Chapitre 1
Ensembles, dénombrement et équiprobabilité

Ensembles

Exemple 1. $\{0, 1, 2\}$ est l'ensemble contenant les éléments 0, 1 et 2.

Exemple 2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$...

Exemple 3. $\{2\}$ est l'ensemble contenant seulement le nombre 2, qui est son unique élément.
Attention : $2 \neq \{2\}$!

Remarque 1. L'ensemble vide $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

L'ensemble des parties (ou sous-ensembles) $\mathcal{P}(\Omega)$

Définition 1 (Parties d'ensemble)**.** Soient Ω et A deux ensembles. On note $A \subset \Omega$ si pour tout $x \in A$, $x \in \Omega$. On dit alors que A est un sous-ensemble de Ω ou que A est une partie de Ω. L'ensemble de toutes les parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 4. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$.

Opérations sur $\mathcal{P}(\Omega)$

Définition 2 (Opérations sur $\mathcal{P}(\Omega)$)**.** Soient A et B deux sous-ensembles de Ω (donc éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$). On définit les opérations suivantes.

1. Union de A et B : $A \cup B := \{x \in \Omega \text{ tels que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

2. Intersection de A et B : $A \cap B := \{x \in \Omega \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \in B\}$.

3. Complémentaire de A : $\overline{A}(= A^c) = \{x \in \Omega \text{ tels que } x \notin A\}$.

Exemple 5. Si $\Omega = \mathbb{N}$, $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ alors $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A^c = \{3, 4, 5, \cdots\}$.

Propriétés des opérations

Théorème 2. *Soient A, B et C trois sous-ensembles de Ω (donc éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$).*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B = ... =: A \cap B \cap C$
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = ... =: A \cup B \cup C$

Ensembles disjoints et partitions

Définition 3. Soient A_1, A_2, ... et A_n n sous-ensembles de Ω.

1. On dit que A_1, A_2, ... et A_n sont deux à deux disjoints si pour tous $i, j = 1, ..., n$ tels que $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. On dit que A_1, A_2, ... et A_n forment une partition de Ω si $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$ et pour tous $i, j = 1, ..., n$ tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (A_1, A_2, ... et A_n sont deux à deux disjoints).

Exemple 6. Soient $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- $A_1 = \{0, 2\}$, $A_2 = \{1\}$ et $A_3 = \{3, 4\}$ forment une partition de Ω.
- $B_1 = \{0, 1, 2\}$ et $B_2 = \{2, 3, 4\}$ ne forment pas une partition de Ω.
- $B_3 = \{0, 3\}$ et $B_4 = \{1, 2\}$ ne forment pas une partition de Ω.

Produit cartésien, liste

Définition 4. Soient n un nombre entier non nul et Ω_1, ..., Ω_n n ensembles.

1. Le produit cartésien des ensembles Ω_1, ..., Ω_n se note $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ et est défini par $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n = \{(x_1, ..., x_n) : \forall j \in \{1, ..., n\}, x_j \in \Omega_j\}$.

   Ses éléments sont appelés des $n-$uplets.
2. Si pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\Omega_j = \Omega$, alors un élément de $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n = \Omega^n$ est appelé une $n-$liste de Ω.
3. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une $n-$liste d'un ensemble Ω. Si pour tout $i \neq j$, $x_i \neq x_j$, alors on dit que $(x_1, ..., x_n)$ est une $n-$liste sans remise (ou $n-$liste sans répétition ou arrangement de n éléments) de Ω.

ATTENTION : $(x_1, ..., x_n) \neq \{x_1, ..., x_n\}$

Cardinalité

Définition 5. Un ensemble E est dit fini s'il ne possède qu'un nombre fini d'élément(s). Dans ce cas, le nombre d'élément(s) est appelé cardinal de E et est noté $\text{card}(E)$ ou $\#(E)$.

Exemple 7. Soit E un ensemble.

1. Si $E = \{0, 1, 2\}$, alors E est fini et $\text{card}(E) = 3$
2. Si $E = \mathbb{N}$, alors E n'est pas fini.
3. Si $E = \mathbb{R}$, alors E n'est pas fini.
4. Exercice : si $E = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$, alors E est fini et $\text{card}(E) = 8$ (remarque : $8 = 2^3$)

Pour la suite de ce chapitre, nous supposerons que tous les ensembles sont finis.

Théorème 3. *Si* $\text{card}(E) = n$ *alors on a les propriétés suivantes.*

1. *Nombre de sous-ensembles de* E *:* $\text{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$
2. *Nombre de* $k-$*listes de* E *:* $\text{card}(E^k) = n^k$

Exemple 8. Soit $E = \{0, 1\}$

- $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$ et $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^2 = 4$.
- les $3-$listes sont $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$. Il y en a $2^3 = 8$.

Permutations

Définition 6. Si $\text{card}(E) = n$, on appelle permutation de E une $n-$liste sans répétition de E.

Exemple 9. Les permutations de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ sont $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$ et $(2, 0, 1)$. Il y en a 6=3!

Théorème 4. *Si* $\text{card}(E) = n$, *alors le nombre de permutations de* E *est* $n!$.

Nombre d'arrangements

Définition 7. Pout tous $k, n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} \text{ si } n \geq k, \\ \\ 0 \text{ si } n < k. \end{cases}$$

Théorème 5. *Pour tous* $k, n \in \mathbb{N}$, A_n^k *est le nombre de* $k-$*listes sans répétition que nous pouvons former à partir d'un ensemble de* n *éléments.*

Exemple 10. Les $2-$listes sans répétition de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ sont $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(2, 0)$. Il y en a $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Coefficients binomiaux

Définition 8. Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } n \geq k, \\ \\ 0 \text{ si } n < k. \end{cases}$$

Théorème 6. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$ (avec $k \leq n$). Le nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble de n éléments est égal à C_n^k.*

Exemple 11. Les sous-ensembles de 2 éléments de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ sont $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$ et $\{1, 2\}$. Il y en a $\frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème 7. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$ (avec $k \leq n$) et $x, y \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes.*

1. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.
2. $(x + y)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j y^{n-j}$.
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
4. $2^n = \sum_{j=0}^n C_n^j$.

Équiprobabilité

Définition 9. On appelle équiprobabilité sur un ensemble Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega).$$