



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



POLYTECH®
NANCY

Automatique continue

Systèmes bouclés : commande, stabilité & performances

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 23 septembre 2020

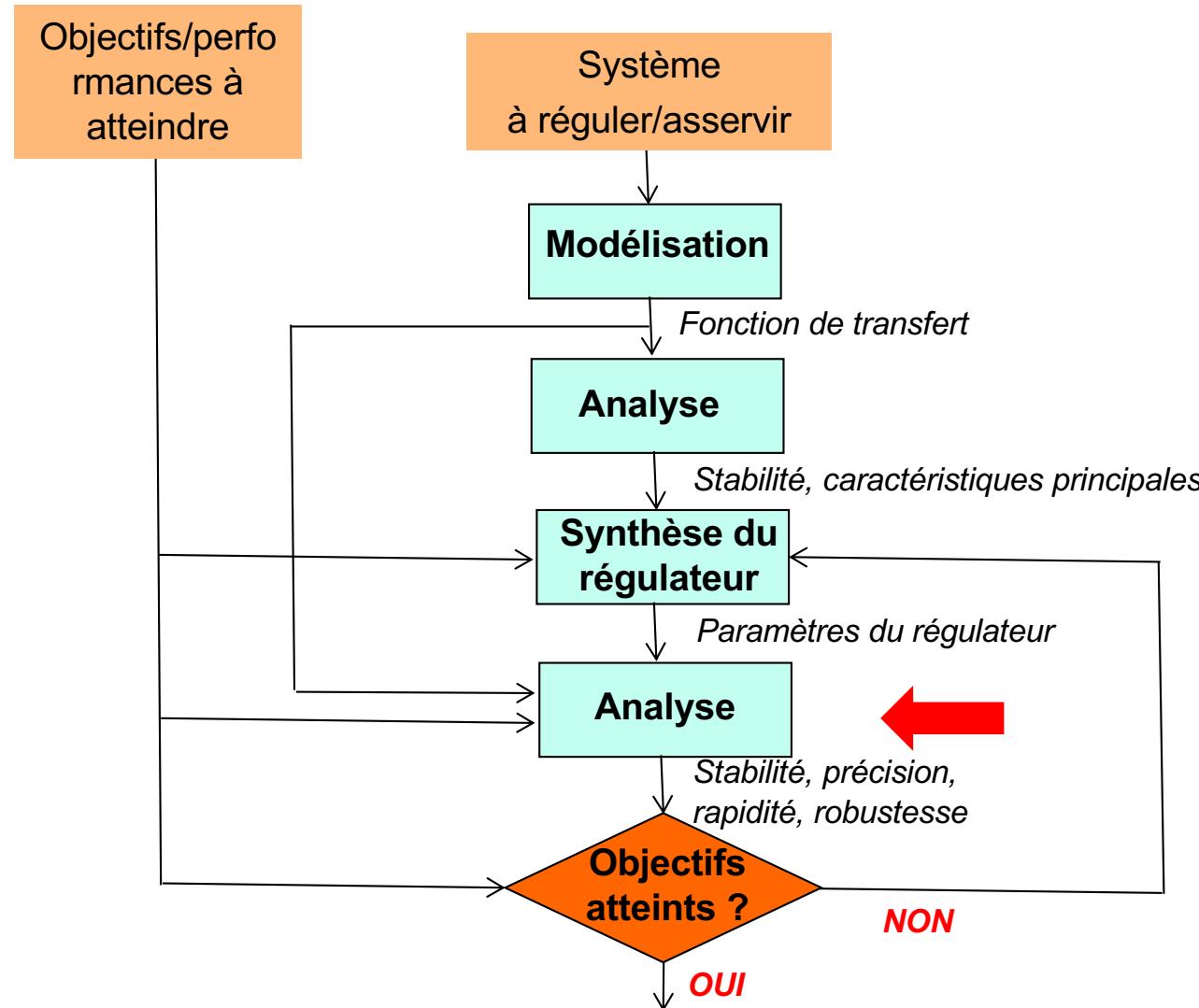
Plan du cours

- ① Introduction à l'Automatique & Modélisation des systèmes
- ② Analyse des systèmes
- ③ Stabilité des systèmes
- ④ Systèmes bouclés : commande, stabilité et performances 

 - Commande en boucle ouverte
 - Commande en boucle fermée
 - Stabilité des systèmes bouclés
 - Performances des systèmes bouclés

- ⑤ Correcteurs standards et leurs réglages

Etapes de conception d'une commande en boucle fermée

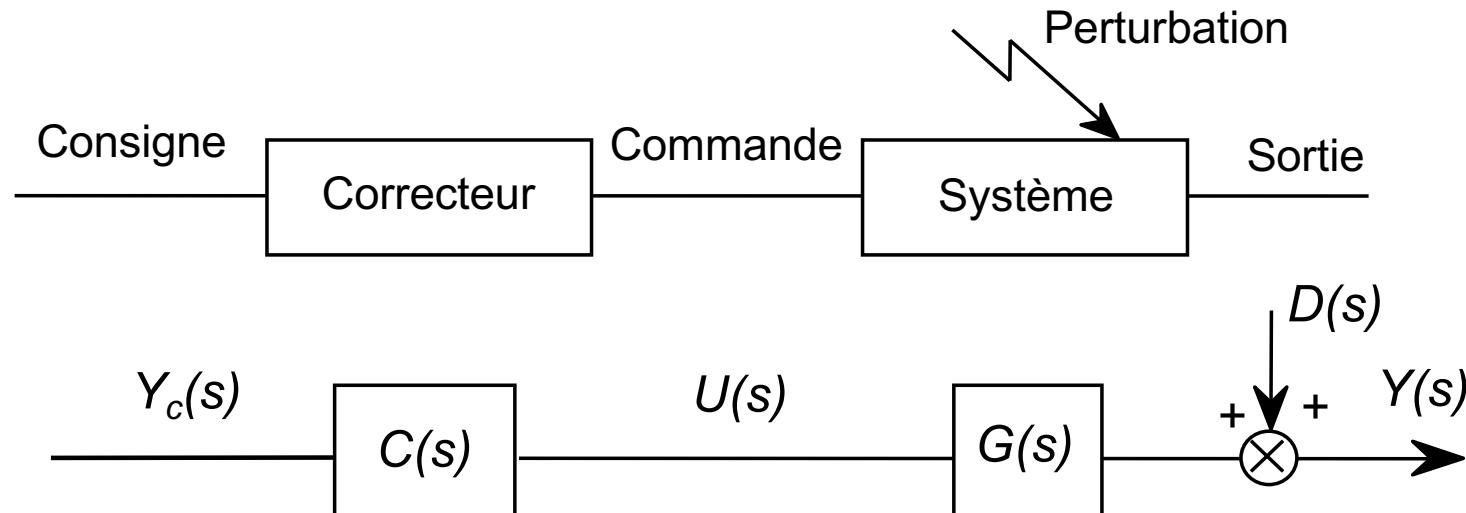


Principe des systèmes de contrôle

- Le contrôle ou la commande d'un système consiste à **maintenir la sortie** d'un système autour d'une valeur suffisamment proche d'une valeur spécifiée par un signal de consigne
 - Le terme « **suffisamment proche** » est ici entendu dans le sens de spécifications résultant d'un **cahier des charges** qui définit :
 - la précision ou l'erreur admissible en régime permanent (*< 2% par exemple*)
 - la rapidité au travers du temps de réponse à 5% (*< 5 s par exemple*)
 - l'amortissement de la réponse (*aucun dépassement par exemple*)
- Ce cahier des charges doit être réaliste car des spécifications trop exigeantes conduisent à des systèmes de contrôle irréalisables*
- Concevoir un système de contrôle à insérer un **organe de commande : correcteur ou contrôleur ou régulateur** entre la consigne et le système

Commande en boucle ouverte

- La commande en **boucle ouverte** consiste à ajuster la commande directement à partir de la consigne sans tenir compte de la sortie

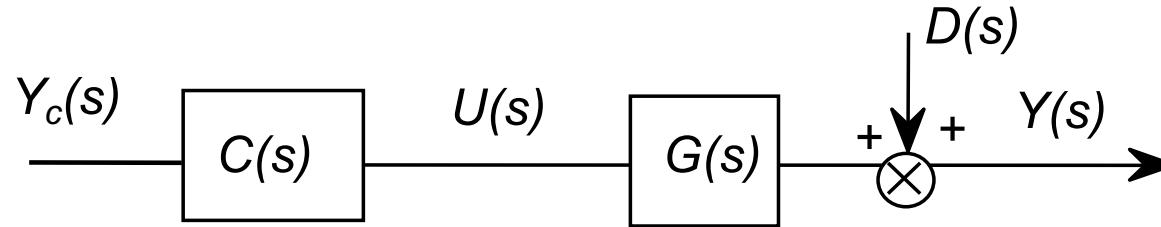


- Exemples : grille-pain, lave-vaisselle,



Matlab tech talk : open loop control
www.youtube.com/watch?v=FurC2unHeXI

Contrôle parfait théorique



$$Y(s) = C(s)G(s)Y_c(s) + D(s)$$

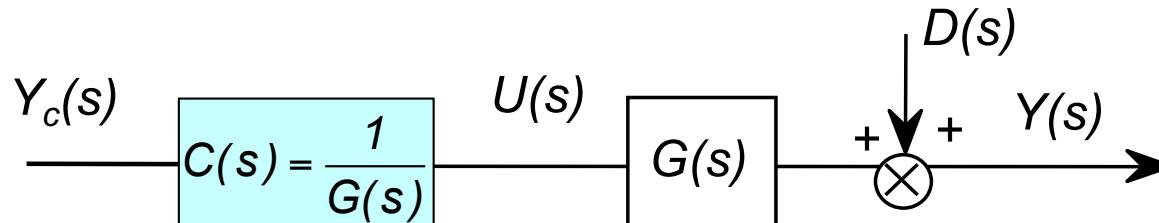
$$C(s) = ?$$

- En l'absence de perturbation ($D(s)=0$), pour avoir un ***suivi parfait*** de la sortie : $Y(s)=Y_c(s)$, il faut

$$C(s)G(s) = 1 \Rightarrow C(s) = \frac{1}{G(s)}$$

- En théorie, le correcteur ***parfait*** doit être choisi comme l'inverse du modèle du système afin de compenser la dynamique de celui-ci

Limites pratiques du contrôle parfait théorique

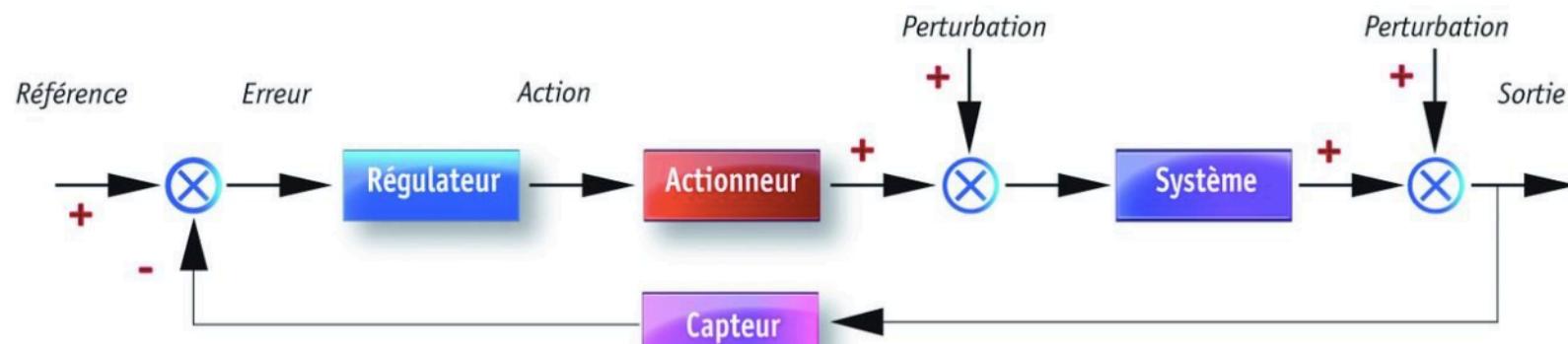


- Certaines dynamiques ne peuvent pas être compensées exactement
 - Un retard pur deviendrait une avance !
 - $G(s)$ strictement causal, $C(s)=1/G(s)$ → non causal !
- Actionneurs sont limités → saturation de la commande
- $G(s)$ est un modèle approché du système
 - Modèle d'ordre élevé très précis → calculs trop importants
- Dynamique du système évolue toujours dans le temps (vieillissement, ...). Si $G(s)$ évolue → modification de $C(s)$
- Présence de perturbations ($D(s)\neq 0$) → impossible à compenser !

Contrôle parfait théorique en boucle ouverte :
peu robuste et peu performant en pratique

Solution aux limites pratiques du contrôle parfait en boucle ouverte : **la commande en boucle fermée**

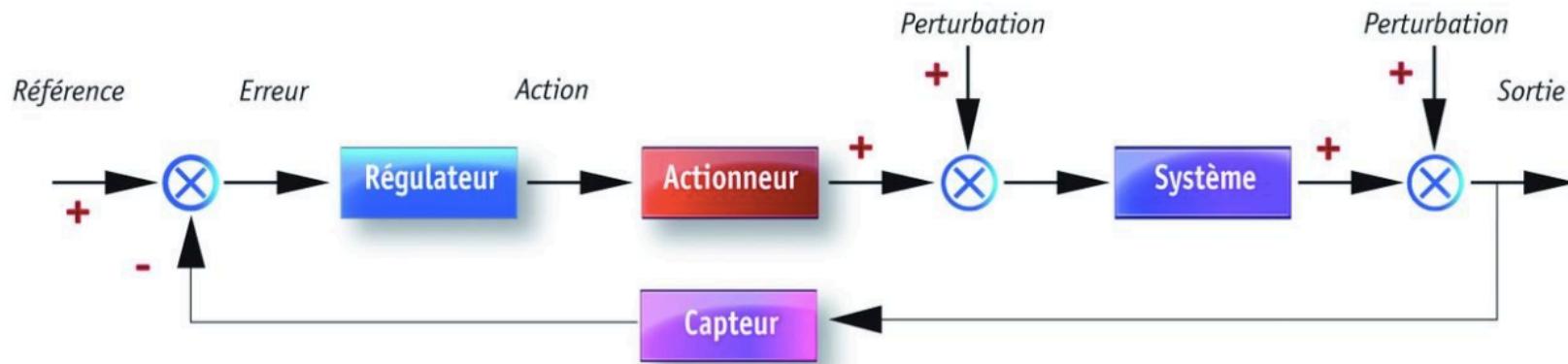
- Objectifs
 - rendre le système bouclé robuste aux variations du système
 - rejeter les perturbations
- Principe
 - mesurer la sortie pour ajuster la commande par un régulateur



Matlab tech talk : closed loop control
www.youtube.com/watch?v=5NVjlli9fkY

Rappel des 3 éléments d'une commande en boucle fermée

- ① Capteur
- ② Régulateur
- ③ Actionneur



Remarque : actionneur et système sont souvent rassemblés dans un même bloc

Schéma de commande en boucle fermée

- La recherche d'une loi de commande s'appuie sur :
 - un modèle $G(s)$ de l'ensemble actionneur + système
 - le type de signaux d'entrée : la consigne $Y_c(s)$, la perturbation $D(s)$
- On distingue la *chaîne directe* et la *chaîne de retour*

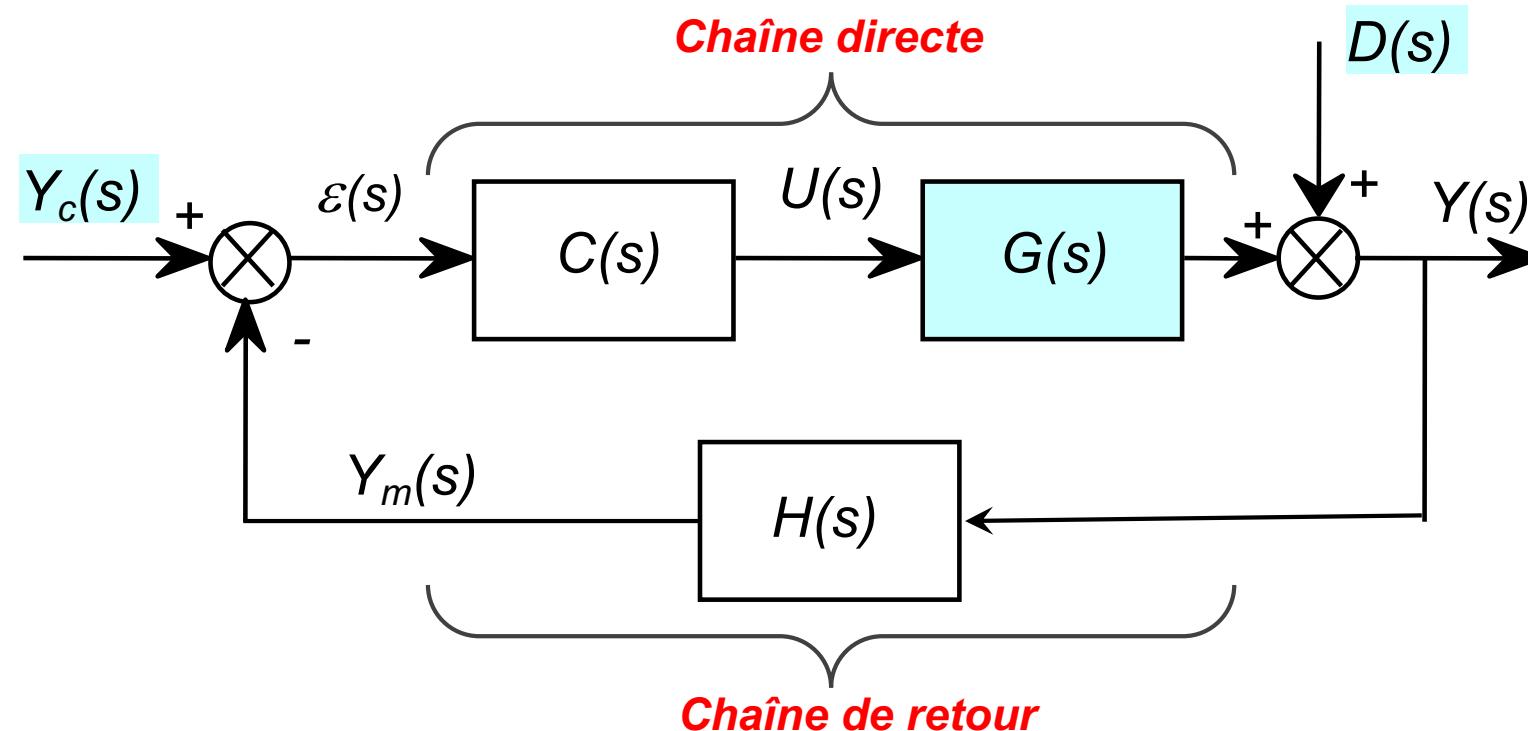
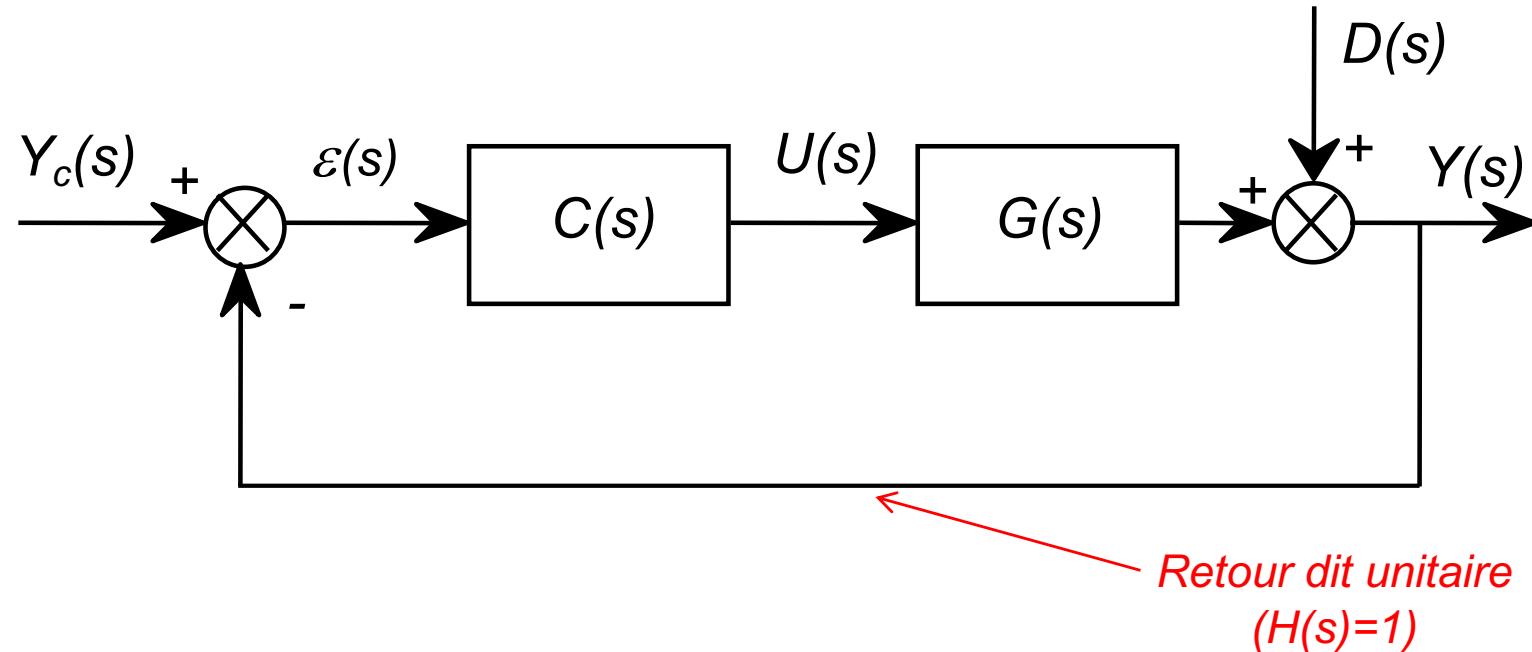
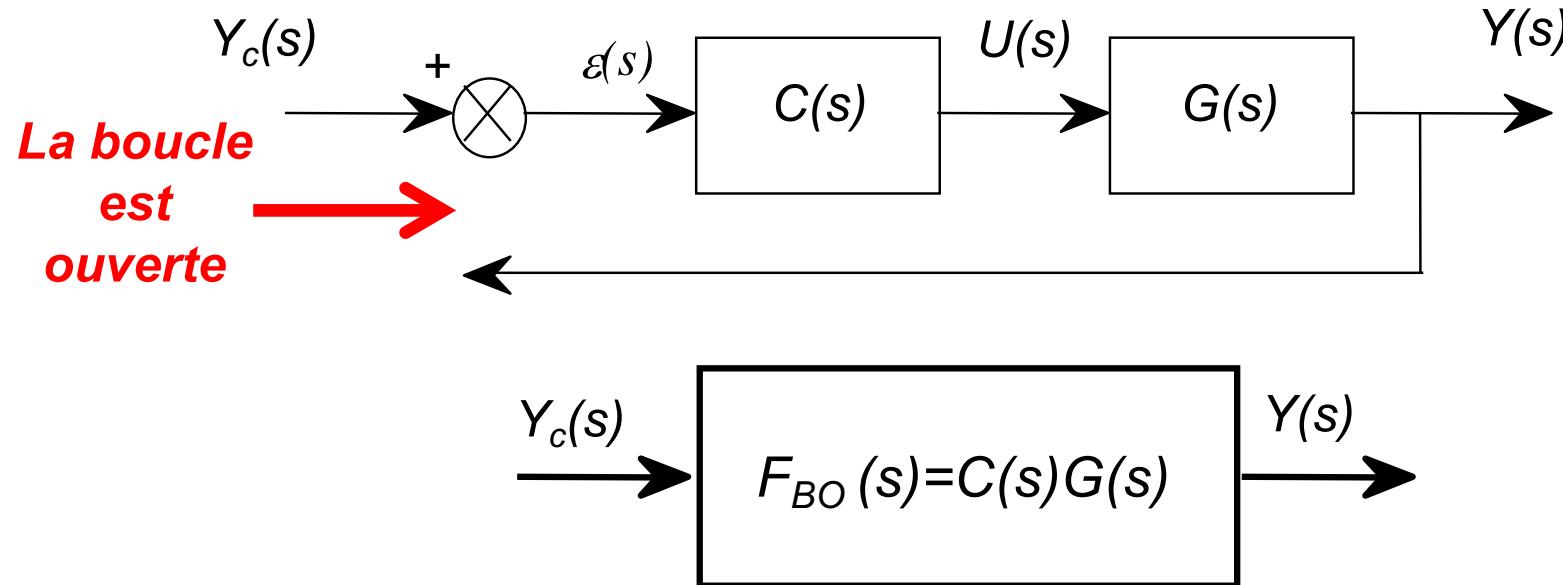


Schéma de commande en boucle fermée avec un retour unitaire

- Sachant que tout système bouclé peut se ramener à un système à retour unitaire par opérations sur les schémas-blocs, nous allons dans la suite nous limiter au cas des systèmes bouclés à *retour unitaire* ($H(s)=1$)



Fonction de transfert en boucle ouverte

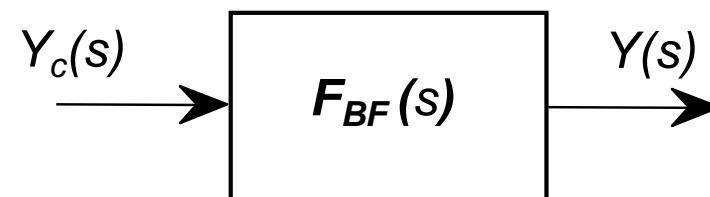
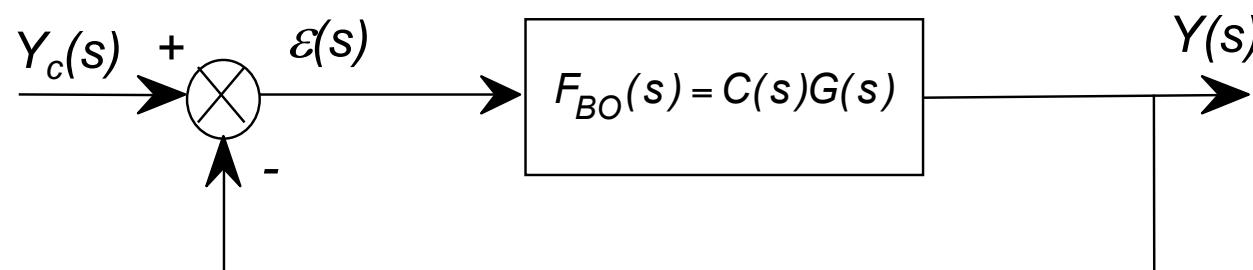
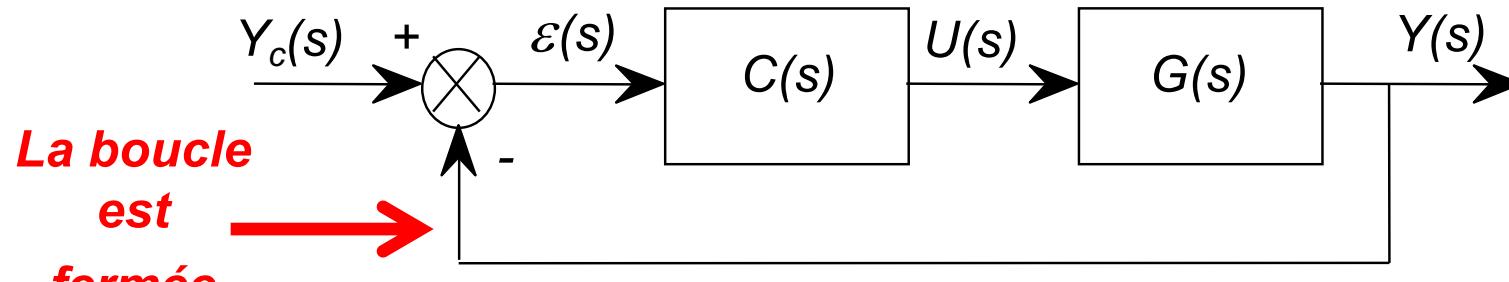


Une commande en boucle ouverte est rarement utilisée en pratique

MAIS

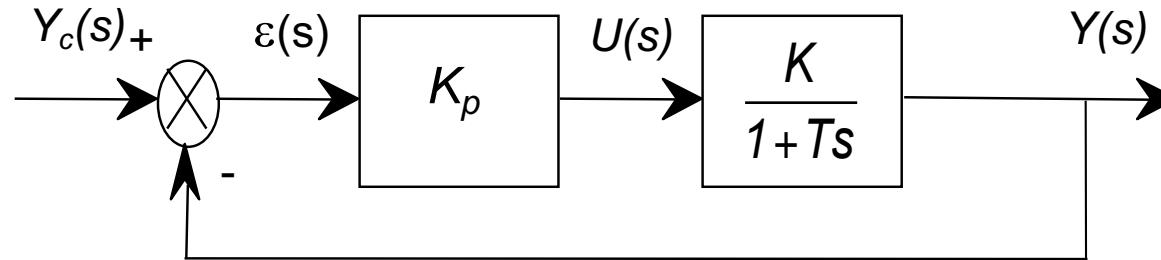
la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(s)$ joue un rôle essentiel pour l'analyse des performances des systèmes bouclés

Fonction de transfert en boucle fermée



$$F_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)}$$

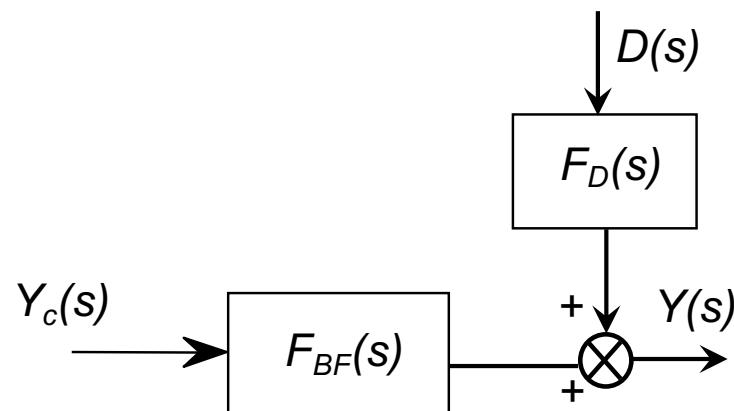
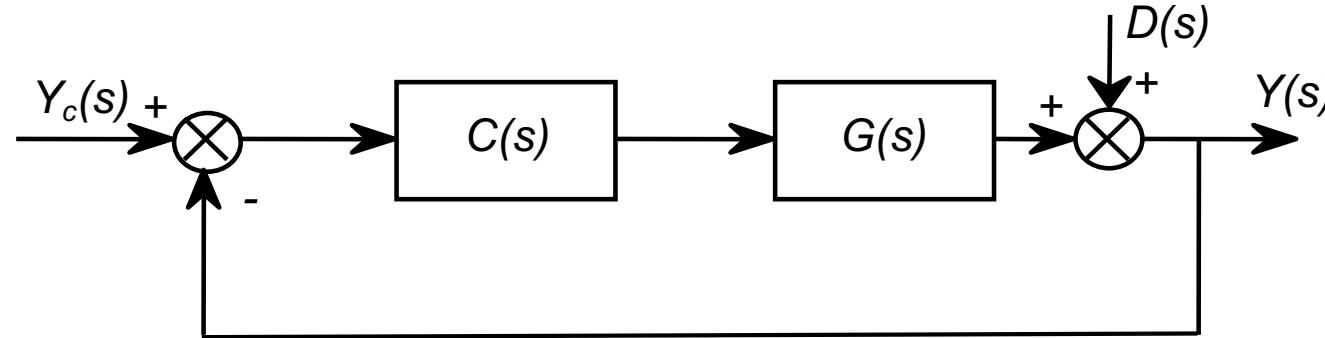
Exemple - Calcul de $F_{BO}(s)$ et $F_{BF}(s)$



$$F_{BO}(s) = C(s)G(s) = \frac{KK_p}{1 + Ts}$$

$$F_{BF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} = \frac{\frac{KK_p}{1 + Ts}}{1 + \frac{KK_p}{1 + Ts}} = \frac{KK_p}{1 + Ts + KK_p}$$

Fonctions de transfert en présence de perturbation



$$F_{BF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)}$$

$$F_D(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + F_{BO}(s)}$$

$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{1}{1 + F_{BO}(s)} D(s)$$

Objectifs pour les fonctions de transfert en boucle fermée

$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{1}{1 + F_{BO}(s)} D(s)$$

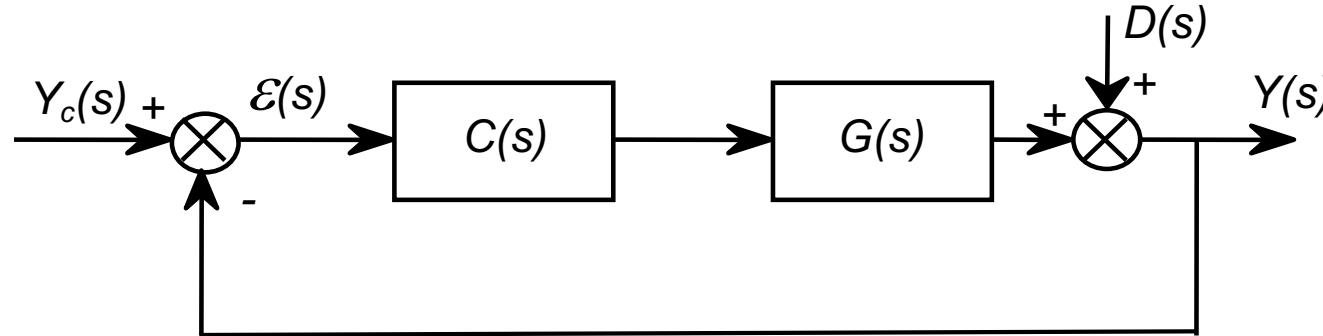
- En mode suivi de consigne, il faut que la sortie tende vers la consigne

$$F_{BF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} \rightarrow 1$$

- En mode régulateur, il faut rejeter l'effet des perturbations

$$F_D(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + F_{BO}(s)} \rightarrow 0$$

Objectifs de la suite du cours



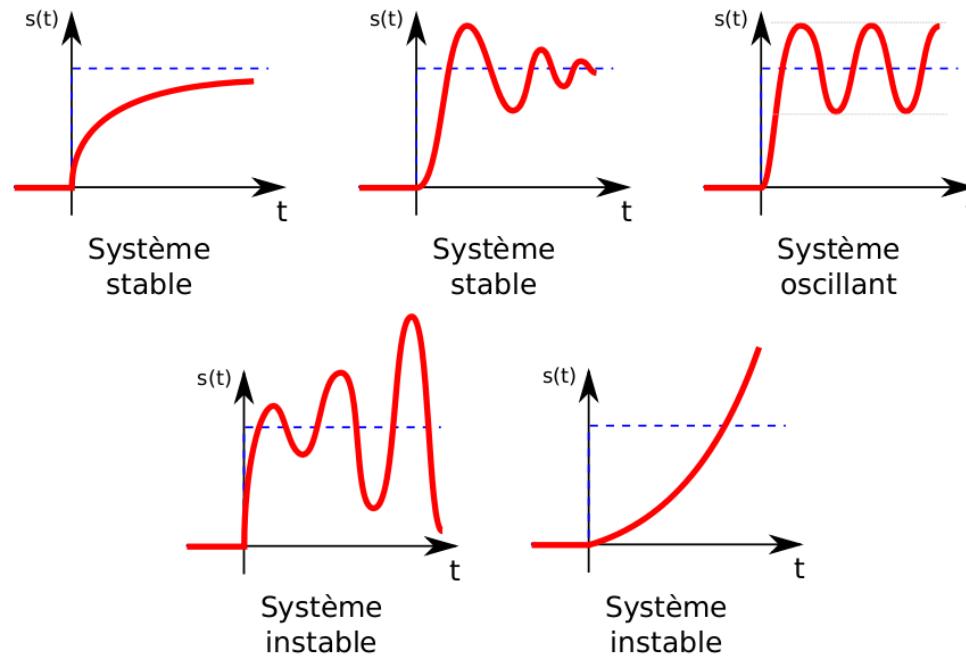
- **Se doter d'outils** pour évaluer les performances du système bouclé
 - **sa stabilité** avec une certaine robustesse
 - **sa précision**
 - **sa rapidité**
 - **son amortissement**



Matlab tech talk - Understanding control systems, Part 3
www.youtube.com/watch?v=u1pgaJHiiew

Stabilité d'un système bouclé

- La mauvaise conception d'un contrôle peut conduire à un système bouclé instable !



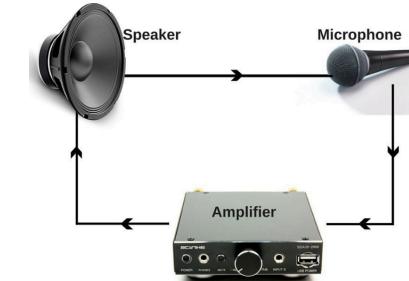
- Avant d'étudier les autres performances, le contrôle via le choix du correcteur $C(s)$ doit garantir la stabilité du système bouclé

Comment prévoir la stabilité de la boucle fermée?

Effets d'une perte de contrôle/stabilité d'un système

- Effets déplaisants sans conséquence majeure

- Chute en vélo !
- Effet Larsen - Retour acoustique d'un micro

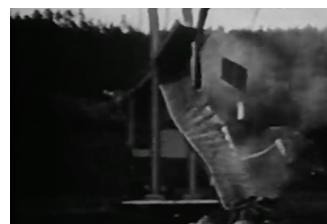


- Effets plus tragiques

- Black-out électrique (*panne électrique à grande échelle*)
- Instabilités aéro-élastiques qualifiées sous le terme de « flottement »
 - vibrations d'un grand pont dues au vent (Tacoma bridge)
 - vibrations d'une aile d'avion dues à l'écoulement d'air



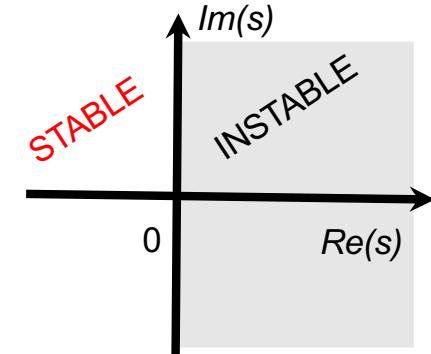
www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M



Outils pour analyser la stabilité d'un système bouclé

$$Y(s) = F_{BF}(s)Y_c(s) + F_D(s)D(s)$$

- Le système bouclé est stable si tous les pôles p_i de $F_{BF}(s)$ sont *à partie réelle strictement négative*
- Peut-on prévoir la stabilité du système bouclé à partir de $F_{BO}(s)$ sans calculer explicitement $F_{BF}(s)$? Oui !*

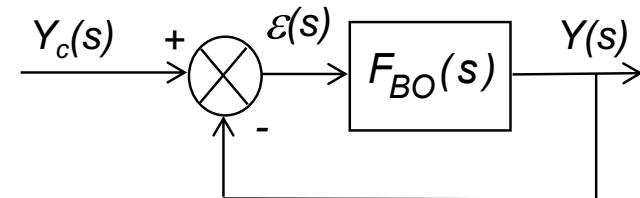


$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{1}{1+F_{BO}(s)} D(s)$$

- Outils d'analyse de la stabilité d'un système bouclé à partir de $F_{BO}(s)$
 - Critère algébrique de Routh-Hurwitz**

Application du critère de Routh à un système bouclé

- Soit : $F_{BO}(s) = \frac{N_{BO}(s)}{D_{BO}(s)}$
- Dans le cas d'un retour unitaire, on a :



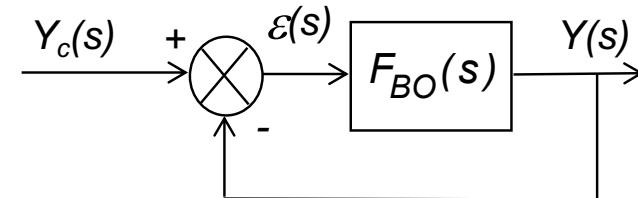
$$F_{BF}(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} = \frac{N_{BO}(s)}{N_{BO}(s) + D_{BO}(s)}$$

- Pour étudier la stabilité du système bouclé, il faut appliquer le critère de Routh au dénominateur de $F_{BF}(s)$
 - cela revient à appliquer le critère de Routh à $N_{BO}(s) + D_{BO}(s)$

Application du critère de Routh à un système bouclé

Exemple

$$F_{BO}(s) = \frac{N_{BO}(s)}{D_{BO}(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)}$$



- Dans le cas d'un retour unitaire, on a :

$$F_{BF}(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} = \frac{N_{BO}(s)}{N_{BO}(s) + D_{BO}(s)} = \frac{K}{s^3 + s^2 + s + K}$$

s^3	1	1
s^2	1	K
s^1	$1-K$	0
s^0	K	

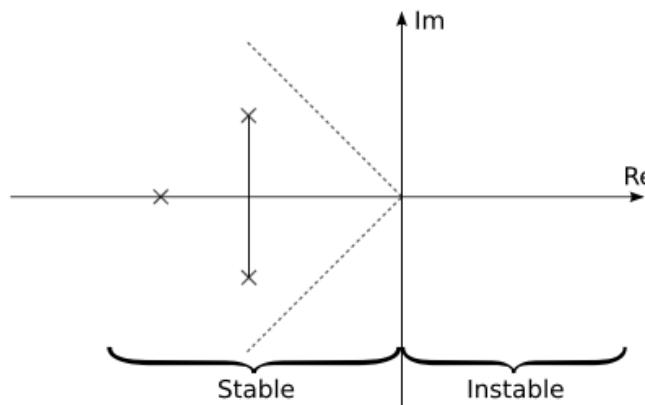
- D'après le critère de Routh, il faut que tous les termes de la 1ère colonne > 0 : $K > 0$ et $1-K > 0 \rightarrow 0 < K < 1$

Robustesse de la stabilité

- Critère de Routh
 - permet de conclure sur la stabilité du système bouclé
 - ne permet pas d'évaluer si le système bouclé stable est plus ou moins proche de l'instabilité
 - Un modèle est toujours une approximation du système. On doit donc s'assurer de la *stabilité avec une certaine marge*

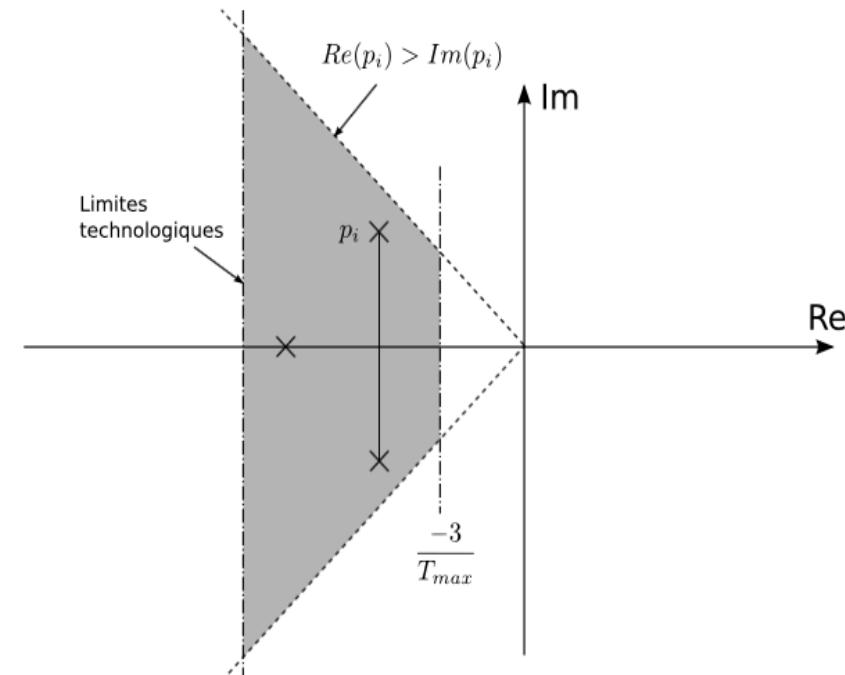
Il existe des marges de stabilité (gain, phase) définies dans le domaine fréquentiel

- La position des pôles dans le plan complexe peut aider à juger de la stabilité du système bouclé
 - Si un pôle p_i du système bouclé est trop près de l'axe des imaginaires, il risque d'évoluer vers l'instabilité



Compromis stabilité-rapidité-amortissement dans le plan des pôles

- On peut ainsi définir une zone permettant d'avoir un bon compromis *stabilité – rapidité – amortissement*
- Pour avoir une réponse transitoire rapide, on définit un temps maximal T_{max} et on place les pôles à gauche de l'axe $-3/T_{max}$
- Pour éviter un dépassement important, on fixe la partie réelle des pôles plus grande que la partie imaginaire : $Re(p_i) > Im(p_i)$
- Les limites technologiques imposent la borne de gauche



Pôle dominant d'un système

- Les pôles dont la partie réelle est proche de l'axe des imaginaires sont les plus lents. Ce sont les pôles dominants
- Les pôles p_i dont la partie réelle est, en valeur absolue, très grande devant celle des pôles dominants peuvent alors être négligés

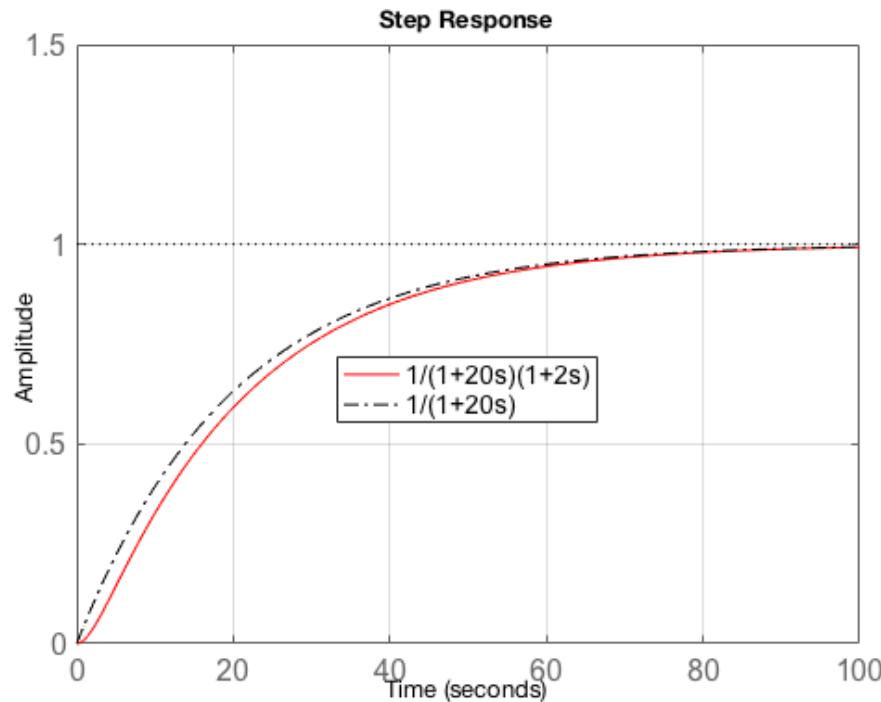
Exemple

$$G(s) = \frac{1}{(1+20s)} \times \frac{1}{(1+2s)}$$

$$p_1 = -\frac{1}{20} = -0.05$$

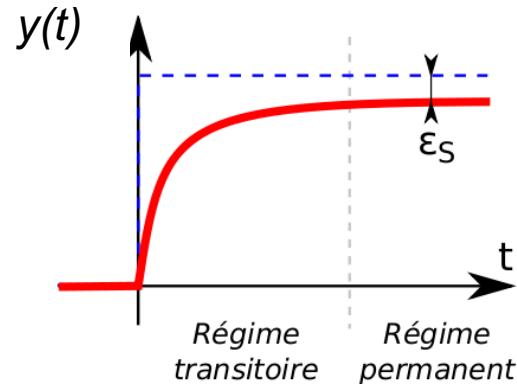
$$p_2 = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$|p_2| > |p_1| \Rightarrow \begin{cases} p_2 \text{ peut être négligé} \\ p_1 \text{ pôle dominant} \end{cases}$

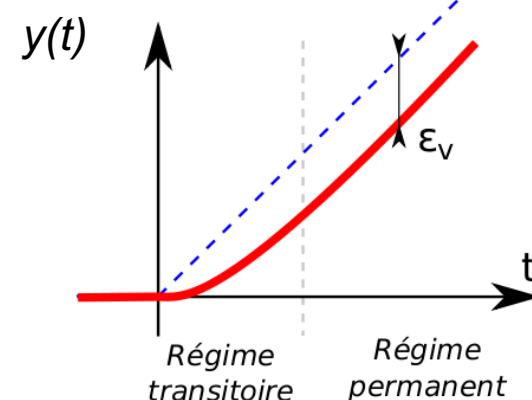
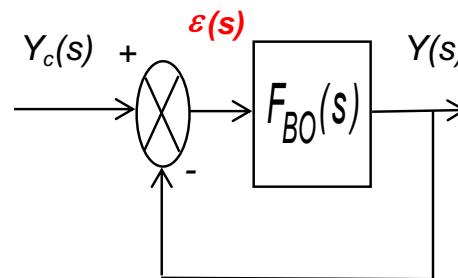


Précision d'un système bouclé

- Un système bouclé *stable* est **précis** si lors d'un changement de consigne, l'erreur entre la consigne et la sortie est nulle en régime permanent



ε_s : erreur statique
ou de position si
consigne en échelon



ε_v : erreur de traînage
ou de vitesse si
consigne en rampe

- La précision se définit en fonction du **type de consigne** :
 - consigne en **échelon** : précision statique ou erreur de position
 - consigne en **rampe** : précision en vitesse ou erreur de traînage
 - consigne en **parabole** : précision en accélération

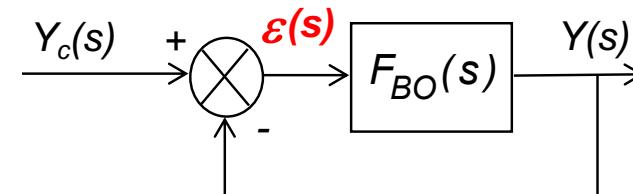
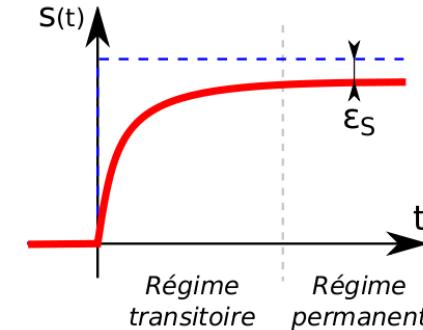
Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- Analyser la précision statique revient à étudier l'erreur entre la consigne et la sortie en régime permanent ($t \rightarrow +\infty$)

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_c(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$$

- Le système bouclé est dit :
 - précis** si cette limite est nulle
 - non précis** si cette limite n'est pas nulle
 - On peut néanmoins dire que le système est d'autant plus précis que l'erreur est faible
- On exploite le théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s)$$



Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- On exploite le théorème de la valeur finale

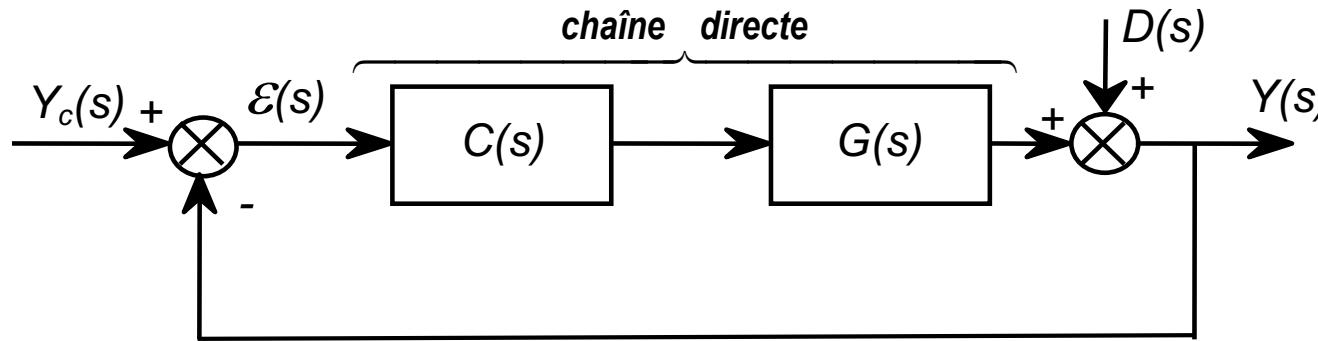
$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(Y_c(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_c(s) \left(1 - \frac{Y(s)}{Y_c(s)}\right) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} sY_c(s) \left(1 - F_{BF}(s)\right) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_c(s) \left(1 - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\right) \quad H(s) = 1 \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} sY_c(s) \left(1 - \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_c(s) \left(\frac{1}{1 + F_{BO}(s)}\right)$$

→ La précision du système bouclé dépend

- de $Y_c(s)$ et donc du type de consigne : échelon, rampe, parabole, ...
- de la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(s)$

Classe d'une fonction de transfert en boucle ouverte



- De manière générale, $F_{BO}(s)$ est une fraction rationnelle et peut s'écrire

$$F_{BO}(s) = C(s)G(s) = \frac{K(1 + b_1s + \dots + b_ms^m)}{s^\alpha(1 + a_1s + \dots + a_ns^n)}$$

- K est le gain de la chaîne directe
- α est la **classe** (parfois appelé *le type*) de $F_{BO}(s)$
 - $\alpha = \text{nombre d'intégrateurs}$ dans la chaîne directe

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- De manière générale, la transformée de Laplace de la consigne $Y_c(s)$ prend la forme

$$Y_c(s) = \frac{1}{s^\beta}$$

Echelon : $\beta=1$

Rampe : $\beta=2$

Parabole : $\beta=3$

$$F_{BO}(s) = \frac{K(1+b_1s+\dots+b_ms^m)}{s^\alpha(1+a_1s+\dots+a_ns^n)}$$

- L'erreur en régime permanent devient alors :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_c(s) \left(\frac{1}{1 + F_{BO}(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{\beta-1} + s^{\beta-\alpha-1} K \frac{(1+b_1s+\dots)}{(1+a_1s+\dots)}}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{\beta-1} + s^{\beta-\alpha-1} K}$$

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$	Echelon	Rampe	Parabole
Classe α de $F_{BO}(s)$	$\beta=1$	$\beta=2$	$\beta=3$
$\alpha=0$	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
$\alpha=1$	0	$\frac{1}{K}$	∞
$\alpha=2$	0	0	$\frac{1}{K}$

$$Y_c(s) = \frac{1}{s^\beta}$$

$$F_{BO}(s) = \frac{K(1+b_1s+\dots+b_ms^m)}{s^\alpha(1+a_1s+\dots+a_ns^n)}$$

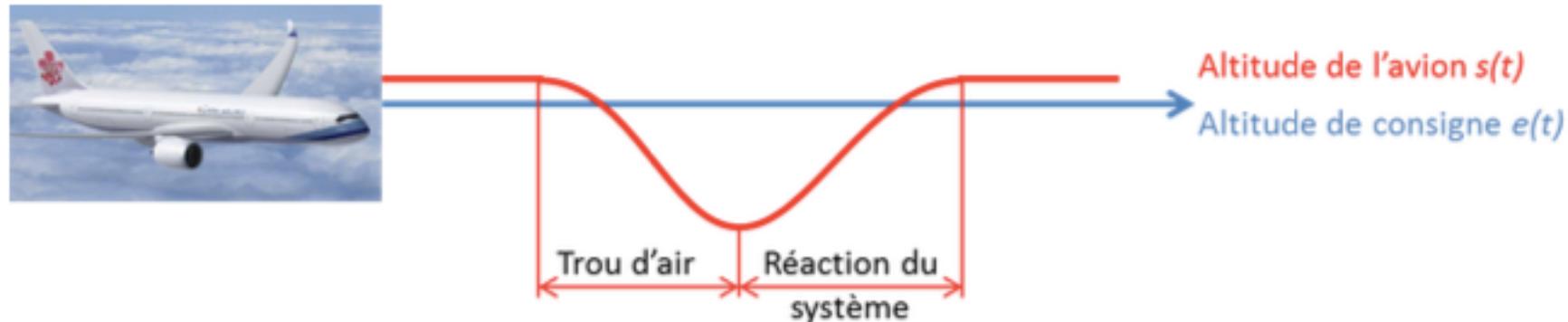
$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{\beta-1} + s^{\beta-\alpha-1} K}$$

Tableau récapitulatif de l'erreur en régime permanent

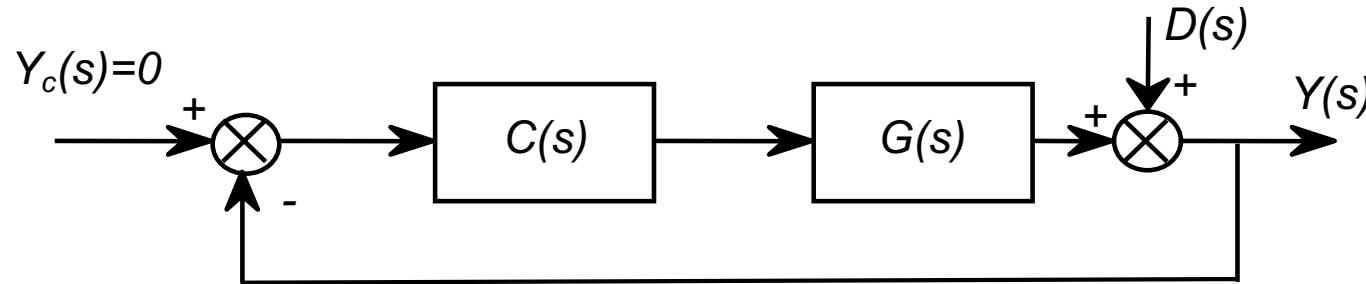
- **Règle des intégrateurs** : pour annuler l'erreur en régime permanent à une consigne $Y_c(s)$, $F_{BO}(s)$ doit contenir au moins autant d'intégrateurs que le signal $Y_c(s)$ en contient : $\alpha \geq \beta$
- Augmenter le gain K de la $F_{BO}(s)$ permet d'améliorer la précision

Influence des perturbations sur la précision d'un système bouclé

- Rappel
 - Perturbation : entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système



Méthode pour analyser l'influence d'une perturbation en échelon sur la précision d'un système bouclé



- On cherche, lorsque $y_c(t)=0$, à caractériser $y_D(t)$ pour $d(t)=I(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_D(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sF_D(s)D(s) \quad F_D(s) = \frac{1}{1+F_{BO}(s)}; \quad Y_D(s) = \frac{1}{s}$$

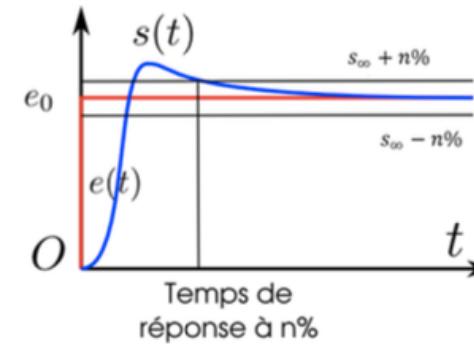
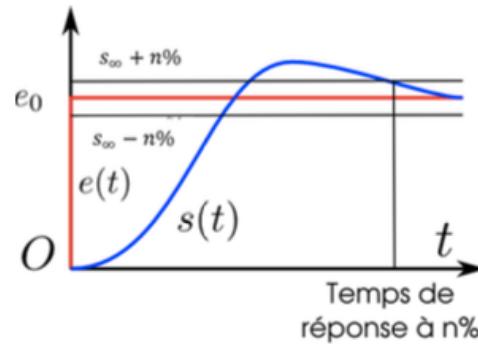
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_D(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + K} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$F_{BO}(s) = \frac{K(1+b_1s+\dots+b_ms^m)}{s^\alpha(1+a_1s+\dots+a_ns^n)}$$

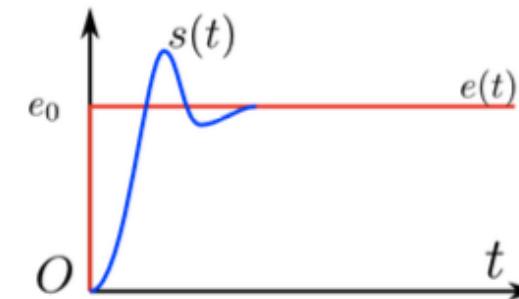
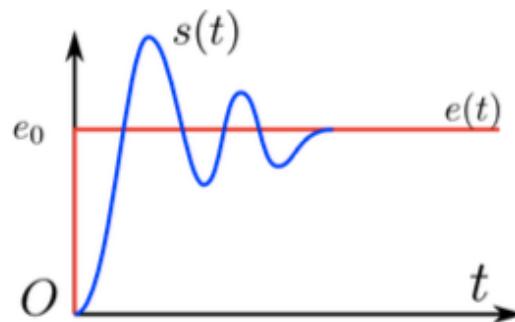
- Le nombre d'intégrateurs α en amont de la perturbation est décisif ($\alpha \geq 1$)
- Ajouter un intégrateur **en amont de la perturbation permet de la rejeter**

Rapidité et amortissement du système bouclé

- On caractérise :
 - la rapidité du système bouclé par son temps de réponse à $n\%$

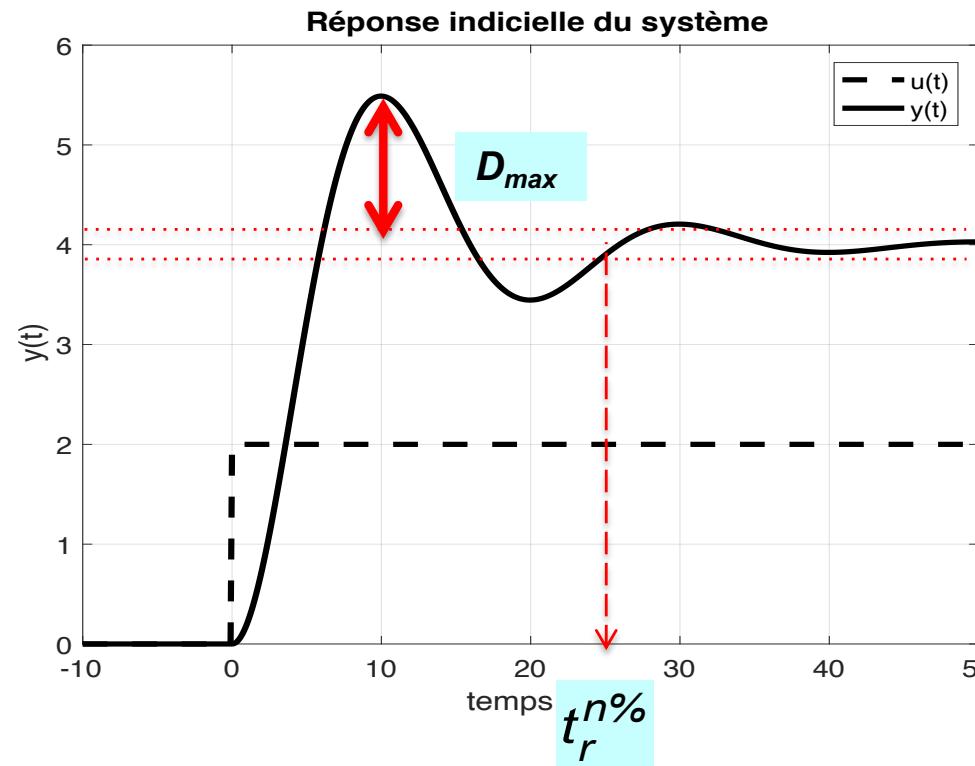


- l'amortissement du système bouclé par le dépassement max $D_{max} = D_1$



Outils pour analyser la rapidité et l'amortissement du système bouclé

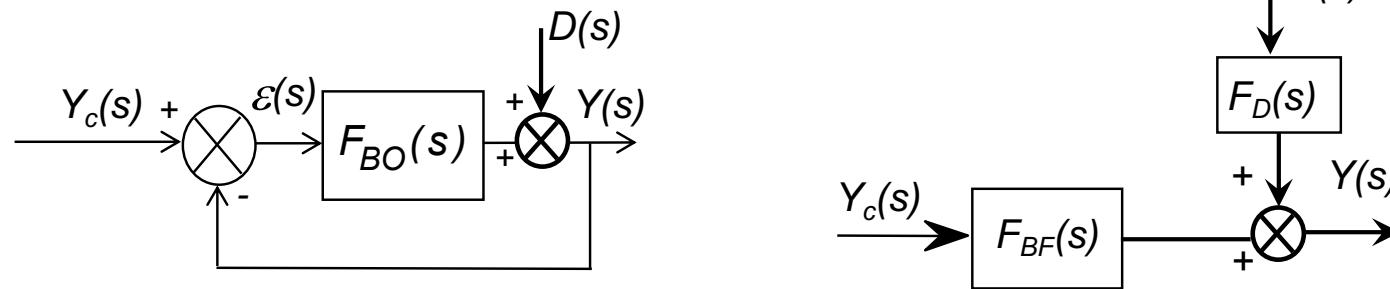
- La rapidité est caractérisée par son temps de réponse à $n\% : t_r^{n\%}$
- L'amortissement est caractérisé par la valeur du dépassement max $D_{max}=D_1$



Stabilité et performances des structures bouclées

Résumé des outils d'analyse

① A partir du schéma-bloc du système bouclé



- ① On calcule $F_{BO}(s)$. On en déduit $F_{BF}(s)$ et $F_D(s)$
- ② On analyse la **stabilité** du système bouclé
 - critère de Routh
- ③ On évalue les critères de performances. Vérifient-ils le cahier des charges ?
 - **Précision**
 - Calcul de l'erreur de précision
 - **Rapidité et amortissement**
 - Calcul du temps de réponse à $n\%$ et D_{max}

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s)$$