

第四章 二元关系

第十节 传递性

第十节 传递性

在此，我们要讨论关系的五个性质，它们是：

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

特别说明： 本节中所讨论的关系都是集合 A 上的关系，即 R 是从 A 到 A 的关系，或 $R \subseteq A \times A$ 。

第十节 传递性

五. 传递性

定义： R 是 A 中关系，对任何 $x, y, z \in A$ ，如果有 xRy 和 yRz ，就有 xRz ，则称 R 为 A 中传递关系，即

$$R \text{ 在 } A \text{ 上传递的} \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

例如：实数集中的 \leq 、 $<$ ，集合 \subseteq 、 \subset 是传递的。

❖ 从关系有向图和关系矩阵中不易看清是否有传递性。必须直接根据传递的定义来检查。

❖ **注意：** 传递性定义的谓词公式形式的前件为 F 时，整个表达式为 T ，传递性成立，即若 xRy 与 yRz 中至少有一个是 F 时，前件为假， R 是传递的。

第十节 传递性

五. 传递性 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$

判断传递性的典型图例

Y $x \circ$ R_1	Y $x \circ$ R_2	Y $y \circ \leftarrow x \circ$ R_3	Y $y \circ \rightarrow x \circ$ R_4
Y $x \circ \rightarrow \circ y$ R_5	N $x \circ \rightleftarrows \circ y$ R_6 <small>$xRy \wedge yRx$为T</small>	Y $x \circ \rightleftarrows \circ y$ R_7	Y $x \circ \rightarrow \circ y$ $\circ z$ R_8
N $x \circ \rightarrow \circ y$ $\circ z$ R_9 <small>$xRy \wedge yRz$为T</small>	Y $x \circ \rightarrow \circ y$ $\circ z$ R_{10}	N $x \circ \rightarrow \circ y$ $\circ z$ R_{11} <small>$xRy \wedge yRz$为T</small>	

独立无环的
节点不影响
传递性；

空关系是传
递的；

独立有环的
节点不影响
传递性；

恒等关系是
传递的

完全关系是
传递的

作业：证明 R_5 使得 $\forall x \forall y \forall z ((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$ 为真。