Probabilités 3A
TD 2

Sauf mention contraire, les dés seront équilibrés et à six faces numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 : Démontrer la formule suivante : soient A, B et C trois événements, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C).\end{aligned}$$

Exercice 2 : Lors d'une partie de poker, vous recevez une main de 5 cartes distribuées au hasard à partir d'un jeu usuel de 32 cartes (4 couleurs et 8 valeurs). Calculez la probabilité d'obtenir :

1. un carré,
2. une paire et rien d'autre,
3. une double paire,
4. un brelan (trois cartes de même valeur) et rien d'autre,
5. un full (un brelan et une paire).

Exercice 3 : Vous êtes à un jeu télévisé. Vous vous trouvez devant trois portes. Il y a une voiture derrière l'une des portes, rien derrière les autres. Le but du jeu consiste à choisir une porte et on gagne ce qu'il y a derrière (la voiture ou rien donc !).

Vous choisissez une porte. Pour faire durer le suspens, le présentateur ouvre une autre porte, derrière laquelle il ne se trouve rien. Le présentateur vous propose alors de refaire un choix. Devez-vous maintenir votre choix initial ou changer ?

Exercice 4 : Nous lançons (indépendamment) deux fois un dé. Nous définissons les trois événements suivants :

- A="Le premier lancer donne un nombre pair",
- B="Le deuxième lancer donne un nombre pair",
- C="La somme des deux lancers est un nombre pair".

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
2. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
3. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 5 : Nous avons trois urnes numérotées de 1 à 3 et un dé. L'urne 1 contient 4 boules rouge et 2 boules bleues. L'urne 2 contient 3 boules rouges et 3 boules bleues. L'urne 3 contient 1 boule bleue et 5 boules rouges. Nous lançons le dé. Si nous obtenons un nombre impair, alors nous piochons une boule dans l'urne 1. Si nous obtenons un nombre pair divisible par 3, alors nous piochons une boule dans l'urne 2. Dans les autres cas, nous piochons une boule dans l'urne 3.

1. Calculer la probabilité de piocher une boule rouge, puis la probabilité de piocher une boule bleue.
2. Sachant que nous avons pioché une boule rouge, calculer la probabilité d'avoir obtenu un nombre pair en lançant le dé.

Exercice 6 : Un laboratoire a mis au point un alcootest dont les propriétés sont les suivantes :

- il se révèle positif dans 96 % des cas pour quelqu'un qui est en état d'ébriété,
- il se révèle positif dans 2 % des cas pour quelqu'un qui n'est pas en état d'ébriété.

On suppose de plus qu'il y a 3 % des conducteurs en état d'ébriété.

1. On fait un contrôle sur un conducteur et le test se révèle négatif. Quelle est la probabilité que ce conducteur ne soit pas en état d'ébriété ?
2. On fait un contrôle sur un autre conducteur et le test se révèle positif. Quelle est la probabilité que ce conducteur ne soit pas en état d'ébriété ?
3. Avez-vous un commentaire ?

Exercice 7 : Pour aller au travail, on a le choix entre deux routes A et B. Le premier jour, on choisit une route au hasard. Si la circulation est difficile sur notre route le jour n, alors on change de route le jour $n+1$, sinon on reste sur la même route. La probabilité que la circulation soit difficile est a sur la route A, et b sur la route B, avec $a, b \in]0,1[$. On note p_n la probabilité de circuler sur la route A le jour n.

1. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1}.
2. En déduire p_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de p_n quand $n \to \infty$?