$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.
2. $(x+y)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j y^{n-j}$.
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
4. $2^n = \sum_{j=0}^n C_n^j$.

Indépendance : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$.

X ~ Ber(p) : X(Ω) = {0,1} ; P(X = 1) = p et P(X = 0) = 1 – p

$X \sim Bin(n; p)$: $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$; $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$X \sim G(p)$: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$

X ~ Poisson(λ) : $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Esperance :

X ~ Ber(p) : E(X)=p

$X \sim Bin(n; p)$: E(X)=np

$X \sim G(p)$: E(X)= 1/p

X ~ Poisson(λ) : E(X)= λ

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k).$$

Variance :

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n \in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}(X = n)$$

X ~ Ber(p) : Var(X)= p(1-p)

$X \sim Bin(n; p)$: Var(X)= np(1-p)

$X \sim G(p)$: Var(X)= $(1-p)/p^2$

X ~ Poisson(λ) : Var(X)= λ

Lois marginales :

$$\mathbb{P}(X=n)=\sum_{m\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=n,Y=m)\qquad \text{pour tout } n\in X(\Omega),$$
$$\mathbb{P}(Y=m)=\sum_{n\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=n,Y=m)\qquad \text{pour tout } m\in Y(\Omega).$$

Lois conditionnelles : $\mathbb{P}(X=n\,|\,Y=m)=\dfrac{\mathbb{P}(X=n,Y=m)}{\mathbb{P}(Y=m)}.$

Indépendance : $\mathbb{P}(X=n,Y=m)=\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=m).$

Fonctions génératrices : $G_X(u)=\mathbb{E}(u^X)=\sum_{k=0}^{\infty}u^k\mathbb{P}(X=k)$

$$\mathbb{E}(X)=G'_X(1)\qquad \mathrm{Var}(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-(G'_X(1))^2$$

DENSITE :

Variables aleatoires a densité

$$F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x')dx'.$$

X ~ *U*([*a; b*]) :

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\ \text{si } x\in[a,b],\\ 0\ \text{sinon.}\end{cases}$$

E(X) = ½; Var(X)=1/12

X ~ *Exp*(*α*) :

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha\exp(-\alpha x)\ \text{si } x\ge 0,\\ 0\ \text{sinon.}\end{cases}$$

X ~ *γ*(*α*) :

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-x)\ \text{si } x\ge 0,\\ 0\ \text{sinon.}\end{cases}$$

Cauchy :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Esperance :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Variance : Var(X) =

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right)^2.$$

Variables aléatoires gaussiennes : $X \sim N(m; \sigma^2)$ (ou $X \sim N(m; \sigma)$) :

1. Il existe $Y \sim N(0; 1)$ telle que $X = \sigma Y + m$.
2. $E(X) = m$.
3. $Var(X) = \sigma^2$

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Lois marginales :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dx \qquad \textit{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Indépendance :

$P(X \leq x; Y \leq y) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y)$

Fonction caractéristique :

$$\phi_X(t) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{itx} dx.$$

<u>*FX(t) = FY (t)*</u>

$E(X) = -i\phi'_X(0)$; $E(X^2) = -\phi''_X(0)$

$Var(X) = -\phi''_X(0) + (\phi'_X(0))^2$

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f\cdot g$	$f'\cdot g+f\cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
$g\circ f$	$f'\times g'\circ f$
$(f\cdot g)^{(n)}$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$
$(f^{-1})'$	$\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}^*$	$\alpha u'u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\exp(u)$	$u'\exp(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Fonction	Dérivée
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\mathrm{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Fonction définie sur I	Primitives de sur I (C constante réelle)
$u'+v'$	$ax+C$
$\lambda u'$	$\lambda u+C$
$u'v+uv'$	$uv+C$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+C$
$(u'\circ v)v'$	$(u\circ v)+C$
$u'u^n$ $(n\in\mathbb{Z}-\{-1\})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+C$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|+C$ soit $\ln u+C$ $\ln(-u)+C$
$u'e^u$	e^u+C
$x\to u(ax+b)$	$\frac{1}{a}U(ax+b)+C$