Chap 1 : ensbl, denombt et equiproba

I - Ensembles

ex : • $\{0, 1, 2\}$ ensbl contenant 0, 1 et 2

- $\mathbb{N}$ entiers + ou = 0
- $\mathbb{Z}$ entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$ nb rationels
- $\mathbb{R}$ reels
- $\mathbb{C}$ cmplx
- $M_{n,p}(\mathbb{R})$ mat de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suite
- $C([0,1], \mathbb{R})$ fct°

⚠ $\{2\} \neq 2$
↳ singleton

rq : $\emptyset$: ensbl vide

II - les sous-ensbl

def : Soient Ω et A deux ensbl. on note $A \subset \Omega$ si, $\forall x \in A$, $x \in \Omega$. A est un ss-embl de Ω ou A est une partie de Ω
l'ensbl de toutes les parties est notée $P(\Omega)$

ex : $P(\{1,2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \underline{\{1,2\}}, \underline{\emptyset}\}$
tjrs là.

III - Operat° sur $P(\Omega)$

def : A et B deux ss-emb de Ω.

- Union : $A \cup B = x \in \Omega \,/\, x \in A$ ou $x \in B$
- Intersect° : $A \cap B = x \in \Omega \,/\, x \in A$ et $x \in B$
- complementaire : $\overline{A}$ (ou A^c) $= x \in \Omega \,/\, x \notin A$

ex : $\Omega = \mathbb{N}$; $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3\}$

→ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$
→ $A \cap B = \{1, 2\}$
→ $A^c = \{3, 4, 5, \ldots\}$

Propriétés :

th : Soit A, B et C trois ss-embl de Ω
→ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
→ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
→ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
→ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
→ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
→ $A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

IV - Esmbl disjoint et partit°

def : soient $A_1, A_2, \ldots A_m$ m ss-embl de Ω

on dit que $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont 2 à 2 disj si, $\forall (i, j) = 1, \ldots m$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$

on dit ils form une partit° de Ω si $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega$ et sont disjoints 2 à 2.

ex : $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A_1 = \{0, 2\}$; $A_2 = \{1\}$; $A_3 = \{3, 4\}$
forment une part de Ω

$B_1 = \{0, 1, 2\}$ et $B_2 = \{2, 3, 4\}$: pas part Ω

$C_1 = \{0, 3\}$ et $C_2 = \{1, 2\}$: pas part Ω.

V - Produit cartesien et liste

def : soient n un nb entier non nul et $\Omega_1, \dots \Omega_n$ n ensb

→ le prod cart de ensbl $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ se note $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ et est def par :
$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(x_1, \dots, x_n) : \forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j \in \Omega_j$
ses elements sont des <u>n-uplets</u>.

ex : $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{0, 1\}$.

$A \times B = \{(0,0) ; (0,1) ; (1,0) ; (1,1) , (2,0) , (2,1)\}$
↳ nb : $3 \times 2 = 6$.

VI - Cardinalité

def : un ensbl E est dit fini s'il ne poss qu'un nb fini d'élément. Ds ce cas, le nb d'elements est appelé cardinal de E : $card(E)$ ou $\#(E)$.

ex : si $E = \{0, 1, 2\}$, alors E est fini et card$(E) = 3$.

si $E = \mathbb{N}$ alors E n'est pas fini

si $E = P(\{0, 1, 2\})$
$= \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$

card$(E) = 8$.

th : si card$(E) = n$
alors nb de ss-ensbl de E : card$(P(E)) = 2^n$
et nb de k-list de E : card$(E^k) = n^k$

ex : $E = \{0, 1\}$

- $P(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ card$(P(E)) =$

. les 3-list sont $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$
il y en a $2^3 = 8$.

VII - Permutat°

def : si card$(E) = n$, on appelle permut de E une n-list ss repetit° de E.

ex : les permutat° de $\{0, 1, 2\}$ sont $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$, $(1,2,0)$, $(2,1,0)$ et $(2,0,1)$ il y a 6 permut.

si card(E) = n, alors le nb de per de E est $n!$

VIII - nb d'arrangt

def : $\forall k, n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}$$

th : $\forall k, n \in \mathbb{N}$, A_n^k est le nb de k-list ss repetit° que nous pouvons former à partir de l'ensbl de n elements.

ex : 2-list de $\{0,1,2\}$ sont $(0,1), (0,2), (1,0), (1,2), (2,1)$ et $(2,0)$.
il y en a $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

IX - Coef binomiaux

def : $\forall k, n \in \mathbb{N}$,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}$$

th $k, n \in \mathbb{N}$. le nb de ss-ensbl de k elements d'un ensble de n elements est egal à C_n^k

ex : les ss ensbl de 2 elements de l'ensbl $\{0,1,2\}$ sont $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ et $\{1,2\}$. il y en a 3. Donc $C_3^2 = 3$.

th : soient $k, m \in \mathbb{N}$ avec $k \leq m$ et $x, y \in \mathbb{C}$

$\rightarrow C_{m+1}^{k+1} = C_m^{k+1} + C_m^k$

$\rightarrow (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_m^j \cdot x^j \cdot y^{n-j}$

$\rightarrow C_m^k = C_m^{m-k}$

$\rightarrow 2^n = \sum_{j=0}^{m} C_m^j$

X - Equiprobabilité

def : On appelle equiprobabilité sur un ensb Ω une app
$\mathbb{P} : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ def par
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \quad \forall A \in P(\Omega)$$