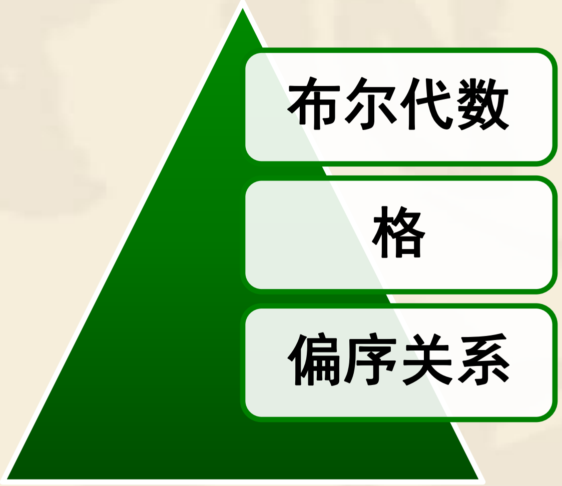
第九章 格与布尔代数

格与布尔代数



偏序关系

- $<A,\preccurlyeq>$是偏序集：$\preccurlyeq$是A上自反，反对称和传递关系(偏序)。
- 偏序集中的元素间的次序可以通过它的Hasse图反映出来。
- 偏序集中的重要元素：极大（小）元、最大（小）元、上（下）界、上（下）确界。

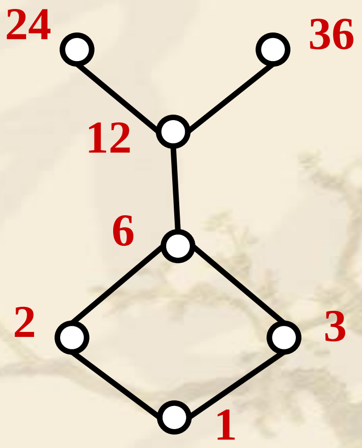
- **例** $A=\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, $\preccurlyeq$是A上的整除关系，$\langle A, \preccurlyeq\rangle$的Hasse图如图所示， A的子集$B=\{2, 3, 6\}$

1. B 的极小元与极大元

y是B的极小元$\Leftrightarrow \exists y\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq y\wedge x\preccurlyeq y)$

y是B的极大元$\Leftrightarrow \exists y\in B\wedge\neg\exists x(x\in B\wedge x\neq y\wedge y\preccurlyeq x)$

- 例中$B=\{2, 3, 6\}$的极小元: 2, 3　极大元: 6



2. B 的最小元与最大元

y是B的最小元$\Leftrightarrow \exists y\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$

y是B的最大元$\Leftrightarrow \exists y\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$

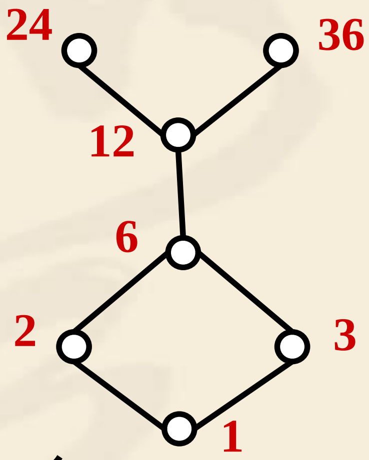
- 例中$B=\{2, 3, 6\}$的最小元:无；最大元: 6
- B中如果有最小元(最大元)，则是唯一的。

3. B的下界与上界

y是B的下界 $\Leftrightarrow \exists y \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$

y是B的上界 $\Leftrightarrow \exists y \in A \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$

- B ={2, 3, 6}的下界：1， 上界： 6, 12, 24, 36



4. B的最大下界(下确界)与最小上界(上确界)

y是B的最大下界(下确界)： B的所有下界x，有$x \preccurlyeq y$

y是B的最小上界(上确界)： B的所有上界x，有$x \preccurlyeq y$

- B ={2, 3, 6}下确界：1， 上确界：6
- B若有下(上)确界，则唯一

第一节

格的基本概念(1)

一．基本概念

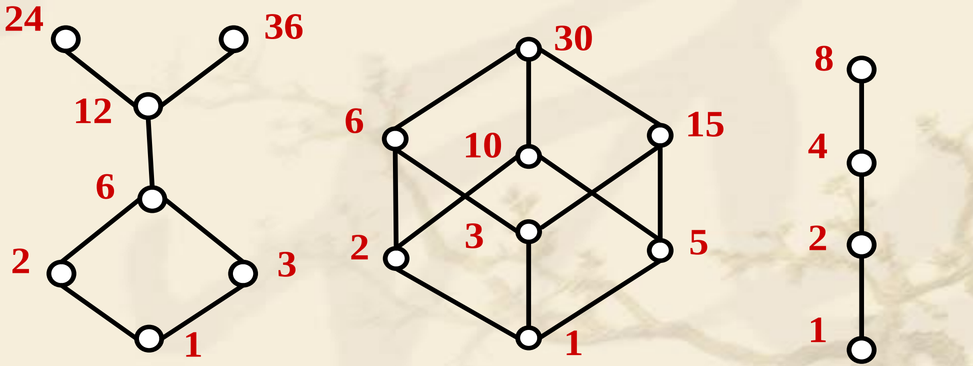
格的定义

- <*A*,≼> 是偏序集，如果任何*a*, *b*∈*A*,使得{*a*, *b*}都有下确界和上确界，则称<*A*,≼>是格。

由格的定义知：

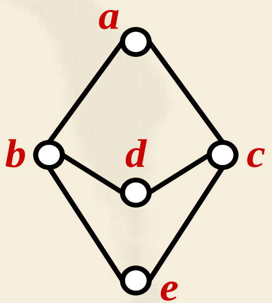
<A, ≼ >不是格，因为{24,36}无最小上界。

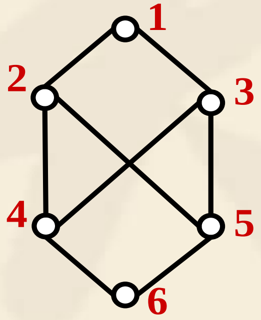
<B, ≼><C, ≼>是格。

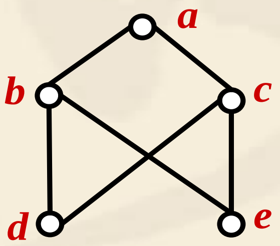


< *A*,≼ >　　< *B*,≼ >　　< *C*,≼ >

❖ 右图三个偏序集，也都不是格。







平凡格

- 所有全序都是格，称之为平凡格。

因为全序中任何两个元素x, y，要么$x \preccurlyeq y$，要么$y \preccurlyeq x$。如果$x \preccurlyeq y$，则$\{x, y\}$的最大下界为x，最小上界为y。如果$y \preccurlyeq x$，则$\{x, y\}$的最大下界为y，最小上界为x。即$\{x, y\}$的最大下界为较小元素，最小上界为较大元素。

由格诱导的代数系统

设$<A,\preccurlyeq>$ 是格，在A上定义二元运算$\vee$和$\wedge$为: $\forall a,b\in A$

$a\vee b$ = LUB $\{a,b\}$， $\{a,b\}$的最小上界。Least Upper Bound

$a\wedge b$ = GLB $\{a,b\}$， $\{a,b\}$的最大下界。Greatest Lower Bound

称$<A,\vee,\wedge>$是由格 $<A,\preccurlyeq>$ 诱导的代数系统。 ($\vee$-并,$\wedge$-交)

子格

设 $<A,\vee,\wedge>$是由格$<A,\preccurlyeq>$诱导的代数系统。B是A的非空子集，如果$\wedge$和$\vee$在B上封闭，则称$<B,\preccurlyeq>$是$<A,\preccurlyeq>$的子格。

例 设G是群，$L(G)$是G 的所有子群的集合， 即

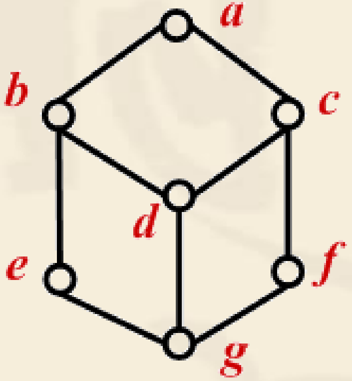
$$L(G) = \{ H \mid H\text{是}G\text{的子群} \},$$

对任意的$H_1, H_2 \in L(G)$，$H_1 \cap H_2$是G 的子群，$<H_1 \cup H_2>$是由$H_1 \cup H_2$生成的子群（即包含着$H_1 \cup H_2$的最小子群）。

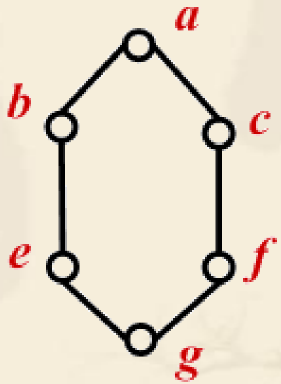
- 在$L(G)$上定义包含关系$\subseteq$，则$L(G)$关于包含关系构成一个格，称为G的子群格。
- 在 $L(G)$中，$H_1 \wedge H_2$ 就是 $H_1 \cap H_2$

  $H_1 \vee H_2$ 就是 $<H_1 \cup H_2>$

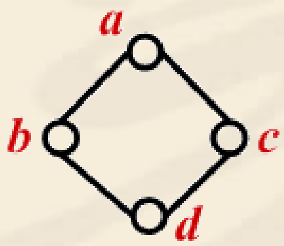
- 观察下面的三个哈斯图，考虑$<B, \preccurlyeq>$和$<C, \preccurlyeq>$是否为$<A, \preccurlyeq>$的子格?



$< A,\preccurlyeq >$



$< B,\preccurlyeq >$



$< C,\preccurlyeq >$

由子格的概念得：$<C, \preccurlyeq>$是$<A, \preccurlyeq>$的子格。而$<B, \preccurlyeq >$不是，由于$b\wedge c = d \notin B$ (看去掉的元素是否影响封闭)

第一节

结束