第四章　二元关系

第十三节 关系的求逆运算

第十三节 关系的求逆运算

一、关系求逆运算的定义

定义：R是从A到B的关系，如果将R中的所有序偶的两个元素的位置互换，得到一个从B到A的关系，称之为R的逆关系，记作R^C，或 R^{-1}。

$$R^C=\{<y,x>|<x,y>\in R\}$$

$$<y,x>\in R^C \Leftrightarrow <x,y>\in R$$

例如：$R = \{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$

$$R^C = \{<2,1>,<3,2>,<4,3>,<5,4>\}$$

第十三节 关系的求逆运算

二、关系求逆运算的计算

根据定义， R^C是将R中所有的序偶的两个元素的位置互换。

R^C的有向图：是将R的有向图的所有边的方向颠倒。

R^C的矩阵 $M_{R^C} = (M_R)^T$，即为R矩阵的转置。例如

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times4} \qquad M_{R^C} = (M_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times3}$$

第十三节 关系的求逆运算

三、关系求逆运算的性质

令R、S都是从X到Y的关系，则

1. $(R^C)^C = R$
2. $(R\cup S)^C = R^C \cup S^C$
3. $(R\cap S)^C = R^C \cap S^C$
4. $(R-S)^C = R^C - S^C$
5. $R\subseteq S \Leftrightarrow R^C \subseteq S^C$ 。
6. $(\sim R)^C = \sim R^C$

证明2：任取$<y,x>\in(R\cup S)^C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\cup S$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R \vee <x,y>\in S$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^C \vee <y,x>\in S^C$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^C\cup S^C$

所以$(R\cup S)^C = R^C \cup S^C$ 。

证明5：

(充分性) 已知$R^C\subseteq S^C$，则任取$<x,y>\in R$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^C \Rightarrow <y,x>\in S^C \Leftrightarrow <x,y>\in S$ $\therefore R\subseteq S$

(必要性) 已知$R\subseteq S$，则任取$<y,x>\in R^C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R \Rightarrow <x,y>\in S \Leftrightarrow <y,x>\in S^C$ $\therefore R^C\subseteq S^C$

第十三节 关系的求逆运算

三、关系求逆运算的性质

7.设$R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$，则 $(R \circ S)^C = S^C \circ R^C$

证明：任取$<z,x> \in (R \circ S)^C$　　注意：$(R \circ S)^C$是从Z到X的关系

$\Leftrightarrow <x,z> \in R \circ S$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in S)$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge <z,y> \in S^C \wedge <y,x> \in R^C)$

$\Leftrightarrow <z,x> \in S^C \circ R^C$

所以$(R \circ S)^C = S^C \circ R^C$

第十三节 关系的求逆运算

三、关系求逆运算的性质

8. R是A上关系，则R是对称的，当且仅当 $R^C=R$

证明：

充分性：已知 $R^C=R$ (求证R对称)

任取$x,y\in A$,设$<x,y>\in R$,则$<y,x>\in R^C$,而$R^C=R$,所以有$<y,x>\in R$,即R对称。

必要性：已知R 对称，(求证$R^C=R$)

任取$<y,x>\in R^C$,则$<x,y>\in R$,因R对称,所以有$<y,x>\in R$,则$R^C\subseteq R$。

任取$<x,y>\in R$，因R对称,所以有$<y,x>\in R$,则$<x,y>\in R^C$，所以$R\subseteq R^C$。

最后得$R^C=R$ 。