第11节 量词的分配公式

——— 量词与“$\vee$, $\wedge$”的关系，其中两个运算对象均受该量词约束

若两个运算对象均受同一个量词约束，量词与“∨, ∧”运算是什么关系？有如下的量词分配公式：

1. $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

2. $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

3. $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

4. $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

证明 $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

证明：设个体域为D。

若一个赋值使得 $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ 为 T，则对任意个体 $x \in D$ 均有 $A(x) \wedge B(x)$ 为 T，于是对任意个体 $x \in D$ 均有 $A(x)$ 为 T，并且对任意个体 $x \in D$ 均有 $B(x)$ 为 T，所以 $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ 为 T。

若一个赋值使得 $\forall x(A(x)\wedge B(x))$ 为 F，则至少有一个个体 $a\in D$ 使得 $A(a)\wedge B(a)$ 为 F，即 $A(a)$ 为 F 或者 $B(a)$ 为 F，于是 $\forall xA(x)$ 为 F 或者 $\forall xB(x)$ 为 F，所以 $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$ 为 F。

综上，$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$。

可以用公式 1 来证明公式 2：

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

证明：$\exists x(A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\exists x(A(x) \vee B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg(A(x) \vee B(x))))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x \neg A(x) \wedge \forall x \neg B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\exists x A(x) \wedge \neg\exists x B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

举例说明公式3：$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

设 $A(x)$：x在联欢会上唱歌；

$B(x)$：x在联欢会上跳舞。论域：{我们班}

$\exists x(A(x) \wedge B(x))$表示：我们班有些同学在联欢会上既唱歌又跳舞”。

$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$表示：我们班有些同学在联欢会上唱歌并且我们班有些同学在联欢会上跳舞。

可看出：$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

而由 $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 不能推出 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$

证明公式3， $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

证明：假设前件 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 为 T， 则个体域中至少有一个体 a，使得 $A(a) \wedge B(a)$ 为 T，于是 $A(a)$ 和 $B(a)$ 都为 T，所以有 $\exists x A(x)$ 为 T 以及 $\exists x B(x)$ 为 T，进而 $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 为 T。因此

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

思考：能否证出

$$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x)\wedge B(x))?$$

假设 $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ 为 T，于是个体域中存在个体 a，使得 A(a) 为 T，并且存在个体 b，使得 B(b) 为 T。也就是未必能找出 使得A(x)与B(x)都成立的个体。

利用公式3可以证明公式4。

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$$

证明：$\exists x(\neg A(x)\wedge\neg B(x))\Rightarrow\exists x\neg A(x)\wedge\exists x\neg B(x)$

$$\exists x\neg(A(x)\vee B(x))\Rightarrow\neg\forall xA(x)\wedge\neg\forall xB(x)$$

$$\neg\forall x(A(x)\vee B(x))\Rightarrow\neg(\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$$

因为若 $\neg P\Rightarrow\neg Q$，则 $Q\Rightarrow P$ 所以

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$$

公式 4 得证。

其它公式:

5. $\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

6. $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

证明公式6

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

证明： $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee \forall x B(x)$

$\Rightarrow \forall x (\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$