EKF定位

蒋颜丞（3190102563） 朱姜宇轩（3190103052） 张嘉浩（3190103683）

1 解决思路

1.1 算法原理

在定位问题中，我们通常认为位置信息是一个概率分布，每次移动都会使分布变得更分散。因此，考虑将变量（地图数据、观测数据和控制数据）传递到滤波器中，以便在每个时间步骤中缩小分布范围。 应用过滤器之前的每个状态代表我们的先验，而变窄的分布代表我们的贝叶斯后验。即

$$p(x_t|Z^t,U^{t-1},m)=\eta p(z_t|x_t,m)\int p(x_t|x_{t-1},u_{t-1},m)p(x_{t-1}|Z^{t-1},U^{t-2},m)dx_{t-1}$$

这里运动模型的运算过于复杂，因此通常采用不同的假设或近似，即EKF（Extended kalman filter）定位法。

1.2 基本思想

- 采用非线性函数表示运动方程和观测方程：$x_t=g(x_{t-1},u_{t-1})+v_t,\ v_t\sim N(0,R_t)$；$z_t=h(x_t)+\omega_t,\ \omega_t\sim N(0,Q_t)$；
- 计算非线性转换后实际概率分布的高斯近似。

1.3 运动方程及其雅可比矩阵

在本例中，我们使用速度运动模型：

$$\mu_t=\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\\ \theta_t\end{pmatrix}=g(\mu_{t-1},u_{t-1})=g(x_{t-1},y_{t-1},\theta_{t-1},v,w,\theta)=\begin{pmatrix}x_{t-1}-\frac{v}{\omega}\sin(\theta_{t-1})+\frac{v}{\omega}\sin(\theta_{t-1}+\omega dt)\\ y_{t-1}+\frac{v}{\omega}\cos(\theta_{t-1})-\frac{v}{\omega}\cos(\theta_{t-1}+\omega dt)\\ \theta_{t-1}+\omega dt\end{pmatrix}$$

对应的雅可比矩阵为：

$$G_t=\frac{\partial g(\mu_{t-1},u_{t-1})}{\partial\mu_{t-1}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_t}{\partial x_{t-1}}&\frac{\partial x_t}{\partial y_{t-1}}&\frac{\partial x_t}{\partial\theta_{t-1}}\\ \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-1}}&\frac{\partial y_t}{\partial y_{t-1}}&\frac{\partial y_t}{\partial\theta_{t-1}}\\ \frac{\partial\theta_t}{\partial x_{t-1}}&\frac{\partial\theta_t}{\partial y_{t-1}}&\frac{\partial\theta_t}{\partial\theta_{t-1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{v}{\omega}\cos(\theta_{t-1})+\frac{v}{\omega}\cos(\theta_{t-1}+\omega dt)\\ 0&1&-\frac{v}{\omega}\sin(\theta_{t-1})+\frac{v}{\omega}\sin(\theta_{t-1}+\omega dt)\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 算法流程

Algorithm Extended_Kalman_filter $(\mu_{t-1},\sum_{t-1},u_{t-1},z_t)$

$\bar{\mu}_{t-1}=g(\mu_{t-1},u_{t-1})$ //运动模型，位置预测

$\bar{\sum}_{t-1}=G_t\sum_{t-1}G_t^T+R_t$ //雅可比矩阵，计算协方差预测值

$K_t=\bar{\sum}_tH_t^T(H_t\bar{\sum}_tH_t^T+Q_t)^{-1}\Rightarrow O(k^{2.376})$ //计算卡尔曼增益

$\mu_t=\bar{\mu}_t+K_t(z_t-h(\bar{\mu}_t))$ //观测模型，更新均值

$\sum_t=[I-K_tH_t]\bar{\sum}_t \Rightarrow O(n^2)$ //更新协方差

return $\mu_t,\sum_t$

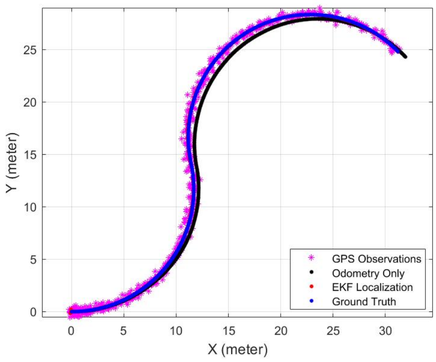
1.5 协方差矩阵选择

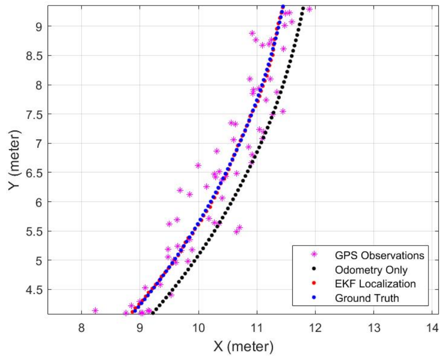
协方差矩阵的选择通常要根据实际情况进行判断。一般有两种思路：一是在某些稳定的过程可以假定它是固定的矩阵，通过寻找最优的Q（过程激励噪声的协方差）值使滤波器获得更好的性能，这是调整滤波器参数的主要手段，Q一般是对角阵，且对角线上的值很小，便于快速收敛；二是在自适应卡尔曼滤波（AKF）中Q矩阵是随时间变化的。这里我们采用经验值（噪声矩阵的平方）作为协方差矩阵。

2 求解结果与分析

2.1 结果

运行效果如下：

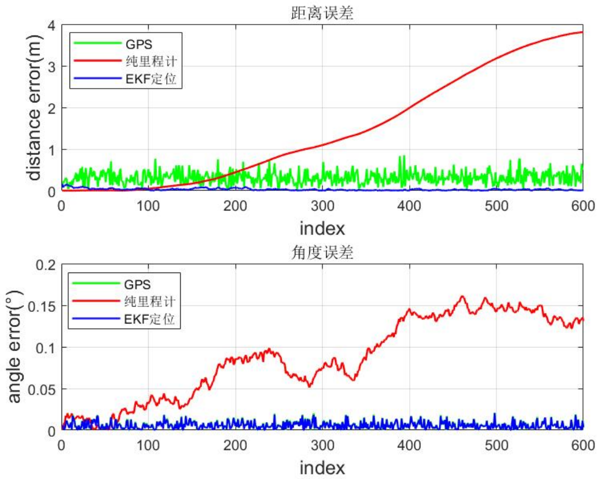




从图中可以看出，EKF定位十分准确。

2.2 分析

GPS定位距离平均绝对误差为0.30304，角度平均绝对误差为0.3525°；纯里程计估计距离平均绝对误差为0.53866，角度平均绝对误差为1.2207°；EKF定位距离平均绝对误差为0.037073，角度平均绝对误差为0.3341°。误差随时间变化曲线图：



从以上数据及图像中可以看到，EKF定位的误差要比纯里程计估计小得多，且纯里程计估计的误差会随时间的推移不断增加，以致达到无法使用的地步，而EKF定位的误差能保持在一个极小的范围内，可用性非常高。

3 改进（二阶EKF）

一阶EKF在模型近似中采取了线性化的策略，忽略了高阶项，带来的截断误差可能会导致算法发散。尽管通过选择合适的初始状态向量和状态误差协方差矩阵，可以在一定程度上避免这一问题，但提高泰勒近似的阶数显然更能从根本上解决这一问题。二阶EKF在泰勒展开时保留至二阶，使用雅可比矩阵计算泰勒级数的一阶项，而由海森矩阵计算二阶项。文献[1]给出了具体的数学算法：

泰勒展开为：

$$x(k+1)=f(x(k|k))+f_x(k)[x(k)-\widehat{x}(k|k)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}e_i[x(k)-\widehat{x}(k|k)|'f_n(k)[x(k)-\widehat{x}(k|k)]+HOT+v(k)$$

其中HOT为高阶项，$v(k)$为误差项。协方差预测值公式变为：

$$P(k+1|k)=f_x(k)P(k|k)f_x(k)'+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_ie_j^Ttr[f_{xx}^i(k)P(k|k)f_{xx}^j(k)P(k|k)]+Q(x)$$

其中$f_x(k)$是f的雅可比矩阵，$f_{xx}^i(k)$是f中第i个函数式的海森矩阵：

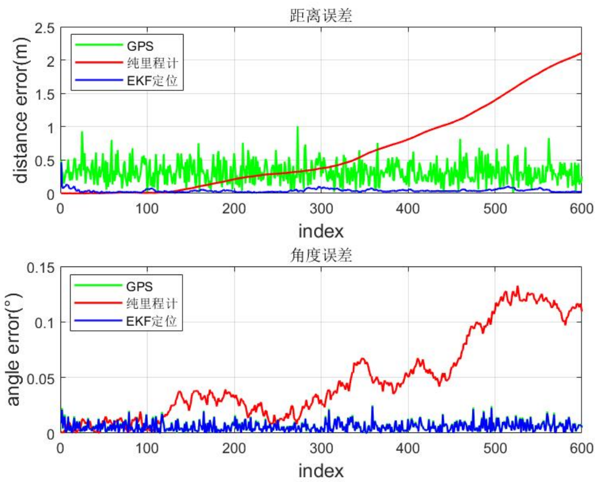
$$f_{xx}^1(k)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\frac{v}{\omega}\sin(\theta_{t-1})-\frac{v}{\omega}\sin(\theta_{t-1}+\omega dt)\end{pmatrix},f_{xx}^2(k)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-\frac{v}{\omega}\cos(\theta_{t-1})+\frac{v}{\omega}\cos(\theta_{t-1}+\omega dt)\end{pmatrix}$$

$$f_{xx}^3(k)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

其余与一阶EKF相同。相关代码如下所示：

```
G = jacobF(xEkf, u); hF = hessF(xEkf, u); % 计算雅可比矩阵和海森矩阵
so = 0;
for i=1:3
    for j=1:3
        ei = zeros(3,1);ei(i) = 1;
        ej = zeros(3,1);ej(j) = 1;
        so = so + ei * ej' * trace(hF{i} * PxEkf * hF{j} * PxEkf); % 计算二次项
    end
end
PxEkfPred = G * PxEkf * G' + so + convQ;  % 计算协方差预测值
```

使用上述算法进行编程，运行后得到二阶EKF距离平均绝对误差为0.032482，角度平均绝对误差为0.32375°。误差曲线图为：



从以上数据及图像中可以看到，对本例而言，二阶EKF在准确度上相比一阶稍有改进，但幅度不大。此外，一阶EKF运行时间仅为6.936s，而二阶EKF运行时间则长达66.702s，相比之下，二阶EKF慢了许多，但改进不多，性价比不高。事实上，在实际应用中，最常用的也是一阶EKF。

4 算法分析

4.1 优点

- 一阶EKF简单，计算高效，快速，鲁棒性好；
- 二阶EKF对非线性函数的适应性更强，精度更高。

4.2 缺点

- 一阶EKF线性近似的好坏依赖于自变量的不确定程度、被近似函数的局部非线性程度；
- 二阶EKF计算量大，运算速度慢，实时性差，对处理器要求高；
- EKF采用多变量高斯分布表示估计的概率分布，这种单峰概率分布表示不适合于存在多个假设的情况。

5 分工

蒋颜丞、张嘉浩、朱姜宇轩共同完成编程，查找资料，撰写报告。

参考文献

[1] B. Sadeghi and B. Moshiri, "Second-order EKF and Unscented Kalman Filter Fusion for Tracking Maneuvering Targets," 2007 IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, 2007, pp. 514-519, doi: 10.1109/IRI.2007.4296672.
[2] Ben Quine, Jeffrey Uhlmann, and Hugh Durrant-Whyte, Implicit jacobians for linearised state estimation in nonlinear systems. Proceedings of the 1995 American Control Conference, IEEE Press, June 1995.
[3] Simon Julier, Jeffrey Uhlmann, and Hugh Durrant-Whyte, A new approach for filtering nonlinear systems. Proceedings of the 1995 American Control Conference, IEEE Press, June1995.