1. En una condición dada las condiciones en el micromanómetro mostrado en la Figura 1 son:

   - $Z_1 = 0,95m$
   - $Z_2 = 0,7m$
   - $Z_3 = 0,52m$
   - $Z_4 = 0,65m$
   - $Z_5 = 0,72m$
   - $\gamma_1 = 9810 \frac{N}{m^3}$
   - $\gamma_2 = 11500 \frac{N}{m^3}$
   - $\gamma_3 = 14000 \frac{N}{m^3}$
   - $D = 0,2m$
   - $d = 0,1m$

   (a) Calcule la presión P_1 en la tubería.

   (b) Calcule el cambio en H (H'-H) si P_1 experimenta un incremento de 100Pa.

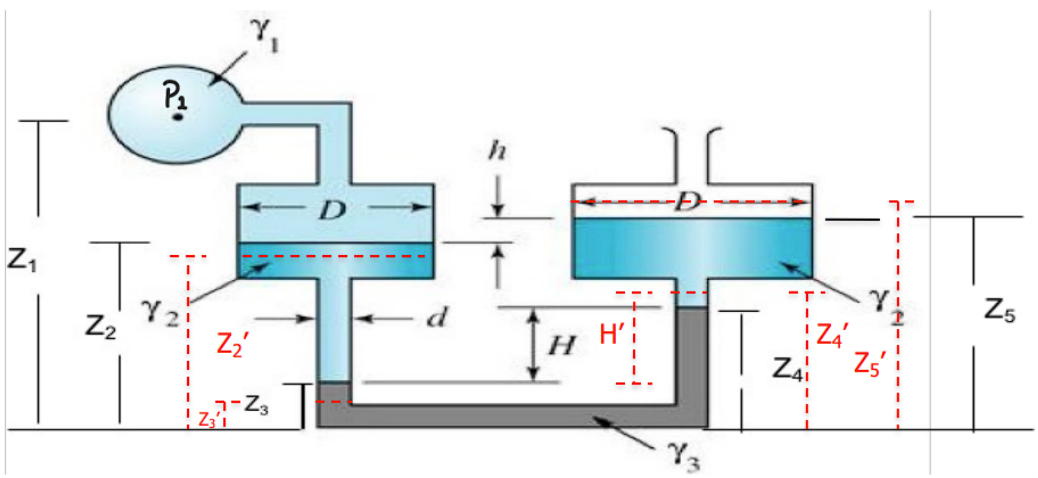

Figura 1: Micromanómetro antes y después del aumento de presión en P_1

Res:

(a) Podemos calcular la presión P_1 utilizando la **Ecuación de manometría**, partiendo del punto abierto a la atmosfera cuya presión corresponde a la atmosférica:

$$P_{atm} + \gamma_2(Z_5 - Z_4) + \gamma_3(Z_4 - Z_3) - \gamma_2(Z_2 - Z_3) - \gamma_1(Z_1 - Z_2) = P_1$$

Como queremos hallar la presión manométrica $P_{atm} = 0$. Finalmente queda:

$$P_1 = \gamma_2(Z_5 - Z_4 - Z_2 + Z_3) + \gamma_3(Z_4 - Z_3) - \gamma_1(Z_1 - Z_2)$$

$$\Rightarrow P_1 = \gamma_2(-0{,}11m) + \gamma_3(0,13m) - \gamma_1(0,25m) \therefore \mathbf{P_1 = -1897,5\frac{N}{m^2}}$$

Lo cual corresponde a una presión por debajo de la atmosférica, por lo que es una presión de vacío que genera succión

(b) Para la siguiente parte, tenemos en cuenta que $P_1 = -1897,5Pa + 100Pa = -1797,5Pa$. Partimos de la **Ecuación de manometría**:

$$\gamma_2(Z_5' - Z_4') + \gamma_3(Z_4' - Z_3') - \gamma_2(Z_2' - Z_3') - \gamma_1(Z_1 - Z_2') = P_1 \tag{1}$$

No conocemos ninguna de las distancias luego del aumento de presión, pero sabemos que el cambio en volumen en todos los casos es el mismo, por lo que surgen las siguientes ecuaciones.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4$$

$$V_1 = \pi(\frac{D}{2})^2(Z_2 - Z_2')$$

$$V_2 = \pi(\frac{d}{2})^2(Z_3 - Z_3')$$

$$V_3 = \pi(\frac{d}{2})^2(Z_4' - Z_4)$$

$$V_1 = \pi(\frac{D}{2})^2(Z_5' - Z_5)$$

Considerando además, que nuestra variable de interés está representada por $H' - H = \Delta H$ y esta se iguala a la distancia de cambio del volumen 3:

$$\Delta H = Z_4' - Z_4 \therefore Z_4' = \Delta H + Z_4 = \Delta H + 0,62m \tag{2}$$

$$\pi(\frac{d}{2})^2\Delta H = \pi(\frac{d}{2})^2(Z_3 - Z_3') \therefore Z_3' = Z_3 - \Delta H = 0,52m - \Delta H \tag{3}$$

$$\pi(\frac{d}{2})^2\Delta H = \pi(\frac{D}{2})^2(Z_2 - Z_2') \therefore Z_2' = Z_2 - (\frac{d}{D})^2\Delta H = 0,7m - \frac{\Delta H}{4} \tag{4}$$

$$\pi(\frac{d}{2})^2\Delta H = \pi(\frac{D}{2})^2(Z_5' - Z_5) \therefore Z_5' = (\frac{d}{D})^2\Delta H + Z_5 = \frac{\Delta H}{4} + 0,72m \tag{5}$$

Podemos reemplazar (2), (3), (4) y (5) en (1):

$$\gamma_2(\frac{\Delta H}{4} + 0,72m - \Delta H - 0,62m) + \gamma_3(\Delta H + 0,62m - 0,52m + \Delta H)$$
$$-\gamma_2(0,7m - \frac{\Delta H}{4} - 0,52m + \Delta H) - \gamma_1(0,95m - 0,7m + \frac{\Delta H}{4}) = -1795,5Pa$$
$$\therefore$$
$$\gamma_2(0,1m - \frac{3\Delta H}{4}) + \gamma_3(2\Delta H + 0,1m) - \gamma_2(0,18 + \frac{3\Delta H}{4}) - \gamma_1(0,25m + \frac{\Delta H}{4}) = -1795,5Pa$$
$$\therefore \Delta H(\frac{-3\gamma_2}{4} + 2\gamma_3 - \frac{3\gamma_2}{4} - \frac{\gamma_1}{4}) + \gamma_2(0,1m - 0,18m) + \gamma_3(0,1m) - \gamma_1(0,25m) = -1792,5Pa$$
$$\Rightarrow \Delta H(8297,5\frac{N}{m^3}) - 920Pa + 1400Pa - 2452,5Pa = -1792,5Pa \therefore \mathbf{\Delta H = 21,69328111 \times 10^{-3}m}$$
$$\Rightarrow \mathbf{\Delta H \approx 2,69cm}$$

2. Un fluido con un peso específico de $8,64\frac{KN}{m^3}$ fluye del punto A a B por el sistema que se presenta en la Figura 2. Calcular el flujo volumétrico.

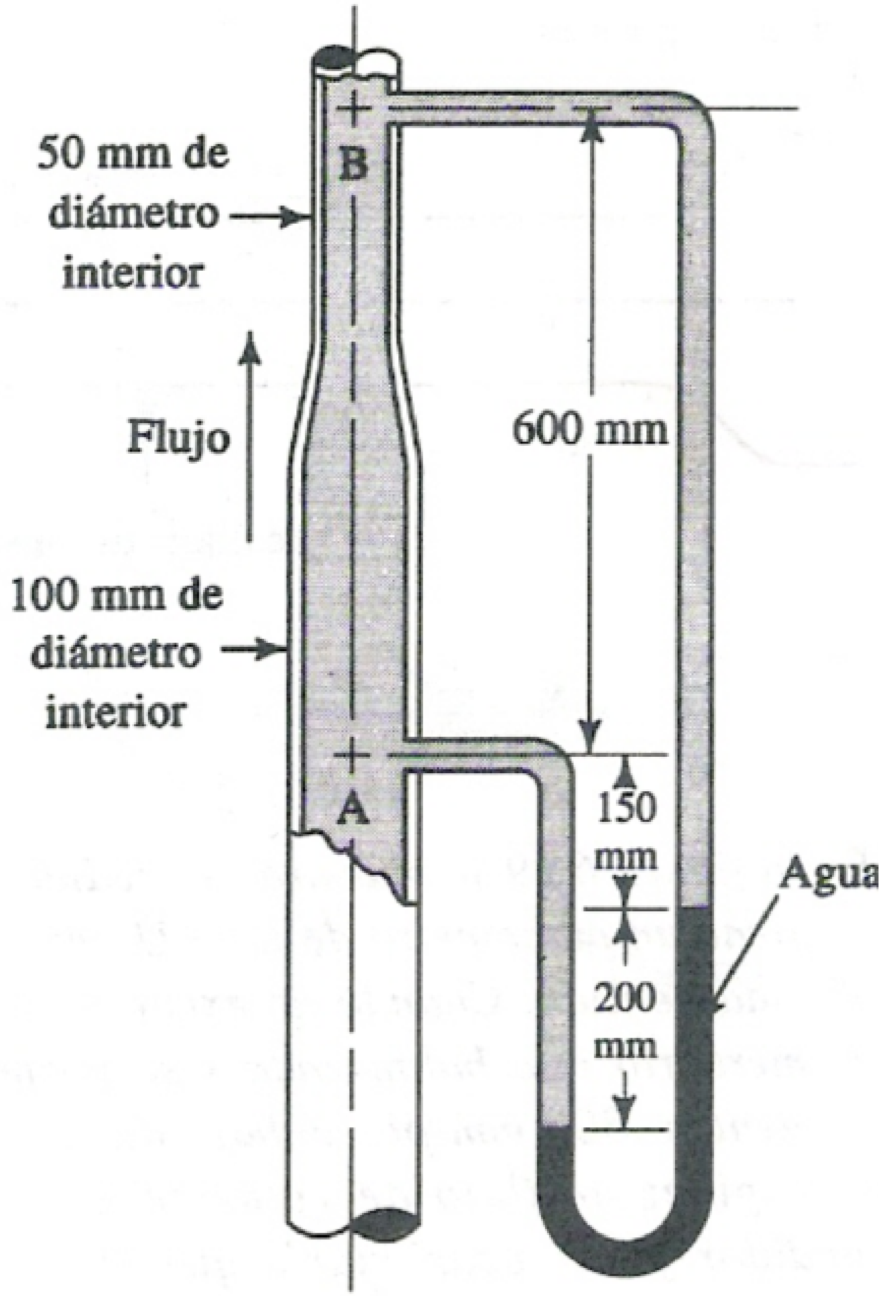

Figura 2: Sistema con flujo vertical

Res: Primero se tienen en cuenta los datos brindados por el ejercicio. Como no se da la temperatura, se asume que el agua está a 4°C:

$$D_A = 100mm = 0,1m \wedge D_B = 50mm = 0,05m$$

$$\gamma_F = 8,64\frac{KN}{m^3} \wedge \gamma_{H_2O} = \gamma_{H_2O}(4°C) = 9,81\frac{KN}{m^3}$$

Se hacen las consideraciones:

- El fluido está en estado estable, por lo que no hay acumulación de materia y el flujo es constante. $\therefore Q_A = Q_B = Q$
- No hay transferencia de energía del fluido con el medio, por lo que la temperatura es constante.
- El fluido es incompresible al ser un líquido. Unido a que no hay cambios de temperatura, la densidad es constante.
- Entre A y B las perdidas de energía por fricción son despreciables, debido a que su separación es muy pequeña.

A continuación aplicamos la **Ecuación de Bernoulli** y despejamos la diferencia de presiones.

$$\frac{P_A}{\gamma_F} + \frac{V_A^2}{2g} + y_A = \frac{P_A}{\gamma_F} + \frac{V_B^2}{2g} + y_B \therefore \frac{P_A - P_B}{\gamma_F} = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2g} + y_B - y_A \tag{1}$$

Tomando como origen del sistema de referencia el punto A, tenemos que:

$$y_1 = 0m \wedge y_2 = 0,6m \therefore y_2 - y_1 = 0,6m \tag{2}$$

Como no conocemos velocidades, las relacionamos con la **Ecuación de continuidad**.

$$Q_A = Q_B \Rightarrow V_A A_A = V_B A_B \therefore V_A = \frac{A_B}{A_A}V_B \Rightarrow V_A = \frac{2\pi \times (\frac{D_B}{2})^2}{2\pi \times (\frac{D_A}{2})^2}V_B \Rightarrow V_A = (\frac{D_B}{D_A})^2 V_B$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{4}V_B \wedge V_B = 4V_A \tag{3}$$

Ahora, despejamos la diferencia de presiones utilizando la **Ecuación de manometría**.

$$P_A + \gamma_F(0,35m) - \gamma_{H_2O}(0,2m) - \gamma_F(0,75m) = P_B$$

$$\therefore P_A - P_B = \gamma_F(0,75 - 0,35)m + \gamma_{H_2O}(0,2)m \Rightarrow P_A - P_B = 5,418\frac{KN}{m^2} \tag{4}$$

Luego, reemplazamos (2), (3) y (4) en (1) para conocer las velocidades.

$$\frac{5,418\frac{KN}{m^2}}{\gamma_F} = \frac{15V_1^2}{2g} + 0,6m \therefore V_1 = \sqrt{(\frac{5,418\frac{KN}{m^2}}{\gamma_F} - 0,6m)(2g)(\frac{1}{15})} = 188,2153022 \times 10^{-3}\frac{m}{s}$$

Finalmente, conociendo una de las velocidades y el área, podemos obtener el flujo (Q).

$$Q = Q_B = Q_A = V_A A_A = [188,2153022 \times 10^{-3}\frac{m}{s}][2\pi \times (\frac{D_A}{2})^2] \therefore \mathbf{Q = 2,956479053 \times 10^{-3}\frac{m^3}{s}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q \approx 2,96\frac{L}{s}}$$

3. Asuma que la sangre está fluyendo a través de un vaso sanguíneo de 1cm de diámetro, a una velocidad promedio de 50 $\frac{cm}{s}$. La presión media en dicho vaso de 100mmHg.

   Si la sangre entra en un aneurisma con un diámetro de 1,5cm. Determine la presión aproximada en ese punto de ensanchamiento del vaso. Considere que la densidad de la sangre es de 1,056 $\frac{g}{cm^3}$.

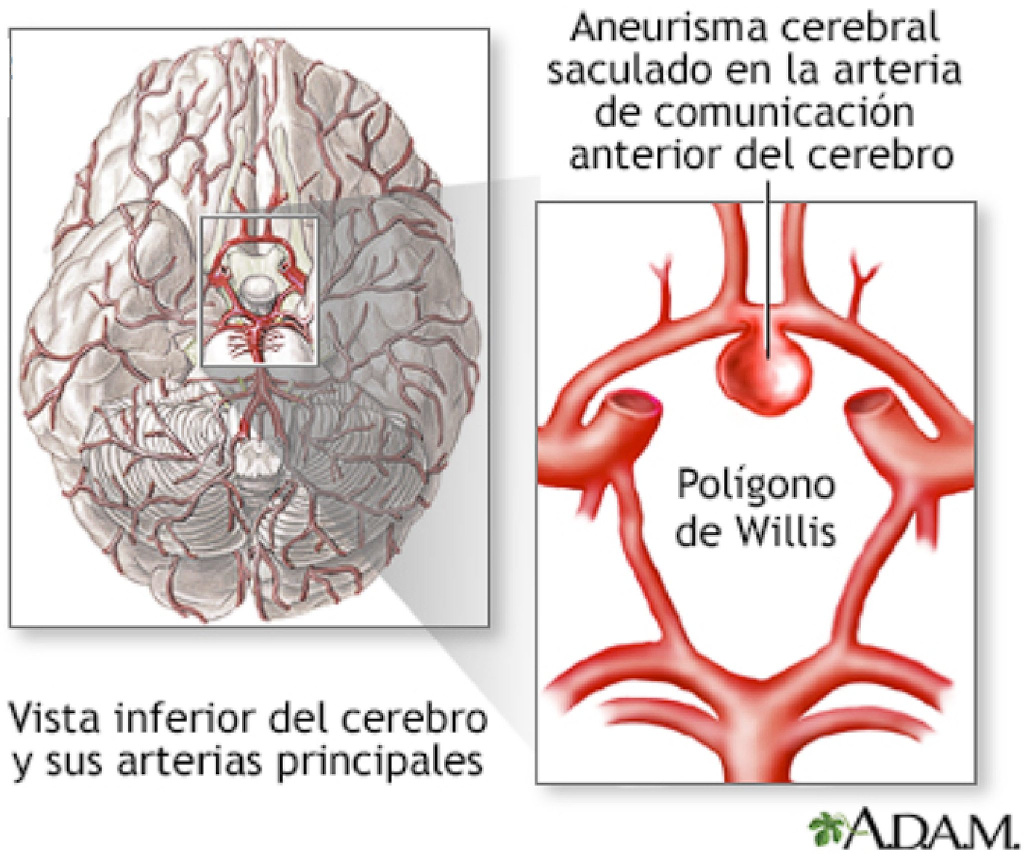

Figura 3: Un aneurisma es un ensanchamiento anormal de una porción de una arteria causado por el debilitamiento en la pared de dicho vaso sanguíneo, en el cual el lumen de la sección transversal se incrementa considerablemente. Los mas frecuentes son los de Aorta (abdominal y torácico), Cerebro y Pierna (arteria poplítea).

Res: Se tienen en cuenta los datos brindados por el ejercicio.

$$D_1 = 1cm = 0,01m \wedge V_1 = 50\frac{cm}{s} = 0,5\frac{m}{s} \wedge P_1 = 100mmHg = 13332,2Pa$$
$$D_2 = 1,5cm = 0,015m \wedge \rho = 1,056\frac{g}{cm^3} = 1056\frac{kg}{m^3}$$

Se hacen las consideraciones para aplicar las ecuaciones de Bernoulli y de continuidad.

- No hay intercambio de energía entre el fluido y el tejido circundante (aproximación, pues en realidad, si hay) de aquí que la temperatura es constante.
- La sangre es un fluido incompresible (Por líquido). Como no hay acumulaciones, se requiere un flujo y una densidad constantes.
- No hay dispositivos mecánicos entre 1 y 2 (El corazón es una bomba, pero se hace la aproximación de que 1 y 2 son puntos lejanos a este).
- La distancia entre 1 y 2 es corta, por lo que las perdidas de energía por fricción son despreciables.

Empezamos aplicando la **Ecuación de Bernoulli** entre los puntos 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Z_1 y Z_2 son iguales pues ambos puntos están a la misma altura, por lo que se cancelan. Además, podemos despejar el peso específico de la sangre (γ) a partir de su densidad y la gravedad:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \therefore P_2 = P_1 + (\frac{V_1^2 - V_2^2}{2})\rho \tag{1}$$

Para encontrar la velocidad en el punto 2, la relacionamos con la del punto 1 a partir de la **Ecuación de continuidad**:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \therefore V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \Rightarrow V_2 = \frac{2\pi(\frac{D_1}{2})^2}{2\pi(\frac{D_2}{2})^2} V_1 \Rightarrow V_2 = (\frac{D_1}{D_2})^2 V_1 = \frac{2}{9}\frac{m}{s}$$

Reemplazamos los valores conocidos en (1) para encontrar P_2:

$$P_2 = 13332,2Pa + \frac{[0,5^2 - (\frac{2}{9})^2]\frac{m^2}{s^2}}{2} \times 1056\frac{kg}{m^3} \therefore \mathbf{P_2 = 13490,27407Pa} \Rightarrow \mathbf{P_2 \approx 13,49KPa}$$

Notar: En el caso de un aneurisma $P_2 > P_1$ y $V_2 < V_1$, al contrario que en una estenosis.