第10节　　基数的比较

讨论 无限集合的“大小”问题

定理1 如果集合 A 到 B 存在入射函数， 则 $K[A] \le K[B]$。

定理2(Zermelo定理) A和B是任何集合, 则以下三条之一必有一个成立:

a) $K[A]<K[B]$

b) $K[B]<K[A]$

c) $K[A]=K[B]$

定理3 (Contor- Schroder- Bernstein定理)

A和B是任何集合，如果 K[A]≤K[B] 且 K[B]≤K[A] 则 K[A]=K[B]。

这三个定理的证明都超出我们的范围。

用这些定理可对集合基数进行比较。

证明两个集合基数相等时，要找到这两个集合之间的双射函数，但找双射往往比较困难，可以构造两个入射函数证明。

例如：证明 [0,1] 与 (0,1) 等势。

证明：构造两个入射函数：

$f:(0,1)\to[0,1]$ $f(x) = x$， $g:[0,1]\to(0,1)$ $g(x) = \dfrac{2x+1}{4}$

因为 f 和 g 都是入射的，所以有K[(0,1)]≤K[[0,1]]

且 K[[0,1]]≤K[(0,1)]， 所以 K[[0,1]] = K[(0,1)]

定理4 设 A 是有限集合，则 $K[A] < \aleph_0 < \aleph$ 。

证明：令 $K[A]=n$， $B=\{0,1,2,\ldots, n-1\}$ ， 显然

$K[A]=K[B]$。

构造一个函数 $f:B\to N$， $f(x)=x$，

显然 f 是入射的，所以 $K[B]\le K[N]$， 另外显然 N 与B之间不可能存在双射，于是 $K[B]\ne K[N]$，所以 $K[B]<K[N]$，即 $K[A] < \aleph_0$ 。

即若 A 是有限集合，则 $K[A] < \aleph_0$

再构造函数 $g:N\to[0,1]$，$g(n)=\frac{1}{n+1}$，

显然 g 也是入射的，所以 $\aleph_0 \le \aleph$，

另外 N 与 [0,1] 之间不可能存在双射，所以

$K[N] \ne K[[0,1]]$ 于是 $K[N] < K[[0,1]]$,

即 $\aleph_0 < \aleph$。

综上 $K[A] < \aleph_0 < \aleph$。

定理5 设 A 是无限集合，则 $\aleph_0 \le K[A]$

证明：因为 A 是无限集合，所以 A 必包含一个可数无限子集 B，构造函数 $f:B \to A$， $f(x)=x$ ，显然 f 是入射的，于是 $K[B] \le K[A]$，而 $K[B]=\aleph_0$，所以 $\aleph_0 \le K[A]$。

可见，可数集合是“最小的”无限集合。

连续统假设：不存在集合 A，使得

$$\aleph_0 < K[A] < \aleph$$

到目前该假设既没有被证明，也没有被否定。但有人已证明根据现有的公理系统，既不能证明该假设是正确的，也不能证明它是错误的。