UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Fundamentos matemático de funciones lógicas

Juan Felipe Rodríguez Galindo
Laura Marcela Montenegro Silva

Bogotá D.C., August 21, 2023

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Fundamentos matemático de funciones lógicas

Juan Felipe Rodríguez Galindo
Laura Marcela Montenegro Silva

Código 20181020158
Código 20172020005

Bogotá D.C. August 21, 2023

Indice

Resumen

En el presente documento se enunciará como a través de la aplicación del álgebra booleana y los mapas de *Karnaugh*, principalmente pasaremos de una revisión del marco teórico, explicación básica de su funcionamiento a través de ejercicios y las respectivas conclusiones de la temática tratada.

Introducción

Este artículo presenta el uso, aplicación y manejo del álgebra lineal o los mapas de *Karnaugh*. Se fundamenta en explicar al lector el conocimiento básico en cuanto a simplificación de funciones lógicas y el cómo se pueden aplicar estos conocimientos.

La aplicación de métodos de simplificación de álgebra booleana y mapas de *Karnaugh*; en las circunstancias correctas permiten al desarrollador implementar dentro del circuito o la ecuación la solución óptima y la mejor calidad de producto final, por esto el buen entendimiento de estos métodos es fundamental en la aplicación de la simplificación de funciones lógicas.

Introducción

El documento se dividirá en tres grandes etapas o secciones, en la primera se le dará una introducción a que es una simplificación de funciones, anexo a la sección anterior se verán algunos de los tipos más reconocidos de simplificación, es decir por medio de la aplicación de álgebra booleana y mapas de *Karnaugh*. Por último se revisará su aplicación, y la conclusión del tema observado junto con la percepción del autor sobre la temática. En primera instanciase ver á una implementación básica,para optimizaciones de diseño que mejoran suprestación,medida como el tiempo requerido para generar una salida estable a partir de las entradas y la señalizaciónde control.

Indice

Circuitos y tipos

Circuitos digitales

Se considera circuito digital a todo aquel circuito que maneje toda la información que maneja de forma binaria, estos tienen a su vez una serie de componentes necesarios para su funcionamiento, tanto circuitos electrónicos activos y pasivos, conectado entre el ingreso de energía y tierra.

Circuitos y tipos

Tipos de circuitos

Existen dos tipos principales de circuitos:

Circuito secuencial

El secuencial que es aquel que depende de las entradas anteriores y las actuales de igual forma, podemos definirla como un circuito que posee memoria.

Circuito combinacional

El combinacional el cual es el que vamos a manejar es aquel que depende solamente de la entrada en el instante.

Funciones Lógicas

Para especificar el funcionamiento de un circuito debemos tener en cuenta el concepto de Función Lógica, el cual se puede definir como "la representación formal de un circuito digital"[1]. En su mayoría se destaca el uso dentro de los circuitos digitales combinacionales.

[1]tomado de Martí Campoy, A. (2018). Funciones lógicas: tabla de verdad.

Notas importantes funciones lógicas

Hay que tener en cuenta dentro de la definición de función lógica, a la que esta se refiere a cualquier forma de representar o expresar el funcionamiento que queremos que tenga un circuito.

En segundo lugar, tenemos que tener en cuenta que este es de tipo formal, lo cual quiere decir que tiene que haber unas reglas que nos guíen al momento de representar estos comportamientos.

Indice

Sistema algebraico formado por un conjunto B={0,a,b, ... ,1} finito, y que tiene o cumple con dos operaciones [+,·], que cumplen con los postulados para cualesquiera elementos X, Y, $Z \in B$:

Propiedad de pertenencia

$\Rightarrow X + Y \in B, X \cdot Y \in B$

Propiedad conmutativa

$\Rightarrow X + Y = Y + X; X \cdot Y = Y \cdot X$

Propiedad distributiva

$\Rightarrow X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$;

$X \cdot Y + Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$

Elemento identidad

$\Rightarrow X + 0 = X; X \cdot 1 = 1$

Elemento complementado

$\Rightarrow Para X existe X \in B$, tal que X+0=X; $X \cdot 1 = 1$

Ahora observaremos el procedimiento para el sistema algebraico formado por el conjunto A $= \{0,1\}$, con las siguientes operaciones $[+, \cdot]$.

$X \times$	Y	$X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$X +$	Y	$X \times Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	X'
0	1
1	0

Respetando así también los postulados de Boole.

Teoremas del álgebra de Bool

Estos teoremas se demuestran a partir de los postulados del álgebra de Boole y se aplican a cualquier álgebra de Boole, incluido el álgebra de conmutación. La aplicación de estos teoremas permite la modificación o la simplificación de expresiones lógicas por otras equivalentes.

Principio de dualidad

$X + 1 = 1, X \cdot Y = 0$

- **T1**. Teorema de la doble complementación: $\overline{\overline{X}} = X$
- **T2**. Teorema de la idempotencia: $X + X = X$; $X \cdot X = X$
- **T3**. Teorema de la identidad: $X + 1 = 1$; $X \cdot 0 = 0$
- **T4**. Teorema de absorción:
  $X + X \cdot Y = X$; $X \cdot (X + Y) = X$
- **T5**. Propiedad asociativa:
  $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$; $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$
  Este teorema indica que se pueden utilizar puertas lógicas de 3, 4, … entradas.

- **T6**. Teorema de DeMorgan:
  $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$; $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$
- **T7**. Teorema de adyacencia:
  $X \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X$; $(X + Y) \cdot (X + \overline{Y}) = X$
- **T8**. Teorema del consenso:
  $X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + \overline{X} \cdot Z$

  $(X + Y) \cdot (\overline{X} + Z) \cdot (Y + Z) = (X + Y) \cdot (\overline{X} + Z)$
- **T9**. Teorema de simplificación:
  $X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$; $X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$

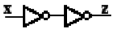
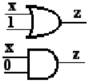
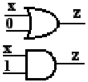
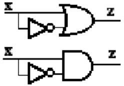
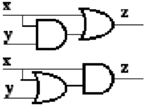
Simplificación de Funciones Lógica

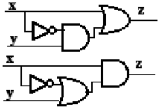
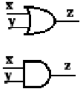
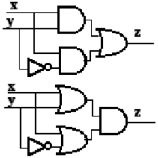
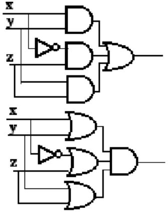
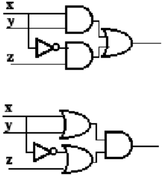
Una expresión booleana o especificación lógica puede representarse de diversas maneras, sustituyendo, cambiando o re-expresando las funciones dadas por el problema original.

Las funciones lógicas nos pueden llevar a optimizar la mayoría de problemas o circuitos lógicos, llegando a tener el menor número de operaciones y términos posibles.

Los teoremas y postulados nos enseñan algunas ejemplificaciones de la reducción de los circuitos digitales.

Simplificación de funciones lógicas

EXPRESION	CIRCUITO ORIGINAL	CIRCUITO SIMPLIFICADO
$\overline{\overline{x}} = x$		x
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$		1 0
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$		x x
$x + \overline{x} = 1$ $x \cdot \overline{x} = 0$		1 0
$x + x \cdot y = x$ $x \cdot (x + y) = x$		x x

$x+\bar{x}\cdot y=x+y$ $x\cdot(\bar{x}+y)=x\cdot y$		
$x\cdot y+x\cdot\bar{y}=x$ $(x+y)\cdot(x+\bar{y})=x$		
$x\cdot y+\bar{x}\cdot z+y\cdot z=$ $x\cdot y+\bar{x}\cdot z$ $(x+y)\cdot(\bar{x}+z)\cdot(y+z)=$ $(x+y)\cdot(\bar{x}+z)$		

Simplificación Reglas

- Los postulados conmutativo (P2), del elemento neutro (P4) y complementado (P5) y los teoremas de la doble complementación (T1), idempotencia (T2), identidad (T3) y asociativa (T5) se deben aplicar de forma casi inmediata.
- Los teoremas de Demorgan (T6) y las propiedades distributivas (P3) se utilizan para modificar expresiones para simplificarlas mejor.
- La simplificación se hace con los teoremas de absorción (T4), adyacencia (T7), consenso (T8) y simplificación (T9).
- Los teoremas de Demorgan (T6) pueden aplicarse así:

$$\overline{X + Y + Z} = \bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z} \qquad \overline{X\,Y\,Z} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

$$\overline{X\,(Y + Z)} = \bar{X} + \bar{Y}\,\bar{Z}$$

$$\overline{\bar{\bar{X}}\,\bar{Y} + \bar{\bar{Z}}} = (X + Y)\,Z$$

En expresiones con literales y operadores +, •, los operadores y los complementos de los literales se intercambian, ajustando los paréntesis.

Diagrmas de Karnaugh

Método gráfico que se utiliza para simplificar circuitos lógicos de forma sencilla y clara u ordenada. Este método tiene sus cimientos en todos los diferentes teoremas vistos anteriormente, su utilidad se limita a reducir 5 variables. Para este método debemos seguir las siguientes reglas:

- Con base en la tabla de verdad extraer las expresiones booleana en forma de minterminos o maxterminos.
- Se deben asignar los "1" correspondientes en el diagrama por cada grupo de variables operadas por AND si es en forma de minterminos u operadas por OR si es en forma de maxteminos.
- Agrupar los "1" adyacentes (Las agrupaciones se realizan en grupos de 2,4,8 1)
- Eliminar las variables que aparezcan con su complemento.
- enlazamos con AND si es en forma de minterminos o con OR si es en forma de maxteminos

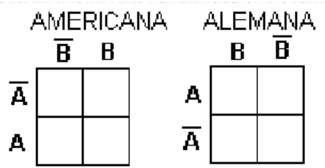
Ahora observaremos el procedimiento para el sistema algebraico formado por el conjunto A $= \{0{,}1\}$, con las siguientes operaciones $[+, \cdot]$.

A	B	Q	
0	0	0	
0	1	0	$Q = (A' \cdot B)$
1	0	0	$Q = (A \cdot B')$
1	1	1	$Q = (A \cdot B)$

$$Q = (A' \cdot B) + (A \cdot B') + (A \cdot B)$$

Ahora colocamos cada uno en el diagrama por cada grupo de variables que son operadas con AND (para nuestro ejemplo). Los diagramas de Karnaugh se presentan de forma americana o alemana.

Simplificación



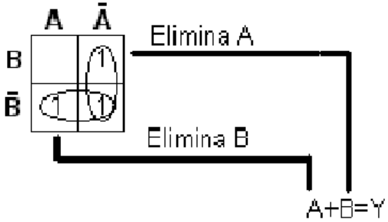
Podemos observar como se representa con cada una de las alternativas que tenemos, para continuar con nuestro desarrollo colocamos los 1 por cada grupo de variables operadas.

	A	A'
B	0	1
B'	1	1

Ahora agrupamos los 1 adyacentes que estén al interior del diagrama, estas se realizan en grupos de 2,4,8 "1". Realizar las agrupaciones mínimas posibles.

	A	A'
B	0	1
B'	1	1

Luego de realizar el agrupamiento que podemos ver con los números en rojo, eliminamos las que aparezcan con el complemento. El agrupamiento 2 "1" se elimina una variable; en el 4 "1" se eliminan 2 y en el 8 "1" se eliminan 3 variables.



Simplificación

Para finalizar realizamos la operación de estos términos con OR principalmente porque estamos utilizando minterminos, teniendo en cuenta para estos los resultados que obtuvimos de la eliminación de variables.

$$Q = A + B$$

De esta manera logramos reducir la ecuación lógica inicial a una puerta lógica OR.

Indice

Ejemplo:
Tenemos la ecuación (C'+D)(C+D), tenemos como fin simplificarla.
(C'+D)(C+D)
C'*C+C'D+DC+DD $\Rightarrow$ *Leydistributiva*
0+C'D+DC+D
C'D+DC+D
D(1)+D
D+D
$D \Rightarrow$ *Respuesta*

Simplificación álgebra booleana

Ejemplo:
Tenemos la ecuación AB'D+AB'D', tenemos como fin simplificarla.
AB'D+AB'D'
AB'(D+D') $\Rightarrow$ *factorizar*
AB'(1)
$AB' \Rightarrow Respuesta$

Simplificación álgebra booleana

Ejemplo:
Tenemos la ecuación AB+A(BC)+B(B+C), tenemos como fin simplificarla.
AB+AB+AC+BB+BC $\Rightarrow$ *distributiva*
AB+AB+AC+B+BC $\Rightarrow B * B = B$
AB+AC+B+BC $\Rightarrow AB + AB = AB$
AB+AC+B+BC $\Rightarrow YX + X = X$
B+AC+BC $\Rightarrow YX + X = X$
$B + AC \Rightarrow$ *Respuesta*

Simplificación álgebra booleana

Ejemplo:
Tenemos la ecuación A'BC+AB'C'+A'B'C'+AB'C+ABC, tenemos como fin simplificarla.
BC(A'+A)+AB'(C'+C)+A'B'C'
BC(1)+AB'(1)+A'B'C'
BC+B'(A+A'C')
$BC + B'A + B'C' \Rightarrow Respuesta$

Simplificación Karnaugh

F(x, y, z) = x' y' z' + x' y' z + x' y z'+ x y' z'+ x y z'

X	**Y**	**Z**	**Resultado**
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

Seguimos la teroria primero pasamos a la tabla de verdad y ya después evaluamos en el diagrama de Karnaugh.

Simplificación Reglas

A	B	C	D	F(A,B,C)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1			1
10		1	1	

[2]

[2] Ejemplo tomado de https://es.slideshare.net/faurbano/clase06-5335816

Simplificación Reglas

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1			1
10		1	1	

$$F = \overline{A}D +$$ [3]

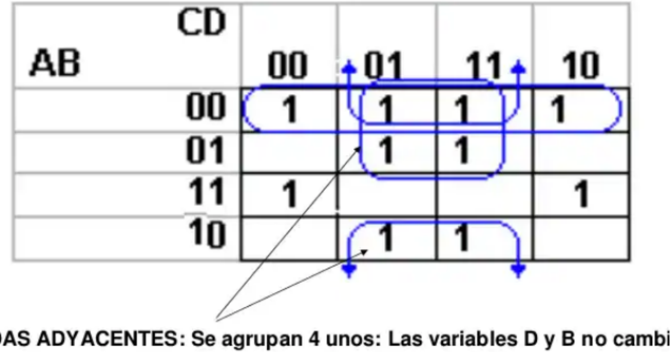
[3] Ejemplo tomado de https://es.slideshare.net/faurbano/clase06-5335816

Simplificación Reglas

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1			1
10		1	1	

$$F = \overline{A}D + \overline{A}\,\overline{B} +$$ [4]

[4] Ejemplo tomado de https://es.slideshare.net/faurbano/clase06-5335816



$$F = \overline{A}D + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}D +$$ [5]

[5] Ejemplo tomado de https://es.slideshare.net/faurbano/clase06-5335816

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1			1
10		1	1	

Celdas adyacentes

$$F = \overline{A}D + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}D + AB\overline{D}$$ [6]

[6] Ejemplo tomado de https://es.slideshare.net/faurbano/clase06-5335816

Aplicaciones

Durante el proceso de estudio de la reducción y simplificación de las funciones lógicas, bajo la aplicación de álgebra booleana y diagramas karnaugh, logramos observar su aplicación directa en la tecnología actual, con el uso y aplicación de compuertas lógicas capaces de dar un a salida esperada a un circuito realizado.
Pudimos ver también que algunas de las propiedades arraigadas al álgebra de Bool pueden ser aplicadas al manejo o estudio de predicados, con el fin de evaluar la veracidad de una oración o discurso.
También sintetizar la aplicabilidad al manejo y optimización de costos para la realización de componentes electrónicos.

Indice

Conclusión

El uso y aplicación de la simplificación de funciones lógicas es una sección fundamental del mundo moderno, así pues que con lo practicado durante la realización de este escrito nos permitió conocer a fondo como funciona para entender la lógica y los procesos que ocurren en los circuitos y aparatos electrónicos de hoy en día.
También nos ayuda a concebir la idea de que la optimización de cualquier sistema, llega a ser posible desde un circuito básico hasta una computadora de última generación.

Bibliografía

- Martí Campoy, A. (2012). Generación de funciones lógicas mediante multiplexores.
- Acha Alegre, S., Pérez Martínez, J., Castro Gil, M. A., & Rioseras, M. A. (2002). Electrónica Digital. Ra-Ma.
- Pérez, E. M., Mandado, E., & Mandado, Y. (2007). Sistemas electrónicos digitales. Marcombo.
- Floyd, T. L. (1997). www. FreeLibros. org.
- García Merayo, F. (2015). Matemática discreta. Ediciones Paraninfo, SA.
- Mano, M. M. (1982). Lógica digital y diseño de computadores. Pearson Educación.

Aprender más...

RECURSOS BIBLIOGRÁFICOS

- Video explicativo álgebra booleana.
- Presentación Karnaugh
- Clases Compuertas lógicas y circuitos digitales
- Programa que realiza el mapa de Karnaugh para encontrar la simplificación de una expresión de álgebra booleana
- Compendio de programas para el diseño lógico de circuitos

APRENDER JUGANDO

- Juegos con álgebra boolena

Fin!

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS