Automatique continue

Modélisation mathématique des systèmes

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 7 septembre 2020

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY

Plan du cours

① Introduction à l'Automatique et modélisation mathématique des systèmes

- Modèles de systèmes linéaires et invariants dans le temps
- Linéarisation
- Transformée de Laplace – Rappels
- Réponses des systèmes linéaires
- Fonction de transfert
- Algèbre des schémas-blocs

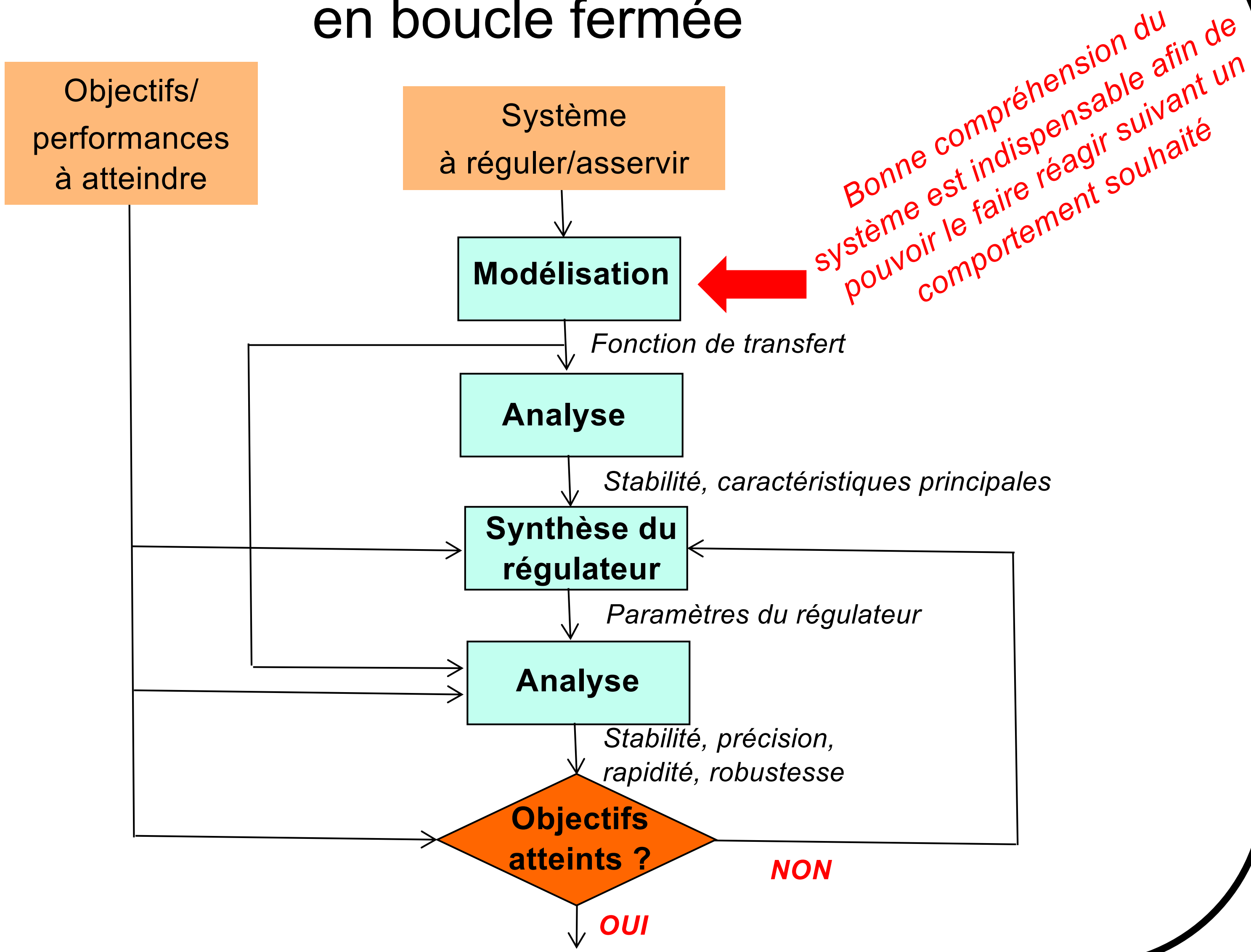
② Analyse temporelle des systèmes

③ Stabilité des systèmes

④ Systèmes bouclés : commande, stabilité et performances

⑤ Correcteurs standards et leurs réglages

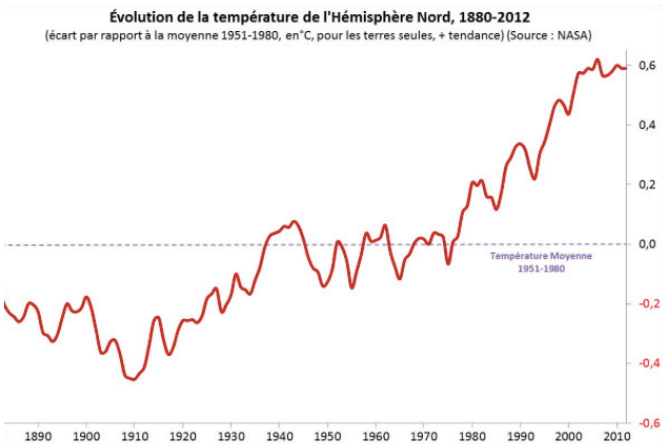
Etapes de conception d'une commande en boucle fermée



Définition - *Signal*

- ***Un signal est la grandeur physique porteuse d'une information***

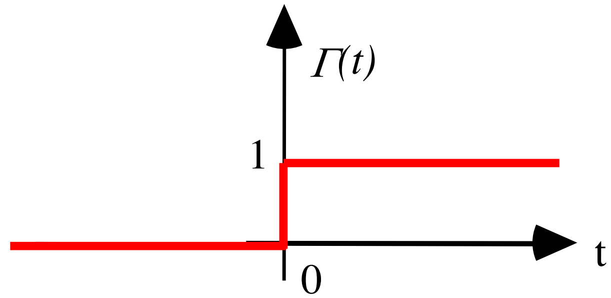
Exemples : position, vitesse, température, signal électrique,…



Quelques signaux importants

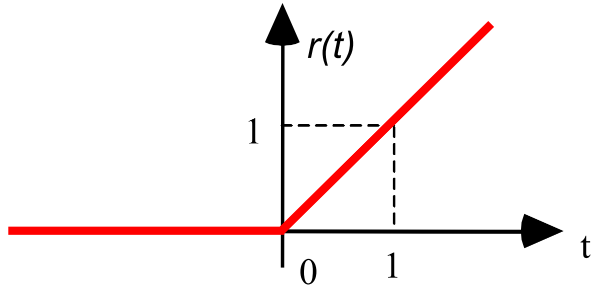
- **L'échelon unité**

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & pour \;\; t < 0 \\ 1 & pour \;\; t \geq 0 \end{cases}$$



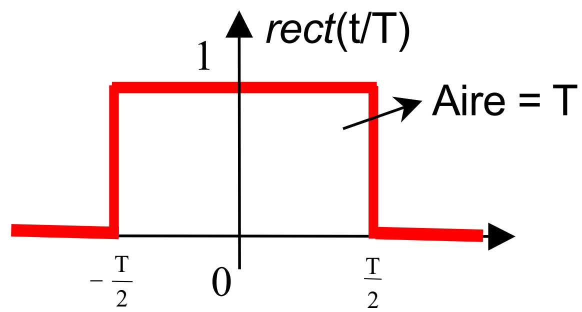
- **La rampe unitaire**

$$r(t) = \begin{cases} 0 & pour \;\; t < 0 \\ t & pour \;\; t \geq 0 \end{cases}$$



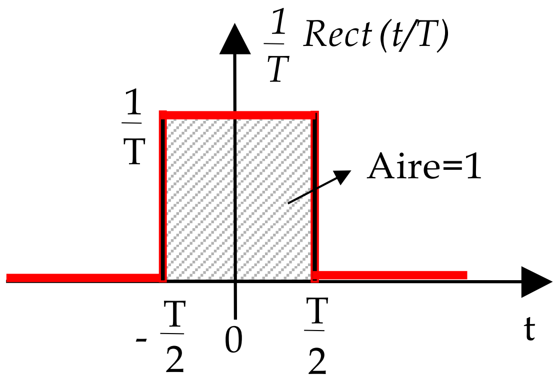
- **La fenêtre rectangulaire**

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \forall & |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & \forall & |t| > \dfrac{T}{2} \end{vmatrix}$$

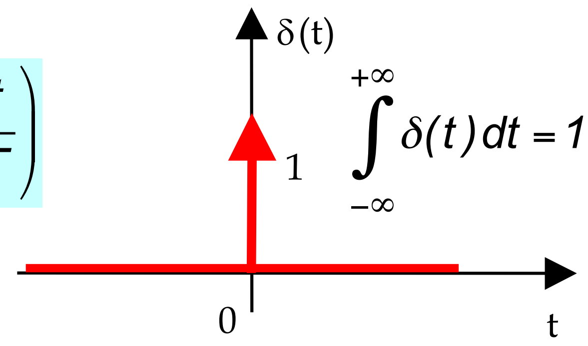


Quelques signaux importants

- **L'impulsion de Dirac**



$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} Rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

δ(t) n'est pas une fonction. C'est un "être" à valeur infinie en un point et à valeur nulle partout ailleurs

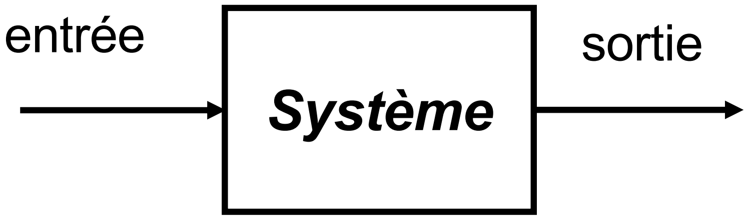
Par convention, la représentation graphique de *δ(t)* est une flèche verticale placée en *t=0* de hauteur proportionnelle à la constante de pondération ici égale à 1.

Définition - ***Système***

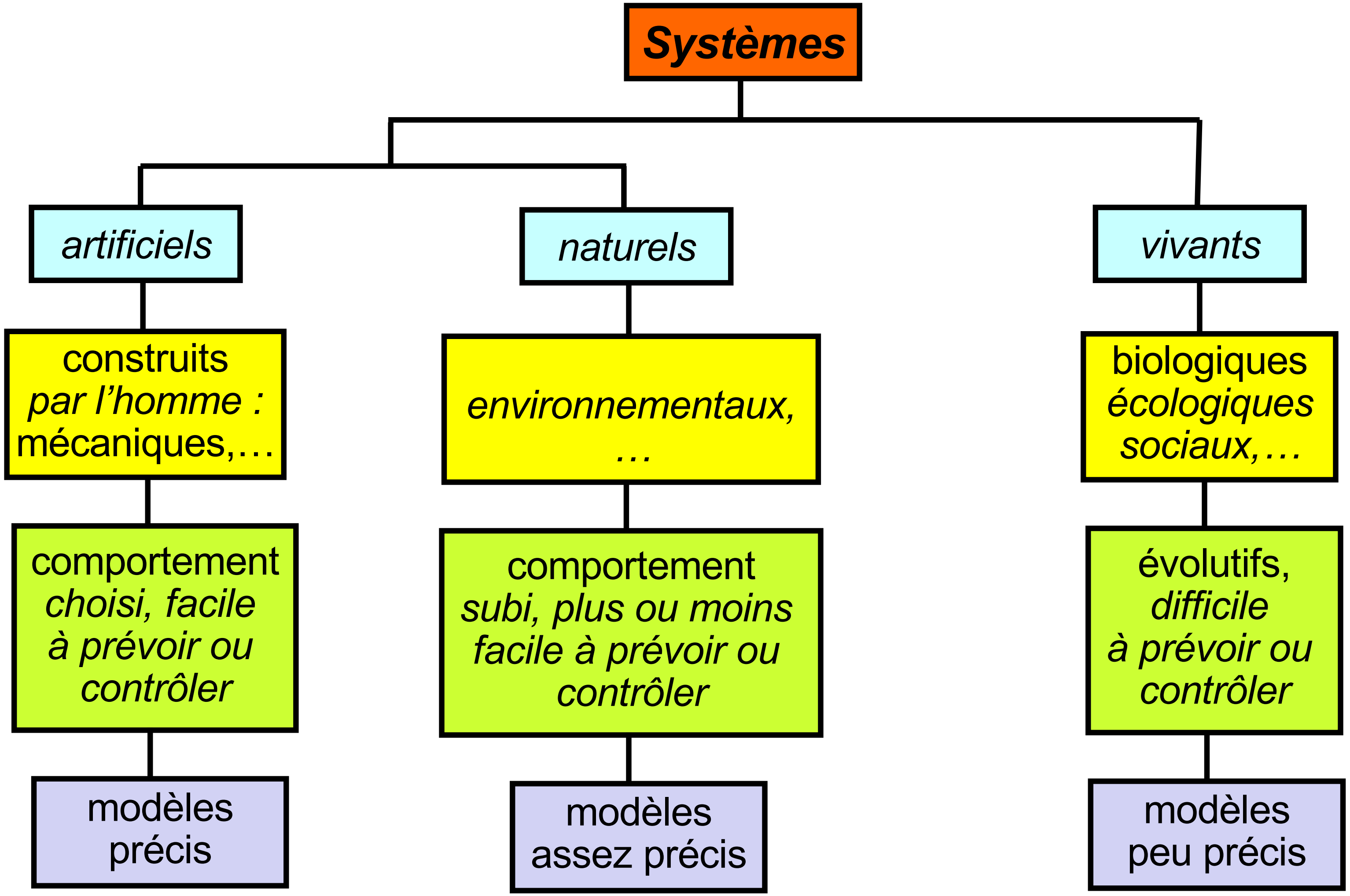
- ***C'est l'objet que l'on désire étudier possédant un ou des signaux d'entrée et un ou des signaux de sortie***

  Exemples : voiture, avion, circuit électrique, bras de robot,…

- En automatique, on représente souvent un système par un schéma fonctionnel (ou schéma bloc)



Classification des systèmes



Définition - ***Système statique*** ***(ou instantanée)***

- ***C'est un système dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) à un instant donné ne dépend que de l'entrée à cet instant***

- Un système statique est dit ***sans mémoire*** car sa sortie *y(t) est* indépendante des valeurs antérieures de l'entrée $u(\tau)$ avec $\tau < t$, pour tout *t*

- L'étude d'un système statique nécessite la connaissance de :
  - sa loi d'évolution, qui prend la forme d'une ***<u>équation algébrique</u>*** du type ***y(t)=f [x(t)]***

$$y(t) = \frac{2x^2(t)}{5\cos\left(x(t)\right)+1}$$

- Exemples ***:*** *y(t)=R x(t)*

Définition - ***Système dynamique***

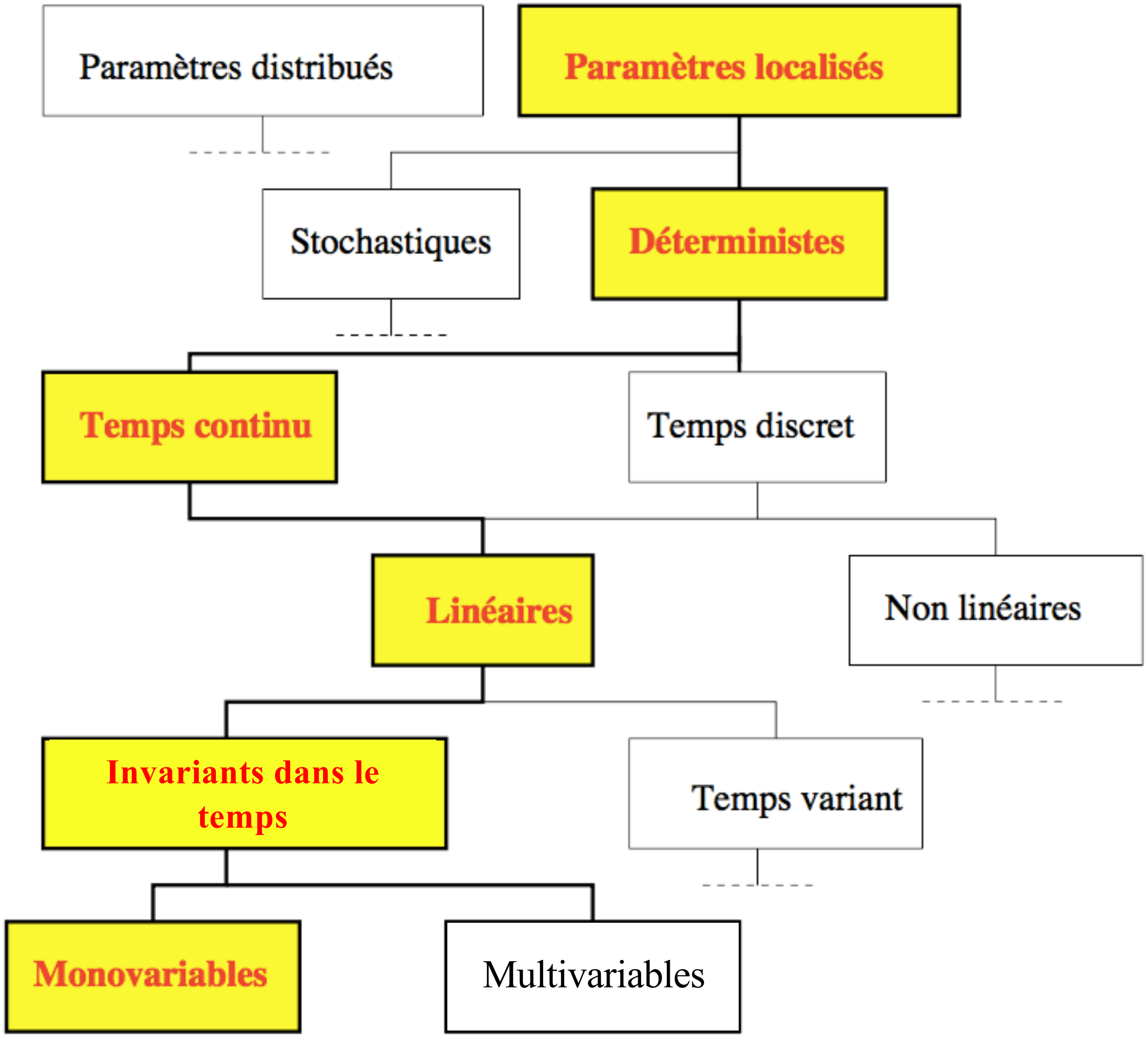
- ***C'est un système dont l'état* (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) *évolue en fonction du temps***

  – Un système dynamique est dit ***à mémoire*** car sa sortie dépend de ses valeurs et de celles de l'entrée dans le passé

- L'étude d'un système dynamique nécessite la connaissance de :
  – sa loi d'évolution, qui prend la forme d'une ***équation différentielle***
  – son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant *t=0*

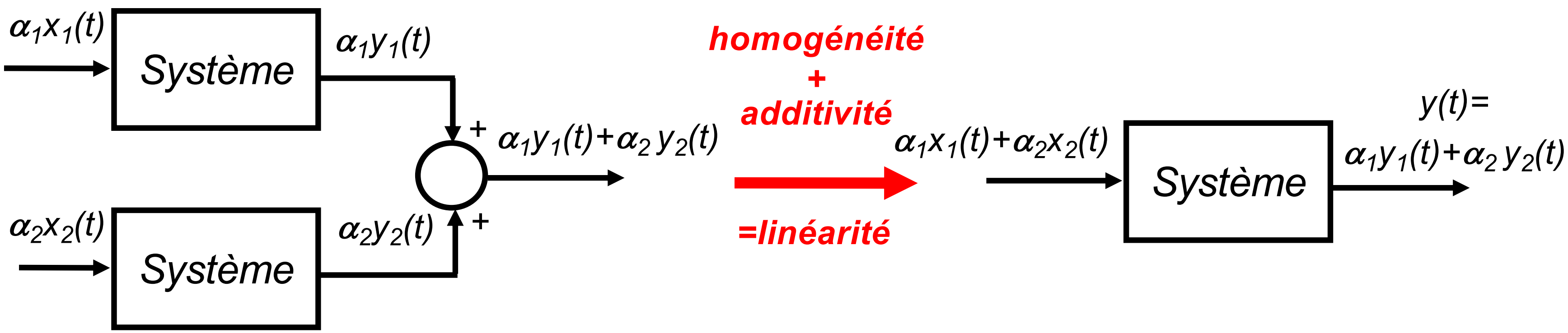
- Exemples
  – Bras de robot rigide $$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgl\sin\theta(t) = u(t) \quad \theta(0) = 15°;\dot{\theta}(0) = 0$$
  – circuit RC $$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = u(t) \quad s(t) = 0$$

Classification des systèmes dynamiques



Propriété importante : **Linéarité**

- ***Un système est <u>linéaire</u>***
  - *S'il est **homogène et additif***
  - *Si pour n'importe quelle paire d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, la réponse du système à $\alpha_1\, x_1(t)+\alpha_2\, x_2(t)$ est égale à la somme des réponses à l'entrée $\alpha_1\, x_1(t)$ et à l'entrée $\alpha_2\, x_2(t)$*

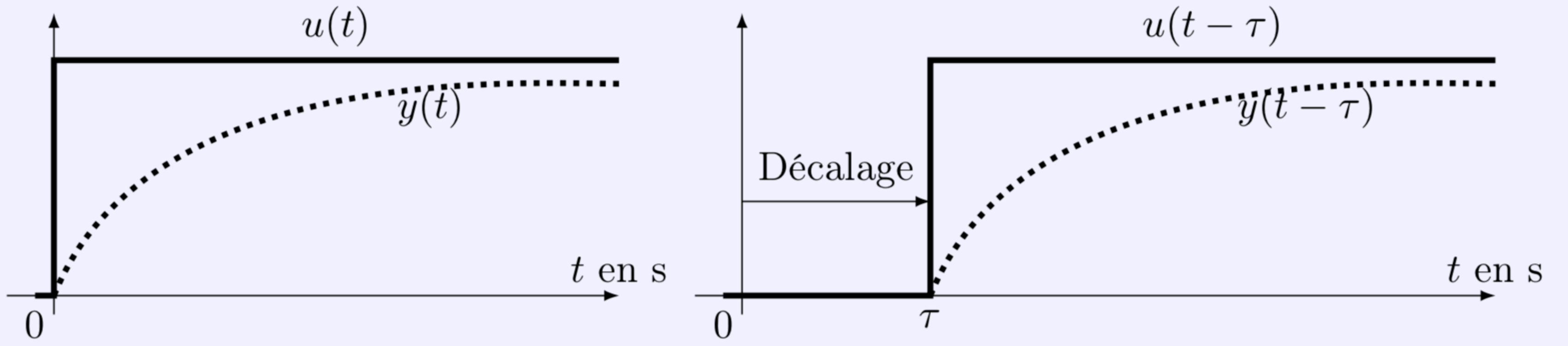


  - Si on sait calculer la réponse d'un système à des entrées simples, on pourra calculer la réponse à n'importe quelle combinaison linéaire de ces entrées simples

Propriété importante : ***Invariance dans le temps***

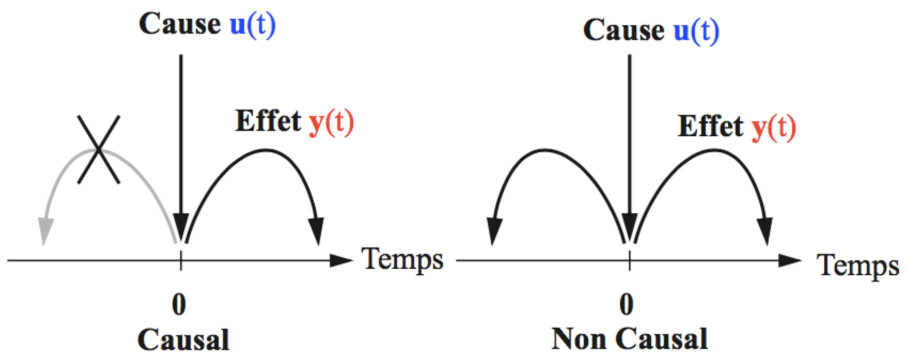
- Un système ***invariant dans le temps* (ou stationnaire)** a des caractéristiques qui ne varient pas dans le temps
  - *si on applique le signal u(t) à l'entrée du système et que l'on obtient y(t), alors pour tout décalage temporel τ, si on applique le signal u(t-τ) à l'entrée du système, on obtiendra y(t-τ)*

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t-\tau)$$



Propriété importante : ***Causalité***

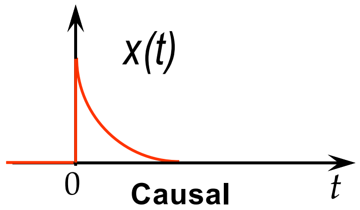
- **Un système est causal**
  - si l'effet (variation de la sortie) suit la cause (variation de l'entrée) dans le temps
  - La réponse (temporelle) du système ne peut précéder son entrée

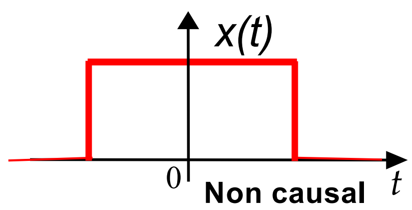


  - Tous les systèmes physiques réels sont causaux

- **Un signal est causal**

  $si\ x(t) = 0\ \forall\ t < 0$





Système linéaire invariant dans le temps *(LTI)* et causal

- Un système dynamique d'entrée *x(t)* et de sortie *y(t)* décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \qquad n \geq m$$

est ***linéaire, invariant dans le temps (LTI)*** et ***causal***

« Linear systems are important because we can solve them », Richard Feynman

Dans la suite du cours, on supposera que les systèmes dynamiques sont LTI et causal

Visionner la vidéo de Brian Douglas : Control Systems Lectures-LTI Systems

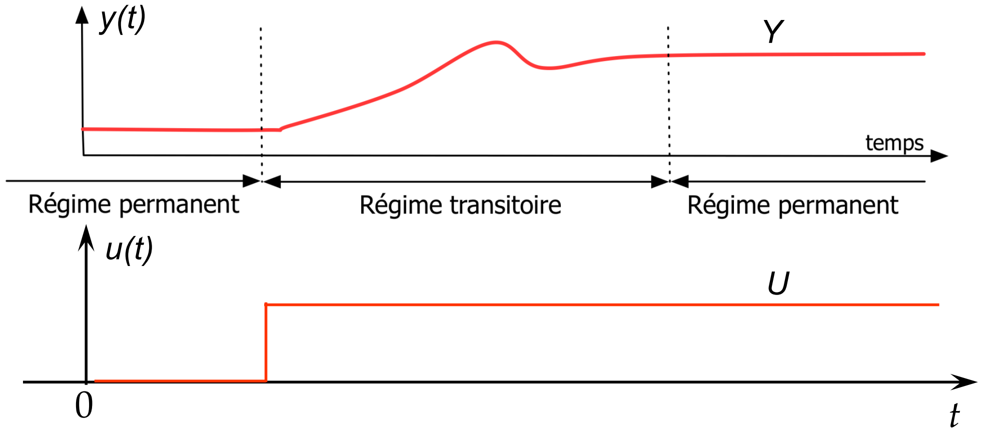
Caractéristiques de tous les systèmes physiques réels

- Les systèmes physiques réels ne sont :
  - ni linéaires
  - ni invariants dans le temps

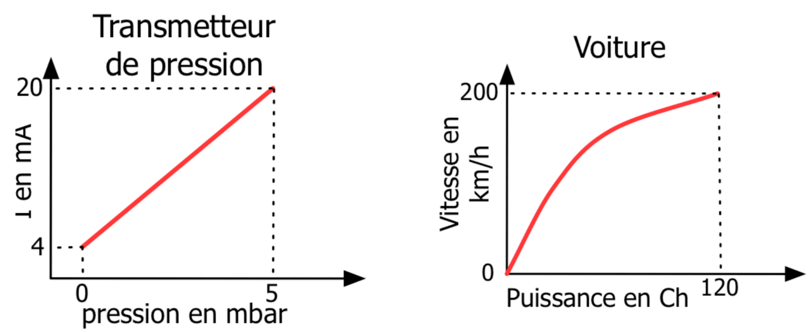
- Tous les systèmes physiques présentent en effet un caractère non linéaire et varient au cours du temps

Caractéristique statique d'un système dynamique

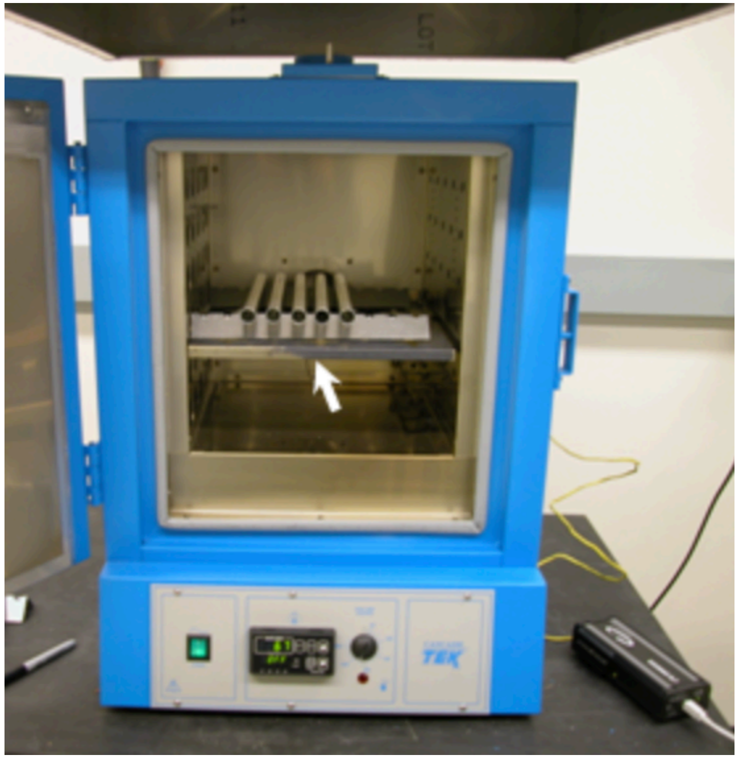
- Régime transitoire/permanent d'un système

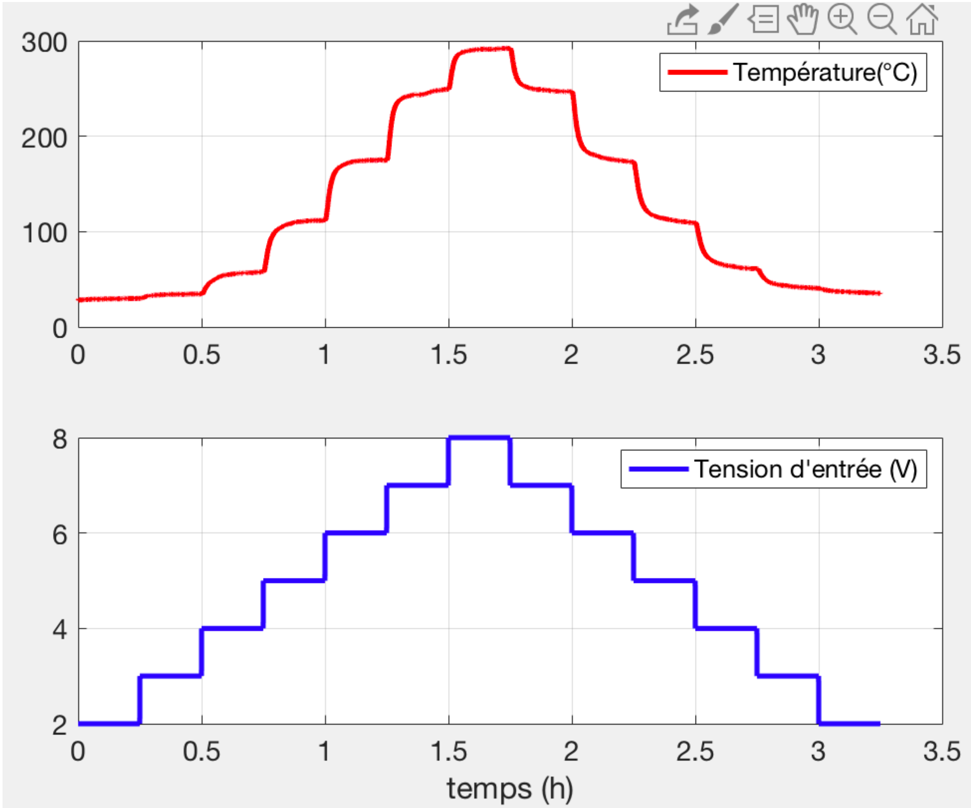


- Caractéristique statique
  - Soit un système dynamique ayant une entrée *u(t)* et une sortie *y(t)*. La caractéristique statique consiste à tracer les valeurs de la sortie *y(t)* notée Y en régime permanent (ou statique) en fonction de celles de l'entrée *u(t), notée U*



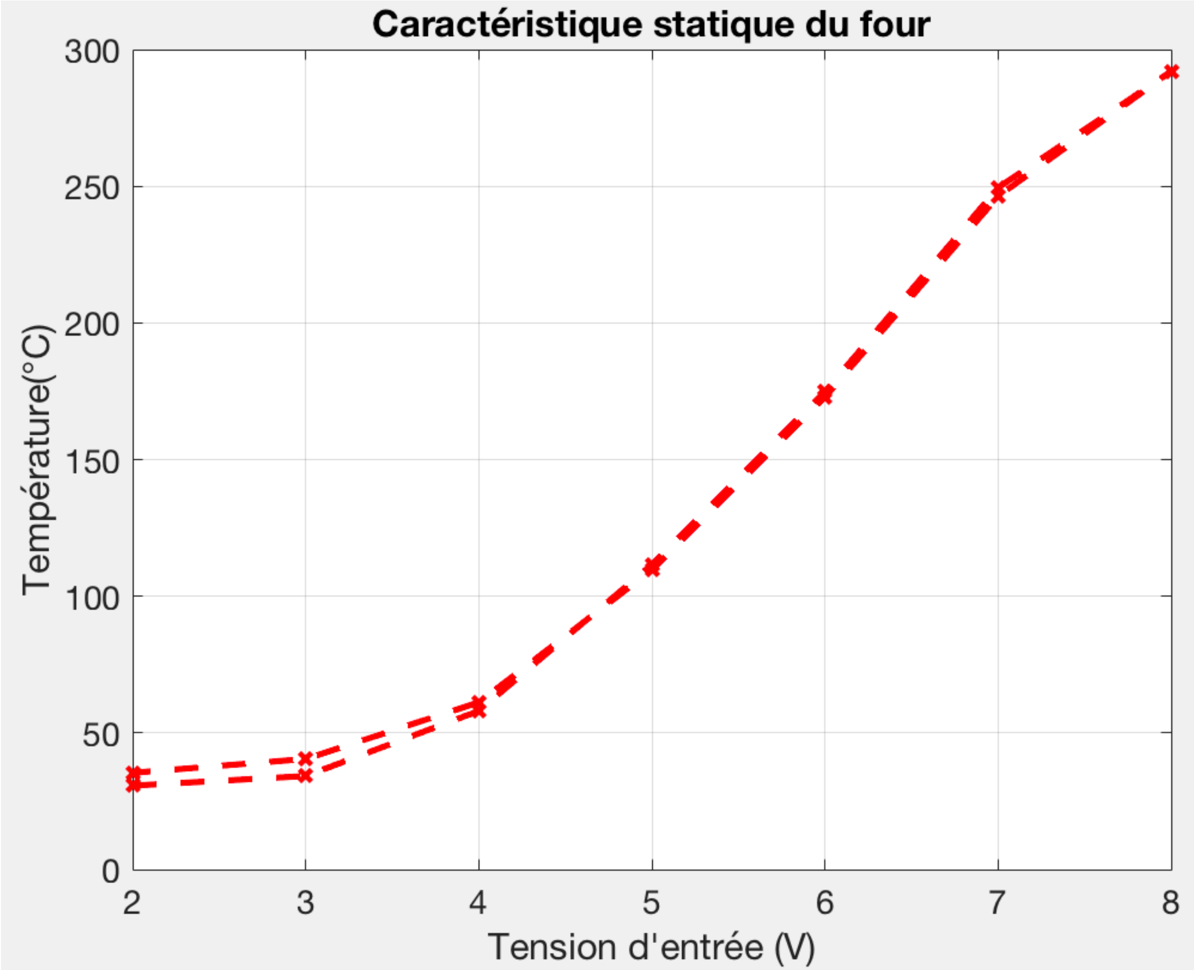
Exemple : caractéristique statique d'un four de traitement thermique





- Enregistrement de la réponse en température à un succession d'échelon positif puis négatif sur la plage possible de l'entrée
  - Relevé des différents points de fonctionnement (Y;U) (en régime permanent) et déduction du tracé de la caractéristique statique

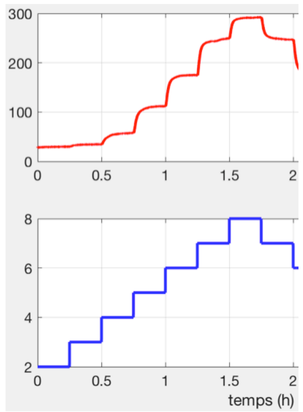
Caractéristique statique d'un four de traitement thermique



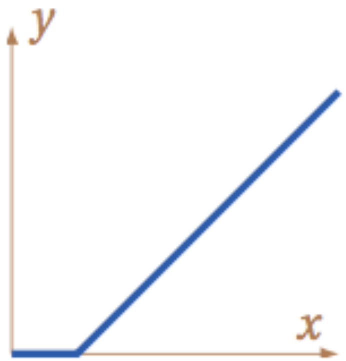
En régime permanent,
le modèle statique est une
équation algébrique :
Y= K × U pour 4 < U < 7

En régime transitoire,
le modèle dynamique est une
équation différentielle

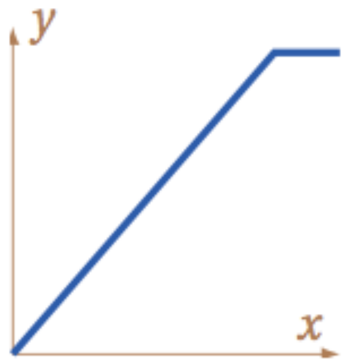
$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t)$$



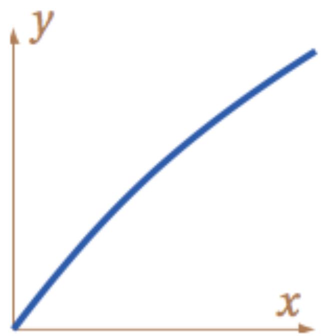
Principales formes de caractéristique statique non-linéaire



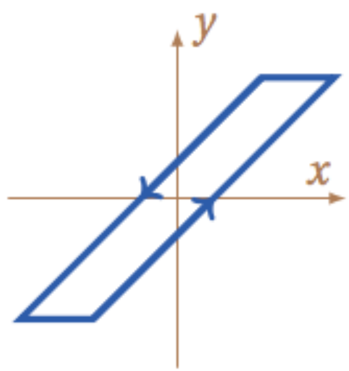
(a) seuil



(b) saturation



(c) courbure



(d) hystérésis

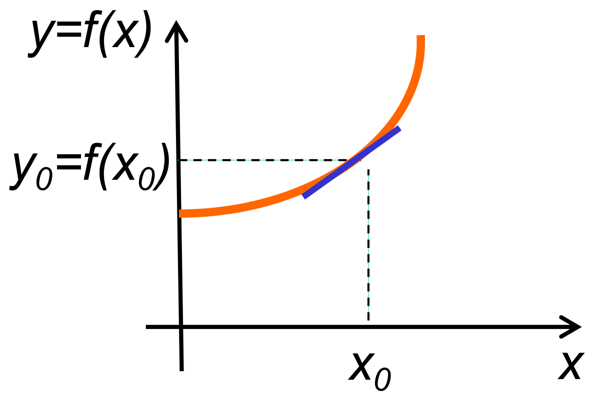
Principales non-linéarités

- **Seuil**
  - Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs
- **Saturation**
  - Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite. Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels)
- **Hystérésis**
  - Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée
- **Courbure**
  - La quasi totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées. Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement

Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

- Tous les systèmes physiques présentent un caractère non linéaire et varient plus ou moins lentement au cours du temps

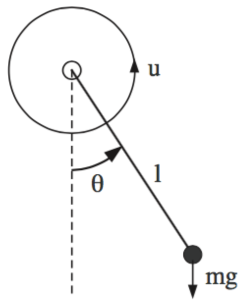
- Il est possible de les considérer comme linéaires et invariants dans le temps **autour d'un point de fonctionnement** pour lequel les signaux d'entrée/sortie du système varient faiblement



Linéarisation d'un système

- Exemple : bras de robot rigide commandé par un moteur au niveau de son articulation

$$ml^2\ddot{\theta}(t)+mgl\,\sin\big(\theta(t)\big)=u(t)$$

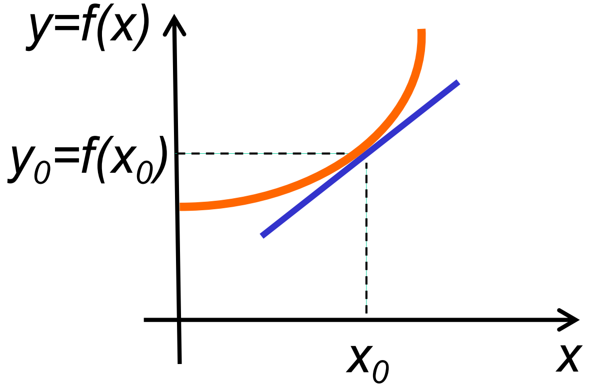


- On peut déterminer une version linéaire approchée par linéarisation valable autour du point $(x_0;y_0)$ en utilisant le développement de Taylor de la fonction *(non linéaire)* au premier ordre

$$f(x)=f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)$$

Rappel - Approximation affine d'une fonction dérivable en un point

- Soit une fonction *f(x)* dérivable en un point x_0



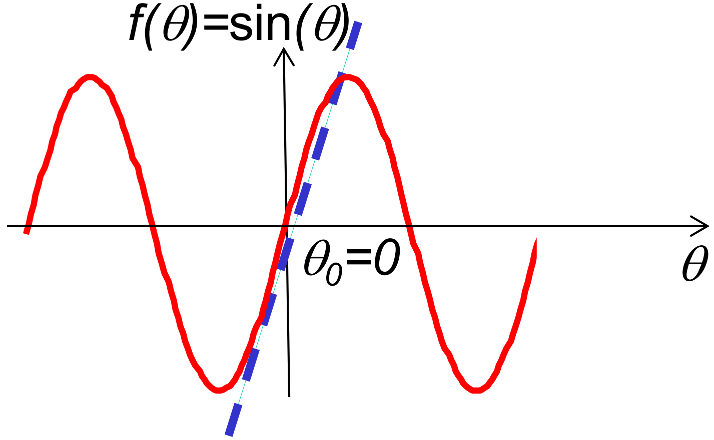
- Une approximation affine de *f(x)* au voisinage de $x=x_0$ est donnée par :

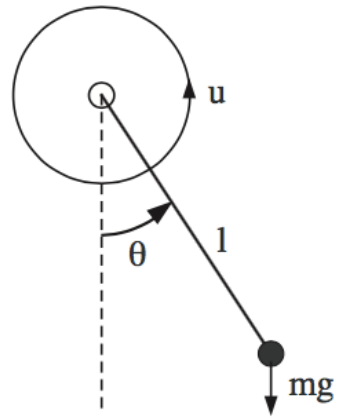
$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

  – Rq: cette approximation n'est valable qu'autour du point $(x_0;y_0)$

Linéarisation du modèle du bras de robot rigide

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\,\sin\big(\theta(t)\big) = u(t)$$





Une approximation affine *(linéaire ici)* de $f(\theta)=sin(\theta)$ au voisinage du point d'équilibre $(\theta_0\,;\,f(\theta_0))=(0;0)$ est donnée par :

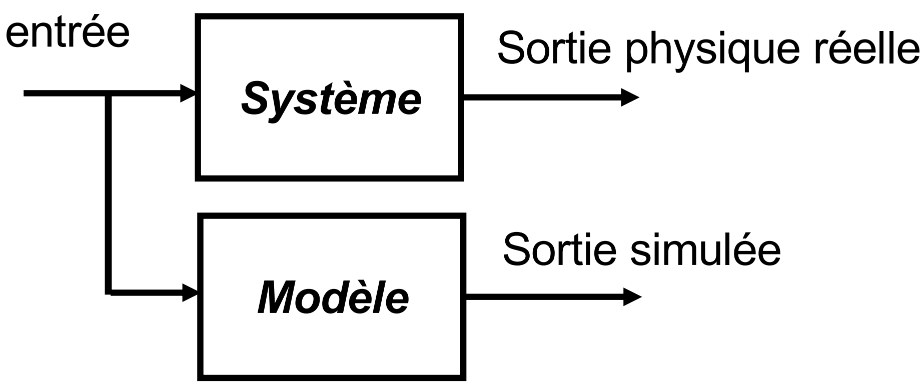
$$f(\theta) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$
$$sin(\theta) = sin(0) + cos(0)(\theta - 0) = \theta$$

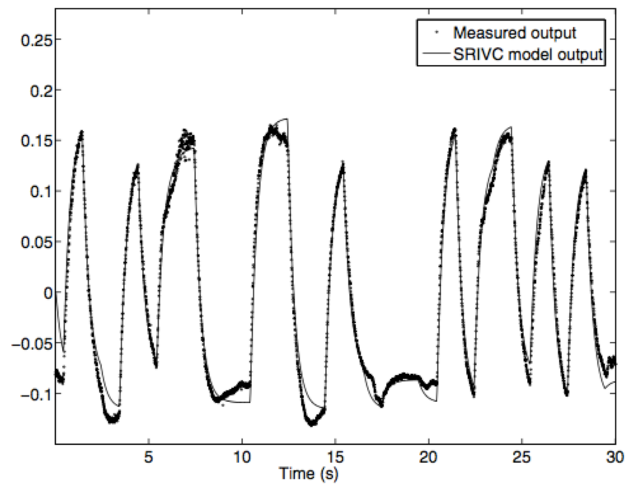
Autour de $\theta_0 = 0,\quad \sin\big(\theta(t)\big) \approx \theta(t)$

Modèle linéarisé du bras de robot $\boxed{ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\,\theta(t) = u(t)}$

Définition - ***Modèle***

- ***C'est un ensemble de relations mathématiques entre le ou les signaux d'entrée et le ou les signaux de sortie d'un système***
  - Il doit approcher le comportement réel du système



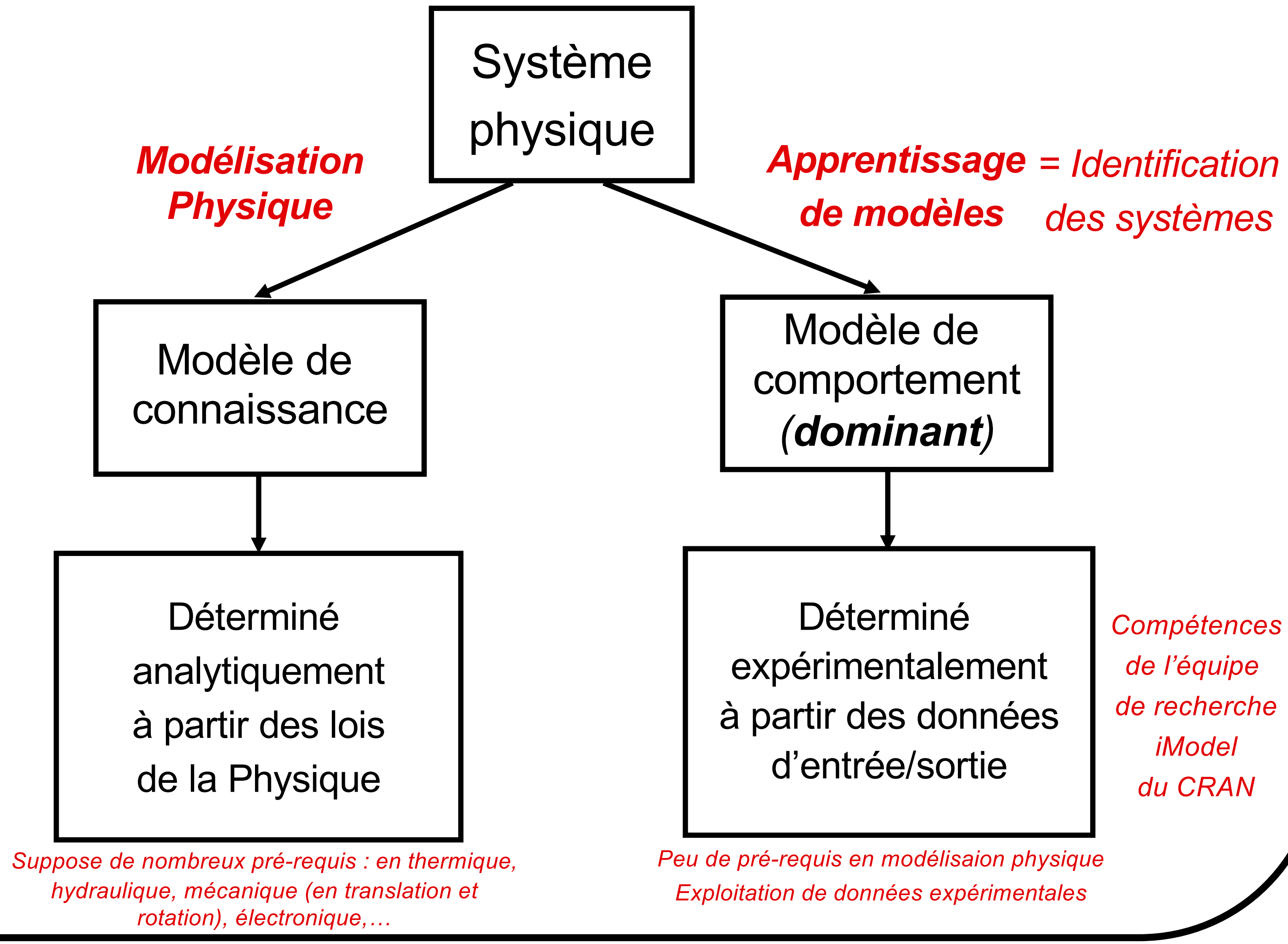


  - Sa complexité/précision dépend de son utilisation

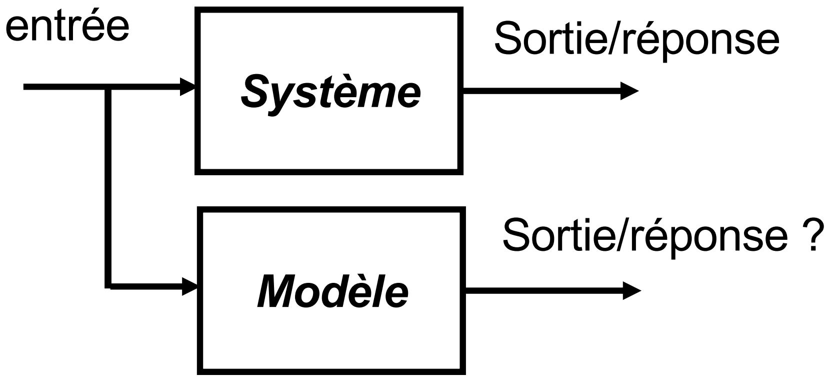
Visionner la vidéo de Brian Douglas :

Control Systems Lectures-Modeling Physical Systems, An Overview

Types de modèles & d'approches de modélisation



Réponse temporelle d'un système – Solution 1



– On a déterminé un modèle de connaissance qui prend la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \qquad n \geq m$$

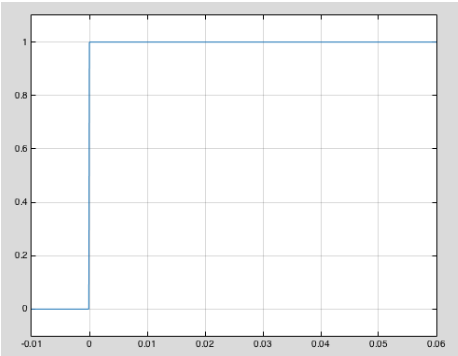
Comment exploiter cette équation différentielle pour déterminer la réponse à un signal d'entrée quelconque ?

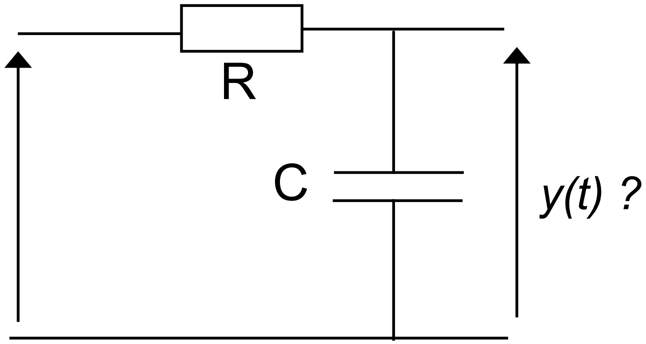
Exemple : réponse indicielle d'un filtre RC

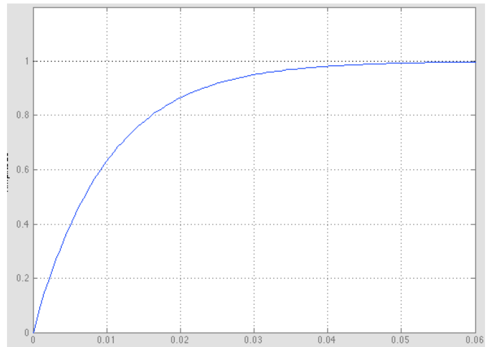
On peut facilement déterminer un modèle de connaissance qui prend la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad x(t)=\Gamma(t)\ et\ y(0)=0$$

Solution 1 - Il faut résoudre son équation différentielle par les méthodes mathématiques classiques !

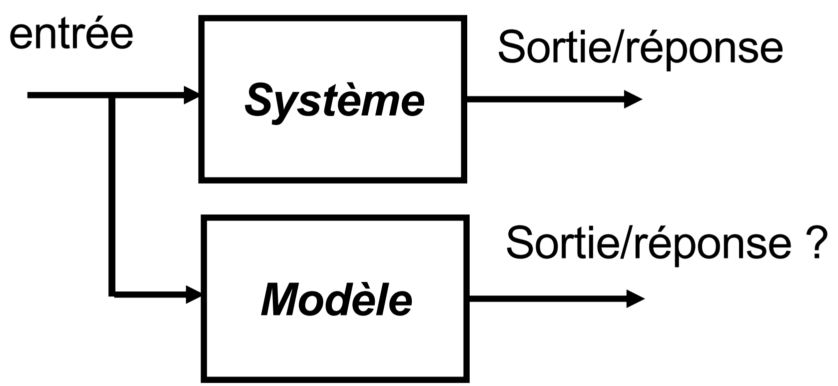




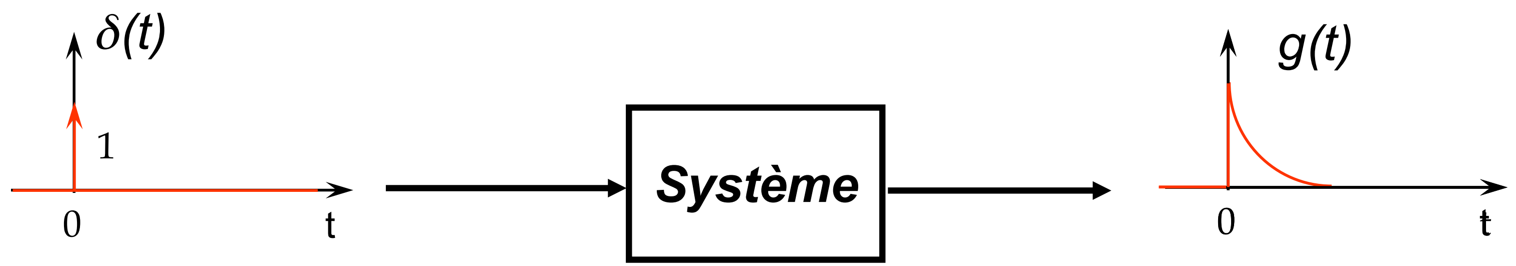


$$y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

Réponse temporelle d'un système – Solution 2



– Supposons qu'on ait déterminé ou mesuré la réponse du système à une impulsion de Dirac



Comment exploiter cette réponse impulsionnelle pour déterminer la réponse à un signal d'entrée quelconque ?

Réponse temporelle via le produit de convolution

- *La réponse d'un système LTI à toute entrée x(t) peut être calculée à l'aide du **produit de convolution** entre la réponse impulsionnelle du système g(t)* et l'entrée *x(t) définie par :*

$$y(t) = g(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

  - Si le système est causal : *g(t)=0* pour tout *t < 0*

$$y(t) = g(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

  - *La relation entrée/sortie via le produit de convolution est cependant difficile à exploiter dans le domaine temporel car les calculs sont complexes*

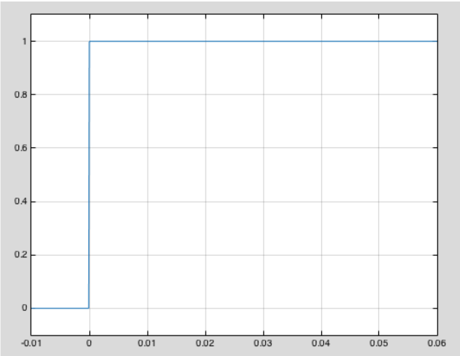
Exemple : réponse indicielle d'un filtre RC

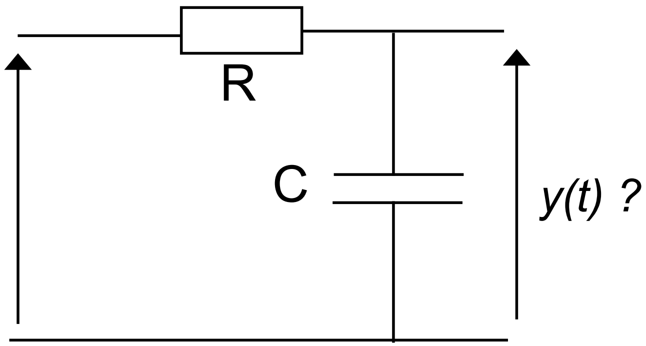
A partir de la réponse impulsionnelle du filtre $g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Gamma(t)$

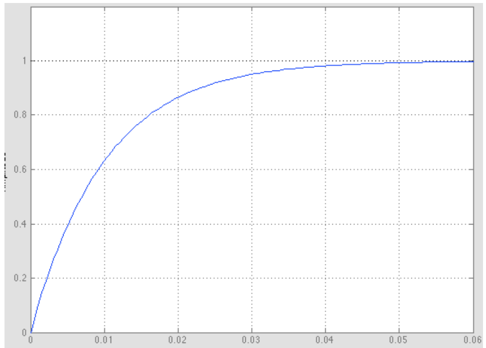
$e(t) = \Gamma(t)$
et $y(0) = 0$

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

Solution 2 - Il faut calculer un produit de convolution. *Calculs compliqués !*







$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Gamma(t)$$

Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace

- Résoudre une équation différentielle d'ordre > à 2 à l'aide des méthodes mathématiques classiques est souvent compliquée

Solution 3 – Exploiter la transformée de Laplace (TL). *Calculs plus simples !*

- La ***procédure de résolution*** est alors la suivante :
  1. Appliquer la TL aux 2 membres de l'équation différentielle en *y(t) en tenant compte des conditions initiales des signaux*
  2. Calculer *Y(s)* en utilisant les propriétés et la table de TL
  3. Décomposer *Y(s)* en éléments simples
  4. Utiliser la table de transformées pour obtenir *y(t)* par transformée inverse

Pierre-Simon LAPLACE

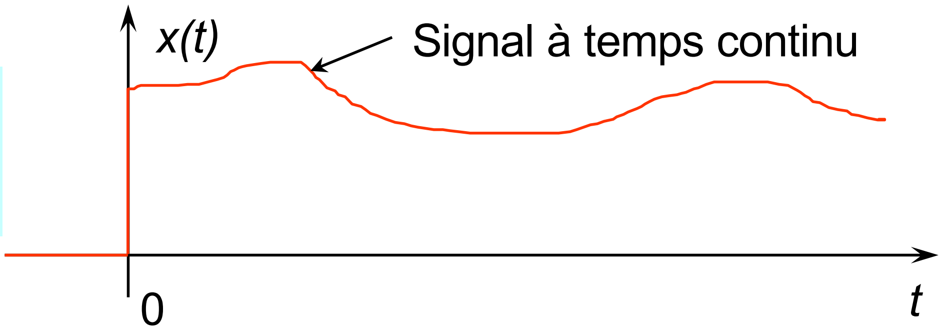
- 23 mars 1749 - 5 mars 1827
- Grand scientifique français
- A profondément influencé les mathématiques, l'astronomie, la physique et la philosophie des sciences de son siècle
- La transformée qui porte son nom facilite grandement l'analyse des systèmes à temps continu

Visionner la vidéo de Brian Douglas :
Control Systems Lectures-
The Laplace Transform and the Important Role it Plays

Définition

- Soit un signal à temps continu *x(t)* causal, la transformée de Laplace de *x(t)* est définie par :

$$\mathcal{L}\big(x(t)\big)=X(s)=\int_0^{+\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$



où
  - *s* est la variable de Laplace (parfois notée *p*)
  - *s* est complexe : $s=\alpha+j\omega$

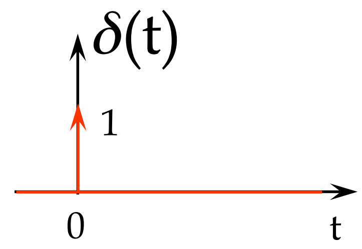
- On dit que *X(s)* est la transformée de Laplace du signal *x(t)*

- *Remarque : les conditions de convergence de l'intégrale impropre ne seront pas indiquées*

Transformée de Laplace de signaux usuels

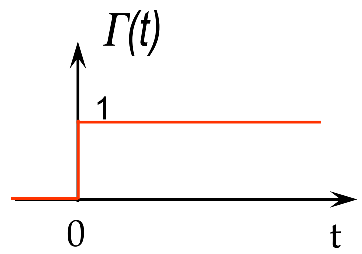
- *Impulsion de Dirac*

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$$



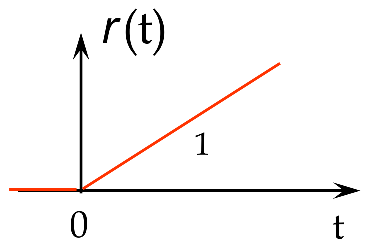
- *Echelon unité*

$$\mathcal{L}\left(\Gamma(t)\right) = \frac{1}{s}$$



- *Rampe unité*

$$\mathcal{L}\left(r(t)\right) = \frac{1}{s^2}$$



- *Exponentielle causal* (*a* scalaire réel ou complexe)

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\Gamma(t)\right) = \frac{1}{s+a}$$

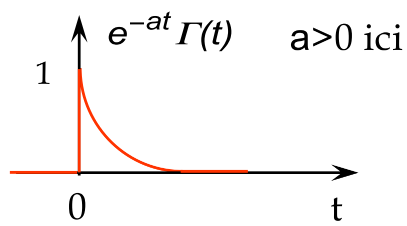


Table de transformées de Laplace

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{s}$
$r(t)=t\ \Gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ \Gamma(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\Gamma(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n\ e^{-at}\Gamma(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Table de transformées de Laplace

$x(t)$	$X(s)$
$\sin(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$
$\cos(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_o^2}$
$e^{-at}\sin(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$
$e^{-at}\cos(\omega_o t)\,\Gamma(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$

Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Linéarité***

$$\mathcal{L}\left(a\,x(t)\right) = a\,X(s)$$
$$\mathcal{L}\left(a\,x(t) + b\,y(t)\right) = a\,X(s) + b\,Y(s)$$

- ***Dérivation par rapport au temps***

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \ldots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right) = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

- ***Théorème du retard***

$$\mathcal{L}\left(x(t-t_0)\right) = e^{-st_0}\,X\left(s\right)$$

Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Produit de convolution***

$$\mathcal{L}\left(x(t)*y(t)\right) = X(s) \times Y(s)$$

$$x(t)*y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

- ***Théorème de la valeur initiale***

$$x(0^+) = \lim_{s \to +\infty} sX(s)$$

- ***Théorème de la valeur finale***

$$\lim_{t \to +\infty} \left(x(t)\right) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Si la limite du signal existe

Exemple :

$$x(t) = e^{-2t}\,\Gamma(t) \qquad X(s) = \frac{1}{s+2}$$

Contre – exemple :

$$x(t) = \cos\left(\omega_o t\right)\Gamma(t) \qquad X(s) = \frac{s}{s^2+\omega_o^2}$$

Transformée de Laplace inverse

- Le problème consiste à retrouver le signal *x(t)* à partir de *X(s)*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = x(t)$$

- *Utilisation de la définition à partir de l'intégrale*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X\left(s\right)\right)=x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

Formule compliquée ! On évite de l'utiliser

- *La transformée de Laplace inverse est un opérateur* ***linéaire***

On va exploiter cette propriété

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(a\, X(s)+b\; Y(s)\right) &= a\,\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right)+b\,\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)\\ &= a\; x(t)+b\; y(t)\end{aligned}$$

Transformée de Laplace inverse dans le cas de formes simples

- Exploitation directe de la table de transformées de Laplace
  - *On essaie de mettre la transformée de Laplace sous une forme donnée dans la table*
- *Exemples*

$$X(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$x(t) = 3e^{-2t}\Gamma(t)$$

$$Y(s) = \frac{4}{2s+1}$$

$$Y(s) = \frac{4}{2s+1} = \frac{4}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\Gamma(t)$$

Transformée de Laplace inverse dans le cas de formes simples

- Exploitation directe de la table de transformées de Laplace
  - *On essaie de mettre la transformée de Laplace sous une forme donnée dans la table*

- *Exemples (suite) :*

$$X(s) = \frac{2}{(s+4)^3}$$

$$x(t) = t^2\, e^{-4t}\, \Gamma(t)$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2+16}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2+16} = \frac{4}{s^2+4^2}$$

$$y(t) = \sin(4t)\, \Gamma(t)$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE
POLYTECH NANCY

Transformée de Laplace inverse par décomposition en éléments simples

- La méthode consiste à ***décomposer en éléments simples Y(s)*** *et à exploiter ensuite la table de transformées de Laplace*

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-s_n}$$

$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s-s_1}\right] + \ldots + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{A_n}{s-s_n}\right]$$

$$= A_1 e^{s_1 t}\,\Gamma(t) + \ldots + A_n e^{s_n t}\,\Gamma(t)$$

A_i : scalaire réel ou complexe

Rappels : décomposition en éléments simples

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} \qquad avec \quad n>m$$

- Cas où les *n* racines du dénominateur de *Y(s)* sont toutes distinctes

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}$$

$$A_i=\lim_{s\to s_i}\left[\left(s-s_i\right)Y(s)\right] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

Transformée de Laplace inverse
Exemple

- Déterminer le signal *y(t)* ayant comme transformée de Laplace

$$Y(s) = \frac{s+2}{s\left(s+1\right)\left(s+3\right)}$$

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right)\Gamma(t)$$

Rappels : décomposition en éléments simples

- **<u>2ème cas :</u>** Si $Y(s)$ possède une racine multiple s_1 de multiplicité r :

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\left(s-s_1\right)^r}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{\left(s-s_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_r}{\left(s-s_1\right)^r}$$

$$A_i=\lim_{s\to s_1}\left(\frac{1}{\left(r-i\right)!}\left[\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left\{\left(s-s_1\right)^r Y(s)\right\}\right]\right) \qquad i=1,2,\cdots,r$$

  - Formule compliquée ! On évite de l'utiliser

  - Méthode recommandée pour les cas « simples » :
    - On détermine A_r par la méthode des limites
    - On choisit des valeurs de $s \neq s_1$ (par exemple $s=0$, $s=-1$ etc)
    - on résout un système d'équations pour les coefficients $A_1, \ldots, A_{r-1}$

Transformée de Laplace inverse
Exemple

- Déterminer le signal *y(t)* ayant comme transformée de Laplace

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1}\left[(s+1)^2\, Y(s)\right] = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \lim_{s\to -3}\left[(s+3)Y(s)\right] = -\frac{1}{4}$$

$$s = 0; Y(0) = \frac{2}{3} = A_1 + A_2 + \frac{A_3}{3}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right)\Gamma(t)$$

Cas particuliers de transformées de Laplace du 2e ordre

$$Y(s)=\frac{N(s)}{as^2+bs+c}$$ On calcule le discriminant Δ

- Si $\Delta>0$; les deux racines sont **réelles distinctes**

$$Y(s)=\frac{K}{a(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2} \qquad y(t)=\left(A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}\right)\Gamma(t)$$

- Si $\Delta=0$; la racine est **double réelle**. 2 cas sont à distinguer **:**

$$Y(s)=\frac{K}{a(s-s_1)^2}=\frac{A}{(s-s_1)^2} \qquad y(t)=Ate^{s_1t}\,\Gamma(t)$$

$$Y(s)=\frac{ds+e}{a(s-s_1)^2}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2} \qquad y(t)=\left(A_1e^{s_1t}+A_2te^{s_1t}\right)\Gamma(t)$$

- Si $\Delta<0$; les deux racines sont **complexes conjuguées**. 2 cas sont à distinguer :

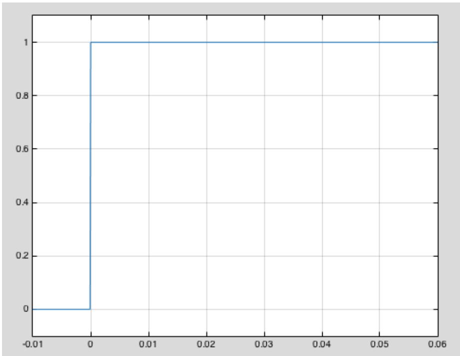
$$Y(s)=\frac{K}{as^2+bs+c}=A\frac{\omega_o}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_o^2} \qquad y(t)=Ae^{-\alpha t}\sin\left(\omega_o t\right)\Gamma(t)$$

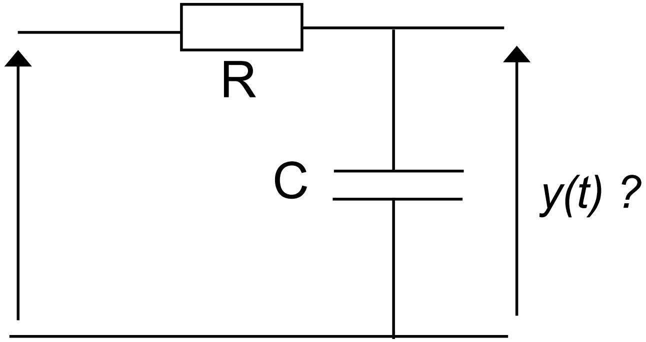
$$Y(s)=\frac{ds+e}{as^2+bs+c}=A\frac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_o^2} \qquad y(t)=Ae^{-\alpha t}\cos\left(\omega_o t\right)\Gamma(t)$$

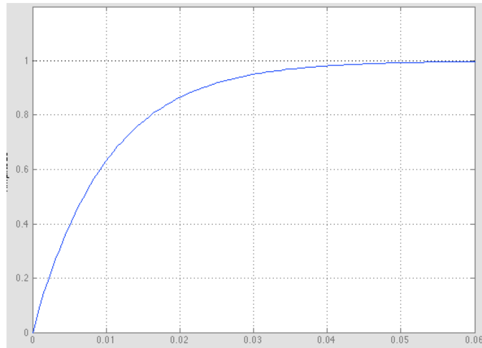
Exemple : réponse indicielle d'un circuit RC

A partir de l'équation différentielle $RC\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$ $\quad x(t)=\Gamma(t)$ et $y(0)=0$

Solution 3 – Exploiter la transformée de Laplace







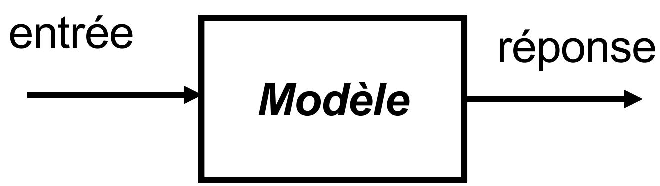
$$RC\,L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)+L\big(y(t)\big)=L\big(x(t)\big)$$

$$RC\big(sY(s)-y(0)\big)+Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(RCs+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}$$

$$\boxed{y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)}$$

Réponse temporelle d'un système – Bilan



– **Solution 1 –** A partir de son équation différentielle, il faut résoudre l'équation. *Calculs souvent compliqués !*

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad\qquad y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

– **Solution 2 –** Connaissant sa réponse impulsionnelle, on peut calculer la réponse via le produit de convolution. *Calculs également compliqués !*

$$g(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\Gamma(t) \qquad y(t)=g(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \qquad y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

– **Solution 3 –** A partir de son équation différentielle, on peut exploiter la transformée de Laplace. *Calculs plus simples*

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \qquad y(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)$$

Fonction de transfert

- Définition : *c'est le rapport de la transformée de Laplace de la sortie du système Y(s) sur la transformée de Laplace de l'entrée X(s) lorsque les conditions initiales sont nulles*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Lorsque les conditions initiales des signaux d'entrée/sortie sont nulles

- Remarque importante :

En Automatique continue, on représente un système par sa fonction de transfert G(s)

Visionner la vidéo de Brian Douglas :
Control Systems Lectures-Transfer functions

Réponse impulsionnelle & fonction de transfert

- *Rappel 1* : la sortie *y(t)* d'un système s'écrit dans le domaine temporel comme le ***produit de convolution*** entre la réponse impulsionnelle *g(t)* et l'entrée *x(t)*

$$y(t) = g(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

- En appliquant la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(g(t)*x(t)) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)=G(s)\times X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \mathcal{L}(g(t)) \quad \text{lorsque les CI nulles}$$

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

(en supposant les CI nulles)

Equation différentielle & fonction de transfert

- *Rappel 2* : l'entrée et la sortie d'un système sont également reliées dans le domaine temporel par une équation différentielle

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

En appliquant la transformée de Laplace aux 2 membres et en utilisant :

$$\mathrm{L}\left(\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right) = s^i X(s) \quad \text{en supposant les conditions initiales (CI) nulles}$$

$$\left(a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n\right) Y(s) = \left(b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m\right) X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} \quad \textbf{lorsque les CI nulles}$$

La fonction de transfert d'un système peut être déterminée à partir de son équation différentielle

(en supposant les CI nulles)

Fonction de transfert - Propriétés

- Ce concept de fonction de transfert ne s'applique qu'aux systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI)
- *G(s)* ne dépend que du système. Elle ne dépend ni de l'entrée, ni des conditions initiales des signaux d'E/S
- *La fonction de transfert d'un système s'écrit*
  - *souvent comme une* ***fonction rationnelle*** *: rapport de 2 polynômes*

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

  - *mais pas toujours !*
    - Ex : système linéaire invariant dans le temps avec retard pur

$$\dot{y}(t) = x(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$$

Ordre d'un système

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Définition
  - ***L'ordre n*** *d'un système est le degré le plus élevé du polynôme du dénominateur de G(s), le cas échéant après élimination des facteurs communs au numérateur et au dénominateur*
  - Exemples

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_o^2}; \quad n = 2 \qquad\qquad G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s+2}; \quad n = 1$$

Gain statique d'un système

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Définition
  - ***Le gain statique** d'un système est la valeur de G(s) pour s=0*

$$K = \lim_{s \to 0} G(s)$$

    - Pour un *système stable*, on a aussi $K = \dfrac{\lim_{t \to +\infty} y(t)}{\lim_{t \to +\infty} x(t)}$
  - Il est parfois utile de définir d'autres gains :
    - ***Gain en vitesse*** $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$
    - ***Gain en accélération*** $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$

Exemple

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$K = 2$

$K_v = 0$

$K_a = 0$

Pôles et zéros d'une fonction de transfert

- Soit une fonction de transfert *G(s)*

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+\ldots+a_1 s+a_0}=C\,\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s-p_i\right)}$$

- Définitions
  - ***zéros*** z_j : racines du numérateur *N(s)=0*
  - ***pôles*** p_i : racines du dénominateur *D(s)=0*
  - On trace souvent le ***diagramme des pôles/zéros***
  - Ils peuvent être réels ou complexes
  - S'ils sont complexes, ils apparaissent en paires conjuguées
  - Exemple $G(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega_o^2}=\dfrac{s}{\left(s+j\omega_o\right)\left(s-j\omega_o\right)}$

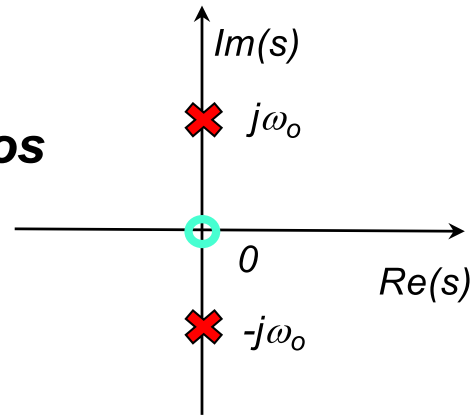
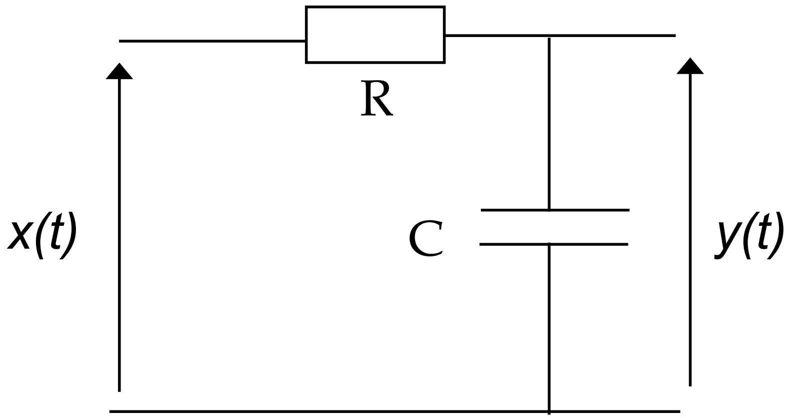


Diagramme des pôles/zéros

Fonction de transfert d'un circuit RC

Domaine temporel



$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Domaine de Laplace

$G(s)$?

$$RC\,L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + L\big(y(t)\big) = L\big(x(t)\big)$$

$$RC\big(sY(s) - y(0)\big) + Y(s) = X(s)$$

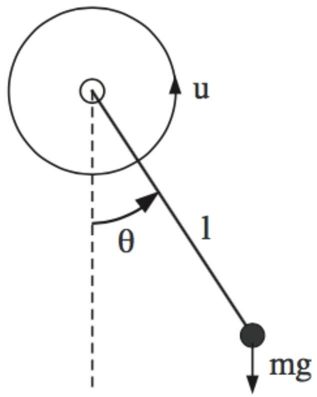
$$(RCs+1)Y(s) = X(s) \quad y(0) = 0$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+RC\,s}$$

$$n = 1; \quad K = 1; \quad p_1 = -\frac{1}{RC}$$

Fonction de transfert d'un bras de robot rigide

Domaine temporel



$$ml^2\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+mgl\,\theta(t)=u(t)$$

Domaine de Laplace

$$G(s)\ ?$$

$$ml^2\,\mathcal{L}\left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right)+mgl\mathcal{L}\big(\theta(t)\big)=\mathcal{L}\big(u(t)\big)$$

$$ml^2\left(s^2\Theta(s)\right)+mgl\Theta(s)=U(s)$$

$$\left(ml^2s^2+mgl\right)\Theta(s)=U(s)$$

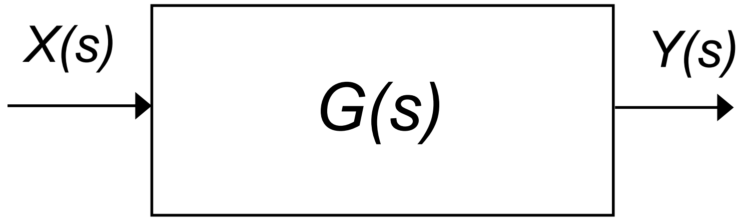
$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{ml^2s^2+mgl}$$

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{ml\left(ls^2+g\right)}$$

$$n=2;\quad K=\frac{1}{mgl};\quad p_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Schéma-bloc ou schéma fonctionnel

En ***Automatique****, on représente un système par un schéma-bloc qui relie la transformée de Laplace de l'entrée X(s) à la transformée de Laplace de la sortie Y(s) via sa fonction de transfert G(s)*



Du schéma-bloc, on peut en déduire les relations

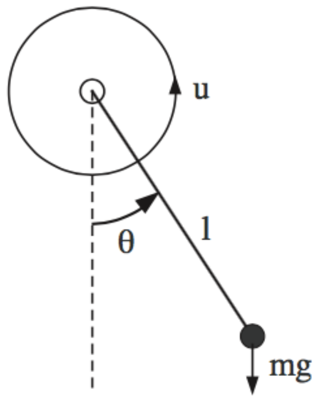
$$Y(s) = G(s)X(s)$$

ou

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

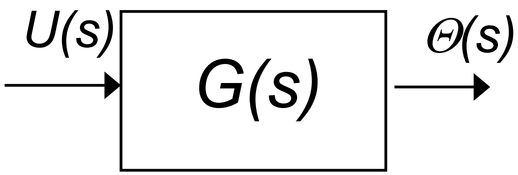
Modèle et représentation d'un bras de robot rigide en Automatique

Représentation en Physique



$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgl\,\theta(t) = u(t)$$

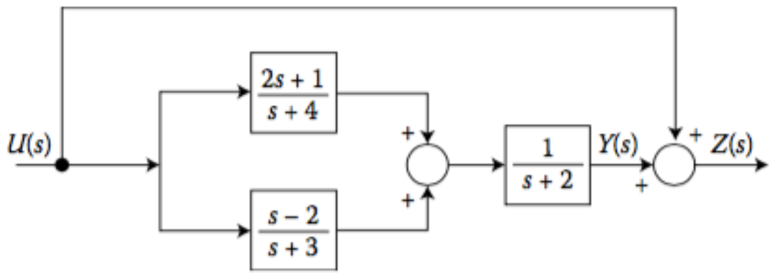
Représentation en Automatique

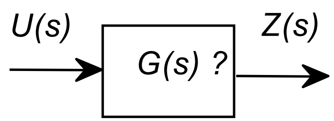


$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{ml\left(ls^2 + g\right)}$$

Algèbre des schéma-blocs

- Les systèmes automatiques sont souvent constitués de plusieurs fonctions de transfert interconnectées par des comparateurs ou sommateurs, des points de dérivation, des rétro-actions, …

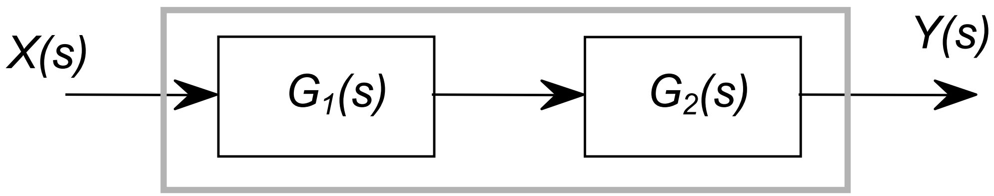


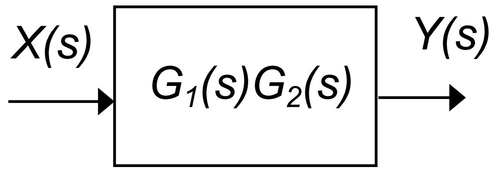


- Pour déterminer *G(s),* la fonction de transfert équivalente, on peut soit :
  – définir toutes les variables intermédiaires, écrire les équations liant ces variables, puis éliminer les variables intermédiaires pour calculer le rapport de la TL de la sortie et de la TL de l'entrée
  – ou simplifier pas à pas le schéma-bloc en utilisant les règles de l'algèbre des schémas-blocs

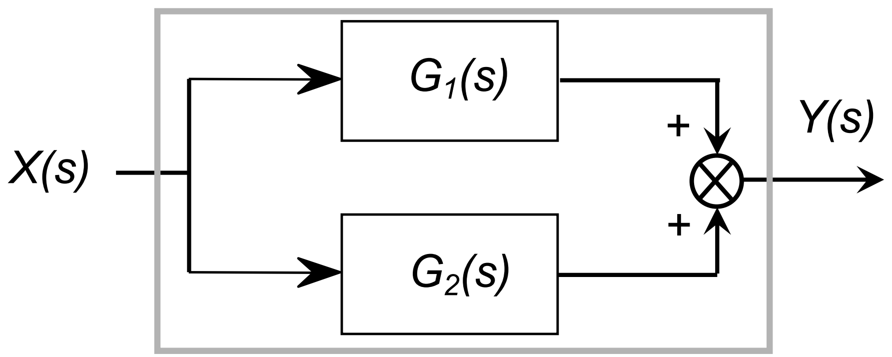
Algèbre des schéma-blocs

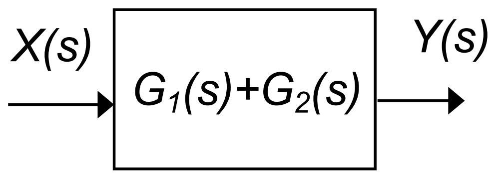
- Structure en série





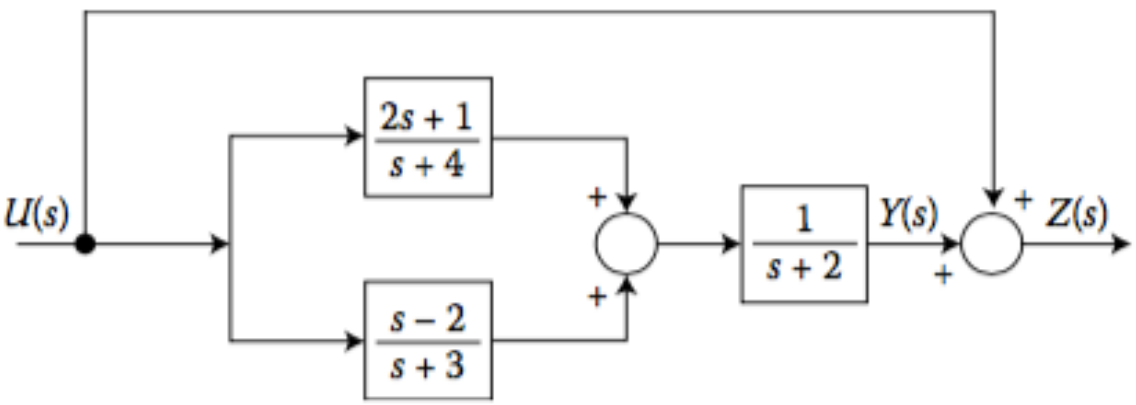
- Structure en parallèle

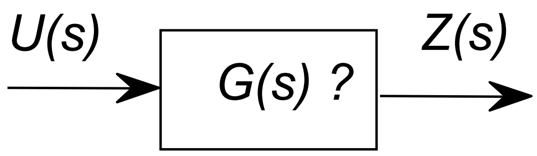




Simplification de schéma-blocs - Exemple

- Déterminer la fonction de transfert entre *U(s)* et *Z(s)*

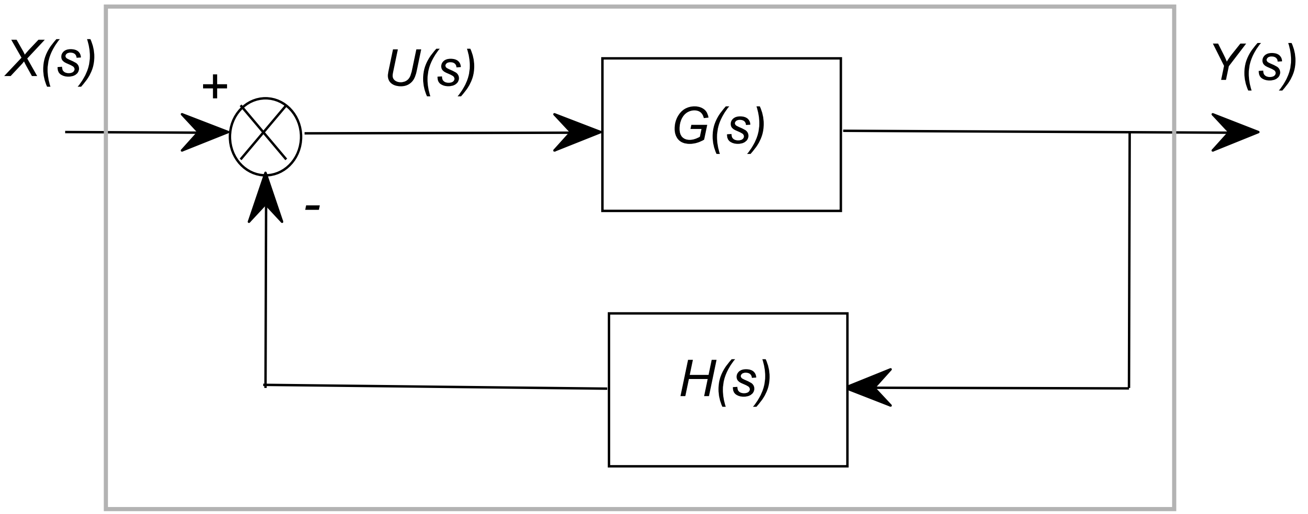


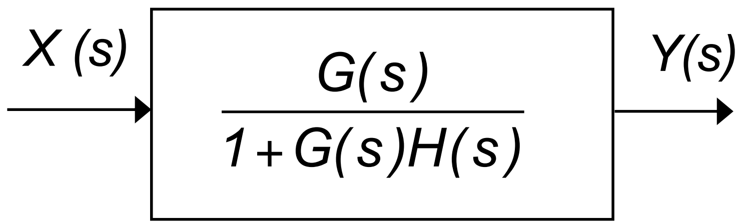


$$G(s) = \frac{s^3 + 12s^2 + 35s + 19}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Algèbre des schéma-blocs (suite)

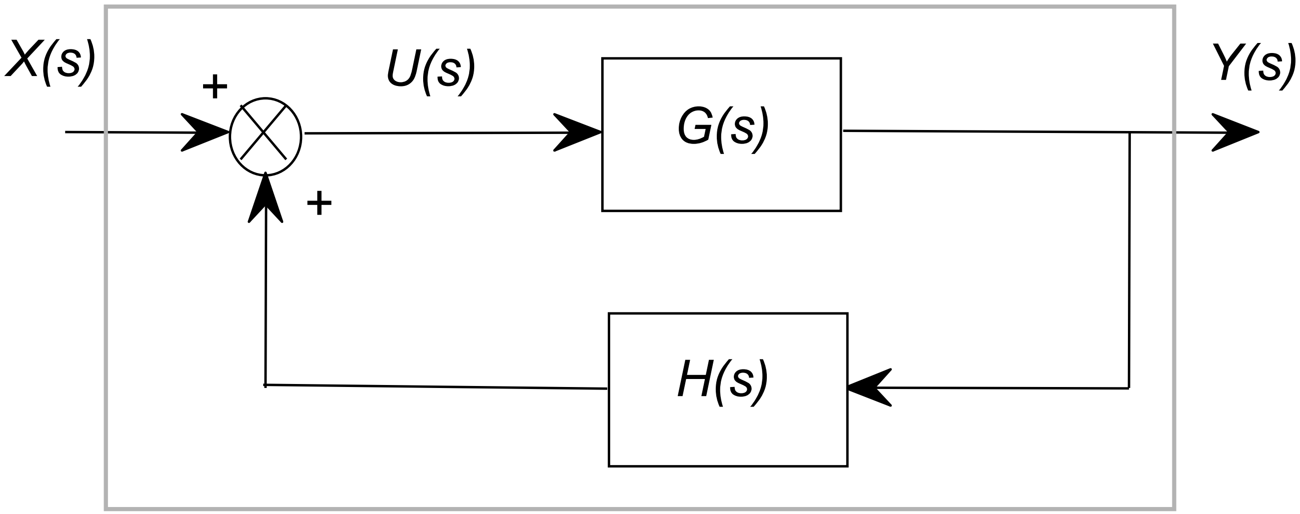
- Structure bouclée simple à retour ***négatif***

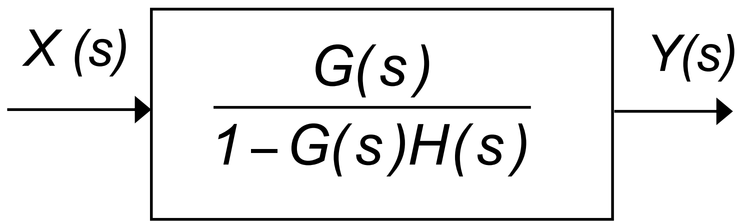




Algèbre des schéma-blocs (suite)

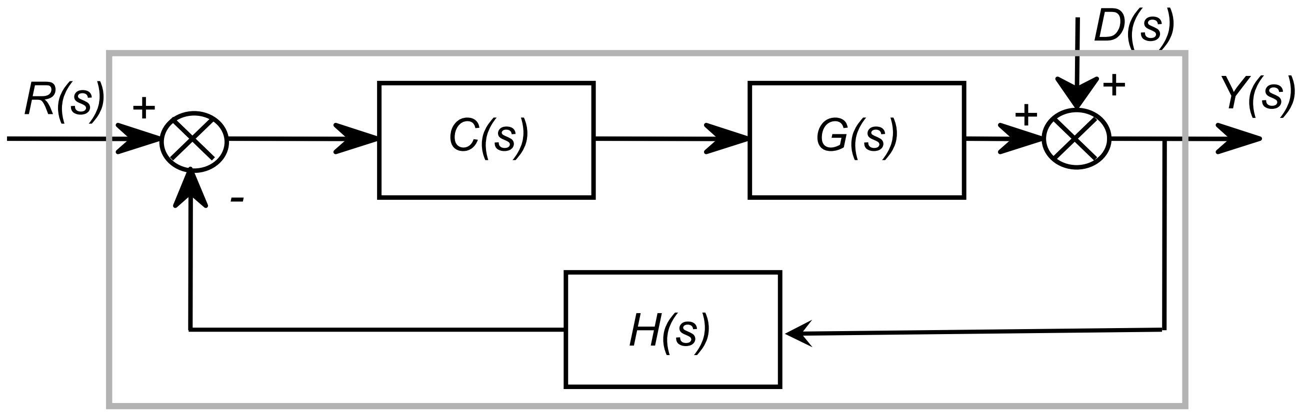
- Structure bouclée simple à retour ***positif***

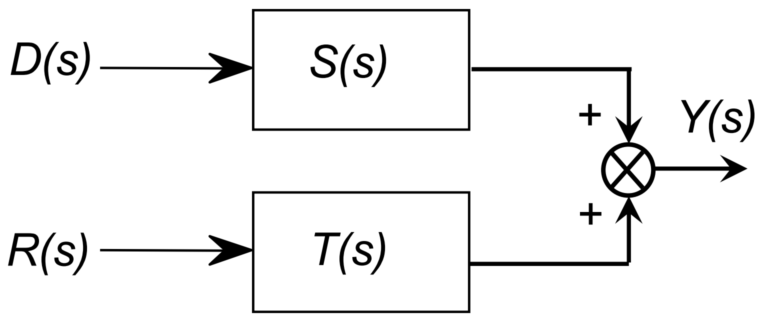




Algèbre des schéma-blocs (suite)

- Structure bouclée ***à entrées multiples*** *(consigne+perturbation)*
  - Pour calculer la relation entrées/sortie, on utilise la propriété d'additivité :
    - pour chaque entrée, on calcule la sortie en supposant les autres entrées nulles et additionne les sorties pour obtenir la sortie totale





$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)D(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$