Chap. 3 : variables aleatoires discretes.

I - var. aleat. discretes 1D

Soient $f : E \to F$ et $A \subset F$. Le ss-ensbl $f^{-1}(A) \subset E$ est def par $f^{-1}(A) = \{x \in E / f(x) \in A\}$

Def : On appelle var. aleat. discr. une applicat° $X : \Omega \to \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{T}$.

On notera $\{X = n\} = X^{-1}(\{n\})$ $\forall n \in X(\Omega)$
On pourra parfois considerer un autre ensbl discret D au lieu de $\mathbb{N}$, cad un ensbl D en bijection avec un ss-ensbl de $\mathbb{N}$.

Loi d'une variable discrete.

def : On appelle loi de la var aleat X l'ensbl des données suivantes :
- $\to X(\Omega)$
- $\to \forall n \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{n\}))$.

On note généralt
$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$.

th : $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{n \in A} \mathbb{P}(X = n)$

ex : Bernouli : On dit X suit loi Bernouli de param $p \in]0, 1[$ (noté : $Ber(p)$) si :
- $\to X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
- $\to \mathbb{P}(X = 1) = p$ et
- $\to \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Maths

ex : Loi binomiale : On dit X suit loi binomiale de param $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$ (noté $X \sim Bin(n, p)$)

→ $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et

→ $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

↳ rpz le nb de succes lorsque l'ont fait n fois de façons indepdte la meme exp aleat dont la proba de succes est p.

ex : Loi geometriq. : On dit X suit une loi geo de param $p \in]0, 1[$ (noté $X \sim G(p)$) si :

→ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

→ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$

↳ rpz la posit° du 1ᵉ succes lorsque l'ont repete de façon indep la m̂ exp dont proba de succes est p.

ex : Loi de Poisson : On dit X suit loi poisson de param $\lambda > 0$ (noté $X \sim Poisson(\lambda)$) si

→ $X(\Omega) = \mathbb{N}$

→ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Esperence

def : On dit que X est integrable si

$$\sum_{k \in X(\Omega)} |k| \, \mathbb{P}(X = k) < \infty$$

alors espeiance de X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

ex : Si $X \sim Be(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = p.$$

ex : si $X \sim$ Poisson (λ), alors

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$* \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z$$

Variance et ecart-type.

def : Si X^2 est integrable, on def variance de X par :
$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
son ecart-type :
$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

th : $Var(X) \geq 0$
$Var(X) = 0 \iff X$ cst
$\forall a, b \in \mathbb{R}^2$, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

th : th de transfert : Soit g une fct sur $\mathbb{N}$, la var aleat $g(X) = g \circ X$ est integrabl $\iff$ $\sum_{m \in X(\Omega)} |g(m)| \mathbb{P}(X = m) < \infty$. De plus, si $g(X)$ est integrable, alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{m \in X(\Omega)} g(m) \mathbb{P}(X = m)$$

→ On utilise $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
→ $\mathbb{E}(X)^2$ se calcule facilt.
→ $E(X^2)$ " " a/ th transfert
$E(X^2) = \sum m^2 \mathbb{P}(X = m)$ a/ $g(x) = x^2$

ex : si $X \sim Ber(p)$, on a $E(X)^2 = p^2$ et
$E(X^2) = 1^2 \mathbb{P}(X = 1) + 0^2 \mathbb{P}(X = 0) = p$.
ainsi : $Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$!

II - Vecteurs aléatoires discrets.

def : Soient $d \in \mathbb{N}^*$. Un vect aléat discret $(X_1, .. X_d)$ est un vect. dont les composantes sont d var. aléat discrètes. Sa loi est def par :

→ $X_1(\Omega)$ $X_2(\Omega)$ ..., $X_d(\Omega)$

→ $\forall (m_1, ..., m_d) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_d(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = m_1, X_2 = m_2, ..., X_d = m_d) =$$

$$\mathbb{P}(\{X_1 = m_1\}) \cap \{X_2 = m_2\} \cap ... \cap \{X_d = m_d\}).$$

Lois marginales.

def : On appelle lois marginales d'un vecteurs aléatoire discret $(X_1, X_2, ..., X_d)$ les lois de $X_1, ..., X_d$.
Pour un couple aléatoire discret (X, Y), les lois marginales sont données par $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, et les formules suivantes :

$$\mathbb{P}(X = m) = \sum_{m \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = m, Y = m)$$

$$\mathbb{P}(Y = m) = \sum_{m \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = m, Y = m)$$

Lois conditionnelles.

def : pour un couple aléat. discret (X, Y) et $m \in Y(\Omega) /$ $\mathbb{P}(Y = m) > 0$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $Y = m$ l'ensbl des données suivtes :

→ $X(\Omega)$

→ $\forall m \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = m \mid Y = m) = \dfrac{\mathbb{P}(X = m, Y = m)}{\mathbb{P}(Y = m)}$

on peut aussi écrire :

$$\mathbb{P}(X = m, Y = m) = \mathbb{P}(X = m \mid Y = m) \cdot \mathbb{P}(Y = m)$$

Independance :

def : On dit que deux variables aleat discretes X et Y sont indepdt si, $\forall (n, m) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \mathbb{P}(X = n) \cdot \mathbb{P}(Y = m)$.

Th de transfert multi dim.

th : Soient g une fct de d variables et $(X_1, \dots, X_d)$ un vect. aleat. discret. Si la var. aleat. discrete Z def par $Z = g(X_1, \dots, X_d)$ est integrable, alors :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X_1, \dots, X_d)) = \sum_{(n_1, \dots, n_d) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_d(\Omega)} g(n_1, \dots, n_d) \cdot \mathbb{P}(X_1 = n_1, \dots, X_d = n_d).$$

Caracterisat variable independantes.

th : Soit $(X_1, \dots, X_d)$ un vect aleat discret. Alors $X_1, \dots, X_d$ sont indepdt $\Leftrightarrow$ $\forall$ fct bornées $h_1, \dots, h_d$,
$\mathbb{E}(h_1(X_1) \dots h_d(X_d)) = \mathbb{E}(h_1(X_1)) \dots \mathbb{E}(h_d(X_d))$.

III - Fonct generatrices

def : Soit X une var aleat discrete ≥ 0 $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
On def $\forall u \in [0, 1]$ la fct generatrice de X notée G_X par :

$$G_X(u) = \mathbb{E}[u^X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} u^n \mathbb{P}(X = n).$$

th : $G_X(u)$ est une serie entiere en u dont le rayon de conv est ≥ 1. G_X est ∞^t derivabl en u, et :

$$G_X^{(n)}(0) = n! \, \mathbb{P}(X = n).$$

Dc si X et Y sont 2 var aleat dis ≥ 0, alors X et Y ont la m̂ loi $\Leftrightarrow$ $G_X = G_Y$.