第7节 谓词演算的等价与蕴涵定义

- 对命题变元赋值比较容易，因为每个变元只有两个值可赋，所以可以画真值表。
- 在谓词演算中，由于谓词公式中可能有命题变元、个体变元。而论域中的个体可能有无限多个，所以没有办法画真值表。

一、对谓词公式赋值（给谓词公式一个解释）

对一个谓词公式赋值由如下四部分组成：

(1) 指定非空个体域集合；

(2) 将谓词公式中的命题变元，用确定的命题替代；

(3) 对公式中的个体变元用论域中的具体个体替代；

(4) 对公式中含有的谓词变项，用谓词常项替代。

例：给公式 $P \rightarrow N(x)$ 作赋值。

个体域：实数集合；

P：2>1；

N(x)：x是自然数；   x=4 。

是它的一个赋值：

此公式变成 $T \rightarrow N(4)$，它的真值为“ T ”。

一个不含自由变元的谓词公式是命题。而含有 n 个自由变元的原子谓词公式，可以看成是命题变元。所以只要不牵涉到量词的运算，命题演算中的等价公式和重言蕴含公式均可推广到谓词演算中使用。

例如： $A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

二、谓词公式的永真式

给定谓词公式 A，如果不论对其作任何赋值，都使得谓词公式 A 的真值为真，则称 A 为永真式。

例如，公式 $I(x) \vee \neg I(x)$

三、谓词公式的等价公式：

给定谓词公式 A、B，如果 $A \leftrightarrow B$是永真式，则称 A 与 B 等价，记作 $A \Leftrightarrow B$。

等价于说，如果不论对 A、B作任何同样的赋值，A 与 B的真值都相等，则 A 与 B 等价。

例如， $N(x) \rightarrow I(x) \Leftrightarrow \neg N(x) \vee I(x)$。

四、谓词公式的永真蕴含式

给定谓词公式 A、B，如果 $A \rightarrow B$ 为永真式，则称 A 永真蕴含 B，记作 $A \Rightarrow B$。

例如，$G(x) \wedge N(x) \Rightarrow N(x)$

因为 $(G(x) \wedge N(x)) \rightarrow N(x)$

$$\Leftrightarrow \neg(G(x) \wedge N(x)) \vee N(x)$$

$$\Leftrightarrow (\neg G(x) \vee \neg N(x)) \vee N(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg G(x) \vee (\neg N(x) \vee N(x)) \Leftrightarrow T$$ 是永真式，

所以 $G(x) \wedge N(x) \Rightarrow N(x)$。