

第七章 代数系统

第三节 二元运算中的特殊元素 (1)

1、幂等元

定义

设 \star 是 X 上的二元运算，如果有 $a \in X$ ，满足 $a \star a = a$ ，则称 a 是 X 上关于 \star 运算的幂等元。

如果对任何 $x \in X$ ，都有 $x \star x = x$ ，则称 \star 在 X 上有幂等性。

\cap 有幂等性

\cap	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
$\{a\}$	Φ	$\{a\}$	Φ	$\{a\}$
$\{b\}$	Φ	Φ	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	Φ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

注：从运算表看幂等性，表头（或在表头）元素相同

2、幺元(单位元、恒等元)

定义

设 \star 是 X 上的二元运算, 如果有 $e_L \in X$, 使得对任何 $x \in X$, 均有 $e_L \star x = x$, 则称 e_L 是相对 \star 的左幺元。

如果有 $e_R \in X$, 使得对任何 $x \in X$, 均有 $x \star e_R = x$, 则称 e_R 是相对 \star 的右幺元。

如果 $e_L = e_R = e$, 对任何 $x \in X$, 均有 $e \star x = x \star e = x$, 称 e 是相对 \star 的幺元。

- 实数集合 \mathbb{R} 上的加法 $+$ 运算，幺元是 0 ；

因为 $0+a = a+0 = a$ (a 为任意实数)

- 乘法 \times 运算，幺元是 1 ；

- 集合族上的并运算 \cup ，幺元是 Φ ；

因为 $\Phi \cup A = A \cup \Phi = A$ (A 为任意集合)

- 交运算 \cap ，幺元是全集 E 。

思考

因为 $E \cap A = A \cap E = A$

减法运算是
否有幺元？

从运算表找左幺元 e_L :

e_L 所在行的各元素均与上表头元素相同。

如a, b, d行, 所以a, b, d 是 e_L

o	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

从运算表找右幺元 e_R :

e_R 所在列的各元素均与左表头元素相同。

如a, c, d列, 所以a, c, d是 e_R

o	a	b	c	d
a	a	c	a	a
b	b	a	b	b
c	c	b	c	c
d	d	d	d	d

定理

设 \star 是 X 上的二元运算，如果有左幺元 $e_L \in X$ ，也有右幺元 $e_R \in X$ ，则 $e_L = e_R = e$ ，且幺元 e 是唯一的。

证明： 因为 e_L 是左幺元，又 $e_R \in X$ ，所以 $e_L \star e_R = e_R$ ；
因为 e_R 是右幺元，又 $e_L \in X$ ，所以 $e_L \star e_R = e_L$ ；
于是 $e_L = e_R = e$ 。

证唯一性： 假设有两个幺元 e_1 、 e_2 ，因为 e_1 是幺元，
 $e_2 \in X$ ，所以 $e_1 \star e_2 = e_2$ ；又因 e_2 是幺元，
 $e_1 \in X$ ，所以 $e_1 \star e_2 = e_1$ ；于是 $e_1 = e_2 = e$ 。
即幺元是唯一的。

第三节 结束