

第14节 命题逻辑推理（二）

——间接推理

推理方法：

直接推理

间接推理

条件论证

反证法

一、条件论证

如果要证明的结论是 $R \rightarrow S$ 的形式，则可以把结论中 $R \rightarrow S$ 的前件 R 作为附加前提，与给定的前提一起推出后件 S 即可。

定理 如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$,

则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$

证明: 因为 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$, 则

$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R) \rightarrow S$ 是永真式。 而

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R) \rightarrow S$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R) \vee S$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \vee (\neg R \vee S)$$

$$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \rightarrow (R \rightarrow S)$$

所以 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \rightarrow (R \rightarrow S)$ 是永真式。

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$, 定理得证。

我们把上述定理写成如下规则：

CP规则 (Conditional Proof):

如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$ ，则

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$$

例4 $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明: (1) R

(2) $\neg R \vee P$

(3) P

(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$

(5) $Q \rightarrow S$

(6) Q

(7) S

(8) $R \rightarrow S$

P (附加前提)

P

T(1)(2)I

P

T(3)(4)I

P

T(5)(6)I

CP

例6 用命题逻辑的推理方法证明下面推理的有效性：

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影；小赵不去看电影或小张去看电影；小王去看电影；所以，当小赵去看电影时，小李也去。

解： 设 P ：小张去看电影。 Q ：小王去看电影。

R ：小李去看电影。 S ：小赵去看电影。

前提： $(P \wedge Q) \rightarrow R$, $\neg S \vee P$, Q

结论： $S \rightarrow R$

$(P \wedge Q) \rightarrow R, \neg S \vee P, Q \Rightarrow S \rightarrow R$

证明: (1) S

(2) $\neg S \vee P$

(3) P

(4) Q

(5) $P \wedge Q$

(6) $(P \wedge Q) \rightarrow R$

(7) R

(8) $S \rightarrow R$

P (附加前提)

P

T(1) (2) I

P

T(3)(4)I

P

T(5)(6)I

CP

要研究反证法，首先要知道什么是不相容的。

相容定义： 设 H_1, H_2, \dots, H_n 是命题公式， P_1, P_2, \dots, P_m 是公式中的命题变元。如果对 P_1, P_2, \dots, P_m ，至少有一组赋值使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 的真值为 T，则称公式集合 $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 是相容的(也称是一致的)；

不相容定义： 如果对 P_1, P_2, \dots, P_m 的每一组赋值，都使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 的真值为 F，则称公式集合 $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 是不相容的 (也称是不一致的)。

二、反证法

若要证明 $H_1, H_2, \dots, H_n \Rightarrow C$ ，只要证明 $\{ H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C \}$ 是不相容的即可。

即 若要证明 $H_1, H_2, \dots, H_n \Rightarrow C$ ，只要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是个矛盾式即可。

定理 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是个矛盾式, 则
 $H_1, H_2, \dots, H_n \Rightarrow C$ 成立。

证明: 设 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式, 则
 $\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C)$ 是个永真式。而

$$\begin{aligned} & \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C) \\ \Leftrightarrow & \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \vee C \\ \Leftrightarrow & (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \rightarrow C \end{aligned}$$

于是 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是一个永真式,
所以 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ 。证毕

例6 $P \rightarrow Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R, \neg(\neg P \wedge S) \Rightarrow \neg S$

(1) $\neg\neg S$

P(假设前提)

(2) S

T(1)E

(3) $\neg(\neg P \wedge S)$

P

(8) $(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$ P

(4) $P \vee \neg S$

T(3)E

(9) $\neg Q \vee R$ T(8)I

(5) P

T(2)(4)I

(10) $\neg R$ T(8)I

(6) $P \rightarrow Q$

P

(11) R T(7)(9)I

(7) Q

T(5)(6)I

(12) $R \wedge \neg R$ T(10)(11)I

例：请根据下面事实，找出凶手：

- 1. 清洁工或者秘书谋害了经理。**
- 2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。**
- 3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。**
- 4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。**
- 5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。**
- 6. 经理有钱且清洁工不富裕。**
- 7. 午夜时屋里灯灭了。**

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。 $A \vee B$

$A \vee B,$

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。

$$A \rightarrow \neg C$$

$$A \vee B, A \rightarrow \neg C,$$

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

3. 如果秘书的证词是正确的, 则谋害发生在午夜前。
 $D \rightarrow C$

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C,$

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

4. 如果秘书的证词不正确, 则午夜时屋里灯光未灭。

$$\neg D \rightarrow \neg E$$

$$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E,$$

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。

$$H \rightarrow \neg A$$

$$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A,$$

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

6. 经理有钱且清洁工不富裕。

$$G \wedge \neg H$$

$$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H,$$

令 A: 清洁工谋害了经理。 B: 秘书谋害了经理。
C: 谋害发生在午夜前。 D: 秘书的证词是正确的。
E: 午夜时屋里灯光灭了。 H: 清洁工富裕。
G: 经理有钱。

7. 午夜时屋里灯灭了。 E

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H,$
 $E \Rightarrow ?$

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

(1) E

P

(2) $\neg D \rightarrow \neg E$

P

(3) D

T(1)(2)I

(10) $B \wedge \neg A$

T(8)(10)I

(4) $D \rightarrow C$

P

(5) C

T(4)(5)I

结果是秘书谋害了经理。

(6) $A \rightarrow \neg C$

P

(7) $\neg A$

T(6)(7)I

(8) $A \vee B$

P

(9) B

T(8)(9)I