第八章　群和环

第十六节 循环群(3)

5. 循环群的子群

定理3

(1) 若<G,★>循环群，则<G,★>的子群仍是循环群。

(2) 若<G,★>是无限循环群，则<G,★>的子群除<{e},★>以外都是无限循环群。

(3) 若<G,★>是 n 阶循环群，则对 n 的每个正因子d, <G,★>恰好含有一个d 阶子群。

定理3 (1)若<G,★>循环群，则 <G,★> 的子群仍是循环群。

证明： 设<G,★>是由 g 生成的循环群， <H,★>是<G,★>的任意子群。

若 H={e}，显然 <H,★> 是循环群。否则取 H 中的最小正方幂元 g^m，下面证明 g^m 为<H,★>的生成元。（只需证明 H 中任何元素都可表示成 g^m 的整数次幂）

任取 $g^i \in H$，于是存在整数 q 和 r，使得 i = $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ $g^r =$ $g^{i-qm} = g^i★(g^{-1})^{mq} = g^i★(g^{mq})^{-1} = g^i★(g^m)^{-q}$

由 $g^i, g^m \in H$ 以及 <H,★>是子群可知 $g^r \in H$。由于 g^m 是 H 中的最小正方幂元，而 $0 \le r < m$，于是必有 r = 0。

于是

若不然在 H 中出现了比 m 小的正整数 r，使 $g^r \in H$，矛盾。

因此 g^m 是<H,★>的生成元，即<H,★>是循环群。

定理3 (2) 若<G,★>是无限循环群，则<G,★>的子群除<{e},★> 以外都是无限循环群。

证明： 设<G,★>是由 g 生成的无限循环群，H 是其子群。

若 H≠{e}，由(1)知 <H,★> 是以 H 中的最小正方幂 g^m 为生成元的循环群。

假设 |H|=t，则 $|g^m|$=t，于是 $(g^m)^t = g^{mt} = e$， 这与 g 为无限阶元矛盾。

所以子群<H,★>是无限循环群。

设<G,★>是以 g 为生成元的有限循环群。则 |G|=n 当且仅当 |g|=n 。

定理3

(3) 若<G,★>是 n 阶循环群，则对 n 的每个正因子 d，<G,★>恰 好含有一个 d 阶子群。

证明：设<G,★>是由 g 生成的 n 阶循环群，于是

$G = \{ g^n=e, g^1, \dots , g^{n-1} \}$， $|g|=n$

…子群。

H …

设<G,★>是群，a∈G 且 |a| = k。
设 n 是整数，则 $a^n = e$ 当且仅当 k/n。

再证明<G,★>只有一个d 阶子群。

假设由 g^m 生成的群 S 也是<G,★>的 d 阶子群，其中 g^m 为 S 中的最小正方幂元，由于 g^m 是生成元，$|g^m|= d$，于是 $(g^m)^d = e$，这样有 n 整除 md，即 n … $=(g^{(n/d)})^k$，所以 S⊆H …

若 n 整除 md, 则 md=kn(k为整数), 于是 m=k(n/d)。

又由于 |S| = |H| = d，因此 S = H。

练习

设<G, ★>是素数阶群， 则它无非平凡子群， 并且它必是循环群。

证明

令|G|=p (p是个素数，p≥2),

任取 a∈G，a≠e， 设a的阶为m，构造集合

$H=\{a,a^2,a^3,\ldots, a^m=e\}$，由Lagrange定理推论的证明知，<H,★>是<G,★>的m阶子群。由Lagrange定理知，m是p的因子，因p是素数，因子只有 p 和1，因 a≠e，a的阶不是1，所以 m=p， 即H=G，因此<G,★>中无非平凡子群。

又<H,★>是以 a 为生成元的循环群，所以<G,★>必是循环群。

第十六节 结束