Taller de Análisis de Circuitos
Unidad RLC

1º de Noviembre del 2024

Juan Esteban Pineda Lopera
C.C. 1001248691
Bioingeniería

---

1. Dado el sistema de segundo orden de la Figura 4, con M = 10g; B = 100 Ns/m y f(t) = u(t), siendo u(t) el escalón unitario, resuelva los siguientes enunciados para el circuito RLC equivalente:
   (a) Determine el valor de R, L, y C para que el sistema sea criticamente amortiguado. Recuerde que ninguno de los elementos físicos o circuitales puede tener valores negativos.
   (b) ¿Cuál es el valor comercial de C que usted utilizaría para que el sistema alcance el estado estable aproximadamente en 1 segundo? Justifique.
   (c) Si el elemento mecánico K tiene un valor de 40 N/m, determine el tiempo de estabilización del sistema.
   (d) ¿Para qué valor de K el sistema oscila con una frecuencia aproximada de 30 Hz? Recuerde que ninguno de los elementos físicos o circuitales puede tener valores negativos.
   (e) ¿Existe algún valor de K para el cuál el sistema sea oscilatorio? Recuerde que ninguno de los elementos físicos o circuitales puede tener valores negativos.

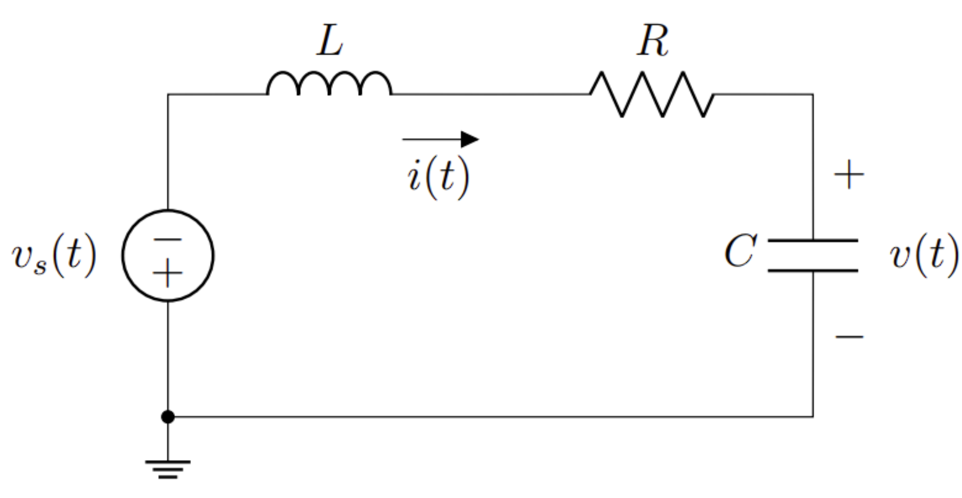

Figura 4: Circuito eléctrico de segundo orden.

Res: Primero, obtenemos los valores dados del sistema físico en términos del sistema circuital:

$$M = L = 10mH$$
$$B = R = 100\Omega$$

(a) Por mallas, se tiene que:

$$v_s(t) = v_L + Ri(t) + v(t) \Rightarrow v_s(t) = LDi(t) + Ri(t) + v(t)$$
$$\Rightarrow v_s(t) = LCD^2v(t) + RCDv(t) + v(t) \because v_L = LDi(t) \wedge i(t) = CDv(t)$$
$$\therefore v_s(t) = (LCD^2 + RCD + 1)v(t) \tag{1}$$

De (1) se obtiene que la ecuación característica del sistema y su respectiva solución es:

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0 \therefore \lambda = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} \tag{2}$$

De (2) podemos identificar σ y ω. Con estos, podemos encontrar las condiciones para que el sistema sea críticamente amortiguado.

$$-\frac{R}{2L} = \sigma < 0 \leftarrow \text{Sistema Estable.} \tag{3}$$
$$\pm\frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = \omega = 0 \leftarrow \text{Críticamente amortiguado.} \tag{4}$$

Despejamos (4) para encontrar la igualdad necesaria.

$$\omega = 0 \Leftrightarrow R^2C^2 - 4LC = 0 \therefore R^2C = 4L \tag{5}$$

Muchos valores satisfacen (5), tomando los valores dados por el enunciado para la resistencia y el inductor($\mathbf{R = 100\Omega, L = 10mH}$) y por lo tanto para el capacitor $\mathbf{C = 4\mu F}$.

(b) Continuando con el sistema críticamente amortiguado:

$$\lambda = \sigma = -\frac{R}{2L} \because \omega = 0 \therefore \tau = |\frac{1}{\lambda}| = \frac{2L}{R}$$
$$\therefore \tau = 1s \Leftrightarrow \frac{2L}{R} = 1 \therefore L = \frac{R}{2} \tag{6}$$

Reemplazando el (6) en (5):

$$R^2C = 4(\frac{R}{2}) \therefore C = \frac{2}{R}$$

Encontramos valores comerciales tanto de resistencia como de capacitancia que cumplen la formula, por ejemplo, con una resistencia de $1M\Omega$ se requiere un capacitor de $\mathbf{2\mu F}$, que se encuentra comercialmente con el **código 205**, para que el sistema tenga un $\tau = 1s$. No se puede cumplir la Ecuación (6) para los valores dados por el enunciado.

(c) Se puede obtener el valor de C a partir de su equivalencia con K:

$$K \equiv \frac{1}{C} \therefore C \equiv \frac{1}{K} = 25 \times 10^{-3} F = 25mF$$

Reemplazando este valor y los valores de R y L derivados del enunciado en (2), se tiene que :

$$\lambda = -5000 \pm 4999,599984 \therefore \lambda_1 = -0,400016 \wedge \lambda_2 = -9999,599984$$
$$\therefore \tau_1 = 2,499900004s \wedge \tau_2 = 1,000040003 \times 10^{-4} s$$

El tiempo de estabilización corresponde al del τ mas grande, en este caso es de **aproximadamente 2,5 segundos**.

(d) Para que el sistema oscile conservando los valores de los elementos pasivos dados por el enunciado, es necesario que sea subamortiguado. Partiendo de (4):

$$\omega \in \mathbb{I} \rightarrow j\omega = j\frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC} \therefore \omega = \frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC} \tag{7}$$

Igualamos esta expresión para omega con la frecuencia dada, teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi \times f$:

$$\frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC} = 60\pi \therefore 4LC - R^2C^2 = 14400\pi^2 L^2C^2 \therefore (14400\pi^2 L^2 + R^2)C^2 - 4LC = 0$$
$$\Rightarrow (1,44\pi^2 + 100^2)C^2 - 0,04C = 0 \therefore C_1 = 3,994323176 \times 10^{-6} F \wedge C_2 = 0$$

Podemos conocer el K a partir del C, descartando la solución de C=0 por provocar indeterminación, por lo que queda:

$$K \equiv \frac{1}{C} \Rightarrow K = \frac{1}{3,994323176 \times 10^{-6}} = 250355,3058\frac{N}{m}$$

Finalmente, la elasticidad K es de **aproximadamente 250$\mathbf{\frac{KN}{m}}$**.

(e) El sistema será oscilatorio cuando $\sigma = 0$, lo cual solo sucede cuando el sistema se compone solamente de inductor y capacitor, es decir, no hay resistencia($R = 0$), como se puede evidenciar observando la Ecuación (3). Esto es equivalente a retirar el amortiguador B del sistema físico, de modo que simplemente se tendría un sistema masa-resorte.

Adicionalmente, el sistema puede oscilar cuando es submamortiguado, es decir, cuando $\omega \in \mathbb{I}$.

$$\omega \in \mathbb{I} \Leftrightarrow R^2C^2 - 4LC < 0 \therefore 10000C^2 - 0,04C < 0$$

Lo anterior se cumple cuando $0 < C < 4\mu F$, es decir, para $0 < K < 250\frac{KN}{m}$.

2. A partir del sistema mecánico de cuarto orden y dados los valores $B_1 = 103\frac{Ns}{m}, M_1 = 0,9g = 9 \times 10^{-4}Kg, M_2 = 10,2g = 102 \times 10^{-4}Kg, K_1 = 1 \times 10^6\frac{N}{Kg}, K_2 = \frac{1}{0,7} \times 10^6\frac{N}{Kg}, f(t) = u(t)$, elabore un programa computacional en Octave, Matlab o Python con el cual, de forma iterativa sobre la variable B_2, halle los valores de todos los elementos pasivos del circuito equivalente, de modo que la variable $x_1(t)$ presente un valor máximo de $max(x_1) = 1,2\mu V$, con un margen de error no mayor a $0,01\mu V$.

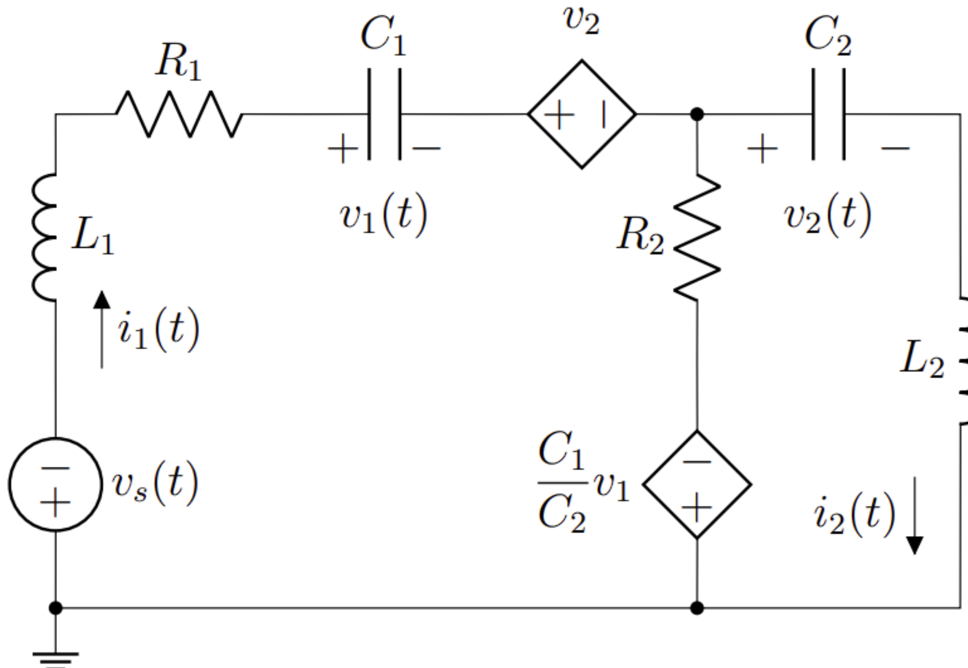

Figura 6: Circuito eléctrico de cuarto orden.

Res: Derivamos los valores de los elementos circuitales a partir de los sistema masa-resorte-amortiguador:

$$R_1 = B_1 = 103\Omega$$
$$L_1 = M_1 = 0,9mH$$
$$L_2 = M_2 = 10,2mH$$
$$C_1 = \frac{1}{K_1} = 1\mu F$$
$$C_2 = \frac{1}{K_2} = 0,7\mu F$$
$$v_s(t) = f(t) = u(t)$$

Usando la función odeint de la librería Scipy de Python, se programa el siguiente código:

```
# Importamos las librerias necesarias
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Definimos las ecuaciones diferenciales
def system_equations(y, t, c1, c2, l1, l2, r1, r2):
    # Definimos las variables
    q1, q2, i1, i2 = y
    # Definimos las ecuaciones diferenciales
    f1 = i1 # dq1/dt
    f2 = i2 # dq2/dt
    f3 = - (((1/c1) + (1/c2))/(l1)) * q1 + (1/(c2*l1)) * q2 - ((r1+r2)/l1) * i1 + (r2 / l1) * i2 + (1/l1) # di1/dt
    f4 = (1/(c2*l2)) * q1 - (1/(c2*l2)) * q2 + (r2/l2) * i1 - (r2/l2) * i2  #di2/dt
    return [f1, f2, f3, f4]

# Configuraciones iniciales
y0 = [0, 0, 0, 0]  # Valores iniciales (q1, q2, i1, i2)
t = np.linspace(0, 100E-3, 100000)  # Tiempo de simulación
max_q1 = 1.2E-6  # Valor buscado de q1
threshold = 0.01E-6  # Umbral de error
results = [] # Lista donde se guardarán los resultados

for r2 in range(0,1000,1): # Se evaluan mil valores de resistencia, desde 0 hasta 1k
    # Resolvemos el sistema
    solution = odeint(system_equations, y0, t, args=(1E-6, 0.7E-6, 0.9E-3, 10.2E-3, 103, r2))  # Pasamos r2 a las ecuaciones
    q1_values = []
    for moment in solution:
        q1_values.append(moment[0]) # Creamos una lista con los valores de q1 en el tiempo

    error = abs(max(q1_values) - max_q1)
    # Verificamos si q1_final está dentro del umbral permitido
    if error < threshold:
       results.append({'r2':r2, 'q1':max(q1_values), 'error':error}) # Se almacenan los valores de resistencia que cumplen con el umbral de error

# Mostrar resultados
results = pd.DataFrame(results)
print(results)
# Encontramos el valor de resistencia con menor error
best_data = results.loc[results['error'].idxmin()]
print('')
print(best_data)
r2 = best_data['r2']

# Graficar para el valor de resistencia con menor error
solution = odeint(system_equations, y0, t, args=(1E-6, 0.7E-6, 0.9E-3, 10.2E-3, 103, r2))  # Pasamos r2 a las ecuaciones
q1_values = []
for moment in solution:
    q1_values.append(moment[0]) # Creamos una lista con los valores de q1 en el tiempo

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(q1_values, color="black", label="Carga en el capacitor 1")
plt.plot(np.argmax(q1_values), max(q1_values), "ro", label=f"Máximo de carga ({np.max(q1_values)*1E6:.2f}$\mu$C)\n Error: {best_data['error']}")
plt.title(f"Valores de carga cuando $R_2$ = {r2}$\omega$")
plt.xlabel("Tiempo ($\mu s$)")
plt.ylabel("Carga (C)")
plt.xlim(0,2000)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Que retorna como resultados todos los valores de R_2 (equivalente a B_2) que otorgan un q_1 (equivalente a x_1) máximo de $1,2 \times 10^{-6}$, con un margen de error de 1×10^{-8}. En concreto, **el valor de $\mathbf{R_2}$ con menor margen de error fue de $\mathbf{56\Omega}$**.

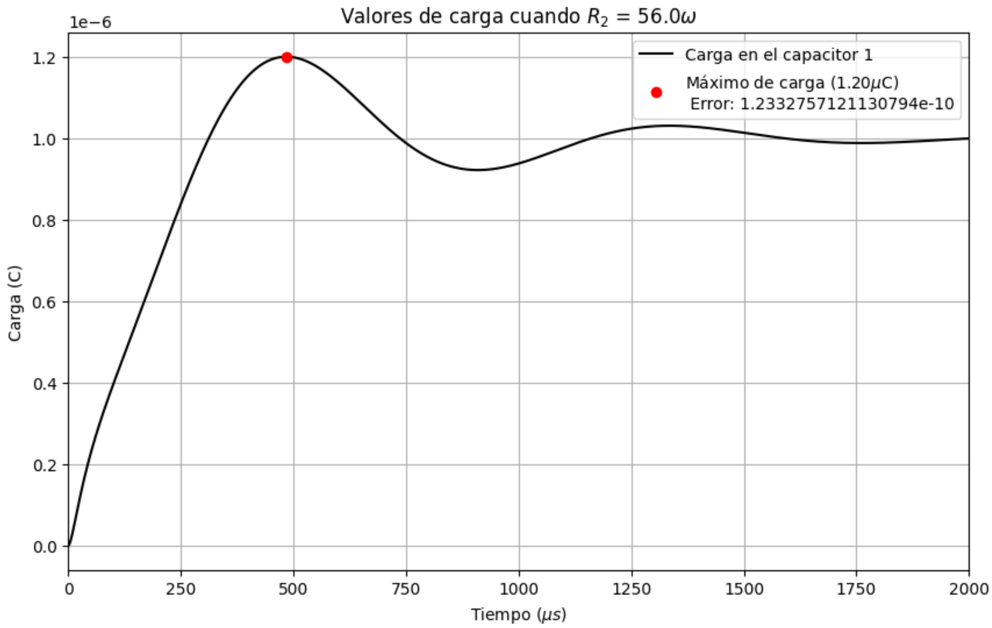

Figura : Carga del Capacitor 1 en el tiempo con el valor de resistencia hallado

.

3. Con los valores encontrados en el literal anterior, simule el circuito en uno de los siguientes programas computacionales y grafique el esquemático y su respuesta: Orcad PSpice lite, Multisim Live, Circuit-maker, Matlab Simulink, Proteus, EasyEDA, Falstad, Everycircuit, Circuitlab, Sequel, Electric circuit studio, Eagle, LTspice, Partsim.

Res: Se simula el circuito en Eagle con los valores encontrados en el punto anterior:

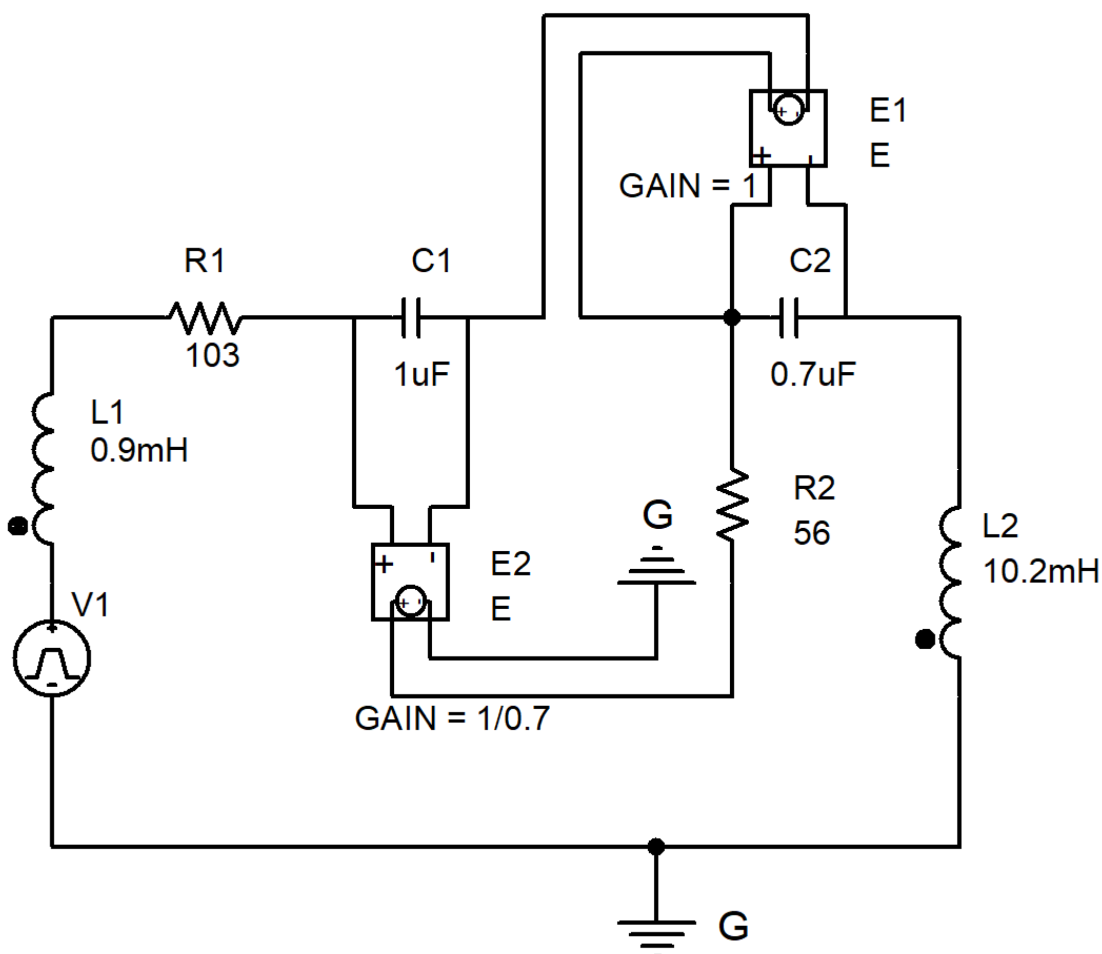

Figura : Esquemático en Eagle del circuito de 4 orden, donde V1 corresponde a una fuente de voltaje con la función escalón u(t). Las fuentes E1 y E2 corresponden a las fuentes de voltaje controladas por voltaje.

A continuación, se simularon los voltajes en los capacitores y corrientes en los inductores:

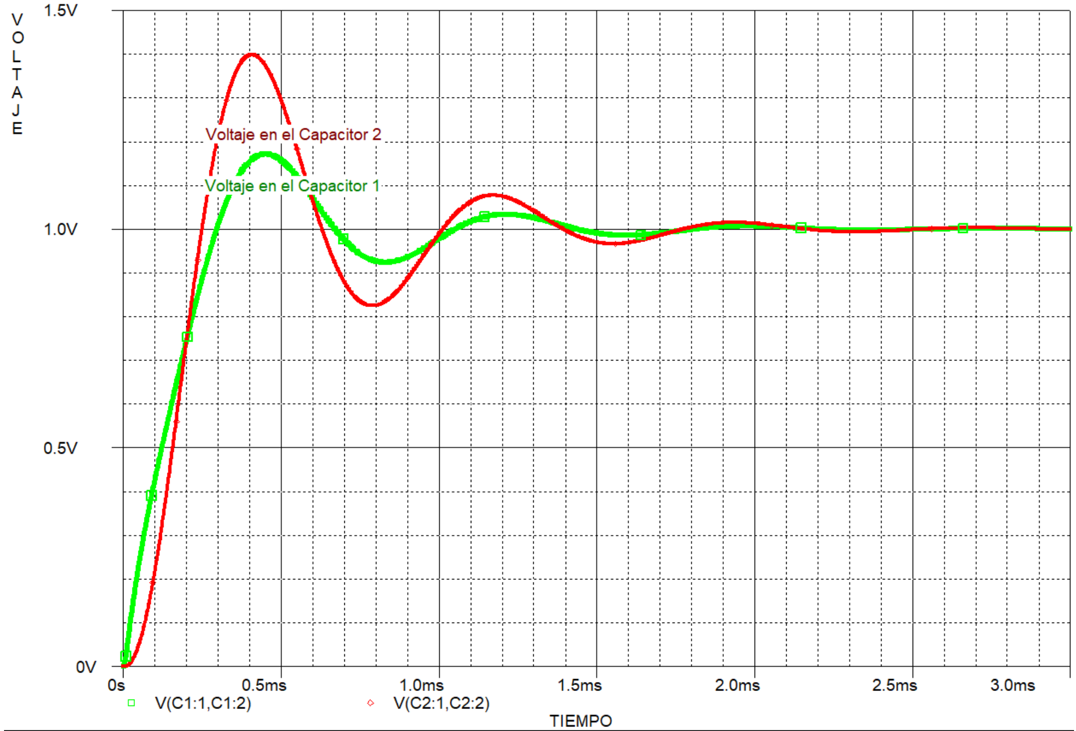

Figura : Voltajes en los capacitores.

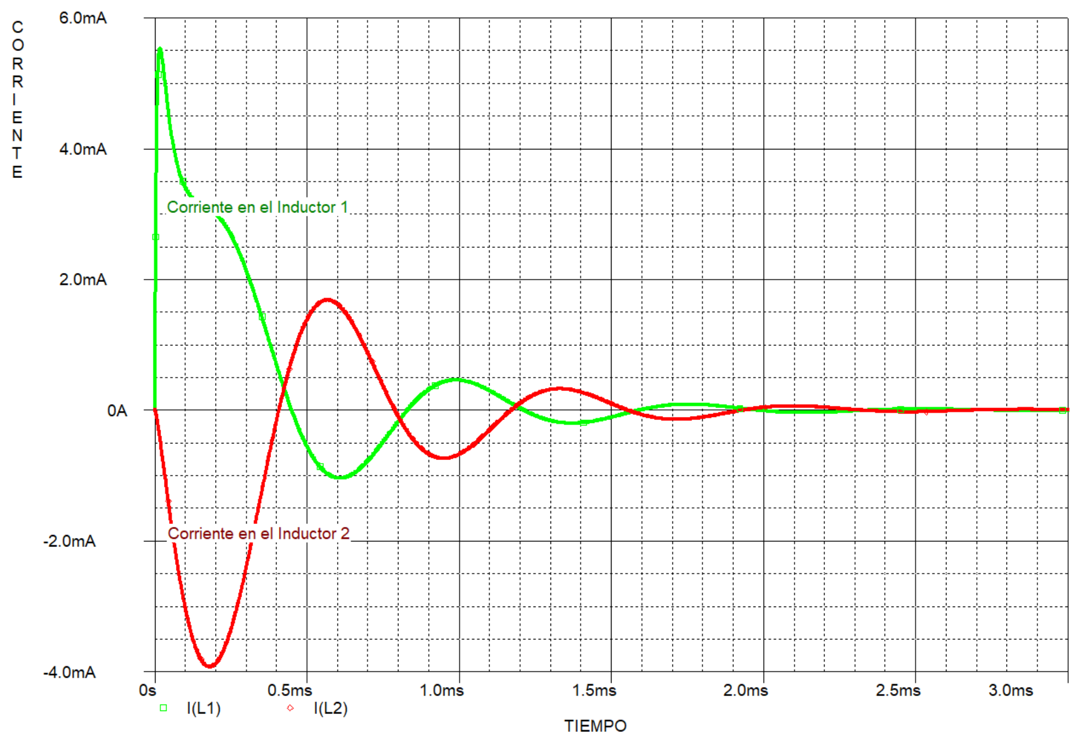

Figura : Corrientes en los inductores

4. Para el circuito de la figura, halle la respuesta en estado estacionario para $v_2(t)$ si $v_s(t) = \sin(t)u(t)$. El indice de acoplamiento es de $K = \frac{1}{2}$.

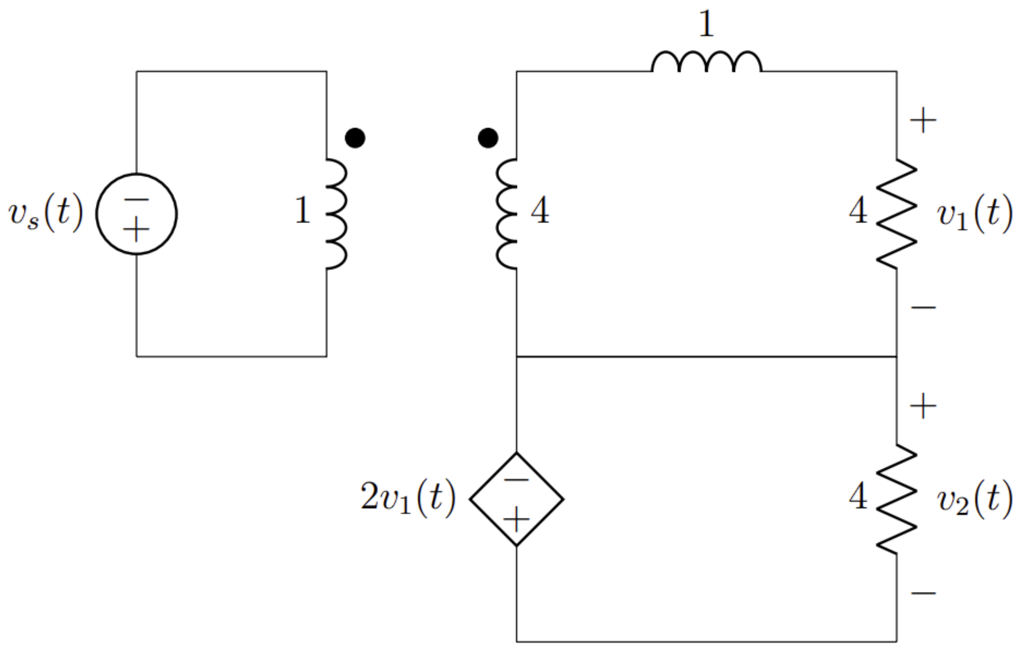

Figura : Tener en cuenta que las fuentes se tomarán al revés al hacer el análisis. La malla de la izquierda se toma como malla 1, la malla superior derecha como malla 2, y la inferior derecha como malla 3.

Res: Primero se extrae el valor de la inductancia mutua (M):

$$M = K\sqrt{L_1 L_2} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

Se hace el análisis por ley de voltajes de Kirchoff, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} = D \wedge v_1(t) = 4I_2 \wedge v_2(t) = 4I_3$$

$$v_s(t) = 1DI_1 - MDI_2 \Rightarrow v_s(t) = DI_1 - DI_2 \therefore DI_1 = v_s(t) + DI_2 \tag{1}$$

$$0 = 4DI_2 - MDI_1 + 1DI_2 + 4I_2 \Rightarrow 0 = 4DI_2 - DI_1 + DI_2 + 4I_2 \tag{2}$$

$$2v_1(t) = v_2(t) \therefore v_1(t) = 0,5v_2(t) \tag{3}$$

Reemplazamos (1) en (2):

$$0 = 4DI_2 - v_s(t) - DI_2 + DI_2 + 4I_2 \therefore v_s(t) = 4DI_2 + 4I_2$$

$$\Rightarrow v_s(t) = Dv_1(t) + v_1(t) \tag{4}$$

Ahora, para tener la ecuación diferencial en términos de $v_2(t)$, reemplazamos (3) en (4) y encontramos la solución particular con el operador inverso ($D^2 = -\omega^2 = -1$):

$$v_s(t) = (0,5D + 0,5)v_2(t) \therefore \frac{2v_s(t)}{D+1} \times \frac{D-1}{D-1} = \frac{2v_s(t)(D-1)}{D^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin(t)u(t)(D-1)}{-2} = -(\cos(t)u(t) + \sin(t)u(t)) \therefore v_{2p} = [\sin(t) - \cos(t)]u(t)$$

Finalmente, la respuesta al estado estacionario de $v_2(t)$ está dada por su respuesta particular, que resultó ser $[\mathbf{sin(t)} - \mathbf{cos(t)}]\mathbf{u(t)}$