Chapitre 4
Variables aléatoires réelles et à densités

1 Généralités

Définition 1. On appelle variable aléatoire réelle (sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$) une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

Exemple 1. Les variables aléatoires discrètes sont des variables aléatoires réelles.

Théorème 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$. Alors, $\{X \in I\} = X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$.*

Fonction de répartition

Définition 2. On définit la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])).$$

La fonction de répartition F_X définit **la loi de la variable aléatoire** X.

Théorème 2. *La fonction de répartition F_X vérifie les trois propriétés suivantes.*

1. *F_X est croissante.*
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

2 Variables aléatoires à densité

Définition 3 (Densité)**.** On appelle densité (de probabilité) une fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Définition 4. On appelle variable aléatoire à densité (ou absolument continue) une variable aléatoire réelle X telle qu'il existe une densité f_X vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx'.$$

Ainsi, la densité définit **la loi de la variable aléatoire** X.

Théorème 3 (Fondamental)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion finie ou dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$. Alors, $\mathbb{P}(X \in I) = \displaystyle\int_I f_X(x')dx'$.*

Exemples de lois de variables aléatoires à densité

- **Loi uniforme.** Pour $a < b$, on dit que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (et on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$) si elle admet pour densité la fonction f_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b], \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- **Loi exponentielle.** Pour $\alpha > 0$, on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre α (et on note $X \sim \mathcal{E}xp(\alpha)$) si elle admet pour densité la fonction f_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0, \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- **Loi gamma.** Pour $\alpha > 0$, on dit que X suit une loi gamma de paramètre α (et on note $X \sim \gamma(\alpha)$) si elle admet pour densité la fonction f_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x) \text{ si } x \geq 0, \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- **Loi de Cauchy.** On dit que X suit une loi de Cauchy si elle admet pour densité la fonction f_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Espérance et théorème de transfert

Définition 5. On dit qu'une variable aléatoire X à densité f_X est intégrable si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx$ converge. Dans ce cas, on définit l'espérance de X par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx.$$

Théorème 4 (Théorème de transfert)**.** *Soit Y une variable aléatoire à densité. On suppose qu'il existe une fonction réelle g et une variable aléatoire X de densité f_X telles que $Y = g(X)$. Alors, La variable aléatoire Y est intégrable si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x)dx$ converge. De plus, si Y est intégrable, alors*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx.$$

Variance

Définition 6 (Variance)**.** Si X^2 est intégrable, on définit la variance de X par

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2.\end{aligned}$$

Théorème 5. *La variance vérifie les propriétés suivantes.*

1. *$Var(X) \geq 0$.*
2. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$.*

Exemple de calculs d'espérance et de variance

Soit $X \sim \mathcal{U}([0,1])$. X a une densité : $f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x f_X(x)dx + \int_{1}^{\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Donc,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Variables aléatoires gaussiennes

Définition 7. (Variables aléatoires gaussiennes) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit que X est une variable aléatoire gaussienne (ou normale) de paramètres (m, σ^2) (ou parfois (m, σ), attention !) si elle admet pour densité la fonction $f_{m,\sigma}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On note alors $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (ou $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, attention !).

Théorème 6. *Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*

1. Il existe $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ telle que $X = \sigma Y + m$.
2. $\mathbb{E}(X) = m$.
3. $Var(X) = \sigma^2$.

Preuve de 1 : Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on veut montrer qu'il existe $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ telle que $X = \sigma Y + m$. Pour cela, on pose $Y = \frac{1}{\sigma}(X - m)$, on a bien sûr que $X = \sigma Y + m$, et il reste à montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour cela, on va calculer sa fonction de répartition et en déduire sa densité. On a :

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma}(X-m) \leq y\right) = \mathbb{P}(X \leq \sigma y + m) \\
&= \int_{-\infty}^{\sigma y + m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&\qquad (\text{ avec } u = (x-m)/\sigma)
\end{aligned}$$

On dérive :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

qui est la densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$. CQFD

Preuve de 2 : Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on veut montrer $\mathbb{E}(X) = m$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma u + m}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
&\qquad (\text{ avec } u = (x-m)/\sigma) \\
&= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du + m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du
\end{aligned}$$

Or

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1.$$

Donc, $\mathbb{E}(X) = \sigma \times 0 + m \times 1$. CQFD

3 Vecteurs aléatoires à densité

Définition 8 (Vecteur aléatoire, fonction de répartition et loi)**.** Soient $d \in \mathbb{N}^*$. Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_d)$ est un vecteur dont les composantes X_1, X_2, ..., X_d sont d variables aléatoires réelles. La fonction de répartition de $\mathbf{X}$ est définie pour tout $(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ par

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_d) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_d \leq x_d) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\} \cap ... \cap \{X_d \leq x_d\}).
\end{aligned}$$

La fonction de répartition de $\mathbf{X}$ définit la loi du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_d)$.

Lois marginales

Définition 9. On appelle lois marginales d'un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, ..., X_d)$ les lois de X_1, X_2, ... et X_d.

Théorème 7. *Pour un couple aléatoire (X, Y), les lois marginales sont données par les fonctions de répartition marginales qui satisfont*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y) \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Densité et vecteurs aléatoires à densité

Définition 10. On appelle densité (de probabilité) sur $\mathbb{R}^d$ une fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, x_2, ..., x_d)dx_1dx_2...dx_d = 1.$$

On appelle vecteur aléatoire à densité (ou absolument continu) un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ telle qu'il existe une densité $f_{\mathbf{X}}$ vérifiant pour tout $(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_d) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f_{\mathbf{X}}(x_1', x_2', ..., x_d')dx_1'dx_2'...dx_d'.$$

Ainsi, la densité définit **la loi du vecteur aléatoire X**.

Densités des lois marginales

Théorème 8. *Pour un couple aléatoire (X, Y) de densité $f_{(X,Y)}$, les lois marginales sont données par les densités marginales qui satisfont*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dy \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dx \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Théorème de transfert multidimensionnel

Théorème 9. *Soit g une fonction de d variables et $(X_1, X_2, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire de densité $f_{\mathbf{X}}$. Si la variable aléatoire Z définie par $Z = g(X_1, X_2, ..., X_d)$ est intégrable et à densité, alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(g(X_1, X_2, ..., X_d))\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, x_2, ..., x_d)f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_d)dx_1dx_2...dx_d.\end{aligned}$$

Indépendance

Définition 11. On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq y).$$

On dit que d variables aléatoires X_1, X_2, ... et X_d sont (mutuellement) indépendantes si pour tout $(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \times ... \times \mathbb{P}(X_d \leq x_d).$$

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, ... et X_d sont deux à deux indépendantes si pour tout $j \neq k$, X_j et X_k sont indépendantes.

Caractérisation de l'indépendance

Théorème 10. *Soient d variables aléatoires X_1, X_2, ... et X_d telles que le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_d)$ soit de densité $f_{(X_1, X_2, ..., X_d)}$. Alors X_1, X_2, ... et X_d sont (mutuellement) indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ (sauf éventuellement sur un ensemble N de mesure nulle, c'est-à-dire vérifiant $\int_N dx'_1 ... dx'_d = 0$),*

$$f_{(X_1, ..., X_d)}(x_1, ..., x_d) = f_{X_1}(x_1) \times ... \times f_{X_d}(x_d).$$

Exercice

Exercice 1. (loi uniforme sur un carré)
On considère le couple aléatoire (X, Y) de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x, y) \in [0, 1]^2, \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

1) Déterminer les lois marginales de (X, Y) (la loi de X et la loi de Y).
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

1) Nous donnons les lois de X et Y en calculant les densités marginales f_X et f_Y. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 dy = 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la même façon, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 dx = 1 & \text{si } y \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_X(x) f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x, y)$. Donc X et Y sont indépendantes.

Exercice

Exercice 2. (loi uniforme sur un triangle)
Refaire l'exercice avec la densité donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2 \text{ si } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

1) Nous donnons les lois de X et Y en calculant les densités marginales f_X et f_Y. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \begin{cases} 2\displaystyle\int_x^1 dy = 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^y dx = 2y & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) On a $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{(X,Y)}(x,y)$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4 Fonctions caractéristiques

Définition 12. Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction caractéristique ϕ_X de X (ou de la loi de X) la fonction à valeurs complexes

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX})$$

Si la loi de X admet une densité f_X alors (par le théorème de transfert)

$$\phi_X(t) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x)e^{itx}dx.$$

Propriétés

Théorème 11. *Si X et Y sont deux variables aléatoires, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
2. *X et Y ont même loi.*
3. $F_X(t) = F_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Théorème 12. *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$,*

$$\phi_{X_1+...+X_n}(t) = \prod_{j=1}^n \phi_{X_j}(t).$$

Espérance et variance

Théorème 13. *Soit X une variable aléatoire réelle. Si $\mathbb{E}(\mid X \mid^n)$ est fini alors ϕ_X est n fois dérivable et*

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k), \quad \forall k \in \{0, ..., n\}.$$

En particulier, $\mathbb{E}(X) = -i\phi'_X(0)$, $\mathbb{E}(X^2) = -\phi''_X(0)$ et $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = -\phi''_X(0) + (\phi'_X(0))^2$.

Exemple

Supposons que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On a

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{itx-\lambda x}dx \\
&= \frac{\lambda}{it-\lambda}[e^{itx-\lambda x}]_0^{\infty} \\
&= \frac{\lambda}{it-\lambda}(0-1) \text{ car } e^{itx-\lambda x} = e^{-\lambda x}(\cos(tx) + i\sin(tx)) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - it}
\end{aligned}$$

Calcul de l'espérance et de la variance. On a $\mathbb{E}(X) = -i\phi'_X(0)$, $\mathbb{E}(X^2) = -\phi''_X(0)$ et $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = -\phi''_X(0) + (\phi'_X(0))^2$.
$\phi'_X(t) = \dfrac{\lambda i}{(\lambda - it)^2}$, donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
$\phi''_X(t) = \dfrac{-2\lambda}{(\lambda - it)^3}$, donc $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{2}{\lambda^2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.