wedge Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg R$ 为 T, 则 $\neg(P \wedge Q)$, $(Q \vee R)$, $\neg R$ 均为 T, 由 $\neg R$, $(Q \vee R)$ 为 T, 知 Q 为 T; 由 $\neg(P \wedge Q)$ 为 T, 而 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$, 于是 $\neg P \vee \neg Q$ 为 T, 再由 Q 为 T, 知 $\neg P$ 为 T。

注: 公式: $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$,

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

例3 求证： $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明：	(1)	Q	P
	(2)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	P
	(3)	$\neg P \vee (\neg Q \vee S)$	$T(2)E$
	(4)	$\neg P \vee (S \vee \neg Q)$	$T(3)E$
	(5)	$(\neg P \vee S) \vee \neg Q$	$T(4)E$
	(6)	$\neg P \vee S$	$T(1)(5)I$
	(7)	$P \rightarrow S$	$T(6)E$
	(8)	$\neg R \vee P$	P
	(9)	$R \rightarrow P$	$T(8)E$
	(10)	$R \rightarrow S$	$T(7)(9)I$