Mathématiques 3A, Probabilités
TD 4, corrigé

2019/2020

Exercice 1 :
1) Pour donner la loi de $Y = X^2$, on calcule sa fonction de répartition.
Pour $y < 0$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 0$$

car $Y \geq 0$.
Pour $y \in [0,4]$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{dx}{4} = \frac{\sqrt{y}}{2}.$$

Pour $y > 4$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{4} = 1.$$

Conclusion : la loi de Y est donnée par

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \dfrac{\sqrt{y}}{2} & \text{si } y \in [0,4], \\ 1 & \text{si } y > 4. \end{cases}$$

2) On a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Exercice 2 :
1) La loi de Y est une loi discrète. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}([X] = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) \\ &= \int_n^{n+1} f_X(x)dx = \lambda \int_n^{n+1} e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}).\end{aligned}$$

On remarque que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.
Pour l'espérance, on a donc $\mathbb{E}(Y+1) = \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$ et par conséquent, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$.
2) On a $F_Z(z) = 0$ si $z < 0$ et $F_Z(z) = 1$ si $z \geq 1$. Considérons maintenant $z \in [0,1[$. On a

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}}(n \leq X < n+z)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(n \leq X < n+z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_n^{n+z} f_X(x)dx \\ &= \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_n^{n+z} e^{-\lambda x}dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+z)}) = (1 - e^{-z\lambda}) \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda n} = \frac{1 - e^{-z\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.\end{aligned}$$

Conclusion : la loi de Z est donnée par

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ \dfrac{1 - e^{-z\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } z \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } z \ge 1. \end{cases}$$

On calcule maintenant $\mathbb{E}(Z)$. On a

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ \dfrac{\lambda e^{-z\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } z \in [0, 1[, \\ 0 & \text{si } z > 1. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{\mathbb{R}} z f_Z(z) dz = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 z e^{-z\lambda} dz = \cdots \text{ (intégration par parties) } = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

Exercice 3 :
1) Puisque $X(t_1, t_2)$ suit une loi de Poisson, on a $\mathbb{E}(X(t_1, t_2)) = (t_2 - t_1)\lambda$. D'après l'énoncé, on a donc $2 = \mathbb{E}(X(0, 60)) = 60\lambda$, et ainsi $\lambda = \dfrac{1}{30}$.
2) Si $y < 0$ alors $\mathbb{P}(Y \le y) = 0$.
Si $y \ge 0$,

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X(0, y) \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(X(0, y) = 0) = 1 - e^{-y/30}.$$

Conclusion : Y suit une loi exponentielle de paramètre $1/30$.
3) Pour tout $h \ge 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y > h) = 1 - \mathbb{P}(Y \le h) = e^{-h/30}.$$

De plus, pour tout $h \ge 0$ et tout $t \ge 0$,

$$\mathbb{P}(Y > t + h \,|\, Y > t) = \frac{\mathbb{P}(Y > t + h, Y > t)}{\mathbb{P}(Y > t)} = \frac{\mathbb{P}(Y > t + h)}{\mathbb{P}(Y > t)} = \frac{e^{-(t+h)/30}}{e^{-t/30}} = e^{-h/30} = \mathbb{P}(Y > h).$$

Exercice 4 :
1) On a

$$\begin{aligned} -x^2 + xy - \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(y - x)^2. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

2) On a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 + xy - \frac{y^2}{2}\right) dxdy &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{(y - x)^2}{2}\right) dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2}\right) dy\right) dx \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

3) On a

$$1 = \lambda \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 + xy - \frac{y^2}{2}\right) dxdy = 2\pi\lambda.$$

Donc

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}.$$

4) Calcul de f_X : On a

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2 + xy - \frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{(y-x)^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\right) dy \\
\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Calcul de f_Y : Comme pour la question 1, on prouve

$$\begin{aligned}
-x^2 + xy - \frac{y^2}{2} &= -x^2 + 2x\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} \\
&= -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2 + xy - \frac{y^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(x - \frac{y}{2}\right)^2\right) dx \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

5) On a

$$f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \neq f_{(X,Y)}(x,y).$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 5 :

On détermine la loi de $X+Y$ en calculant le fonction de répartition F_{X+Y}. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \mathbb{P}((X,Y) \in T(z)) &= \iint_{T(z)} f_{(X,Y)}(x,y) dxdy \\
&= \iint_{T(z)} f_X(x) f_Y(y) dxdy \text{ (par indépendance)}
\end{aligned}$$

où

$$T(z) = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 : x + y \leq z\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq z\}.$$

D'où,

$$F_{X+Y}(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_0^{z-x} \mu e^{-\lambda y} dy \right) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z} - z\lambda e^{-\lambda z} & \text{si } \lambda = \mu, \\ 1 - e^{-\lambda z} - \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}) & \\ = 1 - \dfrac{\mu e^{-\lambda z} - \lambda e^{-\mu z}}{\mu - \lambda} & \text{si } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Pour le calcul de l'espérance, puisque X et Y suivent des lois exponentielles, on a

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

Autre méthode pour déterminer la loi : on calcule la fonction caractéristique de $X+Y$. On sait que $\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$ et $\phi_Y(t) = \dfrac{\mu}{\mu - it}$. Et puisque X et Y sont indépendantes, on a $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$. Donc, $\phi_{X+Y}(t) = \dfrac{\lambda\mu}{(\lambda - it)(\mu - it)}$.

Exercice 6 :

Posons

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{(it-1)x} dx.$$

On a

$$\begin{aligned} \phi'_X(t) = i\mathbb{E}(Xe^{itX}) &= \frac{i}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{(it-1)x} dx \\ &= \frac{i}{\Gamma(\alpha)} \left(\left[x^\alpha \frac{e^{(it-1)x}}{it-1} \right]_0^\infty - \frac{\alpha}{it-1} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{(it-1)x} dx \right) \\ &= \frac{i\alpha}{1-it} \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{i\alpha}{1-it} \phi_X(t) = \frac{-\alpha t + i\alpha}{1+t^2} \phi_X(t). \end{aligned}$$

On a donc

$$\phi_X(t) = C \exp\left(\int \frac{-\alpha t + i\alpha}{1+t^2} dt \right) = C \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \ln(1+t^2) + i\alpha \arctan(t) \right) = C \frac{\exp(i\alpha \arctan(t))}{(1+t^2)^{\alpha/2}}.$$

De plus, $C = \phi_X(1) = 1$, donc

$$\phi_X(t) = \frac{\exp(i\alpha \arctan(t))}{(1+t^2)^{\alpha/2}}.$$

On dérive deux fois, on applique les formules $\mathbb{E}(X) = -i\phi'_X(0)$, $\mathbb{E}(X^2) = -\phi''_X(0)$ et $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = -\phi''_X(0) + (\phi'_X(0))^2$, et on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \alpha \text{ et } \text{Var}(X) = \alpha.$$