Chapitre 2
Espaces de probabilité, indépendance et conditionnement

Espaces de probabilité

Définition 1. Soit Ω un ensemble. On appelle tribu sur Ω un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes.

1. $\Omega \in \mathcal{T}$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $A^c \in \mathcal{T}$.
3. Soit $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant $A_j \in \mathcal{T}$ pour tout j. Alors $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{T}$.

Un élément de $\mathcal{T}$ sera appelé un événement.

Définition 2. On appelle probabilité sur $\mathcal{T}$ (ou sur $(\Omega, \mathcal{T})$) une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0, 1]$ satisfaisant les deux propriétés suivantes.

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Soit $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints et vérifiant $A_j \in \mathcal{T}$ pour tout j. Alors
$$\mathbb{P}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Exemple 1. Soit Ω un ensemble fini et $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité, alors $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

Propriétés

Théorème 1. *Soient A et $B \in \mathcal{T}$. On a les propriétés suivantes.*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. *Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.*
5. *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Formules des probabilités totales

Définition 3. On appelle système complet d'événements un sous-ensemble $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{T}$ (A_j est donc un événement pour tout j) vérifiant $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \Omega$ et pour tous i, j tels que $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ (deux à deux disjoints).

Théorème 2 (Formules des probabilités totales)**.** *Soient $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements et $B \in \mathcal{T}$. On a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_j).$$

En particulier, pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c).$$

Indépendance

Définition 4.

- Deux événements A et B sont indépendants (par rapport à $\mathbb{P}$) si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- n événements A_1, A_2, ... A_n sont (mutuellement) indépendants (par rapport à $\mathbb{P}$) si pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ et pour tous $i_1, i_2, ..., i_j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_j}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})...\mathbb{P}(A_{i_j}).$$

- n événements A_1, A_2, ... A_n sont deux à deux indépendants (par rapport à $\mathbb{P}$) si pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Probabilités conditionnelles

Définition 5. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle par rapport à B (ou probabilité conditionnelle sachant B ou probabilité sachant B) l'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{T} \to [0,1]$ telle que pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On note aussi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A)$.

Propriétés

Théorème 3. *Soient A et B deux événements et $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Supposons $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A_0) > 0$, $\mathbb{P}(A_1) > 0$, $\mathbb{P}(A_2) > 0$, ... On a les propriétés suivantes.*

1. *A et B indépendants* $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
2. $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$.
3. $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)$.

Formule des conditionnements successifs

Théorème 4 (Formule des conditionnements successifs)**.** *Soient n événements A_1, A_2, ..., A_{n-1} et A_n tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1} \cap ... \cap A_1) &= \mathbb{P}(A_n|A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap ... \cap A_1)\\ &\quad \times\mathbb{P}(A_{n-1}|A_{n-2} \cap A_{n-3} \cap ... \cap A_1)\\ &\qquad \vdots\\ &\quad \times\mathbb{P}(A_2|A_1)\\ &\quad \times\mathbb{P}(A_1).\end{aligned}$$