第九章 格与布尔代数

第六节

特殊的格(1)

一. 分配格

◆ 一般的格满足分配不等式:

$a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$， $(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$

分配格

$<A,\vee,\wedge>$是由格$<A,\preccurlyeq>$诱导的代数系统，如果对

$\forall a,b,c\in A$，有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

则称$<A,\preccurlyeq>$是分配格。

例 $<P(E),\cup,\cap>$是分配格。

注意：分配格中的两个等式互为充分必要条件。

- 二个重要的五元素格：

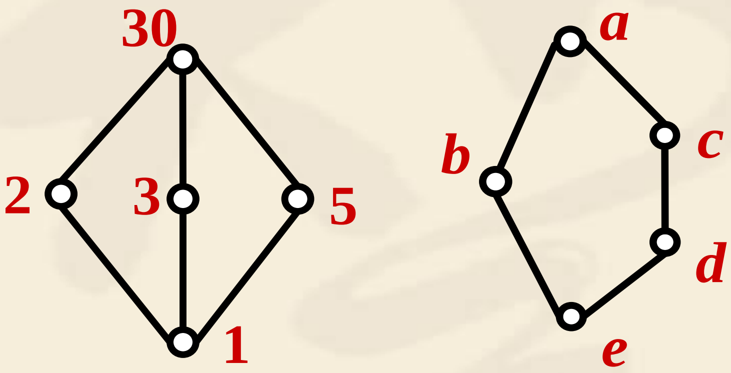
$2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2$

$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$

$c \wedge (b \vee d) = c \wedge a = c$

$(c \wedge b) \vee (c \wedge d) = e \vee d = d$

可见它们都不是分配格，分别称为**钻石格**和**五角格**。



分配格的判定

一个格是分配格的充分且必要条件是在该格中没有任何子格与上述两个五元素非分配格之一同构。

例 判断图中的格是否为分配格。

解 都不是分配格.

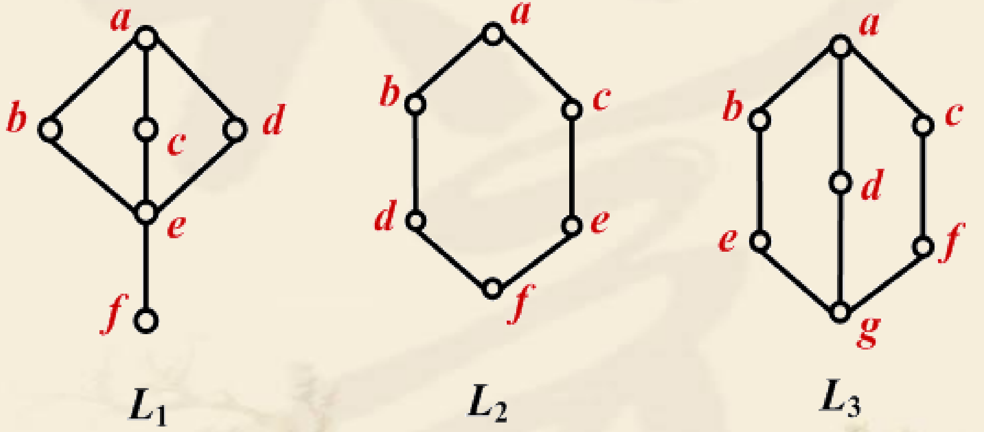
$\{a,b,c,d,e\}$是L_1的子格,

同构于钻石格

$\{a,b,c,e,f\}$是L_2的子格,

同构于五角格;

$\{a, b, c, d, g\}$是L_3的子格同构于钻石格.



推论

(1) 小于五个元素的格都是分配格。

(2) 任何一条链都是分配格。

分配格的性质

- 设$< A, \preccurlyeq >$是分配格，对任何$a, b, c \in A$, 如果有 $a \wedge b = a \wedge c$ 及 $a \vee b = a \vee c$，则必有 $b = c$

证明： 任取$a, b, c \in A$, 设有 $a \wedge b = a \wedge c$ 及 $a \vee b = a \vee c$

$$
\begin{aligned}
b &= b \vee (a \wedge b) = b \vee (a \wedge c) \\
&= (b \vee a) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \\
&= (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \\
&= (a \wedge c) \vee c \\
&= c
\end{aligned}
$$

第六节

结束