TD1 :

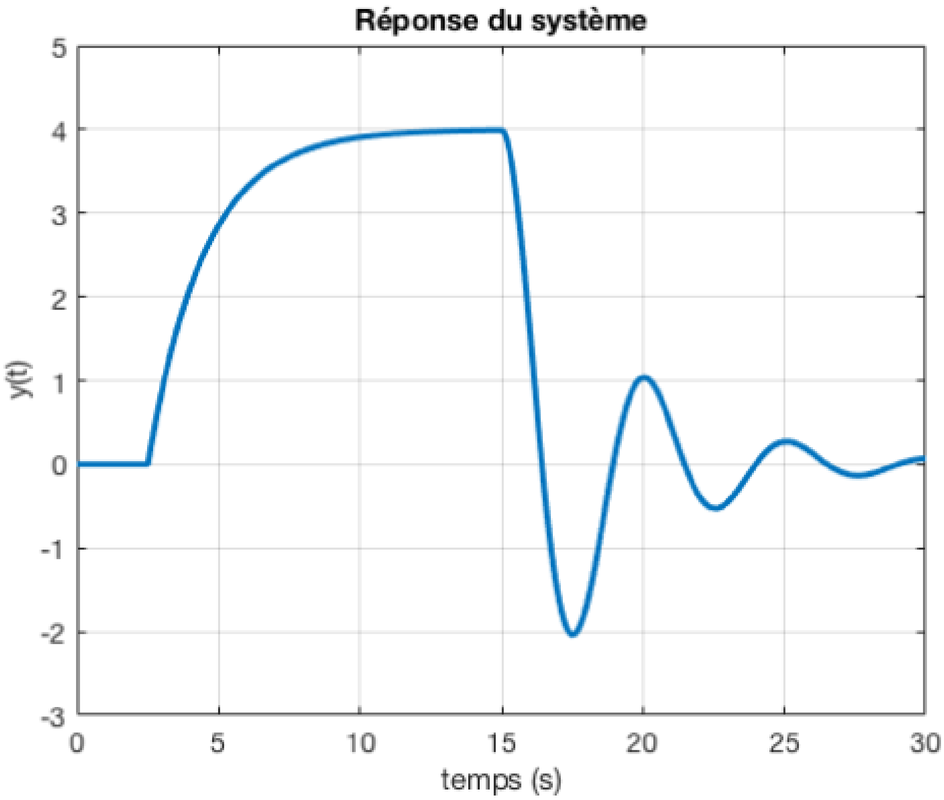
Exercice 1 - Identification d'un système à partir de sa réponse temporelle

Soit un système à deux entrées et une sortie décrit par :

$$Y(s) = G1(s)U1(s) + G2(s)U2(s)$$

Afin de déterminer les fonctions de transfert $G1(s)$ et $G2(s)$, on a relevé expérimentalement la réponse temporelle du système, représentée sur la figure 1, pour les entrées suivantes :

$$x1(t) = \Gamma(t) \ \text{ et } \ x2(t) = 2\Gamma(t-15)$$



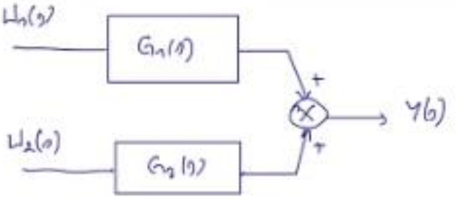
1. Représenter le système sous la forme d'un schéma fonctionnel.
2. Tracer l'évolution temporelle des deux entrées $u1(t)$ et $u2(t)$.
3. D'après la réponse obtenue à $u1(t)$, proposer en justifiant un modèle pour $G1(s)$.
4. Identifier à partir de la réponse indicielle à $u1(t)$ les différents paramètres de $G1(s)$.
5. D'après la réponse obtenue à $u2(t)$, proposer en justifiant un modèle pour $G2(s)$.
6. Identifier à partir de la réponse indicielle à $u2(t)$ les différents paramètres de $G2(s)$.

Exercice 1. TD1

TD 1

$$Y(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_1(t) = \Gamma(t) \\ u_2(t) = 2.\Gamma(t-15) \end{cases}$$

1. Schéma bloc.

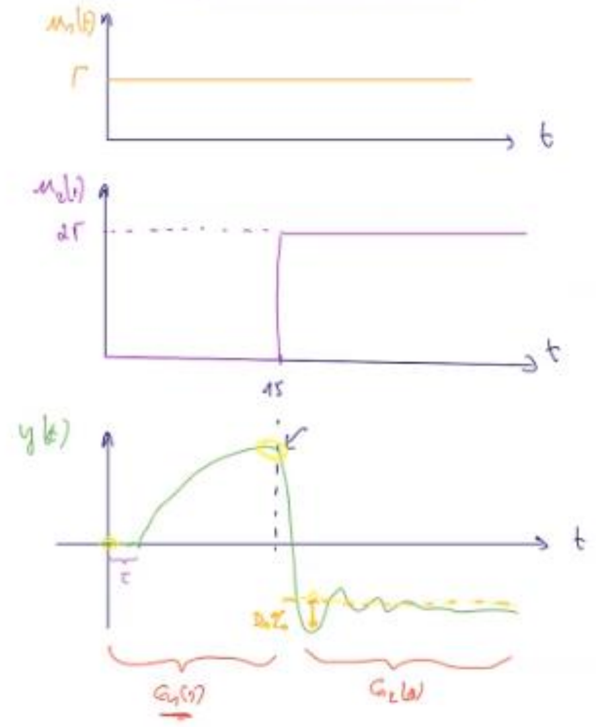


MISO

Multi Input Single Output.

2. Evolution temporelle $u_1(t)$, $u_2(t)$, $y(t)$.

$$\begin{cases} u_1(t) = \Gamma(t) \\ u_2(t) = 2.\Gamma(t-15) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} G_1(s) = 1^{er} \text{ ordre retardé.} \\ G_2(s) = 2^{e} \text{ ordre.} \end{cases}$$

On en déduit.
$$\begin{cases} G_1(s) = \dfrac{K}{1+T_1 s} e^{-\tau s} \\ G_2(s) = \dfrac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \end{cases}$$

3. Fonction de transfert $G_1(s)$

3. Fonction de transfert $G_1(s)$

$G_1(s)$ est un 1er ordre retardé qui s'écrit : $G_1(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-\tau s}$.

On cherche K, T et τ.

$\begin{cases} T : \text{cte de temps} \\ \tau : \text{retard} \end{cases}$

Retard : $\tau = 2,5\ s$

Gain statique : $K = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)} \Rightarrow \underline{K = 4}$.

$\begin{cases} 63\% \text{ de la valeur finale} : T \\ 95\% \quad " \quad " \quad " \quad : 5T \end{cases}$

Constante de temps : $\begin{cases} T = \ ? \\ \hookrightarrow \underline{4,3}\ ?\ s. \end{cases}$ ⚠ sur le graphe ⇒ il faut lui retrancher le retard (2,5s)

$\Rightarrow T \approx 2s$

4. Fonction de transfert de $G_2(s)$.

2e ordre, $G_2(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$ $\Rightarrow z ?,\ \omega_0 ?,\ K ?$

- $D_1 = \underline{\qquad}$ $\Rightarrow z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{(\ln(D_1))^2 + \pi^2}}$

	Matlab
ln	log
log	log10

$z = 0,215$

- $K = \frac{y(\infty) - y(0)}{u_2(\infty) - u_2(0)} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -\frac{4}{2} \Rightarrow \underline{K = -2}$

- $\omega_0 = \frac{\pi}{T_{D_1}\sqrt{1 - z^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2,5\sqrt{1 - 0,215^2}} \simeq \underline{1,285}\ \text{rad.s}^{-1}$

Exercice 2 :

TD2 :

Exercice 2.1. Modèles d'un système linéaire à partir des données d'entrée/sortie échantillonnées

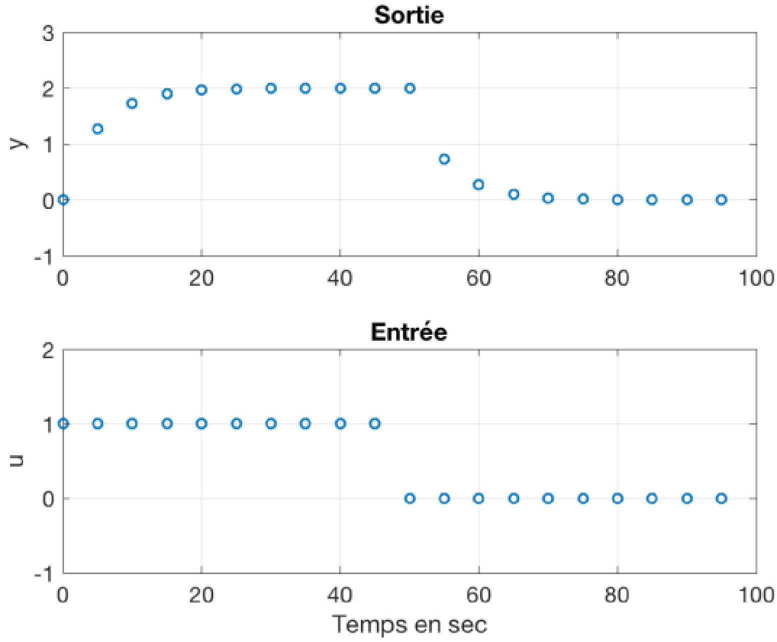


FIGURE 1.1: Echantillons des signaux d'entrée/sortie d'un système.

Sur la figure 1.1 sont représentés les échantillons déterministes des signaux d'entrée $u(t_k)$ et $y(t_k)$ d'un système linéaire à temps continu aux différents instants d'échantillonnage t_k représentés par des petits cercles.
Le but de cet exercice est de proposer la meilleure forme de modèle à temps continu et de modèle à temps discret d'après les échantillons enregistrés.

On cherche dans un premier temps à représenter le système sous la forme d'un modèle à temps continu.

1. D'après l'allure de la réponse de la figure 1.1, proposer en justifiant une forme de modèle à temps continu.
2. Déterminer, d'après la réponse, la valeur numérique des paramètres du modèle retenu.
3. En déduire la fonction de transfert de Laplace $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. On remarquera que les paramètres de $G(s)$ ne dépendent pas de la période d'échantillonnage T_e.
4. On rappelle que la réponse indicielle d'un modèle à temps continu du premier ordre de gain statique K et de constante de temps T s'écrit :

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})\Gamma(t) \tag{1}$$

   où $\Gamma(t)$ est l'échelon unitaire.
   Calculer la réponse indicielle de votre modèle aux instants $t_k = kT_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez-les avec les valeurs enregistrées :
   `[0 1.2642 1.7293 1.9004 1.9634 1.9865 1.9950 1.9982]`

5. Affiner si besoin la valeur numérique des paramètres de votre modèle pour faire coïncider les réponses du système et du modèle à temps continu.

On cherche à présent déterminer un modèle à temps discret *équivalent*.

5. Affiner si besoin la valeur numérique des paramètres de votre modèle pour faire coïncider les réponses du système et du modèle à temps continu.

On cherche à présent déterminer un modèle à temps discret *équivalent.*

On rappelle qu'il n'existe pas de méthode de discrétisation universelle de modèles à temps continu. Par exemple, la méthode de discrétisation dite du bloqueur d'ordre zéro n'est exacte que pour une entrée constante par morceaux. Pour toute autre entrée, le modèle à temps discret correspondant ne sera qu'une approximation du modèle à temps continu.

1. D'après l'allure du signal d'entrée représenté sur la figure 1.1, formuler une hypothèse sur la variation du signal d'entrée entre 2 instants d'échantillonnage.
2. La fonction de transfert en z équivalente à un modèle du 1er ordre à temps continu décrit par (1) lorsque l'entrée est constante entre deux instants d'échantillonnage s'écrit :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1}{z + a_1} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{2}$$

avec

$$a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}} \quad b_1 = K(1 + a_1) \tag{3}$$

Notez la dépendance des coefficients de $G(z)$ vis à vis de la période d'échantillonnage T_e. Le même système échantillonné à une autre période d'échantillonnage aura donc la même forme mais des valeurs numériques différentes. Déterminer a_1 et b_1 lorsque $T_e = 5$s.

3. Déduire de $G(z)$ l'équation aux différences liant les échantillons des signaux d'entrée/sortie.
4. Calculer la réponse de votre modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez les échantillons avec les valeurs enregistrées.
5. Ecrire les trois lignes Matlab qui permettent de calculer/simuler la sortie du modèle à temps discret. Comparez votre implantation Matlab avec vos résultats précédents.
6. La fonction `filter` sous Matlab permet de calculer la réponse d'un système à temps discret (qui peut être vu comme un filtre numérique). Exploitez cette fonction pour calculer la réponse de votre modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez-les avec les valeurs enregistrées.
7. Une autre méthode de discrétisation consiste à approcher la dérivée des signaux par approximation numérique. Déterminer l'équation aux différences obtenue à partir de l'équation différentielle discrétisée en remplaçant la dérivée première du signal de sortie par :

$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_k} = \frac{1}{T_e}\left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right) \tag{4}$$

8. En déduire la fonction de transfert en z et comparez-la avec celle obtenue précédemment.
9. Calculer la réponse de votre nouveau modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparer les échantillons avec les valeurs enregistrées.

① Système commandé par un 1er ordre → exponentielle

→ tangente non nulle à l'origine.

$u(t_n) \to \boxed{G(s)?} \to y(t_n)$ avec $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$

K = gain statique

T = cte de temps.

A.N. : $\begin{cases} K = 2 \\ T = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 63\% \text{ de } y(\infty) \Rightarrow T \\ 95\% \text{ de } y(\infty) \Rightarrow 3T \end{cases}$

$\frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)} = \frac{-2}{-1}$

⚠ Modèle à TC : K, T ne dépendent pas de la période d'échantillonnage.

M_{TC} $\boxed{G(s) = \frac{2}{1+5s}}$

Forme temporelle ($\mathcal{L} \to t$)

α

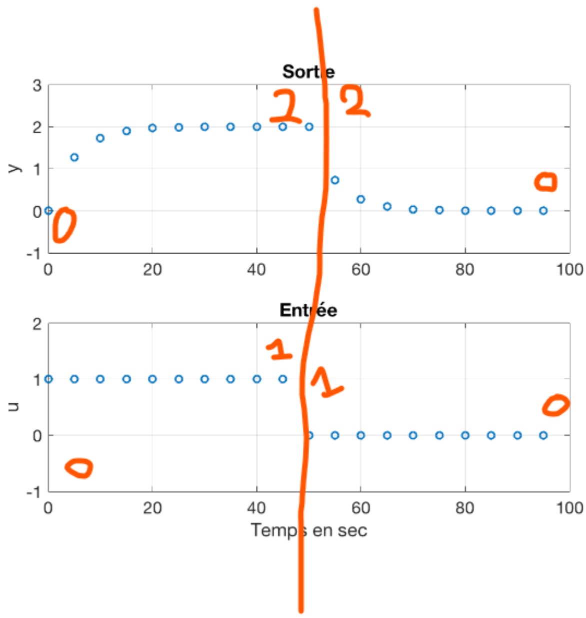
Solution numérique : $\hat{y}(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right) . \Gamma(t)$

AN : $\hat{y}(t) = 2\left(1 - e^{-t/5}\right)$. et $\Gamma = 1$.

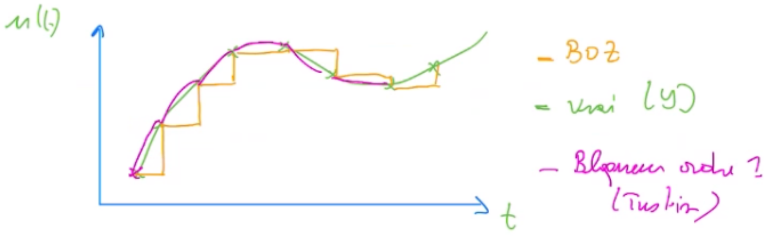
Objectif :

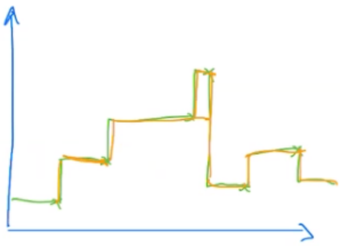
o données simulées - vraies : y

x $\hat{y}(t)$ issus du modèle $\mathcal{M}_{TC}$



2ᵉ partie : modèle à TD





BOZ = ssi l'entrée est cte par morceaux. (donc pas de BOZ si $u(t) \sim \sin$)

$$\mathcal{M}_{TD} = G(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_1 = -e^{-Te/\tau} \\ b_1 = K(1+a_1) \end{cases}$$

⚠ a_1, b_1 dépendent de la Te.

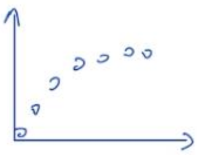
⚠ a_1, b_1 dépendent de la Te.

Si Te change alors $G(z^{-1}) = \frac{b_1' z^{-1}}{1+a_1' z^{-1}}$ avec a_1' et $b_1' \neq a_1, b_1$.

A.N. : $T_e = 5\,s$

↳ $a_1 = -e^{-5/5} = -e^{-1}$ ⇒ $\boxed{a_1 = 0,3679}$

$b_1 = 2(1+a_1)$ ⇒ $\boxed{b_1 = 1,2642}$



modèle à TC →

$$\mathcal{M}_{TC} \quad G(s) = \frac{K}{1+\tau s} = \frac{2}{1+5s}$$

⇒ Eq diff 1ᵉʳ ordre
⇒ solut° explicite y(t) connue.

modèle à TD ↘

$$\mathcal{M}_{TD} \quad G(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} = \frac{b_1}{z+a_1}$$

M_{TC} $G(s) \Leftrightarrow$ équation différentielle.

$s \to$ opérateur : $p = \frac{d}{dt}$.

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\Leftrightarrow K.U(s) = (1+Ts).Y(s)$$

$$K.U(s) = Y(s) + T.\underbrace{s.Y(s)}$$

$$\xrightarrow[(ci=0)]{\mathcal{L}^{-1}} K.u(t) = y(t) + T.\frac{dy(t)}{dt}.$$ éq. diff.

$$\Updownarrow$$

$$K.u(t) = y(t) + T.\,p\,y(t)$$

(solution connue, $y(t) = K(1-e^{-t/T}).\Gamma$)

M_{TD} $G(z) \Leftrightarrow$ equation aux différences

M_{TD} $G(z) \Leftrightarrow$ equation aux différences

$z^{-1} \to$ opérateur retard | $q^{-1}u(t_k) = u(t_{k-1})$

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$$

$$b_1 z^{-1}.U(z^{-1}) = (1+a_1 z^{-1}).Y(z^{-1}).$$

temps. $\Downarrow$ On passe en temporel (ci=0)

$$b_1 q^{-1}.u(t_k) = (1+a_1 q^{-1})\,y(t_k)$$

$$b_1 \underbrace{q^{-1}u(t_k)} = y(t_k) + a_1 \underbrace{q^{-1}y(t_k)}$$

$$b_1 u(t_{k-1}) = y(t_k) + a_1 y(t_{k-1})$$

Eq° aux différences. $\boxed{y(t_k) = b_1 u(t_{k-1}) - a_1 y(t_{k-1})}$

A.N. : $y(t_k) = 1{,}2642\ u(t_{k-1}) + 0{,}3679\ y(t_{k-1})$

$$y(t_k) = 0{,}3649\, y(t_{k-1}) + 1{,}2642\ u(t_{k-1})$$

$\underline{k=1}$: $y(t_1) = \underbrace{0{,}3649\, y(t_0)}_{=0} + 1{,}2642\ \underbrace{u(t_0)}_{=1}$

$$\left| \begin{array}{l} u(t_0) = 1 \\ u(t_1) = 1 \\ \vdots \\ y(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

$y(t_1) = 1{,}2642$

$\underline{k=2}$: $y(t_2) = 0{,}3649\ y(t_1) + 1{,}2642\ u(t_1)$

$= 0{,}3649 \times 1{,}2642 + 1{,}2642$

$= \ldots$

etc ...

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y (de y)	0	1,2642	1,7293	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982
$\hat{y}$ ($\mathcal{M}_{TC}$)	0	1,2642	1,7293	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982
$\hat{y}$ ($\mathcal{M}_{TDBOZ}$)	0	1,2642	1,7255	1,8938	1,9552	1,9777	1,9859	1,9889

TD3 :

Exercice 3.1 - Estimation paramétrique d'un modèle de la position d'un chariot par moindres carrés

On souhaite modéliser la position d'un chariot qui se déplace le long d'un rail rectiligne.
On supposera que le chariot se déplace à accélération constante.

TABLE 1: Position du chariot au cours du temps

t_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y(t_k)$	0.2	0.21	0.23	0.26	0.28	0.32	0.35	0.40	0.44	0.49

1. Les valeurs numériques de $y(t_k)$ pour quelques valeurs du temps sont rassemblées dans le tableau 1. Tracer la position du chariot au cours du temps.
2. Le modèle décrivant la position du chariot en fonction du temps est choisi comme :
$$y(t_k) = \frac{1}{2}at_k^2 + vt_k + c \qquad (1)$$
Donner la signification physique et les unités des trois paramètres a,v,c du modèle.
3. Ecrire le modèle sous forme de regression linéaire.
$$y(t_k) = \phi^T(t_k)\theta \qquad (2)$$
où $\theta = [a \quad v \quad c]^T$
4. A partir des $N = 10$ données du tableau 1, formuler le problème d'estimation des 3 paramètres sous forme matricielle :
$$Y = \Phi\theta \qquad (3)$$
5. Préciser le nom et les dimensions de chacune des matrices.
6. L'estimation par moindres carrés ordinaires est rappelée ci-dessous :
$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y \qquad (4)$$
Implanter sous Matlab cette estimation pour déterminer la valeurs numérique des trois paramètres.
7. Vérifier que vous obtenez les mêmes estimées à l'aide de la commande Matlab suivant (où `Phi` représente Φ) :
`thetaHat=Phi\Y`
On privilégiera cette implantation à l'avenir.
8. Donner le modèle de simulation de la position du chariot et calculer les positions simulées à partir du modèle estimé.
9. Calculer et tracer l'erreur de simulation (aussi appelée résidus) aux différents instants de mesure.
10. Calculer la moyenne et la variance des résidus.

```
tk = [0:0.1:0.9]';

% vecteur de sortie
y = [0.2 0.21 0.23 0.26 0.28 0.32 0.35 0.4 0.44 0.49]';

% mat regression
phi = [1/2*tk.^2 tk ones(length(y),1)]

% vecteur de paramètres
theta = inv(phi'*phi)*phi'*y

% calcul sortie avec theta estimé
ybis = phi * theta

% erreur entre mesures et estimation
residus = y-ybis
moyenneRes = mean(residus);
varianceRes = sqrt(std(residus));
```

```
seance6

phi =

        0         0    1.0000
   0.0050    0.1000    1.0000
   0.0200    0.2000    1.0000
   0.0450    0.3000    1.0000
   0.0800    0.4000    1.0000
   0.1250    0.5000    1.0000
   0.1800    0.6000    1.0000
   0.2450    0.7000    1.0000
   0.3200    0.8000    1.0000
   0.4050    0.9000    1.0000


theta =

   0.4394
   0.1283
   0.1976
```

```
ybis =

    0.1976
    0.2127
    0.2321
    0.2559
    0.2841
    0.3167
    0.3537
    0.3951
    0.4409
    0.4911


residus =

    0.0024
   -0.0027
   -0.0021
    0.0041
   -0.0041
    0.0033
   -0.0037
    0.0049
   -0.0009
   -0.0011
```