

第13节 前束范式

与命题公式的范式类似，谓词公式也有规范形式。

谓词公式的范式主要是规范量词，即

前束范式---所有量词都在公式前边。

1. 前束范式定义：

如果一个谓词公式符合下面条件，它就是前束范式：

所有量词前面都没有联接词；

所有量词都在公式的左面；

所有量词的辖域都延伸到公式的末尾。

例如： $\exists y \forall x \exists z (A(x) \rightarrow (B(x,y) \vee C(x,y,z)))$

$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$

是前束范式；

而 $\exists x A(x) \wedge \forall y B(y)$

$\forall x \exists y (A(x) \rightarrow (B(x,y) \wedge \exists z C(z)))$

$\exists x A(x) \rightarrow B(x)$

均不是前束范式。

2. 求前束范式的步骤：

- 1) 消去公式中的联接词 \rightarrow 和 \leftrightarrow (为了便于量词辖域的扩充)。
- 2) 如果量词前有“ \neg ”，用量词转化律将“ \neg ”后移。
- 3) 用约束变元的改名规则或自由变元的代入规则对变元换名 (为量词辖域扩充做准备)。
- 4) 用量词辖域扩充公式提取量词，使之成为前束范式的形式。

例1. 求 $\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$ 的前束范式。

解: $\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x) \Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee \exists xB(x)$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists xB(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists yB(y) \quad (\text{变元换名})$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee \exists yB(y)) \quad (\text{量词辖域扩充})$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y(\neg A(x) \vee B(y))$$

或者 $\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

$$\Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee \exists xB(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists xB(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x)) \quad (\text{量词分配公式})$$

例2.求 $\forall x(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow (\neg \exists x P(x) \wedge Q(x))$ 的前束范式。

解： $\forall x(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow (\neg \exists x P(x) \wedge Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg \forall x(P(x) \wedge R(x)) \vee (\neg \exists x P(x) \wedge Q(x))$ (去 \rightarrow)

$\Leftrightarrow \exists x \neg(P(x) \wedge R(x)) \vee (\forall x \neg P(x) \wedge Q(x))$ (量词转换)

$\Leftrightarrow \exists x \neg(P(x) \wedge R(x)) \vee (\forall y \neg P(y) \wedge Q(z))$ (变元换名)

$\Leftrightarrow \exists x \neg(P(x) \wedge R(x)) \vee \forall y(\neg P(y) \wedge Q(z))$ (扩量词辖域)

$\Leftrightarrow \exists x \forall y(\neg(P(x) \wedge R(x)) \vee (\neg P(y) \wedge Q(z)))$ (扩量词辖域)