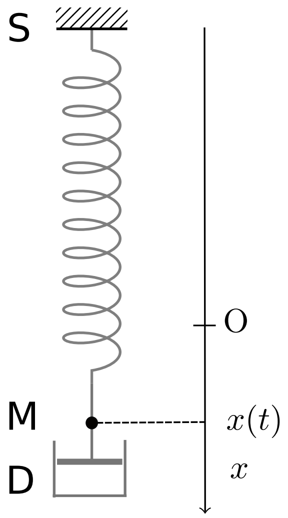
TD Matlab 2 : Équations différentielles ordinaires

Partie I : Exemple introductif



Nous allons tout d'abord considérer le problème d'un ressort élastique, de masse négligeable, de raideur h, de longueur à vide y fixé a son extrémité supérieure S. A son extrémité inférieure est fixé un corps M assimilable à un point matériel de masse m.

Le rôle unique de l'amortisseur D, de masse négligeable, lié à M, est d'exercer sur le corps M la force $\vec{f} = c\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse de M et c un coefficient de frottement fluide positif. Les mouvements de M sont verticaux.

A l'équilibre, l'abscisse $l = x - y$ de M est nulle. Soit F l'ensemble des forces externes, on a alors :

$$ml'' + cl' + hl = F$$

Dans ce TD, on ne s'intéressera qu'aux méthodes de résolutions numériques d'équations différentielles ordinaires basées sur la forme de Cauchy, c'est-à-dire aux modèles comportant une équation ou un système d'équations différentielles du premier ordre.

La première étape consiste donc à transformer l'équation différentielle précédente, du second ordre, en un système d'équations différentielles du premier ordre. Pour une force $F = a\sin(\omega t)$, en introduisant

$$w_1 = l$$
$$w_2 = l'$$

on obtient

$$\begin{aligned} w_1' &= w_2 \\ w_2' &= -\frac{c}{m}w_2 - \frac{h}{m}w_1 + \frac{a}{m}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$w_1(0) = 0$$
$$w_2(0) = 0$$

1. Résolution avec ode23, basée sur Runge Kutta d'ordre 2.
   Il faut définir une fonction, appelée **fichier ode** qui prend un scalaire en entrée (généralement le temps t), un vecteur colonne des variables (w dans l'exemple) et retourne un vecteur contenant les dérivées des variables w au cours du temps (notées w_d dans l'exemple), indispensables pour la résolution numérique de l'équation différentielle.

Pour l'exemple traité ici, on crée un fichier *springb.m* contenant la fonction :

```
function wd=springb(t,w);
% définition des paramètres contants
a=2.0;% N
m=2.0; % kg
c=1.4; % Ns/m
h=0.1;% N/m
om=1.0;% rad/s

% Allocation d'espace pour wd en fonction de la dimension de w
wd=zeros(size(w));
% Calcul des dérivées
wd(1)=w(2);
wd(2)=-c/m*w(2)-h/m*w(1)+a/m*sin(om*t);
end
```

Ensuite pour observer les oscillations, et donc résoudre le système d'équations différentielles, on utilise les commandes suivantes (à écrire dans un script tp2.m, par exemple) :

```
» t0=0.0; tf=100; w0=[0;0];
» [t,w]=ode23 ('springb', [t0,tf],w0)
» plot(t,w( :,1),'*-');
» grid on;
» xlabel('Temps, t, en secondes)
» ylabel('Elongation du ressort, l, en metres');
» title ('Simulation d un systeme masse-ressort');
```

2. Spécification de la valeur du pas de temps
   Dans le cas, précédent, les valeurs de t sont générées automatiquement par Matlab (pas adaptatif). Dans certains cas, il peut être utile de spécifier le pas de temps souhaité.

```
» tspan=0.0 :0.1 :100; w0=[0;0];
» [t,w]=ode23 ('springb', tspan,w0)
» plot(t,w( :,1),'*-');
» grid on;
» xlabel('Temps, t, en secondes)
» ylabel('Elongation du ressort, l, en metres');
» title ('Simulation d un systeme masse-ressort');
```

3. Autres méthodes de résolution
   D'autres méthodes de résolution sont disponibles sous Matlab pour la résolution des équations différentielles ordinaires, pour en avoir un aperçu :

```
» help ode23
```

Utilisez ode45, basée sur Runge-Kutta d'ordre 4, pour résoudre de nouveau l'équation différentielle précédente, en ajoutant dans votre script

```
» [t,w]=ode45 ('springb', tspan,w0)
» hold on;
» plot(t,w( :,1),'r');
» hold off;
```

4. Passage de paramètres à un modèle. Si l'on souhaite étudier l'effet de certains paramètres, la solution qui consiste à modifier à chaque nouveau cas le fichier ode springb.m n'est pas très efficace. On préférera définir le paramètre que l'on souhaite faire varier comme un paramètre global.

```
function wd=springg(t,w); % définition des paramètres contants
a=2.0;% N
m=2.0; % kg
global c % Déclaration de c en variable globale
h=0.1;% N/m
om=1.0;% rad/s

% Allocation d'espace pour wd en fonction de la dimension de w
wd=zeros(size(w));
% Calcul des dérivées
wd(1)=w(2);
wd(2)=-c/m*w(2)-h/m*w(1)+a/m*sin(om*t);
end
```

Les commandes à exécuter seront alors les suivantes.

```
» tspan=[0,100]; w0=[0;0];
» global c
» c=1.4; % résolution du système original
» [t,w]=ode23 ('springg', tspan,w0)
» c=2.5; % résolution du système modifié
» [t1,w1]=ode23 ('springg', tspan,w0)
» plot(t,w( :,1),t1,w1( :,1)); % comparaison des résultats
» xlabel('Temps, t, en secondes)
» ylabel('Elongation du ressort, l, en metres');
» title ('Simulation d un systeme masse-ressort');
```

Partie II : Exercices

Exercice 1

Il s'agit de l'écosystème bien connu de Volterra. On considère deux populations : l'une de lapins, l'autre de renards reliées par les équations

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= 2r - \alpha r f\\ \frac{df}{dt} &= -f + \alpha r f\end{aligned}$$

avec r le nombre de lapins, f le nombre de renards et t le temps donné en années. En utilisant ode23, calculez et tracez la solution de ce système différentiel, pour $\alpha = 0.01$ sur l'intervalle [0,25] pour les conditions initiales $r_0 = 100$ et $f_0 = 400$. Une comparaison des résultats obtenus pour des pas fixes et un pas adaptatif devra en particulier être réalisée.

Exercice 2

On peut montrer que la trajectoire d'une balle de tennis lors d'un lob, dans le cas où la balle reste dans un plan (Oxz) peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} x''(t) = -C_D \alpha v x'(t) + C_M \alpha v z'(t) \\ z''(t) = -g - C_D \alpha v z'(t) - C_M \alpha v x'(t) \end{cases} \qquad \text{où } \alpha = \frac{\pi \rho d^2}{8m}$$

avec $x(0) = 0$, $z(0) = h$, $x'(0) = v_0 \cos\theta$, $z'(0) = v_0 \sin\theta$. Dans le domaine de vitesse que l'on considère, on peut prendre

$$\begin{cases} C_D = 0.508 + \dfrac{1}{22.503 + 4.196(v/w)^{2/5}} \\ C_M = \dfrac{1}{2.022 + 0.981(v/w)} \end{cases}$$

où $v = \sqrt{x'^2 + z'^2}$ est la norme de la vitesse et w la norme du vecteur rotation instantanée, constante dans cet exemple .

1. Résoudre ce système dans le cas d'une trajectoire dans le vide ($C_D = C_M = 0$). Au bout de combien de temps intervient le premier rebond ?
2. Résoudre ensuite le système dans l'air en l'absence de lift ($C_M = 0$).
3. Résoudre enfin dans le cas du lift.
4. Tracer les trois courbes sur le même graphique. Quelle est la durée du lob dans chacun des trois cas ?

Valeurs Numériques :
$g = 9.81 m.s^{-1}$, $d = 0.063 m$, $m = 0.05 kg$, $\rho = 1.29 kg.m^{-3}$, $w = 20 rad.s^{-1}$, $h = 2,5 m$, $v_0 = 25 m.s^{-1}$, $\theta = 15\,\text{deg}$.