Automatique continue

Analyse des systèmes

Hugues Garnier

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 14 septembre 2020

Plan du cours

Analyse de systèmes dynamiques linéaires ?

L'objectif est de comprendre comment va réagir le système à des sollicitations de l'entrée. On distingue :

- l'analyse temporelle qui étudie le comportement transitoire du système suite à un changement brusque de l'entrée (type échelon) ;
- l'analyse fréquentielle *(ou harmonique)* qui étudie le comportement du système suite à une excitation de forme sinusoïdale

On se focalisera dans la suite sur l'analyse temporelle.

Un intérêt particulier est accordé aux systèmes d'ordre un et deux.

- De tels systèmes sont fréquemment rencontrés en pratique
- Des systèmes plus complexes peuvent souvent être approchés par des systèmes d'ordre un ou deux.

Leurs réponses temporelles doivent être parfaitement maîtrisées.

Analyse de systèmes. Comment faire ?

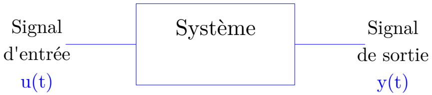
L'analyse d'un système peut s'effectuer de manière :

- expérimentale
  - On excite le système par un signal spécifique $u(t)$ (type échelon ou rampe) et on relève sa réponse $y(t)$
- théorique
  - A partir de la connaissance de la fonction de transfert $G(s)$ du système, la réponse $Y(s)$ à n'importe quelle excitation $U(s)$ est obtenue par :

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

  - La réponse $y(t)$ peut être calculée analytiquement par transformée de Laplace inverse

Analyse temporelle des systèmes



Objectif

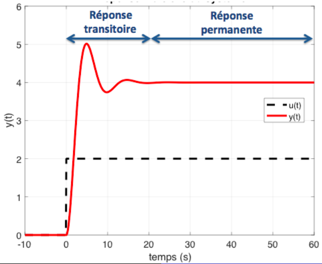
Analyser/caractériser la réponse $y(t)$ du système à une entrée donnée $u(t)$

Signaux d'entrée usuels

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$ qui conduit à la réponse impulsionnelle *(impulse response)*
- Echelon $A\Gamma(t)$ qui conduit à la réponse indicielle *(step response)*
- Rampe $r(t)$ *(ne porte aucun nom particulier)*

Décomposition de la réponse (celle souvent exploitée en Automatique)

- Réponse totale = réponse transitoire + réponse permanente
- Réponse *(ou régime ou phase)* transitoire
  Pour un système stable, partie de la réponse où le système réagit à l'entrée ; elle est encadrée par deux états d'équilibre. C'est une caractéristique propre au système, qui ne dépend pas du type d'excitation
  Ex : accélération, freinage, temps de chauffe, ...
- Réponse *(ou régime ou phase)* permanente
  Partie de la réponse où l'équilibre est à nouveau atteint, après la réponse transitoire
  Ex : vitesse de croisière, ...



Exemple : déterminer la réponse indicielle du système décrit par :

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b\Gamma(t); \quad y(0) = y_0$$

La réponse indicielle s'écrit :

$$\underbrace{y(t)}_{\text{réponse totale}} = \underbrace{e^{-at}y_0\Gamma(t) - \frac{b}{a}e^{-at}\Gamma(t)}_{\text{réponse transitoire}} + \underbrace{\frac{b}{a}\Gamma(t)}_{\text{réponse permanente}}$$

Si $y_0 = 0$:

$$\underbrace{y(t)}_{\text{réponse totale}} = \underbrace{-\frac{b}{a}e^{-at}\Gamma(t)}_{\text{réponse transitoire}} + \underbrace{\frac{b}{a}\Gamma(t)}_{\text{réponse permanente}}$$

$$y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})\Gamma(t)$$

Intérêt particulier pour la réponse indicielle en Automatique

Visualisez la vidéo de Brian Douglas

Control Systems in Practice, Part 9: The Step Response

Analyser la réponse indicielle revient à :

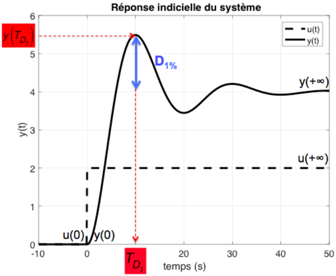
- caractériser la réponse permanente en déterminant :
  - la valeur finale de la sortie : $\lim_{t \to +\infty} y(t)$
  - le gain statique K
- caractériser la réponse transitoire en déterminant les indices suivants
  - le temps de montée $T_m^{x\%}$
  - le temps de réponse $T_r^{x\%}$
  - l'instant du premier dépassement T_{D_1}
  - la valeur du premier dépassement $D_{1\%}$

Indice de caractérisation du régime permanent

Gain statique (*steady-state gain*)

Pour un système stable, c'est le rapport des variations de la sortie sur celle de l'entrée

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)}$$



Indice de caractérisation du régime permanent

Gain statique (*steady-state gain*)

Si on connaît la fonction de transfert $G(s)$ du système

$$K = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Démonstration. Si les conditions initiales des signaux sont nulles $y(0) = u(0) = 0$, d'après le théorème de la valeur finale et la relation $Y(s) = G(s)U(s)$:

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)} = \frac{\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)}{\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)} = \frac{\lim\limits_{s \to 0} sY(s)}{\lim\limits_{s \to 0} sU(s)} = \frac{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)U(s)}{\lim\limits_{s \to 0} sU(s)} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

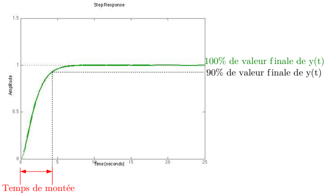
Réponse indicielle

Indices de caractérisation du régime transitoire

Temps de montée (*rise time*)

$T_m^{x\%} =$: temps nécessaire pour que la sortie atteigne x % (exemple : $x = 90$ % ou $x = 100$ %) de la valeur finale de la réponse

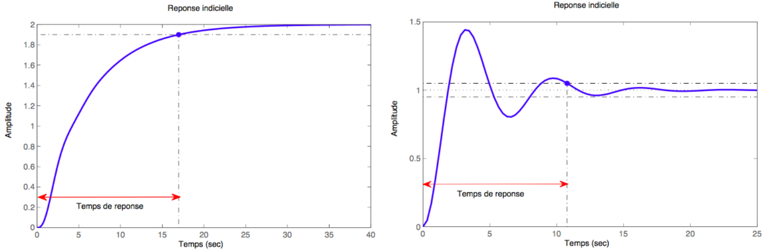
- Rapidité du système
  $\rightarrow$ *Plus le temps de montée est court, plus le système est rapide.*



Indices de caractérisation du régime transitoire

Temps de réponse (*settling time*)

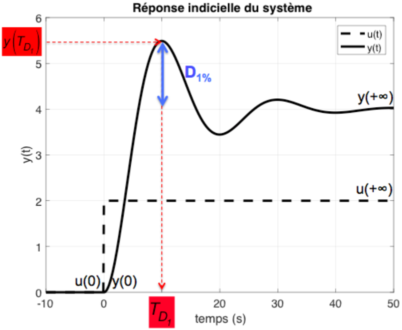
$T_r^{x\%}$: temps nécessaire pour que la sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une zone de tolérance de $\pm x$ % autour de la valeur finale (exemple $x = \pm$ 5 %)



Indices de caractérisation du régime transitoire

Instant du premier dépassement *(ou du premier pic)*

T_{D_1} : Instant où la sortie atteint le premier dépassement (ou premier pic) si celui-ci a lieu.

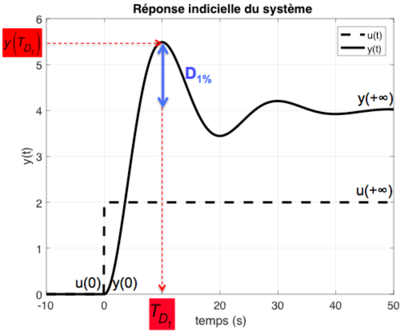


Indices de caractérisation du régime transitoire

Valeur du premier dépassement (*overshoot*)

Différence relative entre la valeur du premier dépassement et la valeur finale, en pourcentage :

$$D_{1\%} = \frac{y(T_{D_1}) - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)} \times 100$$



Matlab

Boîte à outils `Control`

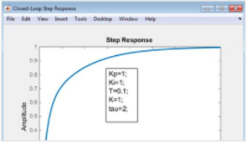
fr.mathworks.com/products/control.html

Fonctionnalités

Création et manipulation de modèles linéaires

Créez et manipulez les modèles de votre système de contrôle.

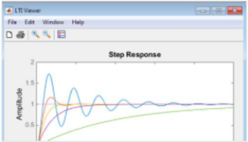
» En savoir plus



Analyse de modèles

Utilisez l'application et les fonctions pour analyser des modèles linéaires.

» En savoir plus



Concevoir et régler des systèmes de contrôle

Réglez de manière systématique les paramètres de votre système de contrôle à l'aide de techniques de conception SISO et MIMO.

» En savoir plus

Quelques systèmes importants

Gain pur

Fonction de transfert

$$G(s) = K$$

Exemples

- *Loi d'Ohm :* $u(t) = Ri(t)$
- *Relation fondamentale de la dynamique :* $F(t) = ma(t)$
- *Relation température/flux thermique :* $\theta(t) = R\Phi(t)$, ...

Quelques systèmes importants

Intégrateur du 1er ordre

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Exemples

- *Condensateur* $(u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt)$
- *Réservoir hydraulique* $(P(t) = \frac{\rho g}{A}\int q(t)dt)$
- *Ressort mécanique* $(F(t) = k\int v(t)dt)$, *...*

Quelques systèmes importants

Système du 1er ordre

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

Paramètres caractéristiques d'un système du 1er ordre

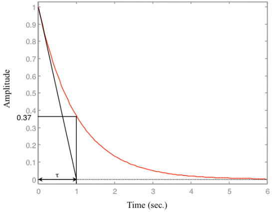
- K : gain statique (*steady-state gain*)
- T : constante de temps (*time-constant*)

Exemples

- *Circuit électrique RC* ($RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$)
- *Réservoir hydraulique* ($S\dot{h}(t) + ah(t) = q_e(t)$)
- *Four* ($C\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = p(t)$)

Réponse impulsionnelle d'un système du 1er ordre

$$u(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{K}{1+Ts}} \quad \longrightarrow \quad y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \Gamma(t)$$



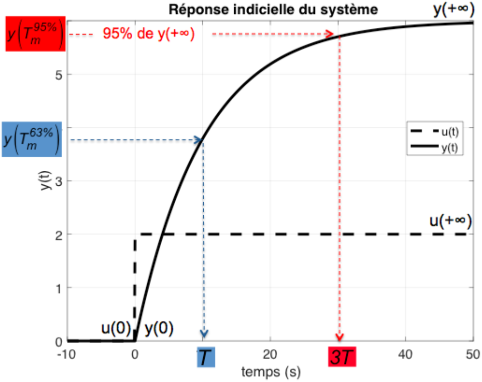
- Régime transitoire : exponentielle amortie
- Régime permanent : $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

Réponse indicielle d'un système du 1er ordre : réponse apériodique

$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{1+Ts}} \longrightarrow y(t) = KA(1-e^{-t/T})\Gamma(t)$$

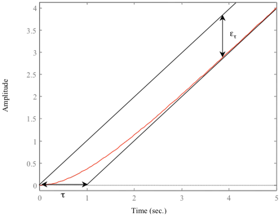
$T_m^{63\%} = T$
$T_m^{95\%} \approx 3T$
$T_r^{5\%} = T_m^{95\%}$

- Pente à l'origine non nulle
- Pas de dépassement



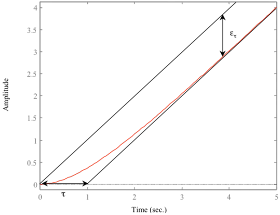
Réponse à la rampe d'un système du 1er ordre

$$u(t) = r(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{K}{1+Ts}} \quad \rightarrow \quad y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})\Gamma(t)$$



Réponse à la rampe d'un système du 1er ordre

$$u(t) = r(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{K}{1+Ts}} \quad \rightarrow \quad y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})\Gamma(t)$$



Erreur de traînage

$$\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} (u(t) - y(t)) = t - Kt + KT$$

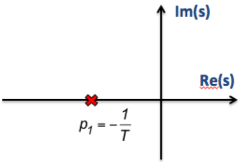
$$\text{Si } K = 1 \,, \quad \lim_{t \to +\infty} (u(t) - y(t)) = T$$

Quelques systèmes importants

Diagramme des pôles et des zéros d'un système du 1er ordre

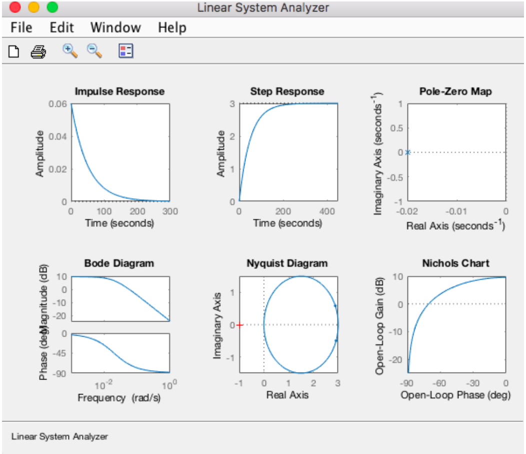
$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

1 seul pôle : $p_1 = -\dfrac{1}{T}$



- plus le pôle est proche de l'axe imaginaire, plus la constante de temps T est grande et plus le système est lent

Sous Matlab : ltiview(tf(3,[50 1]))



Quelques systèmes importants

Système du 2nd ordre

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\frac{z}{\omega_0}s + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Paramètres caractéristiques d'un système du 2nd ordre

- K : gain statique (*steady-state gain*)
- z : coefficient d'amortissement (*damping factor*) ($z > 0$)
- ω_0 : pulsation propre non amortie (*undamped natural frequency)*

Exemples

- *Circuit électrique RLC*
- *Système mécanique masse-ressort-amortisseur*

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle

$$u(t) = A\Gamma(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \quad \longrightarrow \quad y(t) = ?$$

Réponse transitoire d'un système du 2nd ordre :

- pente à l'origine nulle
- la réponse dépend de z qui va déterminer le type de pôles (réels ou complexes conjugués) :

$$s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 2\omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

$\Rightarrow$ 3 cas à considérer : $z > 1$, $z = 1$ et $z < 1$

Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z > 1$

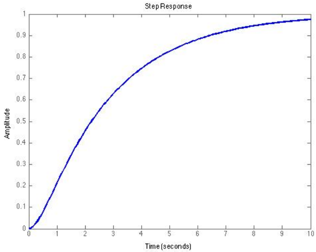
$$u(t) = A\Gamma(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \rightarrow y(t) = KA\left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}\right)\Gamma(t)$$

2 pôles réels :

$$p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{T_1}$$
$$p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{T_2}$$

- Réponse apériodique
- Mise en cascade de 2 systèmes du 1er ordre

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$



Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z = 1$

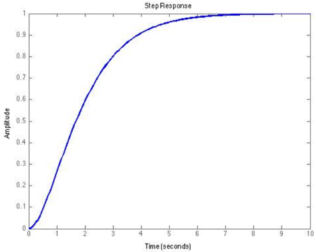
$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = KA\Big(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\Big)\Gamma(t)$$

1 pôle réel double :

$$p_{1,2} = -\omega_0 = -\frac{1}{T}$$

- Réponse apériodique critique
- Mise en cascade de 2 systèmes du 1er ordre de même constante de temps

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$$



Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z < 1$

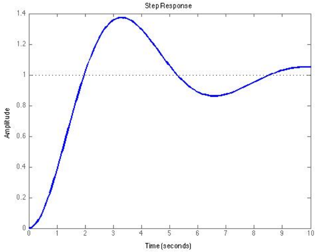
$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = KA\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \varphi)\right)\Gamma(t)$$

$\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$ et $\varphi = \mathrm{acos}(z)$

2 pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -z\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

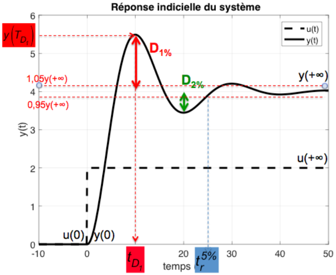
Réponse pseudo-périodique (oscillation)



Réponse indicielle pour $z < 1$

Quelques caractéristiques du régime pseudo-périodique

Valeur du 1er dépassement en %	$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \times 100$
Instant du 1er dépassement	$T_{D_1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$
Valeur du $n^{\text{ième}}$ dépassement en %	$D_{n\%} = -(-D_1)^n \times 100$
Instant du $n^{\text{ième}}$ dépassement	$T_{D_n} = n\, T_{D_1}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$
Temps de réponse à 5 %	$T_r^{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0 z}$
Temps de réponse à x %	$T_r^{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{\omega_0 z}$
Temps de montée (100%)	$T_m^{100\%} = \frac{\pi - \text{acos}(z)}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$



Quelques systèmes importants

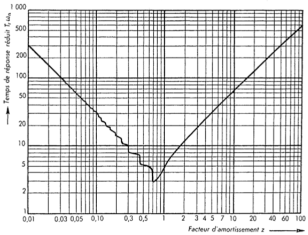
Réponse indicielle pour $z < 1$

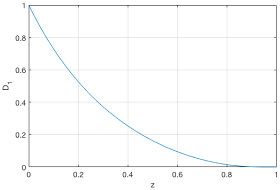
Conception d'un régulateur

- On impose à la fonction de transfert du système bouclé de se comporter comme un modèle du 2nd ordre
- But : chercher z et ω_0 pour avoir $D_{1\%}$ et t_{D_1} souhaités

$$z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{(\ln(D_1))^2 + \pi^2}}, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{t_{D_1}\sqrt{1-z^2}}$$

- Abaques donnant temps de réponse réduit ($T_r^{5\%}\omega_0$) et D_1 en fonction de z

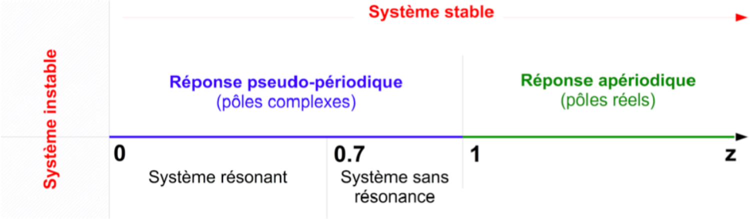




Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% dépend à la fois de z et de ω_0. C'est pourquoi il se détermine souvent à l'aide de la courbe de temps de réponse réduit $T_r^{5\%}\omega_0$ qui ne dépend alors que de z.

Quelques systèmes importants

Caractéristiques des réponses indicielles d'un système du 2nd ordre



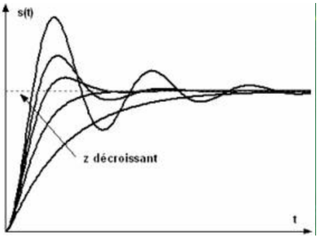
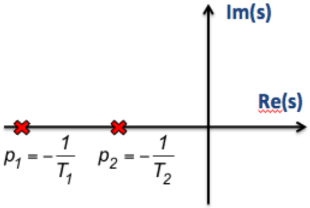


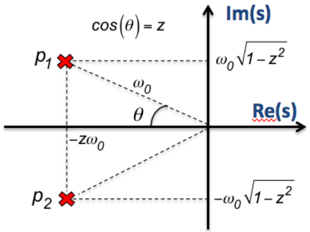
Diagramme des pôles et des zéros d'un système du 2nd ordre

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

si $z \geq 1,\ p_{1,2} = -z\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1-z^2}$



si $z < 1,\ p_{1,2} = -z\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-z^2}$



- Si les pôles se déplacent verticalement

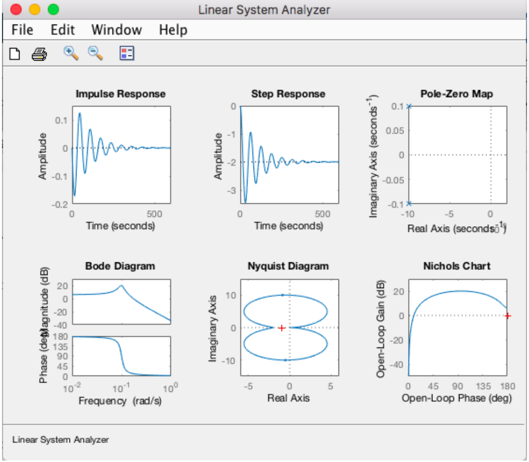
$T_r^{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0 z}$ reste constant

- Si les pôles se déplacent horizontalement

$T_{D_1} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$ reste constant

Outil logiciel pour analyser les systèmes linéaires

Sous Matlab : ltiview(tf(-0.02,[1 0.02 0.01]))

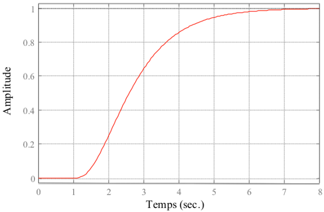


Quelques systèmes importants

Retard pur

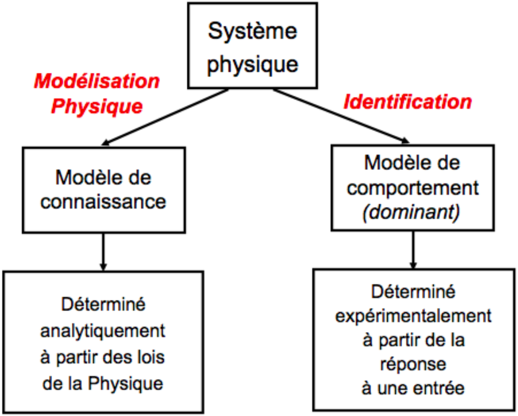
Fonction de transfert

$$G(s) = e^{-\tau s}$$



Retard pur $\tau =$ temps pendant lequel la sortie ne réagit pas à la commande

Rappel des deux approches possibles



Modèle du premier ordre

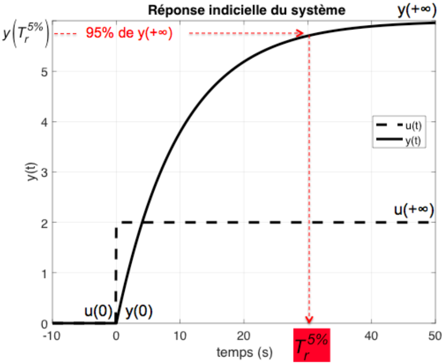
$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

1. Relever les valeurs finale et initiale de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

2. Relever $y(T_r^{5\%})$, en déduire $T_r^{5\%}$ puis T :

$$T = \frac{T_r^{5\%}}{3}$$



Modèle du second ordre pseudo-périodique

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

1. Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

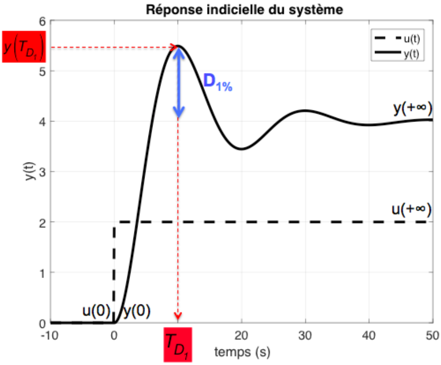
2. Relever les valeurs finale et initiale de la réponse ainsi que celle du premier dépassement $y(t_{D_1})$. On en déduit D_1, puis z :

$$D_1 = \frac{y(T_{D_1}) - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)}$$

$$z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{(\ln(D_1))^2 + \pi^2}}$$

3. Relever l'instant du premier dépassement T_{D_1}. On en déduit ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T_{D_1}\sqrt{1 - z^2}}$$



Modèle de Broïda

Broïda a proposé d'approcher la réponse apériodique de tout système d'ordre n par un premier ordre avec retard pur

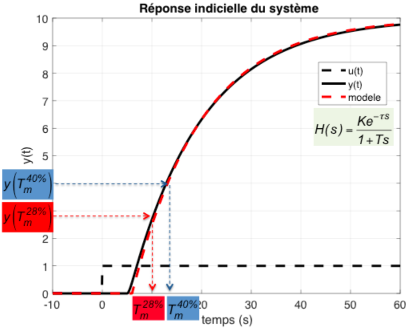
$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

1. Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

2. Relever $y(T_m^{28\%})$ et $y(T_m^{40\%})$, en déduire $T_m^{28\%}$ et $T_m^{40\%}$ puis :

$$\tau = 2,8T_m^{28\%} - 1,8T_m^{40\%}$$
$$T = 5,5\left(T_m^{40\%} - T_m^{28\%}\right)$$



Ces méthodes simples fournissent, en général, des modèles de comportement dominant assez grossiers.
Il existe des méthodes d'identification de systèmes plus puissantes disponibles dans les boîtes à outils CONTSID ou *System Identification* de Matlab (voir cours Apprentissage de modèles dynamiques en 4A I2S).