

DEVOIR SURVEILLE n°1

Statistiques

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes de cours
1 feuille A4 recto/verso de notes manuscrites
Tables statistiques
Formulaire de probabilités

Calculatrice autorisée

Barème indicatif sur 20 : Partie A : 8 points Partie B : 12 points

La notation tiendra compte de la rédaction.

Un agriculteur possède un champ carré dont il veut mesurer la superficie. Pour ce faire, il mesure un seul côté du champ (X).

On suppose que la mesure X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .

PARTIE A

L'agriculteur réalise une première mesure de ce côté et trouve une valeur $x_1 = 510$ m. Il en déduit une superficie de $s_1 = 26,01$ hectares.

Il réalise une deuxième mesure et trouve alors $x_2 = 490$ m, d'où une valeur de superficie $s_2 = 24,01$ hectares.

Il se demande s'il doit retenir comme estimation pour la surface : s_1 , s_2 ou une estimation combinant les deux mesures :

$$s_3 = x_1 \cdot x_2 = 24,99 \text{ hectares} \quad \text{ou} \quad s_4 = \frac{s_1 + s_2}{2} = 25,01 \text{ hectares}.$$

On se propose d'aider l'agriculteur à résoudre ce problème.

L'agriculteur cherche à estimer la superficie du champ μ^2 .

On construit donc quatre estimateurs de μ^2 :

$$S_1 = X_1^2, \quad S_2 = X_2^2, \quad S_3 = X_1 \cdot X_2 \quad \text{et} \quad S_4 = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

1. A partir de la loi de probabilité suivie par la variable X, déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $E(X^2)$.
2. Etudier la qualité des quatre estimateurs S_1 , S_2 , S_3 et S_4 en déterminant le biais, la variance et le Carré Moyen de l'Erreur (CME) de chaque estimateur.

Remarque : si $X \rightarrow N(\mu; \sigma)$ alors $V(X^2) = 2(\sigma^4 + 2\mu^2\sigma^2)$.

3. A l'aide des résultats de la question 2, aider l'agriculteur à choisir l'estimateur parmi les quatre qui vous semble préférable aux autres.

PARTIE B

On décide, à présent, de mener une étude statistique de la mesure du côté du champ de l'agriculteur (X).

On dispose des 10 mesures suivantes (en m) :

510	490	507	509	492
498	501	503	485	512

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 5\,007 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2\,507\,777$$

4. Préciser le caractère étudié (nom et nature).
5. Calculer la moyenne et la médiane des mesures.
6. Calculer l'étendue et l'écart type des mesures.
7. Calculer le coefficient de variation et conclure.
8. Quelle est l'estimation ponctuelle sans biais de la moyenne de X ?
9. Déterminer la marge d'erreur associée à cette estimation pour $\alpha = 5\%$.
10. En déduire l'intervalle de confiance pour μ ($\alpha = 5\%$). Proposer une interprétation pour cet intervalle de confiance.
11. Calculer la taille de l'échantillon qu'il faudrait prélever pour diminuer la marge d'erreur sur la moyenne de 25% ($\alpha = 5\%$).