FORMULAIRE DE PROBABILITES

- **VARIABLES ALEATOIRES REELLES**

	Cas discret	Cas continu
Caractérisation de la loi de X	$\Pr(X=x) \qquad x \in X(\Omega)$	$f(x) \qquad x \in \mathbb{R}$
Fonction de répartition de X $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \Pr(X \leq x)$	$F(x) = \sum_{u \in X(\Omega)\ u \leq x} \Pr(X=u)$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$
$E(X)$	$\sum_{x \in X(\Omega)} x \Pr(X=x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$
$V(X)$	$\sum_{x \in X(\Omega)} \left[x - E(X)\right]^2 \Pr(X=x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - E(X)\right]^2 f(x)\,dx$

- **PROPRIETES DE L'ESPERANCE**

$E(a + b\,X + c\,Y) = a + b\,E(X) + c\,E(Y)$ a,b,c sont des constantes

- **PROPRIETES DE LA VARIANCE ET DE LA COVARIANCE**

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = E(X\,Y) - E(X)E(Y)$$

$V(a\,X) = a^2\,V(X)$ a est une constante

$V(a) = 0$

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ Si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

- **PROBABILITE CONDITIONNELLE – INDEPENDANCE**

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A/B).\Pr(B) = \Pr(B/A).\Pr(A)$$

Si A et B sont incompatibles, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ Si A et B sont indépendants, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A).\Pr(B)$

- **LOIS DISCRETES**

Loi	$\Pr(X=x)$	$E(X)$	$V(X)$	Domaine
Bernoulli $Ber(1;p)$ $p\in]0;1[$	$p_0=1-p$ et $p_1=p$	p	$p(1-p)$	$\{0;1\}$
Binomiale $B(n;p)$ $n\in\mathbb{N}^*$ $p\in]0;1[$	$C_n^x\,p^x\,(1-p)^{n-x}$	$n\,p$	$n\,p(1-p)$	$[\![0;n]\!]$
Binomiale Négative $BN(k;p)$ $k\in\mathbb{N}^*$ $p\in]0;1[$	$C_{x+k-1}^x\,p^k\,(1-p)^x$	$\dfrac{k(1-p)}{p}$	$\dfrac{k(1-p)}{p^2}$	$\mathbb{N}$
Géométrique $G(p)$ $p\in]0;1[$	$p(1-p)^{x-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\mathbb{N}$
Hypergéométrique $H(N;n;p)$ $(N,n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\times]0;1[$	$\dfrac{C_{Np}^x\,C_{N(1-p)}^{n-x}}{C_N^n}$	$n\,p$	$n\,p(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$	$[\![0;n]\!]$
Pascal $Pa(k;p)$ $k\in\mathbb{N}^*$ $p\in]0;1[$	$C_{x-1}^{k-1}\,p^k\,(1-p)^{x-k}$	$\dfrac{k}{p}$	$\dfrac{k(1-p)}{p^2}$	$[\![k;+\infty[\![$
Poisson $P(\mu)$ $\mu\in\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{e^{-\mu}\,\mu^x}{x!}$	μ	μ	$\mathbb{N}$
Uniforme Discrète $U(n)$ $n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$[\![1;n]\!]$

- **LOIS CONTINUES**

Loi	$f(x)$	$E(X)$	$V(X)$	Domaine
Exponentielle $E(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$	$\lambda\, e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\mathbb{R}_+$
Fisher Snedecor $F(\nu_1;\nu_2)$ $\nu_1 \in \mathbb{N}^*$ $\nu_2 \in \mathbb{N}^*$	$\frac{\nu_2\, \chi^2(\nu_1)}{\nu_1\, \chi^2(\nu_2)}$	$\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ si $\nu_2 > 2$	$\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ si $\nu_2 > 4$	$\mathbb{R}_+$
Gamma $\gamma(\alpha;\beta)$ $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ $\beta \in \mathbb{R}^*_+$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\mathbb{R}_+$
Khi-Deux $\chi^2(\nu)$ $\nu \in \mathbb{N}^*$	$x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{\nu}{2}}$	ν	2ν	$\mathbb{R}_+$
Log-Normale $LN(\mu;\sigma)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma \in \mathbb{R}^*_+$	$\frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$\left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$	$]0;+\infty[$
Normale $N(\mu;\sigma)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma \in \mathbb{R}^*_+$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$\mathbb{R}$
Student $T(\nu)$ $\nu \in \mathbb{N}^*$	$\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\,\pi}$	0 si $\nu > 1$	$\frac{\nu}{\nu-2}$ si $\nu > 2$	$\mathbb{R}$
Uniforme Continue $U(a;b)$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$[a;b]$
Weibull $W(\beta;\eta;\gamma)$ $\beta \in \mathbb{R}^*_+$ $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ $\gamma \in \mathbb{R}$	$\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left[\frac{x-\gamma}{\eta}\right]^\beta\right)$	$\gamma + \eta\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$	$\eta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right]$	$[\gamma;+\infty[$

REMARQUES :

Fonction Gamma ou fonction eulérienne :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{x-1}\, du \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Si deux variables X et Y sont indépendantes et suivent une loi binomiale, leur somme X + Y suit une loi binomiale.

Si deux variables X et Y sont indépendantes et suivent une loi normale, leur somme X + Y suit une loi normale.

Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi log-normale, alors leur produit X.Y suit une loi log-normale.

Si σ est petit, alors la loi log-normale est proche de la loi normale.

• APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE PAR LA LOI DE POISSON

Si n est grand et p faible $\qquad n\,p(1-p) \le 10 \qquad$ ou $\qquad p \le 0{,}1$ et $1 \le n\,p \le 10$

$$B(n\,;p) \to P(\mu) \qquad \text{avec} \quad \mu = n\,p$$

• APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE PAR LA LOI NORMALE

Si n est grand et p proche de 0,5 $\qquad n\,p \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$

$$B(n\,;p) \to N(\mu\,;\sigma) \qquad \text{avec} \quad \mu = n\,p \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{n\,p(1-p)}$$

Correction de continuité (approximation d'une loi discrète par une loi continue) :

$$\Pr(X = x) \cong \Pr\left(\frac{x - 0{,}5 - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} < U \le \frac{x + 0{,}5 - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} \right)$$

$$\Pr(X \le x) \cong \Pr\left(U \le \frac{x + 0{,}5 - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} \right)$$