3. TESTS STATISTIQUES (UNE POPULATION)

Tests paramétriques

EXERCICE 3.1

Dans le passé, l'écart type des poids de colis remplis par une machine donnée était de 0,25 kg. Un échantillon aléatoire de 20 colis a présenté un écart type de 0,32 kg.

Est-ce que cette augmentation apparente de dispersion est significative au niveau de 0,05 et de 0,01 ? Faut-il réviser la machine ?

1) Déduire de la question posée si le test doit porter sur une moyenne, une variance ou une proportion.
2) Repérer si les données de l'énoncé concernent la population ou l'échantillon.
3) En déduire la procédure de test à mettre en œuvre.
4) Choisir l'hypothèse H0 et son alternative H1 ; ces deux hypothèses doivent porter sur le paramètre population à étudier et correspondre aux deux réponses possibles à la question posée (augmentation de la dispersion ou pas d'augmentation de la dispersion) ; les deux hypothèses ne doivent pas mentionner les résultats obtenus sur l'échantillon. La formulation de la question ainsi que la signification physique du phénomène étudié imposent le choix de l'alternative H1.
5) Mettre en œuvre la procédure de test en respectant les 7 étapes.
6) Conclure en répondant à la question posée ; la conclusion peut être différente en fonction du niveau de signification (c'est-à-dire α) choisi.
7) Répondre à la question « révision de la machine ? » en fonction du résultat du test.

On va tester la variance de la population du poids des colis car la question posée porte sur la dispersion.
La moyenne de la population μ est inconnue, on choisit donc la procédure du Tr 43.

1) H0 $\sigma^2 = 0{,}25^2$ Pas d'augmentation significative de la dispersion

   H1 $\sigma^2 > 0{,}25^2$ Augmentation de la dispersion

On choisit l'alternative « H1 Variance population supérieure à $0{,}25^2$ » car la question porte sur l'augmentation de la dispersion.

2) $\alpha = 0{,}05$ puis $\alpha = 0{,}01$
3) <u>On fait l'hypothèse que le poids des colis X suit une loi normale,</u> la moyenne de la population μ est inconnue.
4) $\chi^2 = \left.\frac{(n-1)S^{*2}}{0{,}25^2}\right/_{H0\ \sigma^2=0{,}25^2} \rightarrow$ loi du Khi – Deux à $\upsilon = n-1$ DL
5) Rejeter H0 $\sigma^2 = 0{,}25^2$ si $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha\,;\,n-1} = \chi^2_{0{,}95\,;20-1=19} = 30{,}14$
6) Échantillon : n = 20 $s^2 = 0{,}32^2$

   $$\chi^2 = \frac{(n-1)\,s^{*2}}{0{,}25^2} = \frac{n\,s^2}{0{,}25^2} = 32{,}77$$

7) $\alpha = 0{,}05$ $\chi^2 = \frac{(n-1)\,s^{*2}}{0{,}25^2} = \frac{n\,s^2}{0{,}25^2} = 32{,}77 > \chi^2_{0{,}95\,;19} = 30{,}14$ d'où Rejet H0

Sur la base des résultats de cet échantillon, on peut conclure avec un risque α égal à 0,05 que la dispersion des colis a augmenté.

$$\alpha = 0{,}01 \quad \chi^2 = \frac{(n-1)\,s^{*2}}{0{,}25^2} = \frac{n\,s^2}{0{,}25^2} = 32{,}77 \le \chi^2_{0{,}99\,;19} = 36{,}19 \text{ d'où Non rejet H0}$$

Sur la base des résultats de cet échantillon, on peut conclure avec une confiance de 99 % (ou un risque α égal à 0,01) que la dispersion des colis n'a pas augmenté de façon significative.

Une petite variation du risque α modifie la décision, on n'accorde donc pas une grande confiance au résultat du test.

Dans le doute, il vaut mieux réviser la machine si le coût de la révision n'est pas trop élevé. Il est également possible de refaire le test en prélevant un nouvel échantillon, idéalement de plus grande taille.

EXERCICE 3.2

Un test de charge de rupture de 6 câbles a montré une charge de rupture moyenne de 7750 kg avec un écart type de 145 kg, alors que le fabricant affirme une charge de rupture de 8000 kg.

Peut-on soutenir son affirmation à un niveau de signification de 0,05 et de 0,01 ?

1) Déduire de la question posée si le test doit porter sur une moyenne, une variance ou une proportion.
2) Repérer si les données de l'énoncé concernent la population ou l'échantillon.
3) En déduire la procédure de test à mettre en œuvre.
4) Choisir l'hypothèse H0 et son alternative H1 ; ces deux hypothèses doivent porter sur le paramètre population à étudier et correspondre aux deux réponses possibles à la question posée (affirmation du fabricant correcte ou incorrecte) ; les deux hypothèses ne doivent pas mentionner les résultats obtenus sur l'échantillon. La signification physique du caractère étudié impose le choix de l'alternative H1.
5) Mettre en œuvre la procédure de test en respectant les 7 étapes.
6) Conclure en répondant à la question posée ; la conclusion peut être différente en fonction du niveau de signification (c'est-à-dire α) choisi.

On va tester la charge de rupture moyenne de la population de câbles.

La variance de la population n'est pas connue, on choisit donc la procédure du Tr 41.

1) H0 $\mu = 8000$ kg Affirmation du fabricant correcte

H1 $\mu < 8000$ kg Affirmation du fabricant incorrecte

On choisit l'alternative « H1 Moyenne population inférieure à 8000 kg » car on considère que l'affirmation du fabricant est incorrecte uniquement dans le cas où la charge de rupture est trop faible. On ne va pas reprocher au fabricant une charge de rupture trop élevée. C'est donc, dans ce cas, la signification physique du caractère qui a guidé le choix de l'alternative H1.

2) $\alpha = 0{,}05$ puis $\alpha = 0{,}01$

3) <u>Comme la taille de l'échantillon est inférieure à 30, on fait l'hypothèse que la charge de rupture X suit une loi normale</u> et la variance de la population σ^2 est inconnue.

4) $T = \left.\dfrac{\bar{X} - 8000}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}\right/_{H0\ \mu = 8000\ \text{kg}}$ $\rightarrow$ Loi de Student $\upsilon = n - 1$ DL

5) Rejeter H0 $\mu = 8000$ kg

$$\text{si} \quad T = \frac{\bar{X} - 8000}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} < -t_{1-\alpha\,;n-1} = -t_{0{,}95\,;5} = -2{,}015$$

6) Échantillon : $n = 6$ $\bar{x} = 7750$ kg et $s = 145$ kg

$$\text{d'où} \quad t = \frac{\bar{x} - 8000}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 8000}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{7750 - 8000}{\frac{145}{\sqrt{5}}} = -3{,}86 \quad \text{avec} \quad s^* = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,s$$

7) $\alpha = 0{,}05$ $t = -3{,}86 < -t_{0{,}95\,;5} = -2{,}015$ d'où Rejet H0

Sur la base des résultats de cet échantillon, on peut conclure avec un risque α égal à 0,05 que l'affirmation du fabricant n'est pas correcte.

$\alpha = 0{,}01$ $t = -3{,}86 < -t_{0{,}99\,;5} = -3{,}365$ d'où Rejet H0

Sur la base des résultats de cet échantillon, on peut conclure avec un risque α égal à 0,01 que l'affirmation du fabricant n'est pas correcte.

L'affirmation du fabricant est donc hautement improbable, malgré la petite taille de l'échantillon. Le test permet de conclure, en prenant un risque inférieur à 1 % de se tromper, que le fabricant a tort d'annoncer une charge de rupture de 8000 kg.

EXERCICE 3.3

Dans le passé, une machine a produit des pièces d'une épaisseur moyenne de 0,050 cm. Pour déterminer si cette machine fonctionne toujours aussi correctement, on prélève un échantillon de 10 pièces dont l'épaisseur moyenne est de 0,053 cm, avec un écart type de 0,003 cm.

Tester l'hypothèse de bon fonctionnement à un niveau de signification de 0,05 et de 0,01.

1) Déduire de la question posée si le test doit porter sur une moyenne, une variance ou une proportion.
2) Repérer si les données de l'énoncé concernent la population ou l'échantillon.
3) En déduire la procédure de test à mettre en œuvre.
4) Choisir l'hypothèse H0 et son alternative H1 ; ces deux hypothèses doivent porter sur le paramètre population à étudier et correspondre aux deux résultats possibles (bon fonctionnement ou mauvais fonctionnement) ; les deux hypothèses ne doivent pas mentionner les résultats obtenus sur l'échantillon. La compréhension du cadre de l'étude (respect d'une cote imposée par un cahier des charges, ici) impose le choix de l'alternative H1.
5) Mettre en œuvre la procédure de test en respectant les 7 étapes.
6) Conclure en répondant à la question posée ; la conclusion peut être différente en fonction du niveau de signification (c'est-à-dire α) choisi.

On va tester l'épaisseur moyenne des pièces.

La variance de la population n'est pas connue, on choisit donc la procédure du Tr 41.

1) H0 $\mu = 0{,}050$ cm — Bon fonctionnement

H1 $\mu \neq 0{,}050$ cm — Mauvais fonctionnement

On choisit l'alternative « H1 Moyenne population différente de 0,050 cm » car on considère qu'un mauvais fonctionnement correspond à une épaisseur moyenne trop petite ou à une épaisseur moyenne trop grande.

2) $\alpha = 0{,}05$ puis $\alpha = 0{,}01$

3) Comme la taille de l'échantillon est inférieure à 30, on fait l'hypothèse que l'épaisseur X suit une loi normale et la variance de la population σ^2 est inconnue.

4) $T = \dfrac{\overline{X} - 0{,}050}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{/H0\ \mu = 0{,}050cm}$ $\rightarrow$ Loi de Student $\upsilon = n - 1$ DL

5) Rejeter H0 $\mu = 0{,}050$ cm

si $T = \dfrac{\overline{X} - 0{,}050}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = -\,t_{0{,}975\,;9} = -2{,}262$

ou si $T = \dfrac{\overline{X} - 0{,}050}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{0{,}975\,;9} = 2{,}262$

6) Échantillon : n = 10 $\quad \overline{x} = 0{,}053$ cm et $s = 0{,}003$ cm

d'où $t = \dfrac{\overline{x} - 0{,}050}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{x} - 0{,}050}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \dfrac{0{,}053 - 0{,}050}{\frac{0{,}003}{\sqrt{9}}} = 3{,}00$ avec $s^* = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,s$

7) $\alpha = 0{,}05$ $\quad t = 3{,}00 > t_{0{,}975\,;9} = 2{,}262$ d'où Rejet H0

Sur la base des résultats de cet échantillon, on peut conclure avec un risque α égal à 0,05 à un mauvais fonctionnement.

$\alpha = 0{,}01$

$-\,t_{0{,}995\,;9} = -3{,}250 \leq t = 3{,}00 \leq t_{0{,}995\,;9} = 3{,}250$ d'où Non rejet H0

Sur la base des résultats de cet échantillon, on peut conclure avec une confiance de 99 % (ou un risque α égal à 0,01) à un bon fonctionnement.

Une petite variation du risque α modifie la décision, on n'accorde donc pas une grande confiance au résultat du test.

Dans le doute, il vaut mieux contrôler la machine. Il est également possible de refaire le test en prélevant un nouvel échantillon, idéalement de plus grande taille.