Chap 2:

I - Espace de proba

def: Soit Ω un ensb. On appel tribu de Ω un ss-ensbl Υ de $\mathcal{P}(\Omega)$ verifiant:
- $\rightarrow \Omega \in \Upsilon$
- $\rightarrow \forall A \in \Upsilon, A^c \in \Upsilon$
- $\rightarrow$ Soit $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ verifiant $A_j \in T \; \forall j$ alors $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \Upsilon$

un element de Υ sera appelé un evem$^{\underline{t}}$.

def: On appelle propa sur Υ une app. $\mathbb{P}: \Upsilon \rightarrow [0, 1]$ avec:
- $\rightarrow \Omega(\Upsilon) = 1$
- $\rightarrow \mathbb{P}(\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j)$

ex: Soit Ω un ensbl fini et $\mathbb{P}$ l'equiprob, alors $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace de proba

th: soient A et B $\in \Upsilon$
- $\rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$
- $\rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\rightarrow$ si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\rightarrow$ si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

II - Formules des probas totales

def : On appelle syst. complet d'év. un ss-ensbl $\{A_j\}_{j\in}$ de $\mathcal{T}$ vérifiant $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \Omega$ et $\forall j, i \,/\, i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$

th : Soient $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un syst complet d'évt et $B \in \mathcal{T}$. On a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_j)$$

cas part : $\forall A \in \mathcal{T}$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c).$$

III - Indépendence

defs : . deux évt A et B sont indépdt si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) . \mathbb{P}(B)$$

. n évt sont mutuelt indépdt si, $\forall j \in \{1, \dots n\}$ et $\forall i_1, i_2, \dots i_j \in \{1, \dots n\}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{i_j}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_j})$$

. n évt sont 2 à 2 indép si $\forall i \neq j$, A_i et A_j sont indépt.

IV - Proba conditionnelle

Def : Soit B un évt tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appel proba conditionl par rapport à B l'applicat° :

$\mathbb{P}_B : \mathcal{T} \to [0, 1] \,/\, \forall A \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A | B).$$

Prop : $\to$ A et B indépdt $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

$\rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \mathbb{P}(B|A)$

$\rightarrow \mathbb{P}(B) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)$

V - Condit^{t} successifs

Th : Soient n evt^{s} $A_1, A_2, \dots, A_n$ / $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$

on a :

$$\mathbb{P}(A_n \cap \dots \cap A_1) = \mathbb{P}(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \cdots \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1).$$