Identification des systèmes

Marion Gilson, Hugues Garnier
marion.gilson@univ-lorraine.fr
hugues.garnier@univ-lorraine.fr

CRAN, Université de Lorraine – Polytech Nancy – France

Outline

Introduction

The players

Système à identifier G_0

- $u(t)$ est l'entrée (à temps discret) qui peut être choisie librement (sauf dans des cas type environnement)
- $y(t)$ est la sortie (à temps discret) qui est mesurée et provient de :
  - une contribution de l'entrée $u(t)$, c'est à dire $G_0 u(t)$
  - une contribution indépendante de l'entrée $u(t)$, c'est à dire des perturbations $v(t)$.

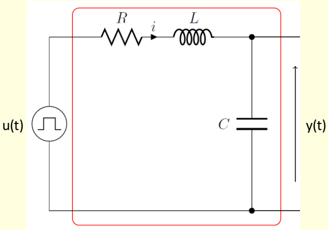
Introduction

Objectif

- Obtenir un **modèle mathématique** représentant au mieux le système, à partir des données d'entrée/sortie mesurées
  - ◇ Utiliser les connaissances *a priori* pour définir la structure du modèle (linéaire, non linéaire, . . .)
  - ◇ variables d'ajustement : *paramètres* du modèle
- suite du cours :
  - ◇ méthodes de base (réponse indicielle, Broida, . . .)
  - ◇ méthodes avancées : data-based modeling

Introduction

Différence entre paramètres du modèle et paramètres physiques



$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

- Equation différentielle (2nd ordre) liant $u(t)$ et $y(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= v_L(t) + v_r(t) + y(t) \\ &= L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + y(t) \\ &= LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \end{aligned}$$

- Transformée de Laplace (CI nulle)

Méthodes de base

Principe

- les méthodes de base donnent un **modèle de comportement**.
  Pour les systèmes simples : modèle de comportement = modèle de connaissance (issu des lois de la physique)

- détermination des paramètres : **observation de la sortie** uniquement, proche de la modélisation de signaux

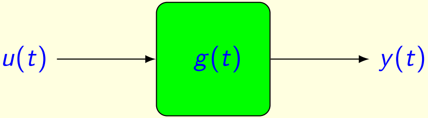
- ces méthodes s'appuient sur l'analyse graphique des courbes expérimentales en quelques points particuliers sans tenir compte de l'ensemble des mesures

- ATTENTION : robustesse au bruit de mesure (et autres perturbations) extrêmement faible voire inexistante.

Méthodes de base

Relation entre entrée, sortie et système

- sortie d'un système linéaire = produit de convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système



$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

- La sortie est caractéristique du système pour des signaux élémentaires tels que l'impulsion de **Dirac**, l'**échelon** ou la **rampe**
- Le signal d'excitation le plus courant est l'échelon. L'identification se fait donc à partir de la réponse indicielle.
- On peut passer de la réponse impulsionnelle à la réponse indicielle par intégration [numérique] des mesures

Méthodes de base

Relation entre entrée, sortie et système – Exemple

- Exemple du système du 1er ordre

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

- **Réponse impulsionnelle**

$$Y(s) = 1.\frac{K}{1+\tau s} = \frac{K/\tau}{s+1/\tau}$$

D'où

$$y(t) = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}$$

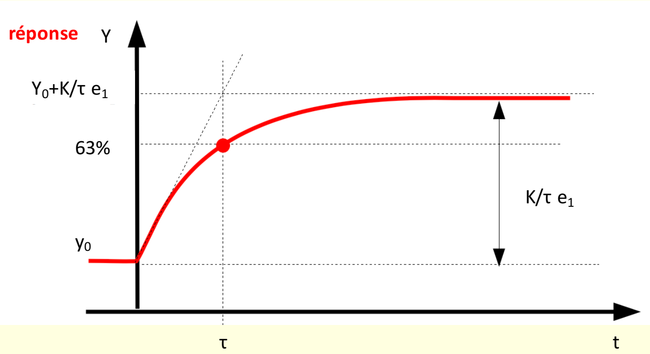
- Intégration de la réponse impulsionnelle pour obtenir la **réponse indicielle**

$$\int_0^t y(t)dt = \frac{K}{\tau}[-\tau e^{-t/\tau}]_0^t = \frac{K}{\tau}(1-e^{-t/\tau})$$

Méthodes de base

Méthode graphique – Exemple du 1er ordre

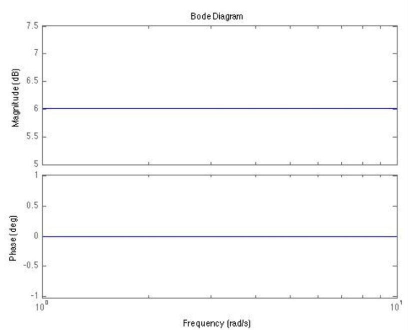
- $G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$ soumis à un échelon $u(t) = e_1$
- réponse indicielle : $y(t) = \frac{K}{\tau} e_1(1 - e^{-t/\tau}) + y_0$



- Le temps de réponse à 95% est environ de 3τ

Quelques systèmes importants

Gain pur



Fonction de transfert

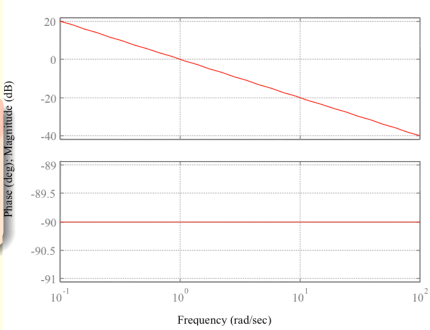
$$H(s) = K \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = K$$

Exemples

- *Loi d'Ohm :* $u(t) = Ri(t)$
- *Relation fondamentale de la dynamique :* $F(t) = ma(t)$
- *Relation température/flux thermique :* $\theta(t) = R\Phi(t)$, ...

Quelques systèmes importants

Intégrateur du 1er ordre



Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Exemples

- *Condensateur* $\left(u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt\right)$
- *Réservoir hydraulique* $\left(P(t) = \frac{\rho g}{A}\int q(t)dt\right)$
- *Ressort mécanique* $\left(F(t) = k\int v(t)dt\right)$, ...

Quelques systèmes importants

Système du 1er ordre

Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{K}{1+Ts} \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}, \text{ avec } \omega_c = \frac{1}{T}$$

Paramètres caractéristiques d'un système du 1er ordre

- K : gain statique
- T : constante de temps *(ou pulsation de coupure ω_c)*

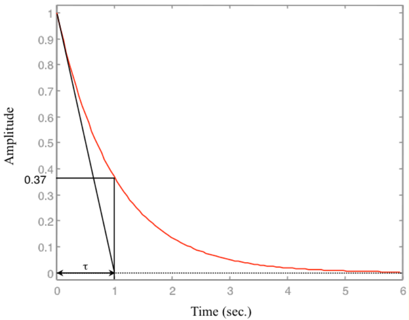
Exemples

- *Circuit électrique RC* $(RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t))$
- *Réservoir hydraulique* $(S\dot{h}(t) + ah(t) = q_e(t))$
- *Four* $(C\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = p(t))$

Quelques systèmes importants

Réponse **impulsionnelle** d'un système du 1er ordre

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{1+Ts}} \longrightarrow y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \Gamma(t)$$



- Régime transitoire : exponentielle amortie
- Régime permanent : $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

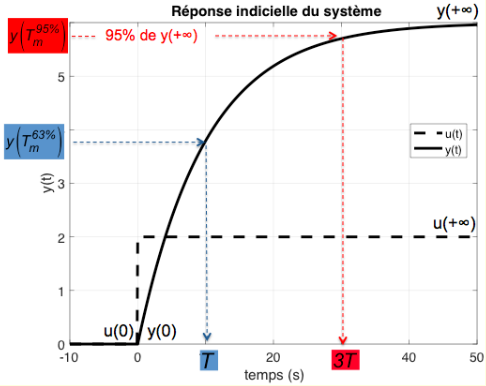
Quelques systèmes importants

Réponse **indicielle** d'un système du 1er ordre

$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{1+Ts}} \longrightarrow y(t) = KA(1 - e^{-t/T})\Gamma(t)$$

$T_m^{63\%} = T$
$T_m^{95\%} \approx 3T$
$T_r^{5\%} = T_m^{95\%}$

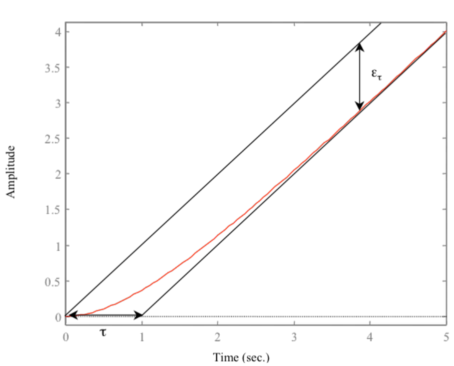
- Pente à l'origine non nulle
- Pas de dépassement



Quelques systèmes importants

Réponse **à la rampe** d'un système du 1er ordre

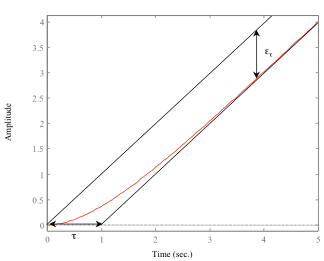
$$u(t) = r(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{H(s) = \frac{K}{1 + Ts}} \quad \rightarrow \quad y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})\Gamma(t)$$



Quelques systèmes importants

Réponse **à la rampe** d'un système du 1er ordre

$$u(t) = r(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{H(s) = \frac{K}{1+Ts}} \quad \rightarrow \quad y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})\Gamma(t)$$



Erreur de traînage

$$\varepsilon = \lim_{t\to+\infty}(u(t) - y(t)) = t - Kt + KT$$

$$\text{Si } K = 1 \text{ , } \lim_{t\to+\infty}(u(t) - y(t)) = T$$

Quelques systèmes importants

Système du 2nd ordre

Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\frac{z}{\omega_0}s + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2z\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Paramètres caractéristiques d'un système du 2nd ordre

- K : gain statique
- z : coefficient d'amortissement (*damping factor*) ($z > 0$)
- ω_0 : pulsation propre non amortie (*undamped natural frequency)*

Exemples

- *Circuit électrique RLC*
- *Système mécanique masse-ressort-amortisseur*

Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle

$$u(t) = A\Gamma(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \quad \longrightarrow \quad y(t) = ?$$

Réponse transitoire d'un système du 2nd ordre :

- pente à l'origine nulle
- la réponse dépend de z qui va déterminer le type de pôles (réels ou complexes conjugués) :

$$s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta = 2\omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

$\Rightarrow$ 3 cas à considérer :

- $z > 1$, régime apériodique, 2 pôles réels, mise en cascade de 2 systèmes du 1er ordre
- $z = 1$, régime apériodique critique, 1 pôle réel double, mise en cascade de 2 systèmes du 1er ordre de même constante de temps
- $z < 1$, régime pseudo-périodique (oscillation), 2 pôles complexes conjugués.

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z > 1$

$u(t) = A\Gamma(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{G(s) = \dfrac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \quad \longrightarrow \quad y(t) = KA\left(1 + \dfrac{p_2}{p_1 - p_2}e^{p_1 t} + \dfrac{p_1}{p_1 - p_2}e^{p_2 t}\right)$

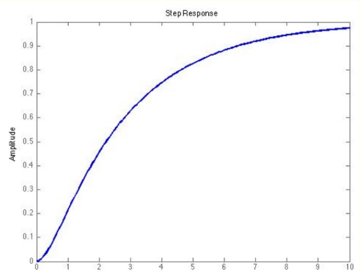
2 pôles réels :

$$p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{T_1} \qquad (1)$$

$$p_2 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{T_2} \qquad (2)$$

- Réponse apériodique
- Mise en cascade de 2 systèmes du 1er ordre

$$H(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$



Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z = 1$

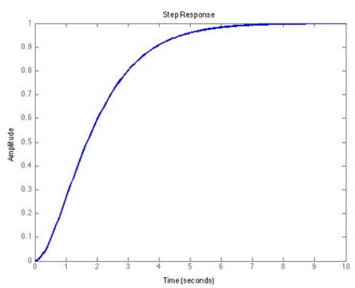
$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = KA\left(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)\Gamma(t)$$

1 pôles double :

$$p_{1,2} = -\omega_0 = -\frac{1}{T}$$

- Réponse apériodique critique
- Mise en cascade de 2 systèmes du 1er ordre de même constante de temps

$$H(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$$



Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z < 1$

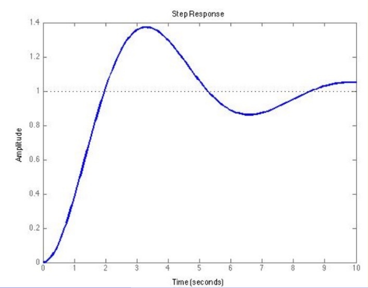
$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = KA\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \varphi)\right)\Gamma(t)$$

$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$ **et** $\varphi = \textbf{acos}(z)$

2 pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -z\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

Réponse pseudo-périodique (oscillation)

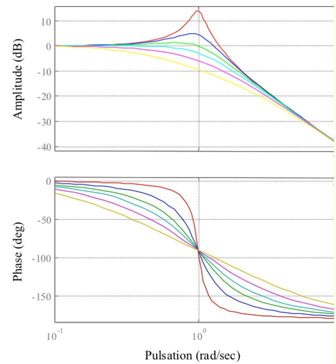


Quelques systèmes importants

Réponses fréquentielles d'un système du 2nd ordre

Réponse fréquentielle

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2z\frac{\omega}{\omega_0}}$$

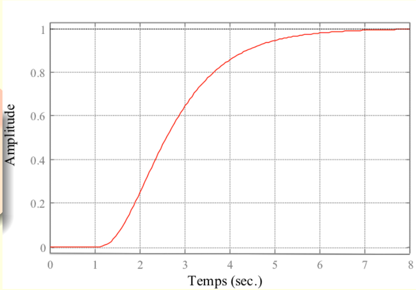


Quelques systèmes importants

Retard pur

Fonction de transfert

$$H(s) = e^{-\tau s} \quad H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$



Retard pur τ = temps pendant lequel la sortie ne réagit pas à la commande

Exemple : régulation de débit dans un canal d'irrigiation

Identification à partir de la réponse indicielle

Modèle du 1er ordre

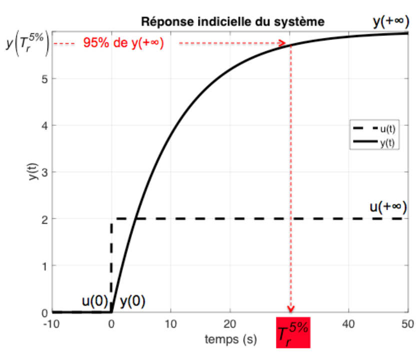
$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

1. Relever les valeurs finale et initiale de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

2. Relever $y(T_r^{5\%})$, en déduire $T_r^{5\%}$ puis T :

$$T = \frac{T_r^{5\%}}{3}$$



Identification à partir de la réponse indicielle

Modèle du 2ème ordre pseudo-périodique

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

1. Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

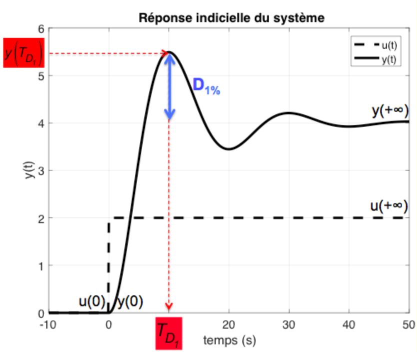
2. Relever les valeurs finale et initiale de la réponse ainsi que celle du premier dépassement $y(t_{D_1})$. On en déduit D_1, puis z :

$$D_1 = \frac{y(T_{D_1}) - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)}$$

$$z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{(\ln(D_1))^2 + \pi^2}}$$

3. Relever l'instant du premier dépassement T_{D_1}. On en déduit ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T_{D_1}\sqrt{1 - z^2}}$$



Identification à partir de la réponse indicielle

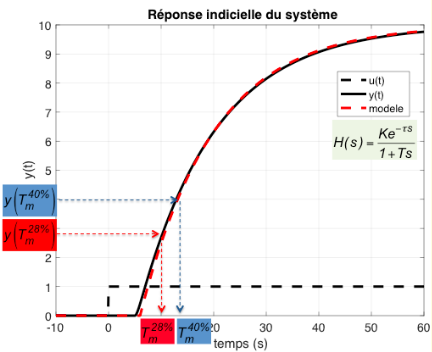
Modèle de Broïda

Broïda a proposé d'approcher la réponse apériodique de tout système d'ordre n par un premier ordre avec retard pur

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}$$

1. Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :
$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

2. Relever $y(T_m^{28\%})$ et $y(T_m^{40\%})$, en déduire $T_m^{28\%}$ et $T_m^{40\%}$ puis :
$$\tau = 2,8\,T_m^{28\%} - 1,8\,T_m^{40\%}$$
$$T = 5,5\left(T_m^{40\%} - T_m^{28\%}\right)$$



Ces méthodes simples fournissent, en général, des modèles de comportement dominant assez grossiers.
Il existe des méthodes d'identification de systèmes plus puissantes disponibles dans les boîtes à outils CONTSID ou *System Identification* de Matlab.

Exercices sur les méthodes simples pour l'identification

Exercices sous Matlab

Conclusion

Méthodes simples

Ces méthodes simples fournissent une estimation du modèle de comportement d'un système.

Avantages :

- simples à mettre en œuvre
- rapides
- obtention d'un modèle de comportement simplifié, permettant l'initialisation d'algorithmes plus avancés

Inconvénients :

- modèles simplistes (parfois trop)
- pas robustes aux perturbations (bruit sur les données, perturbations extérieures,...
- non prises en compte de toutes les données

Solution : utiliser des méthodes avancées d'identification de systèmes.