Mathématiques 3A, Probabilités
TD 3, corrigé

2020/2021

Exercice 1 :
1) $\mathbb{P}(X=6) = 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) - \mathbb{P}(X=3) - \mathbb{P}(X=4) - \mathbb{P}(X=5) = 1/4$.
2) $\mathbb{P}(X \in \{2,3\}) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) = 1/3$.
$\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=6) = 7/12$.
$\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 1 - \mathbb{P}(X \text{ pair}) = 5/12$.
$\mathbb{P}(X = 6 \,|\, X \text{ pair}) = \mathbb{P}(X=6)/\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 3/7$.
$\mathbb{P}(X \in \{2,3\} \,|\, X \text{ impair}) = \mathbb{P}(X=3)/\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 2/5$.
3) $\mathbb{P}(\{X \in \{2,3\}\} \cap \{X \text{ pair}\}) = \mathbb{P}(X=2) = 1/6$.
$\mathbb{P}(X \in \{2,3\})\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 7/36$.
$\mathbb{P}(\{X \in \{2,3\}\} \cap \{X \text{ pair}\}) \neq \mathbb{P}(X \in \{2,3\})\mathbb{P}(X \text{ pair})$, donc $\{X \in \{2,3\}\}$ et $\{X \text{ pair}\}$ ne sont pas indépendants.

Exercice 2 :
On définit les événements :

- $A =$ on réussit à allumer la cigarette,
- pour tout $k = 1, ..., n$, $A_k =$ la $k-$ième allumette allume la cigarette.

1) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\cdots\mathbb{P}(A_n^c) = 1 - (1-p)^n$.
2) La loi est définie par :

- $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$,
- $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{k-1}^c \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\cdots\mathbb{P}(A_{k-1}^c)\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$ pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$,
- $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\cdots\mathbb{P}(A_{n-1}^c) = (1-p)^{n-1}$.

Calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}p + n(1-p)^{n-1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}p &= p\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1} = p\frac{d}{dp}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k\right) \\
&= p\frac{d}{dp}\left(-\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\right) = p\frac{d}{dp}\left(\frac{(1-p)^n - 1}{p}\right) \\
&= p\frac{-n(1-p)^{n-1}p - (1-p)^n + 1}{p^2} \\
&= -n(1-p)^{n-1} + \frac{1-(1-p)^n}{p}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X) = -n(1-p)^{n-1} + \frac{1-(1-p)^n}{p} + n(1-p)^{n-1} = \frac{1-(1-p)^n}{p}.$$

Remarque :

$$\frac{1-(1-p)^n}{p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}.$$

3) $\mathbb{P}(X = k \,|\, A) = \dfrac{\mathbb{P}((X=k)\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{(1-p)^{k-1}p}{1-(1-p)^n}.$

Exercice 3 :
On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X=0 \text{ ou } X \text{ impair})\\
&= \mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=2k+1)\\
&= e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= e^{-\lambda}(1+\sinh(\lambda)).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=2k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$. En conclusion, la loi de Y est donnée par :

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\mathbb{P}(Y=0) = e^{-\lambda}(1+\sinh(\lambda))$,
- $\mathbb{P}(Y=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 :
Pour chaque n, d'après l'énoncé, la loi de Y sachant $X = n$ est une binomiale de paramètres (n, p), c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.
Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k \,|\, X=n)\mathbb{P}(X=n)\\
&= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}(1-p)^{m}\frac{\lambda^{m}}{(m)!}\\
&= e^{-\lambda p}\frac{\lambda^k p^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Donc, Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 5 :
1)

- **Loi de X :**
  $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-3} \frac{2^k}{(k!)(j!)}$$
$$= e^{-3} \frac{2^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e^{-3} \frac{2^k}{k!} e^1 = e^{-2} \frac{2^k}{k!}.$$

  Donc, X **suit une loi de Poisson de paramètre 2**.

- **Loi de Y :**
  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-3} \frac{2^k}{(k!)(j!)}$$
$$= \frac{e^{-3}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{e^{-3}}{j!} e^2 = \frac{e^{-1}}{j!}.$$

  Donc, Y **suit une loi de Poisson de paramètre 1**.

2) Pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = j) = e^{-3} \frac{2^k}{(k!)(j!)} = \mathbb{P}(X = k, Y = j).$$

Donc X **et** Y **sont indépendantes**.

Exercice 6 :
1)

$$\frac{1}{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{k!(j-k)!} =^{j-k=n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!} = e^2.$$

Ainsi, $\underline{\alpha = e^{-2}}$.
2)

- **Loi de X :**
  $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{e^{-2}}{k!(j-k)!}$$
$$= \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)!} = \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{e^{-2}}{k!} e^1 = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

  Donc, X **suit une loi de Poisson de paramètre 1**.

- **Loi de Y :**
  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \sum_{k=0}^{j} \frac{e^{-2}}{k!(j-k)!}$$
$$= e^{-2} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!(j-k)!} = \frac{e^{-2}}{j!} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} = \frac{e^{-2}}{j!} \sum_{k=0}^{j} C_j^k = \frac{e^{-2}}{j!}(1+1)^j = \frac{e^{-2} 2^j}{j!}.$$

  Donc, Y **suit une loi de Poisson de paramètre 2**.

3)

$$\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=j) \neq \mathbb{P}(X=k, Y=j).$$

Donc X **et** Y **ne sont pas indépendantes**.

Exercice 7 :

1) On a $S(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,1\} = \{2,3,\cdots\}$. Pour tout $n \in S(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(S=n) = \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

Conclusion : la loi de S est donnée par $S(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,1\} = \{2,3,\cdots\}$ et $\mathbb{P}(S=n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ pour tout $n \in S(\Omega)$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \geq n) &= \mathbb{P}(X \geq n, Y \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n)\mathbb{P}(Y \geq n) \text{ (par indépendance)} \\
&= \mathbb{P}(X \geq n)^2 = \left(\sum_{k=n}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\right)^2 \quad (j = k-n) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^{j+n-1}\right)^2 = p^2(1-p)^{2n-2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j\right)^2 = (1-p)^{2n-2}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(U \geq n) = (1-p)^{2n-2}$.

3) $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(U=n) = \mathbb{P}(U \geq n) - \mathbb{P}(U \geq n+1) = (1-p)^{2n-2} - (1-p)^{2n} = (1-p)^{2n-2}(1-(1-p)^2).$$

Ainsi, U suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.

Exercice 8 :

On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$. On a

$$G_X(u) = \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k p(1-p)^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} u^{j+1} p(1-p)^j = up\sum_{j=0}^{\infty} u^j(1-p)^j = \frac{up}{1-u(1-p)}.$$

Calcul de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ avec les fonctions génératrices :

On rappelle les formules

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$. On a $G'_X(u) = \dfrac{p}{(1-u+up)^2}$, donc $G'_X(1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$. On a $G''_X(u) = \dfrac{2p(1-p)}{(1-u+up)^3}$, donc $G''_X(1) = \dfrac{2p(1-p)}{p^2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(1-p)}{p}$.

Exercice 9 :

Considérons n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ indépendants et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $j = 1, \cdots, n$, on a $G_{X_j}(u) = 1-p+pu$. Puisque $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, $G_{X_1+\cdots+X_n}(u) = G_{X_1}(u)\cdots G_{X_n}(u) = (1-p+pu)^n$. Or, si X suit un loi binomiale de paramètres $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$, alors $G_X(u) = (1-p+pu)^n$. Donc $X_1 + \cdots + X_n$ et X ont même loi.