第15节 谓词演算推理举例及注意事项

例1. 不存在能表示成分数的无理数；有理数都能表示成分数；因此，有理数都不是无理数。

解：令 $F(x)$：x是无理数， $G(x)$：x是有理数，

$H(x)$：x能表示成分数。

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$,

结论： $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)),\ \forall x(G(x)\rightarrow H(x))\Rightarrow\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

(1)	$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	P
(2)	$\forall x\neg(F(x)\wedge H(x))$	T(1)E
(3)	$\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$	T(2)E
(4)	$\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$	T(3)E
(5)	$F(c)\rightarrow\neg H(c)$	US(4)
(6)	$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	P
(7)	$G(c)\rightarrow H(c)$	US(6)
(8)	$H(c)\rightarrow\neg F(c)$	T(5)E
(9)	$G(c)\rightarrow\neg F(c)$	T(7) (8) I
(10)	$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	UG(9)

注意：

置换定律：A 是一个命题公式，X 是 A 的子公式，如果 X⇔Y，用 Y 代替 A 中的 X 得到公式 B，则 A⇔B。

置换定律对等价成立，但是对重言蕴含是否成立？

例如：$P\wedge Q\Rightarrow P$，是否有 $\neg(P\wedge Q)\Rightarrow\neg P$？

因为 $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$

所以 $\neg P\Rightarrow \neg P\vee\neg Q \Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)$

即 $\neg(P\wedge Q) \Rightarrow \neg P$ 不成立。

若 X 是公式 A 的子公式，且 $X\Rightarrow Y$，用 Y 替换 A 中的 X 而得到公式 B，则未必有 $A\Rightarrow B$。

也就是置换定律对蕴涵不成立！！！

由于 US 、ES、UG、EG 规则都是蕴涵式，所以必须对整个公式用这些规则，绝不可以对一个子公式用这些规则。

- 去量词时，该量词必须是公式最左边的量词，即该量词的前边无任何符号，并且它的辖域作用到公式末尾。
- 添加量词时，也要加在公式的最左边，即新加的量词前无任何符号，并且其辖域也要作用到公式的末尾。

例1. 错误的推理：

(1) $\neg\forall xP(x)$ P

(2) $\neg P(c)$ US(1)

(1)式中不是 $\forall x$ 而是 $\exists x$。

正确推理：

(1) $\neg\forall xP(x)$ P

(2) $\exists x\neg P(x)$ T(1)E

(3) $\neg P(c)$ ES (2)

例2. 错误的推理：

(1) $\forall x\exists yP(x,y)$ P

(2) $\forall xP(x,c)$ ES(1)

令 P(x,y)：y是x的生母，

显然(2)是个为假的命题。

正确推理：

(1) $\forall x\exists yP(x,y)$ P

(2) $\exists yP(a,y)$ US(1)

例3. 错误的推理：

(1) $\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$ P

(2) $\forall x P(x) \rightarrow Q(b)$ × ES(1)

(3) $P(a) \rightarrow Q(b)$ × US(2)

实际上$\forall x$的辖域扩充后量词改成为$\exists x$。

正确的推理：

(1) $\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$ P

(2) $\neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$ T(1)E

(3) $\exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)$ T(2)E

(4) $\exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))$ T(3)E

(5) $\exists y (\neg P(a) \vee Q(y))$ ES(4)

(6) $\neg P(a) \vee Q(b))$ ES(4)

(7) $P(a) \rightarrow Q(b)$ T(5)E

小杨、小刘和小林为高山俱乐部成员。该俱乐部的每个成员都是滑雪者或登山者。没有一个登山者喜欢雨。所有的滑雪者都喜欢雪。凡是小杨喜欢的，小刘都不喜欢。小杨喜欢雨和雪。问：该俱乐部是否有个成员是登山者而不是滑雪者。如果有，他是谁？

设：M(x)：x 是高山俱乐部成员。H(x)：x 是滑雪者。

D(x)：x 是登山者。L(x,y)：x 喜欢 y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；

d：雨；e：雪。

设：M(x)：x是高山俱乐部成员。H(x)：x是滑雪者。D(x)：x是登山者。L(x,y)：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

小杨、小刘和小林为高山俱乐部成员。

M(a), M(b), M(c),

M(a), M(b), M(c),

设：$M(x)$：x是高山俱乐部成员。$H(x)$：x是滑雪者。$D(x)$：x是登山者。$L(x,y)$：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

该俱乐部的每个成员都是滑雪者或登山者。

$$\forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x)))$$

$$M(a),\ M(b),\ M(c),\ \forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x))),$$

设：M(x)：x是高山俱乐部成员。H(x)：x是滑雪者。D(x)：x是登山者。L(x,y)：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

没有一个登山者喜欢雨。

$\neg\exists x(D(x)\wedge L(x,d))$

$M(a)$, $M(b)$, $M(c)$, $\forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x)))$,

$\neg\exists x(D(x)\wedge L(x,d))$,

设：M(x)：x是高山俱乐部成员。H(x)：x是滑雪者。D(x)：x是登山者。L(x,y)：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

所有的滑雪者都喜欢雪。

$$\forall x(H(x)\rightarrow L(x,e))$$

$M(a)$，$M(b)$，$M(c)$, $\forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x)))$,

$\neg\exists x(D(x)\wedge L(x,d))$, $\forall x(H(x)\rightarrow L(x,e))$,

设：M(x)：x是高山俱乐部成员。H(x)：x是滑雪者。D(x)：x是登山者。L(x,y)：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

凡是小杨喜欢的，小刘都不喜欢。

$$\forall x(L(a,x)\rightarrow\neg L(b,x))$$

$M(a)$, $M(b)$, $M(c)$, $\forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x)))$,

$\neg\exists x(D(x)\wedge L(x,d))$, $\forall x(H(x)\rightarrow L(x,e))$,

$\forall x(L(a,x)\rightarrow\neg L(b,x))$,

设：M(x)：x是高山俱乐部成员。H(x)：x是滑雪者。D(x)：x是登山者。L(x,y)：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

小杨喜欢雨和雪。

$L(a,d) \wedge L(a,e)$

$M(a)$, $M(b)$, $M(c)$, $\forall x(M(x) \rightarrow (H(x) \vee D(x)))$,

$\neg \exists x(D(x) \wedge L(x,d))$, $\forall x(H(x) \rightarrow L(x,e))$,

$\forall x(L(a,x) \rightarrow \neg L(b,x))$, $L(a,d) \wedge L(a,e)$

问：该俱乐部是否有个成员是登山者而不是滑雪者。如果有，他是谁？

$\exists x(M(x)\wedge D(x)\wedge\neg H(x))$

凡是小杨喜欢的，小刘都不喜欢。

小杨喜欢雨和雪。

a：小杨；b：小刘；

$M(a),\ M(b),\ M(c),\ \forall x(M(x)\to(H(x)\lor D(x))),\ \neg\exists x(D(x)\land L(x,d)),$
$\forall x(H(x)\to L(x,e)),\ \forall x(L(a,x)\to\neg L(b,x)),\ L(a,d)\land L(a,e)$

(1)	$L(a,d)\land L(a,e)$	P
(2)	$L(a,e)$	T(1)I
(3)	$\forall x(L(a,x)\to\neg L(b,x))$	P
(4)	$L(a,e)\to\neg L(b,e)$	US(3)
(5)	$\neg L(b,e)$	T(2)(4)I
(6)	$\forall x(H(x)\to L(x,e))$	P
(7)	$H(b)\to L(b,e)$	US(6)
(8)	$\neg H(b)$	T(5)(7)I
(9)	$\forall x(M(x)\to(H(x)\lor D(x)))$	P
(10)	$M(b)\to(H(b)\lor D(b))$	US(9)
(11)	$M(b)$	P
(12)	$H(b)\lor D(b)$	T(10)(11)I
(13)	$D(b)$	T(8)(12)I
(14)	$D(b)\land\neg H(b)$	T(8)(13)I

小刘是登山者而不是滑雪者