Mathématiques 3A, Probabilités
TD 2, corrigé

2020/2021

Exercice 1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}((A \cup B) \cup C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Exercice 2 :
On a C_{32}^5 mains possibles.
1) $\mathbb{P}(\text{obtenir un carré}) = \dfrac{8 \times 28}{C_{32}^5}$.
2) $\mathbb{P}(\text{obtenir une paire}) = \dfrac{C_4^2 \times 8 \times C_7^3 \times 4^3}{C_{32}^5}$.
3) $\mathbb{P}(\text{obtenir deux paires}) = \dfrac{C_8^2 \times (C_4^2)^2 \times 24}{C_{32}^5}$.
4) $\mathbb{P}(\text{obtenir un brelan}) = \dfrac{8 \times C_4^3 \times C_7^2 \times 4^2}{C_{32}^5}$.
5) $\mathbb{P}(\text{obtenir un full}) = \dfrac{8 \times C_4^3 \times 7 \times C_4^3}{C_{32}^5}$.

Exercice 3 :
Sans changer de porte, la probabilité de gagner est la probabilité d'avoir choisi la bonne porte au début du jeu. C'est donc 1/3.
En changeant de porte, la probabilité de gagner est la probabilité d'avoir choisi une mauvaise porte au début du jeu. C'est donc 2/3.
Il vaut mieux changer de porte.

Exercice 4 :
1) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2) A et B sont indépendants donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$. De la même façon, on montre que $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Donc, A, B et C sont deux à deux indépendants.
3) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/8$, donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 5 :
On définit les événements :

- $B =$ piocher une boule bleue,
- $R =$ piocher une boule rouge,
- $U_1 =$ piocher une boule dans l'urne 1,
- $U_2 =$ piocher une boule dans l'urne 2,
- $U_3 =$ piocher une boule dans l'urne 3.

On a $\mathbb{P}(R \mid U_1) = 2/3$, $\mathbb{P}(R \mid U_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(R \mid U_3) = 5/6$, $\mathbb{P}(B \mid U_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(B \mid U_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(B \mid U_3) = 1/6$, $\mathbb{P}(U_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(U_2) = 1/6$ et $\mathbb{P}(U_3) = 1/3$.
1) $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \mid U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(R \mid U_2)\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}(R \mid U_3)\mathbb{P}(U_3) = 25/36$.
2) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(R) = 11/36$.
3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{nombre pair} \mid R) &= \mathbb{P}((U_2 \cup U_3) \mid R) \\
&= \frac{\mathbb{P}((U_2 \cup U_3) \cap R)}{\mathbb{P}(R)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(U_2 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} + \frac{\mathbb{P}(U_3 \cap R)}{\mathbb{P}(R)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(R \mid U_2)\mathbb{P}(U_2)}{\mathbb{P}(R)} + \frac{\mathbb{P}(R \mid U_3)\mathbb{P}(U_3)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{13}{25}.
\end{aligned}$$

Exercice 6 :
On définit les événements :

- $A =$ contrôle positif,
- $B =$ conducteur en état d'ébriété.

On a $\mathbb{P}(A \mid B) = 96/100$, $\mathbb{P}(A^c \mid B) = 4/100$, $\mathbb{P}(A \mid B^c) = 2/100$, $\mathbb{P}(A^c \mid B^c) = 98/100$, $\mathbb{P}(B) = 3/100$ et $\mathbb{P}(B^c) = 97/100$.
1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B^c \mid A^c) &= \frac{\mathbb{P}(B^c \cap A^c)}{\mathbb{P}(A^c)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A^c \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A^c \mid B^c)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c \mid B)\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{9506}{9518} \approx 0,9987...
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B^c \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(B^c \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{194}{482} \approx 0,402...
\end{aligned}$$

3) Il y a beaucoup de faux positifs et peu de faux négatifs.

Exercice 7 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants :

- A_n=l'automobiliste roule sur la route A le jour n,
- B_n=l'automobiliste roule sur la route B le jour n.

On a les probabilités suivantes :

- $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = 1 - a$,
- $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n) = a$,
- $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = b$,
- $\mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = 1 - b$.

On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et on a $1 - p_n = \mathbb{P}(B_n)$.
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) \text{ (formule des probabilités totales)} \\ &= (1-a)p_n + b(1-p_n) = b + cp_n \text{ avec } c = 1 - a - b \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Conclusion : $p_{n+1} = b + cp_n$.
2) On a

$$\begin{aligned} p_n &= b + cp_{n-1} \\ &= b + c(b + cp_{n-2}) \\ &= b(1+c) + c^2 p_{n-2} \\ &\dots \\ &= b(1 + c + \dots + c^{n-2}) + c^{n-1}p_1 \\ &= b\frac{1-c^{n-1}}{1-c} + c^{n-1}p_1. \end{aligned}$$

Conclusion : $p_n = b\dfrac{1-c^{n-1}}{1-c} + c^{n-1}p_1$.
3) D'après la formule précédente, puisque $|c| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{b}{1-c} = \dfrac{b}{a+b}$.