第7节　　集合的基数

如何比较两个集合的大小？以前我们是数集合中元素的个数。这只适用于有限集合。无限集合如何比较大小？

1. 集合的等势

1.定义：令A是B集合，如果存在双射 $f:A\to B$，则称A与B等势。记作A~B。

$N=\{0,1,2,3,4,\ldots\ldots\}$，$A=\{0,2,4,6,8,\ldots\ldots\}$，

$B=\{1,3,5,7,9,\ldots\ldots\}$，$C=\{1,10,100,1000,10000,\ldots\ldots\}$

$=\{10^0,10,10^2,10^3,10^4,\ldots\ldots\}$

集合N与集合 A，B，C等势。

因为 可构造如下双射函数： $f:N\to A$，$f(x)=2x$；

$g:N\to B$，$g(x)=2x+1$； $h:N\to C$，$h(x)=10^x$

2.集合间的等势关系“~”是个等价关系

令S是个集合族(所有集合构成的集合)，在S上的等势关系 ~，满足：

(1)自反性：因为任何集合A有双射 I_A:A→A，所以 A~A

(2)对称性：任何集合A ,B，若 A~B，有双射 f: A→B，于是 f^{-1}: B→A 亦是双射，所以 B~A。

(3)传递性：任何集合A,B,C，若A~B，且B~C，则有双射 f: A→B 和 双射 g: B→C，于是 g∘f: A→C 亦是双射函数，所以 A~C。 综上，~ 是等价关系。

用等势关系“~”对集合族S进行划分，得到的商集 S/~叫基数类

3. 基数类和基数

基数类：S是集合族，“~”是S上的等势关系，相对于“~”的等价类称之为基数类。

$$S=\{\underbrace{0,\Phi}_{\text{无元素}},\underbrace{1,\{1\},\{a\},\ldots}_{\text{1个元素}},\underbrace{2,\{0,1\},\{a,b\},\ldots}_{\text{2个元素}},\underbrace{3,\{0,1,2\}}_{\text{3个元素}},\ldots,\underbrace{N,I,}_{\text{可数集}}\ldots\underbrace{R,..}_{\text{不可数集}}\}$$

$S/\sim=\{[0], [1], [2], [3], \ldots, [N], [R], \ldots\}$

任何集合A，必属于且仅属于一个等价类。

例 $\{a,b,0,1\}\in[4]$，因为$\{a,b,0,1\}$ 与 4 (即集合$\{0,1,2,3\}$)等势。

偶数集合$E=\{0,2,4,6,8,\ldots\}\in[N]$，因为$E\sim N$。

基数：给定集合A，A所属于的基数类，称之为A的基数，记作K[A]。

如A={1,2}，A∈[2]，即 K[A]=[2], 简记成 K[A]=2

如B={a,b,c}，B∈[3]，即 K[B]=[3], 简记成 K[B]=3

对有限集合A，K[A]=|A|。

4. 有限集合与无限集合

凡是和某个自然数 n 等势的集合，都称之为有限集合；否则称之为无限集合。

例 A={a,b,c,d,e}，A与5({0,1,2,3,4})等势，故A是有限集合。