第四章　二元关系

第十二节 关系复合运算的性质

第十二节 关系复合运算的性质

一、关系复合运算的性质

注意：关系复合运算不满足交换律。例如，

$R=\{<1,a>\}, S=\{<a,2>\}$

$R\circ S=\{<1,2>\}$　　$S\circ R=\Phi$

1. 关系复合运算满足结合律，即

已知$R\subseteq A\times B, S\subseteq B\times C, T\subseteq C\times D$，则$R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$

本性质可以通过复合的定义予以证明

任取$<a,d>\in R\circ(S\circ T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge<a,b>\in R\wedge<b,d>\in (S\circ T)$

$\Leftrightarrow\exists b(b\in B\wedge<a,b>\in R\wedge\exists c(c\in C\wedge<b,c>\in S\wedge<c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow\exists b\exists c(b\in B\wedge<a,b>\in R\wedge(c\in C\wedge<b,c>\in S\wedge<c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow\exists c\exists b(c\in C\wedge(b\in B\wedge<a,b>\in R\wedge<b,c>\in S\wedge<c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow\exists c\,(c\in C\wedge\exists b(b\in B\wedge<a,b>\in R\wedge<b,c>\in S)\wedge<c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow\exists c\,(c\in C\wedge<a,c>\in(R\circ S)\wedge<c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow<a,d>\in(R\circ S)\circ T$　　可见，$R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$

第十二节 关系复合运算的性质

一、关系复合运算的性质

2. 已知$R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq B \times C$，则

(1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ (2) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

证明(2)：任取$<a,c> \in R \circ (S \cap T)$ （$R \circ (S \cap T)$是从A到C的关系）

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R \wedge <b,c> \in S \cap T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R \wedge (<b,c> \in S \wedge <b,c> \in T))$ （利用合取运算的幂等律）

$\Leftrightarrow \exists b((b \in B \wedge <a,b> \in R \wedge <b,c> \in S) \wedge (b \in B \wedge <a,b> \in R \wedge <b,c> \in T))$

$\Rightarrow \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R \wedge <b,c> \in S) \wedge \exists b(b \in B \wedge <a,b> \in R \wedge <b,c> \in T)$

$\Leftrightarrow <a,c> \in R \circ S \wedge <a,c> \in R \circ T$

$\Leftrightarrow <a,c> \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$

所以 $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

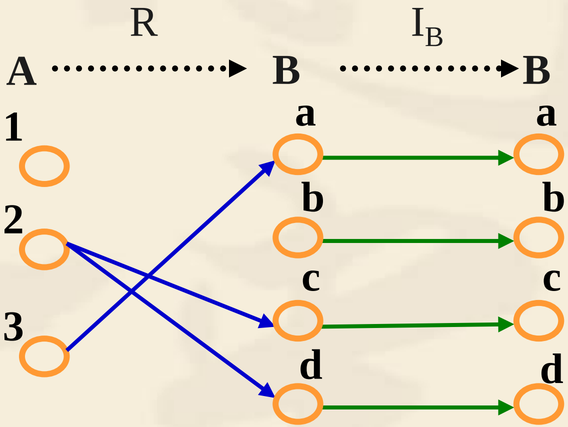
提示：$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

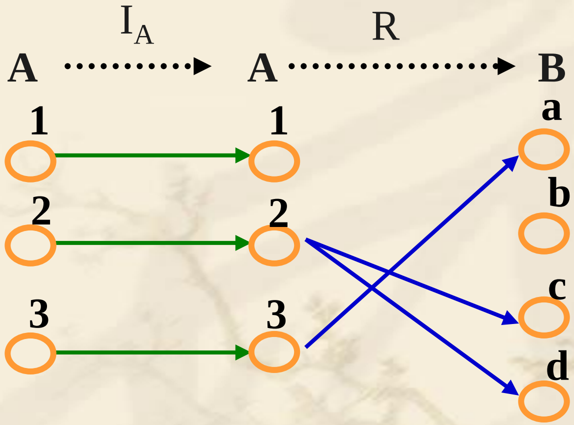
第十二节 关系复合运算的性质

一、关系复合运算的性质

3. 如果R是从A到B的关系，则 $R\circ I_B = I_A\circ R=R$；

验证：令$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$，$R=\{<2,c>,<2,d>,<3,a>\}$





同学们可以在课下完成证明过程。

第十二节 关系复合运算的性质

一、关系复合运算的性质

4. 关系的乘幂

令R是A上关系，由于复合运算可结合，所以关系的复合可以写成乘幂形式。即

$$R \circ R = R^2,\ R \circ R \circ R = (R \circ R) \circ R = R^2 \circ R = R^3, \ldots\ldots$$

$$\underbrace{R \circ R \circ \ldots\ldots \circ R}_{n} = R^n$$

特别的，定义$R^0 = I_A$。

设m,n为非负整数。显然，有：

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

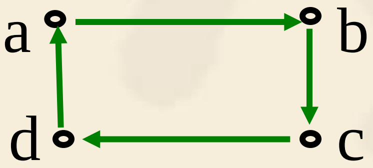
(2) $(R^m)^n = \underbrace{R^m \circ R^m \circ \ldots \circ R^m}_{n} = R^{mn}$

第十二节 关系复合运算的性质

一、关系复合运算的性质

4. 关系的乘幂

如图所示，R是A上的关系，R:



$\langle a,c\rangle \in R^2 \Leftrightarrow$ 在R的有向图上有从a到c的路径(包含两条边): $a\to b\to c$

$\langle a,d\rangle \in R^3 \Leftrightarrow$ 在R的有向图上有从a到d的路径(包含三条边): $a\to b\to c\to d$

…

设 $x,y\in A$，如果 $\langle x,y\rangle \in R^k \Leftrightarrow$ 在R的有向图上有从x到y的路径(包含k条边)