Systèmes à temps discret

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Signaux et systèmes discrets
Motivations de leur étude pour la régulation numérique

- Régulation numérique
  - Actionneur - Procédé – capteur = système continu
    - Signaux de commande et de sortie : signaux continus
  - Correcteur = système discret
    - Signaux d'entrée et de sortie : signaux numériques
- Outils nécessaires
  - Outils pour modéliser les signaux et systèmes discrets : échantillonneur, bloqueur, correcteur numérique, systèmes échantillonnés…
  - Outils/méthodes de discrétisation
    - passage d'un modèle continu à un modèle échantillonné
    - simulation numérique de la réponse du système et/ou synthèse numérique du correcteur nécessitent une discrétisation préalable du système continu
    - en cas de synthèse préalable d'un correcteur analogique, son implantation numérique nécessite une discrétisation

Rappels – Les différents outils d'analyse des signaux et systèmes linéaires *à temps continu*

- Signal à temps continu $\quad y(t)$
- Transformée de Fourier (TFtc) $\quad Y(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt$
- Transformée de Laplace $\quad Y(s)=\int_{0}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt$
- Réponse du système continu

$$y(t)=g(t)*e(t)$$
$$Y(f)=G(f)\times E(f)$$
$$Y(s)=G(s)\times E(s)$$

- Exemple

$$\dot{y}(t)+0,5y(t)=e(t)$$
$$\left(s+0,5\right)Y(s)=E(s)$$

$$E(s) \longrightarrow \boxed{G(s)=\frac{1}{s+0,5}} \longrightarrow Y(s)$$

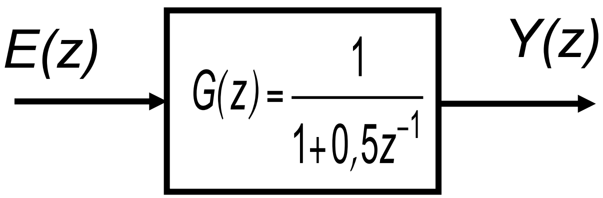
Les différents outils d'analyse des signaux et systèmes linéaires *à temps discret*

- Signal à temps discret $\quad y(k)$
- Transformée de Fourier (TFtd) $\quad Y(f)=\sum^{+\infty} y(k)e^{-j2\pi fkT_e}$
- *Transformée en Z* $\quad Y(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} y(k)z^{-k}$
- Réponse du système numérique

$$y(k)=g(k)*e(k)$$
$$Y(f)=G(f)\times E(f)$$
$$Y(z)=G(z)\times E(z)$$

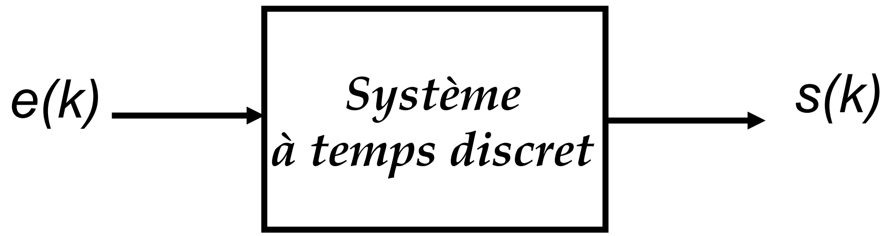
- Exemple

$$y(k)+0{,}5y(k-1)=e(k)$$
$$\left(1+0{,}5z^{-1}\right)Y(z)=E(z)$$



Système à temps discret

- Un système à temps discret est défini comme un opérateur entre ***deux signaux à temps discret***



- L'outil mathématique exploitée pour faciliter son analyse est la ***transformée en z***

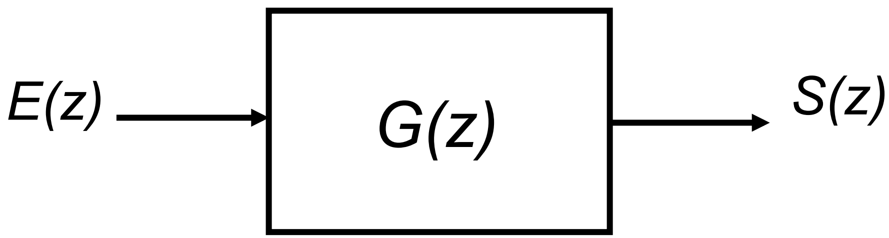
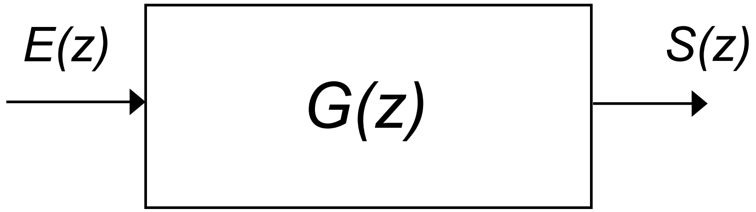


Schéma-bloc ou schéma fonctionnel

*En **<u>Automatique numérique</u>**, on représente un système par un schéma-bloc qui relie la transformée en z de l'entrée E(z) à la transformée en z de la sortie S(z) via sa fonction de transfert G(z)*



Du schéma-bloc, on peut en déduire les relations

$$S(z) = G(z)E(z)$$

ou

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

Description d'un système linéaire à temps discret

- Un système linéaire à temps discret linéaire peut être décrit par :
  - un produit de convolution
  - une équation aux différences
  - sa fonction de transfert

- ***L'outil mathématique*** exploité pour faciliter l'analyse de systèmes linéaire à temps discret est la ***transformée en z***

Produit de convolution

- La réponse impulsionnelle *g(k)* permet de calculer la sortie du filtre *s(k)* à toute entrée *e(k)* via le ***produit de convolution discret***

$$s(k) = g(k) * e(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i)\, e(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(k-i)\, e(i)$$

- Si le filtre est causal : *g(k)=0* pour tout *k < 0*

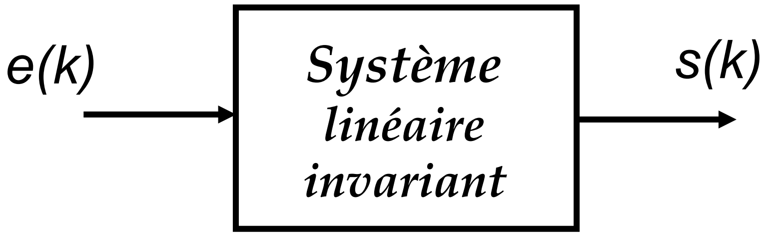
$$s(k) = g(k) * e(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)\, e(k-i)$$

$$\mathcal{Z}(s(k)) = \mathcal{Z}(g(k) * e(k))$$

$$S(z) = G(z) \times E(z)$$

Equation aux différences

- Un système ***à temps discret*** linéaire invariant dans le temps possédant une entrée $e(k)$ et une sortie $s(k)$ est décrit par une ***équation aux différences*** à coefficients constants :



$$a_0 s(k) + a_1 s(k-1) + \ldots + a_{n_a} s(k-n_a) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \ldots + b_{n_b} e(k-n_b)$$

Fonction de transfert en z

Soit l'équation aux différences exprimant la relation entre le signal d'entrée *e(k)* et le signal de sortie *s(k)* d'un système à temps discret :

$$a_0 s(k) + a_1 s(k-1) + \ldots + a_{n_a} s(k-n_a) = b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \ldots + b_{n_b} e(k-n_b)$$

En appliquant la transformée en z aux 2 membres de l'équation et en utilisant :

$$Z\left(x(k-i)\right) = z^{-i} X(z)$$

$$\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}\right) S(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b}\right) E(z)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}} = \frac{b_0 z^{n_a} + b_1 z^{n_a-1} + \ldots + b_{n_b} z^{n_a-n_b}}{a_0 z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \ldots + a_{n_a}}$$

n_a : ordre du filtre

Gain statique d'un système à temps discret

- Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

- Définition
  - *Si on connaît* $G(z)$, ***le gain statique*** *d'un système à temps discret est la valeur de* $G(z)$ *pour* $z=1$

$$K = \lim_{z \to 1} G(z)$$

  - Si on a relevé la réponse indicielle d'un *système stable*, on a aussi :

$$K = \frac{\lim\limits_{k \to +\infty} s(k) - s(0)}{\lim\limits_{k \to +\infty} e(k) - e(0)}$$

Fonction de transfert en z - Exemple

$$s(k)-0,8s(k-1)=0,2e(k)$$

$$G(z)=? \qquad K=? \qquad n_a=?$$

$$\left(1-0,8z^{-1}\right)S(z)=0,2\ E(z)$$

$$G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}=\frac{0,2z}{z-0,8}$$

ordre du système : $n_a = 1$

$$K=\lim_{z\to 1} G(z)=\frac{0,2}{1-0,8}=1$$

Détermination de l'équation aux différences d'après la connaissance de la fonction de transfert

- Soit la fonction de transfert *G(z)* d'un système numérique

$$G(z)=\frac{0,2z}{z-0,8}$$

Comment en déduire son équation aux différences

On exprime *G(z)* **en puissance négative** de *z* $G(z)=\frac{0,2z}{z-0,8}\times\frac{z^{-1}}{z^{-1}}=\frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}$

$$\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}$$

car par définition $G(z)=\frac{S(z)}{E(z)}$

$$(1-0,8z^{-1})S(z)=0,2E(z)$$

$$S(z)-0,8z^{-1}S(z)=0,2E(z)$$

$$s(k)-0,8s(k-1)=0,2e(k)$$

car $Z^{-1}\left(z^{-i}\,S(z)\right)=s(k-i)$ ici $i=1$

Forme standard
d'une fonction de transfert discrète

$$G(z)=\frac{K}{(1-z)^m}z^{-r}\frac{N(z)}{D(z)}$$

$$K=\lim_{z\to 1}(1-z)^m G(z)$$

- La forme standard des fonctions de transfert discrètes permet de visualiser aisément :
  - le gain K (= gain statique si *m=0, pas d'intégrateur pur)*
  - les intégrateurs purs (pôle en $z=1$) d'ordre m
  - le nombre d'échantillons pour le retard pur (pôle $z=0$ d'ordre *r)*

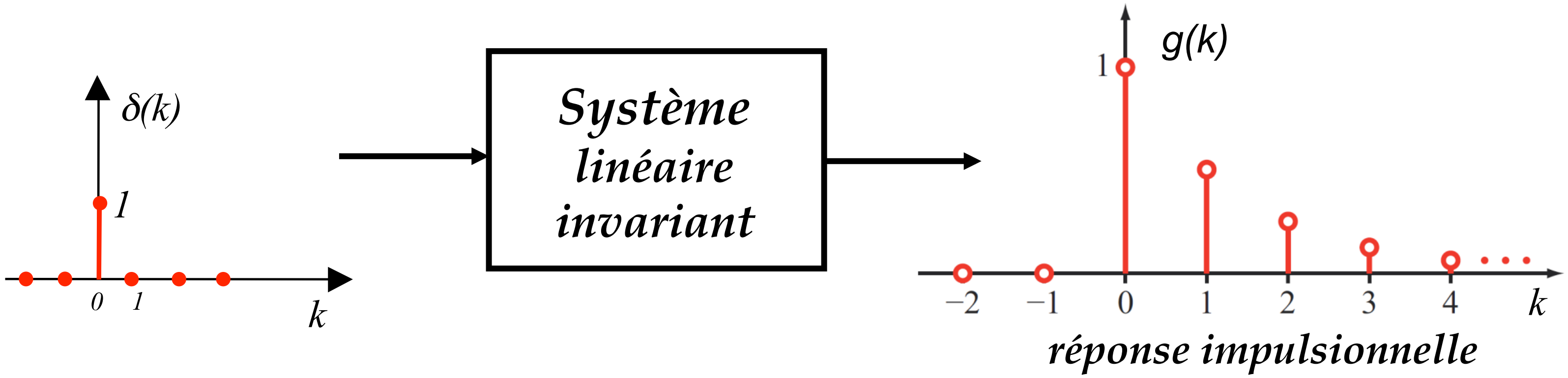
Analyse d'un système linéaire à temps discret

- Les caractéristiques d'un système linéaire à temps discret sont classiquement analysées via :

  - sa réponse impulsionnelle
  - sa réponse indicielle
  - sa réponse fréquentielle
  - son diagramme des pôles et des zéros

Réponse impulsionnelle

- Elle correspond à la réponse *g(k)* obtenue lorsqu'on envoie en entrée une impulsion de Kronecker $\delta(k)$



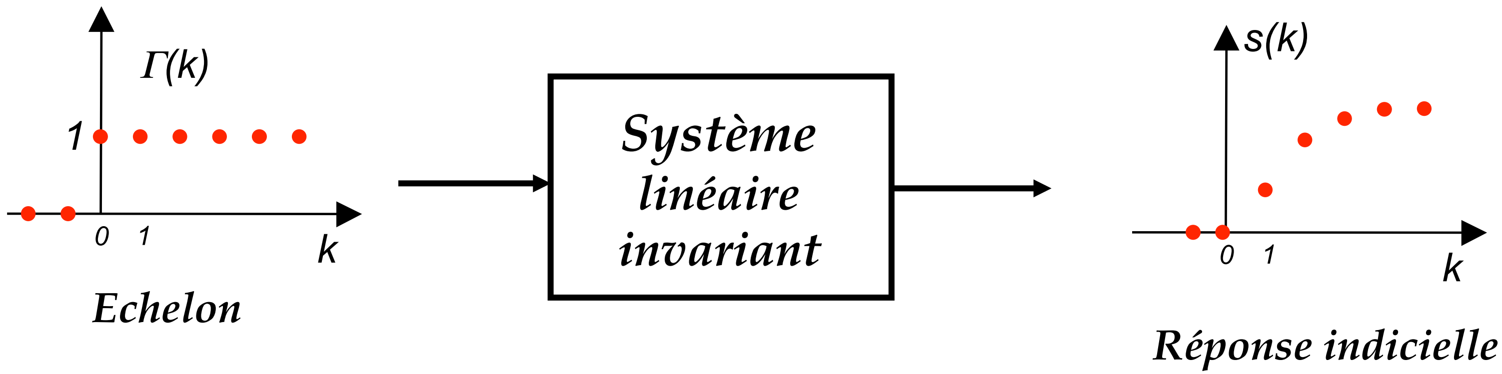
- Si $g(k)=0$ pour $k<0$, le système est ***causal***

$$Z(s(k)) = Z(g(k) * \delta(k))$$
$$S(z) = G(z) \times 1$$
$$S(z) = G(z)$$
$$s(k) = g(k)$$

$$Z(\delta(k)) = 1$$

Réponse indicielle

- Elle correspond à la réponse obtenue lorsqu'on envoie en entrée un échelon $\Gamma(k)$



$$Z\left(\Gamma(k)\right)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

$$Z(s(k))=Z(g(k)*\Gamma(k))$$

$$S(z)=G(z)\times\frac{z}{z-1}$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY

Réponse fréquentielle

- Si on connaît *G(z)*

$$\left.\begin{aligned} z &= e^{sT_e} \\ s &= j\omega = j2\pi f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad z = e^{j2\pi f T_e}$$

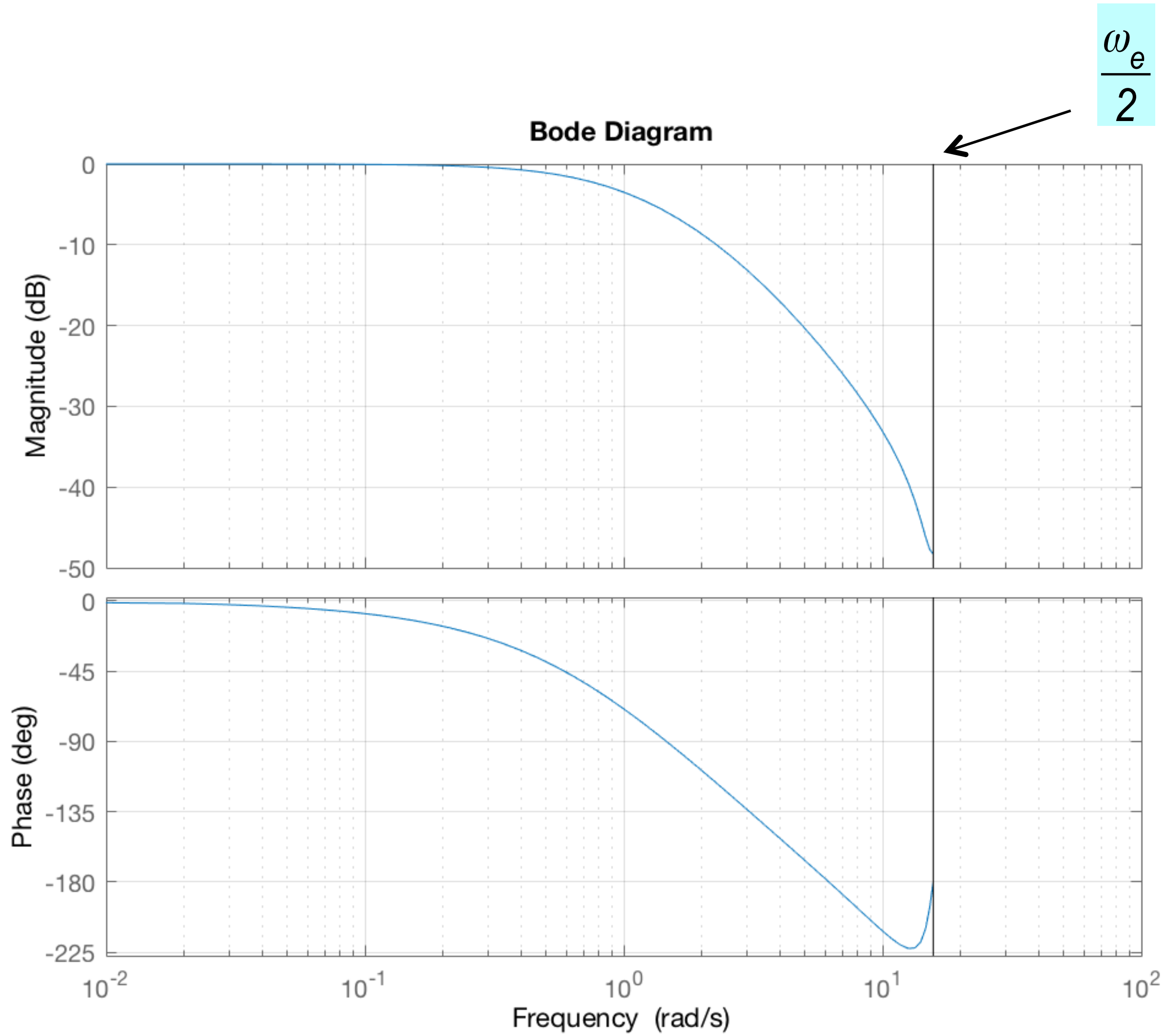
$$G(f) = G(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T_e}} = \left|G(f)\right| e^{j\varphi(f)}$$

Permet de déduire le tracé la réponse fréquentielle en amplitude et en phase

$$\left|G(f)\right| = \left|\frac{Y(f)}{E(f)}\right| \qquad \varphi\left(f\right) = Arg\left(G(f)\right)$$

- Caractéristiques des réponses fréquentielles de systèmes à temps discret
  - *Elles sont périodiques de « période »* f_e
    - *L'analyse et le tracé se limitent à la plage de fréquences [0 ; f_e /2]*
  - ***Pas de pentes particulières au niveau du diagramme de Bode***

Diagramme de Bode d'un système discret
Exemple



Causalité d'un système discret

Notion importante pour l'implantation en temps réel

- Un système est causal si sa sortie à tout instant ne dépend que des valeurs de l'entrée aux instants présents et passés

- Exemples
  - Système causal $y(k) = 0.7\, y(k-1) + 0.3\, u(k)$
  - Système non causal $y(k) = 0.5u(k-1)+ 0.2\, u(k)+ 0.1u(k+1)$

- La réponse d'un système causal ne varie qu'après apparition de l'entrée ($k \geq 0$) et est nulle pour $k<0$, en particulier la réponse impulsionnelle $g(k) = 0$ pour tout $k < 0$

  - Produit de convolution pour un système causal

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i)u(k-i) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)u(k-i)$$

Diagramme des pôles/zéros

- Soit une fonction de transfert

$$G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=C\,\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

- Définitions

  - ○ ***Zéros*** $\boldsymbol{z_j}$ sont les racines du numérateur $B(z)=0$
  - ✖ ***Pôles*** $\boldsymbol{p_i}$ sont les racines du dénominateur $A(z)=0$

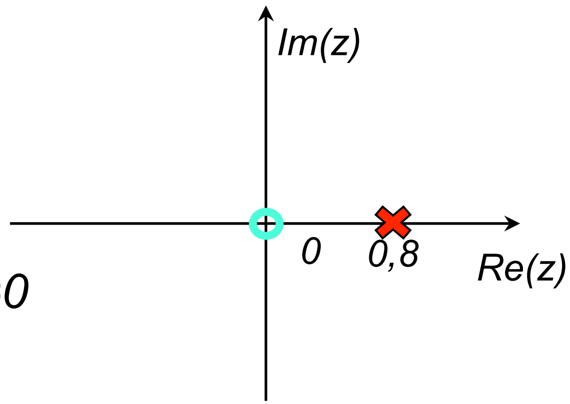


Diagramme des pôles/zéros

- Exemple

$$G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{0,2}{1-0,8z^{-1}}=\frac{0,2z}{z-0,8}$$

Toujours écrire G(z) en puissance positive de z pour déterminer les pôles/zéros

Stabilité d'un système à temps discret

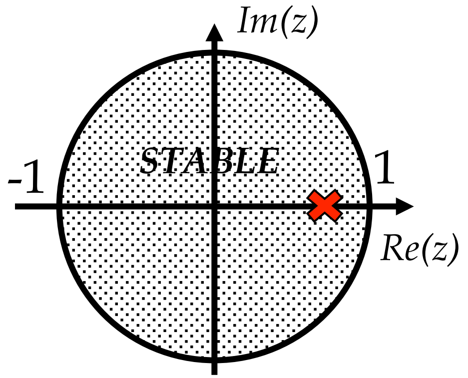
- Si on connaît la fonction de transfert du système à temps discret

$$G(z) = C\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

Le système à temps discret est stable si tous ses pôles p_i ont un module inférieur à 1, c'est à dire s'ils sont ***situés à l'intérieur du cercle unité***

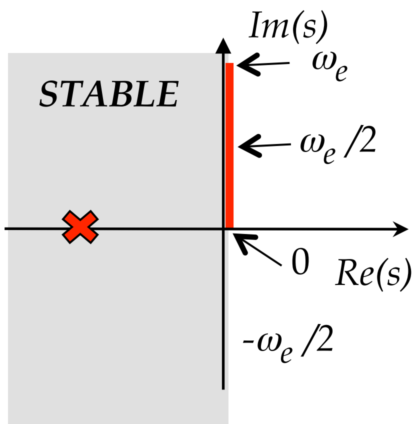
$$|p_i| < 1$$

Exemple $G(z) = \dfrac{0,2z}{z-0,8}$



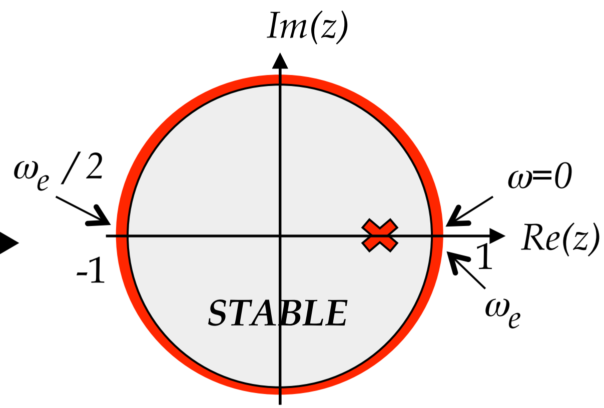
Conditions de stabilité
systèmes à temps continu/systèmes à temps discret

Systèmes analogiques



$$\begin{cases} s = j\omega \\ z = e^{sT_e} \end{cases}$$

Systèmes numériques



$Re(\text{tous les pôles}) < 0$

Partie réelle

$|\text{tous les pôles}| < 1$

module

Analyse d'un système à temps discret
En résumé !

Produit de convolution

$$s(k) = g(k) * e(k)$$

Z Z^{-1}

Equation aux différences

$$s(k) = -a_1 s(k-1) + b_0 e(k)$$

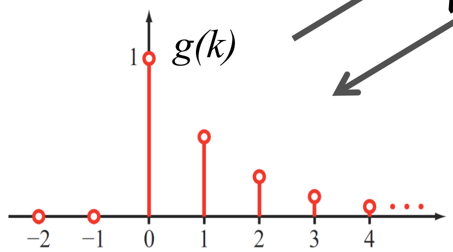
Z Z^{-1}

Fonction de transfert

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

Z Z^{-1}

$z = e^{j2\pi f/fe}$



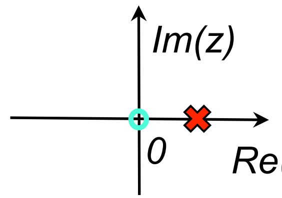
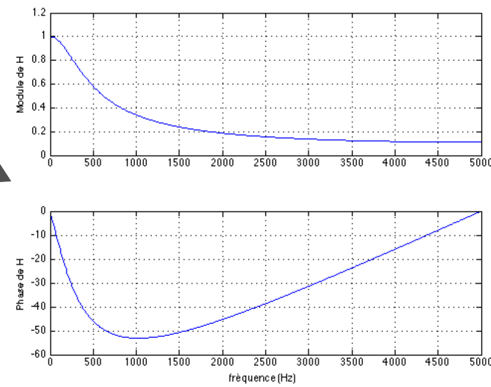


Diagramme des pôles/zéros



$$G(f) = G(z)\Big|_{z=e^{j2\pi\frac{f}{f_e}}} = \left|G(f)\right| e^{j\varphi(f)}$$

Réponse impulsionnelle $g(k)$

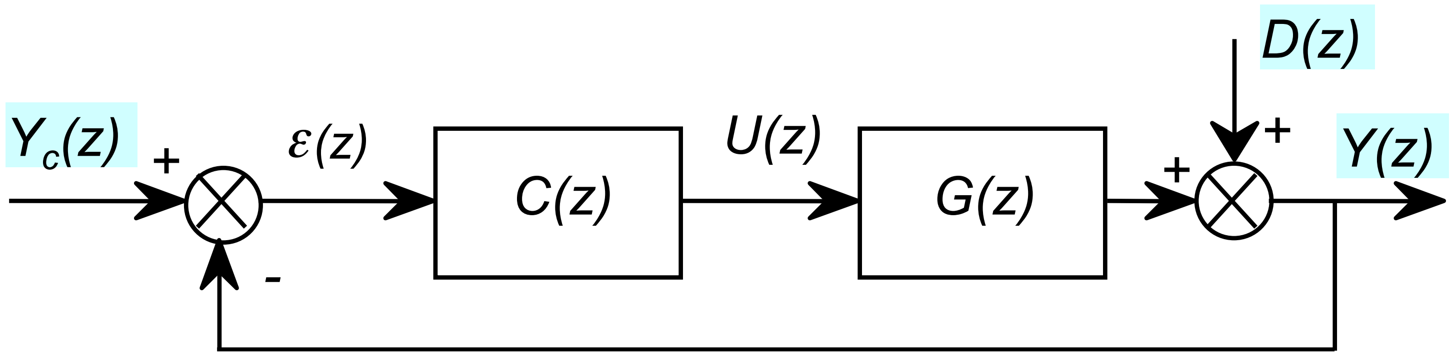
TFtd

TFtd^{-1}

Réponse fréquentielle $G(f)$

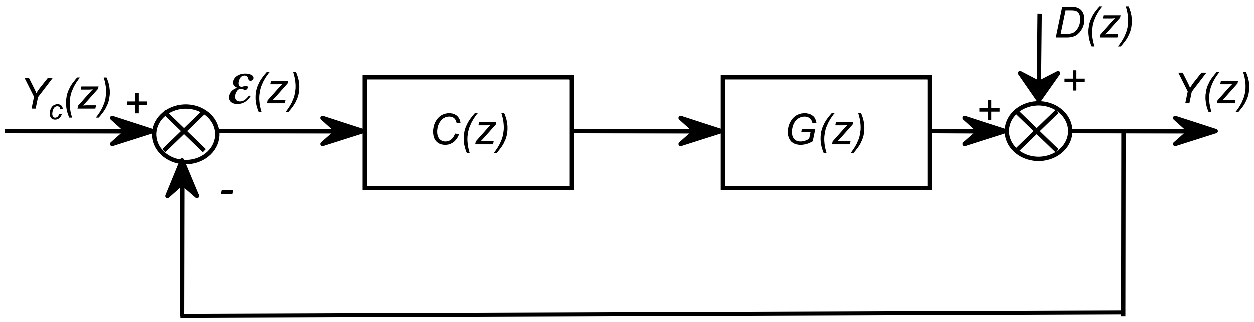
Schéma de régulation numérique

- La recherche d'une loi de commande (et donc de *C(z)*) par une approche totalement numérique s'appuie sur :
  - un modèle *G(z)* de l'ensemble bloqueur d'ordre 0 + actionneur + système + capteur + échantillonneur
  - le type de signaux d'entrée : la consigne $Y_c(z)$, la perturbation *D(z)*



$$Y(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} Y_c(z) + \frac{1}{1+C(z)G(z)} D(z)$$

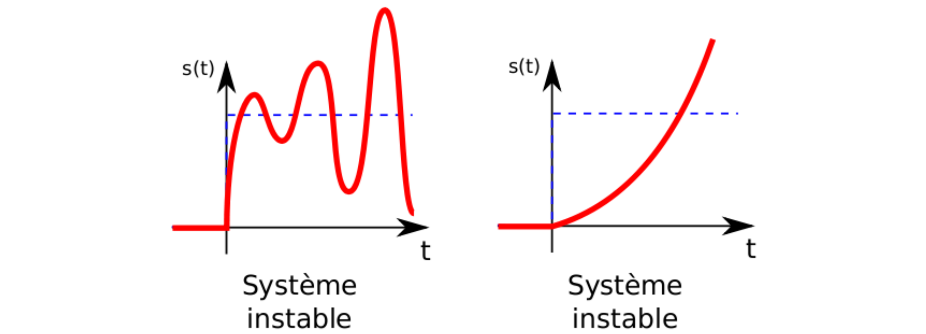
Outils d'évaluation des performances d'une régulation numérique



- ***Se doter d'outils*** pour évaluer les performances du système bouclé
  - ***sa stabilité***
  - ***sa précision***

Stabilité d'un système bouclé

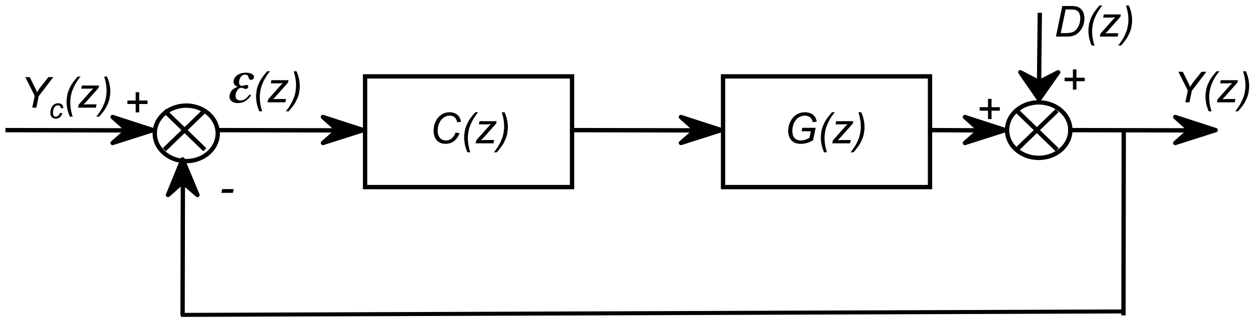
- La mauvaise conception d'un contrôle peut conduire à un système bouclé instable !



- *Avant d'étudier les autres performances, le contrôle via le choix du correcteur C(z) doit garantir la stabilité du système bouclé*

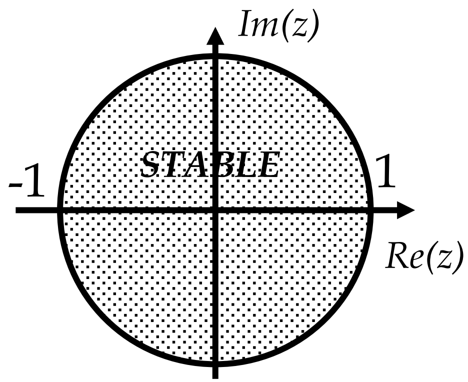
Comment prévoir la stabilité de la boucle avant de la fermer ?

Outils pour analyser la stabilité d'un système bouclé



$$Y(z) = F_{BF}(z)Y_c(z) + F_D(z)D(z)$$

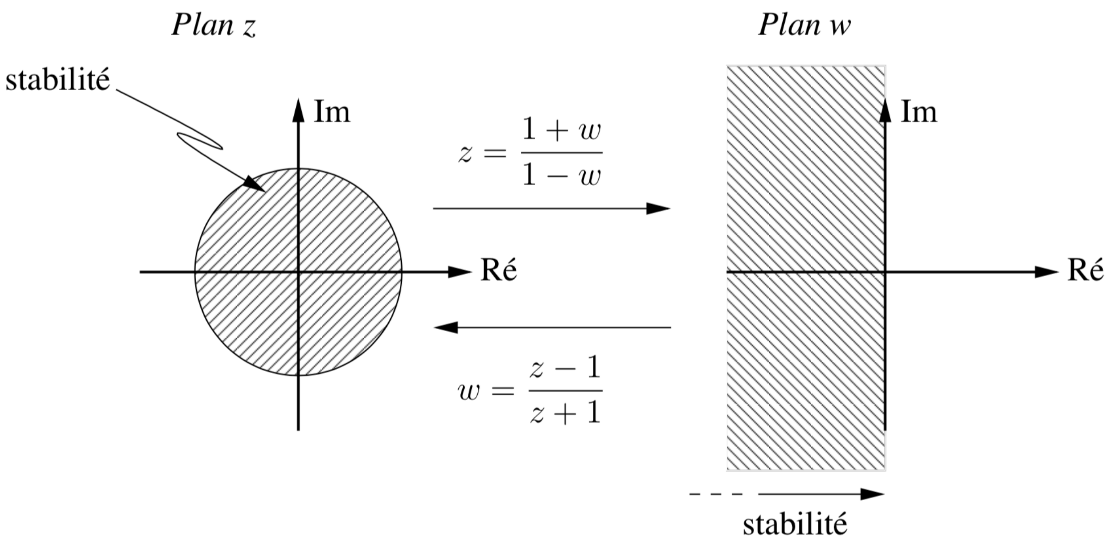
- Le système bouclé est stable si tous les pôles p_i de $F_{BF}(z)$ sont à à l'intérieur du cercle unité



Outils pour analyser la stabilité d'un système bouclé

- Outils d'analyse de la stabilité d'un système bouclé à partir de $F_{BF}(z)$
  - *On peut utiliser le critère algébrique de Routh-Hurwirtz (revoir cours automtique continue) appliqué à $F_{BF}(w)$ obtenue en effectuant le changement de variable*

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$



– *On peut utiliser le critère algébrique de Routh-Hurwirtz appliqué à* $F_{BF}(w)$ *obtenue en effectuant le changement de variable* $z = \dfrac{w+1}{w-1}$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz (Rappels)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots + a_1 s + a_0}$$

1. Vérifier que $\forall\ a_i \neq 0$ et $\forall\ a_i$ ont le même signe puis construire le tableau
2. Recopier les coefficients du dénominateur dans les deux 1ères lignes
3. Compléter le tableau selon la règle : $b_{i,j} = \dfrac{b_{i-1,1} b_{i-2,j+1} - b_{i-1,j+1} b_{i-2,1}}{b_{i-1,1}}$
4. $G(s)$ stable $\Leftrightarrow$ tous les termes de la 1ère colonne sont de même signe.

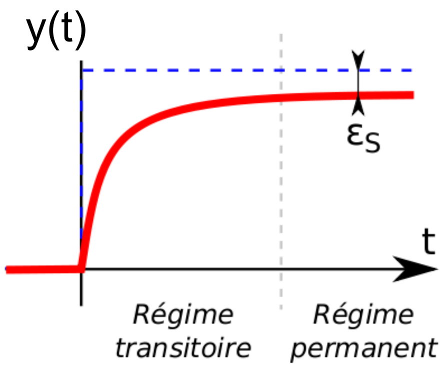
Le nombre de pôles instables correspond au nombre de changement de signe dans la 1ère colonne.

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_0 \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
s^{n-2} & b_{3,1} & b_{3,2} & \cdots & & \\
s^{n-3} & b_{4,1} & b_{4,2} & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
s^0 & a_0 & & & &
\end{array}$$

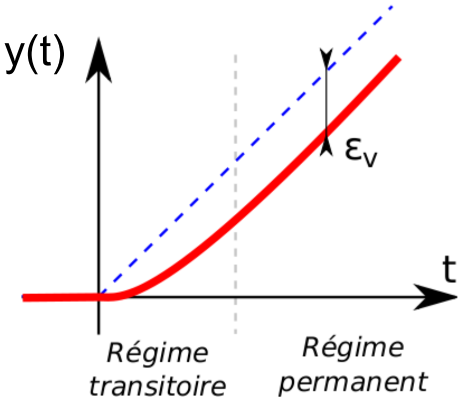
$$b_{3,1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}a_n}{a_{n-1}}, \quad b_{3,2} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}a_n}{a_{n-1}}, \ldots, b_{4,1} = \frac{b_{3,1}a_{n-3} - b_{3,2}a_{n-1}}{b_{3,1}}, \ldots$$

Précision d'un système bouclé – Rappels

- Un système bouclé *stable* est ***précis*** si lors, d'un changement de consigne, l'erreur entre la consigne et la sortie est nulle en régime permanent



ε_S *: erreur statique ou de position*



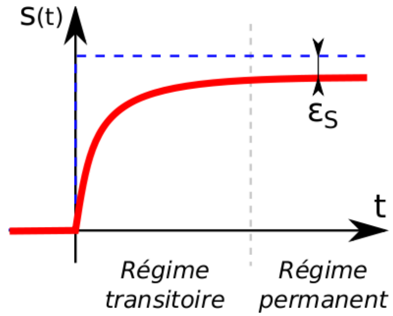
ε_V *: erreur de traînage ou de vitesse*

- La précision se définit en fonction du ***type de consigne*** $\boldsymbol{y_c(k)}$:
  - consigne en ***échelon*** : précision statique ou erreur de position
  - consigne en ***rampe*** : précision en vitesse ou erreur de traînage
  - consigne en ***parabole*** : précision en accélération

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- Analyser la précision statique revient à étudier l'erreur entre la consigne et la sortie en régime permanent ($k \rightarrow +\infty$)

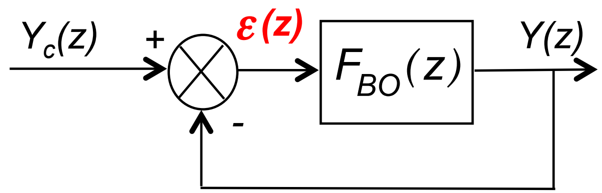
$$\varepsilon_s = \lim_{k \to +\infty} \left(y_c(k) - y(k) \right) = \lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k)$$



- Le système bouclé est dit :
  - ***précis*** si cette limite est nulle
  - ***non précis*** si cette limite n'est pas nulle
    - *On peut néanmoins dire que le système est d'autant plus précis que l'erreur est faible*

- On exploite le théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)\varepsilon(z)$$



Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- On exploite le théorème de la valeur finale $H(z)=1$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(k)=\lim_{z\to1}(z-1)\varepsilon(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\big(Y_c(z)-Y(z)\big)=\lim_{z\to1}(z-1)Y_c(z)\left(1-\frac{Y(z)}{Y_c(z)}\right)$$

$$=\lim_{z\to1}(z-1)Y_c(z)\big(1-F_{BF}(z)\big)=\lim_{z\to1}(z-1)Y_c(z)\left(1-\frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}\right)$$

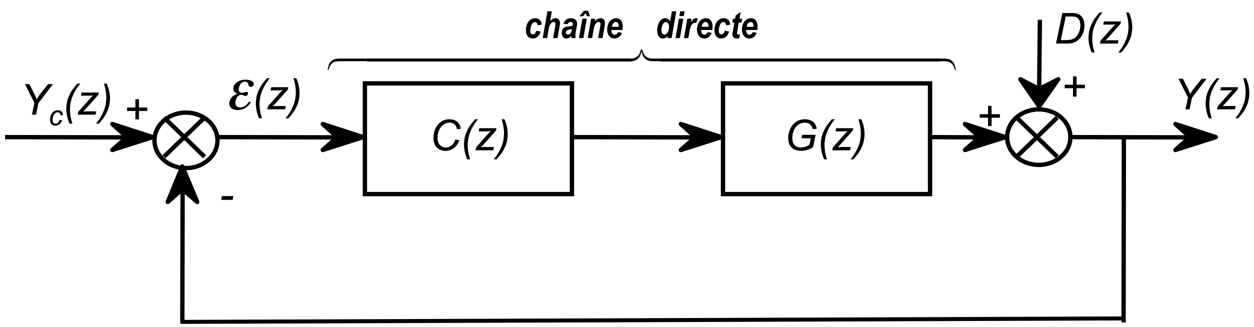
$$=\lim_{z\to1}(z-1)Y_c(z)\left(1-\frac{F_{BO}(z)}{1+F_{BO}(z)}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(k)=\lim_{z\to1}(z-1)Y_c(z)\left(\frac{1}{1+F_{BO}(z)}\right)$$

➔ La précision du système bouclé dépend

- de $Y_c(z)$ et donc du type de consigne : *échelon, rampe, parabole, …*
- de la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(z)=C(z)G(s)$

Nombre d'intégrateurs dans la chaîne directe

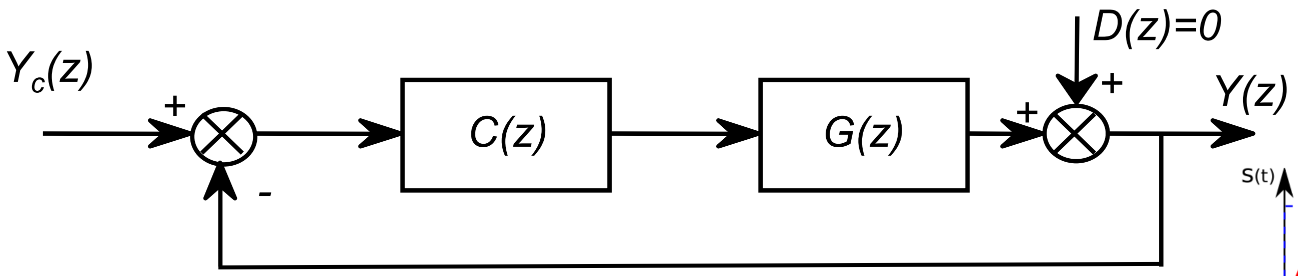


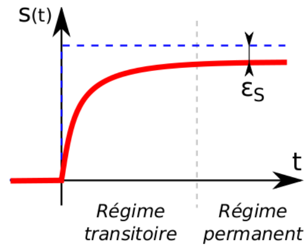
- De manière générale, $F_{BO}(z)$ est une fraction rationnelle et peut s'écrire

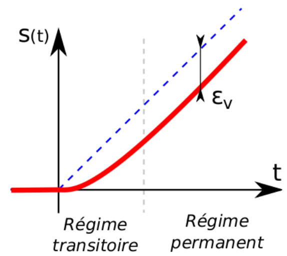
$$F_{BO}(z) = C(z)G(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^{\alpha} D(z)}$$

α est le nombre d'intégrateurs purs de $F_{BO}(z)$

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé







$\varepsilon_s = \lim\limits_{k \to +\infty} \varepsilon(k)$	Echelon	Rampe	Parabole
Nbre intégrateur pur $\alpha=0$	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
Nbre intégrateur pur $\alpha=1$	0	$\dfrac{T_e}{K}$	∞
Nbre intégrateur pur $\alpha=2$	0	0	$\dfrac{2T_e}{K}$

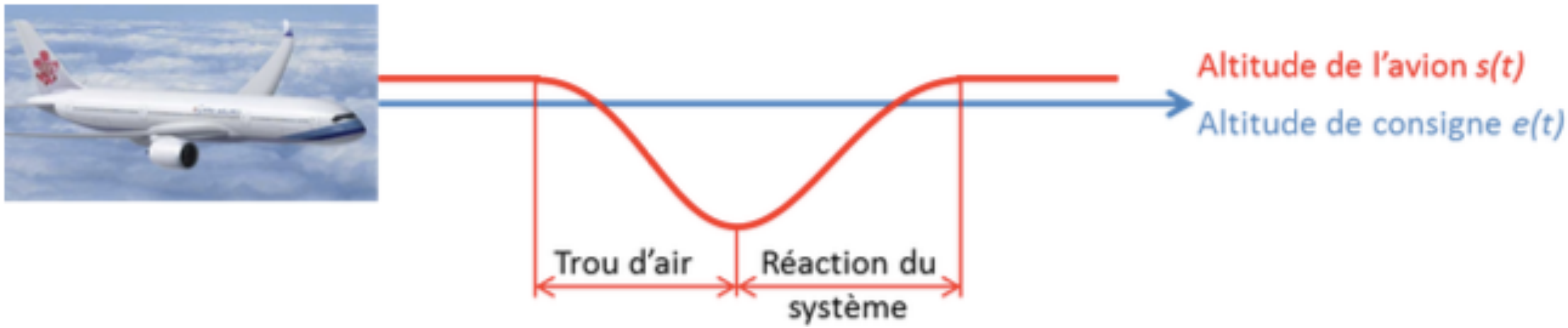
Tableau récapitulatif de l'erreur en régime permanent

$K=N(1)/D(1)$ est le gain de la chaîne directe $F_{BO}(z)$

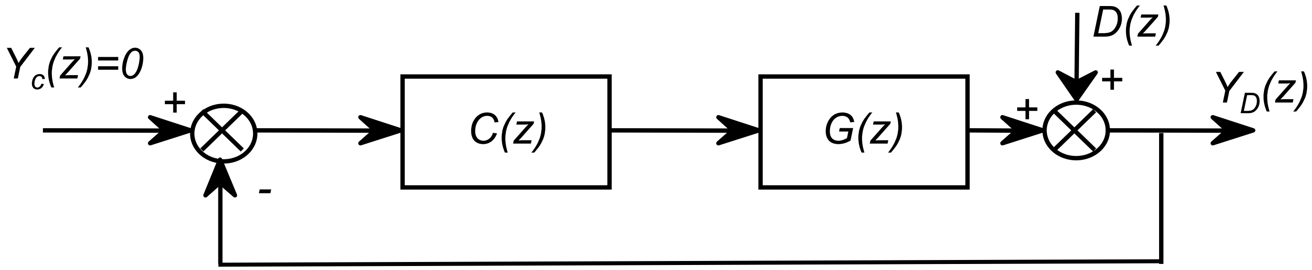
$$F_{BO}(z) = C(z)G(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^{\alpha} D(z)}$$

Influence des perturbations sur la précision d'un système bouclé

- Rappel
  - Perturbation : entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système



Méthode pour analyser l'influence d'une perturbation *en échelon* sur la précision d'un système bouclé



- On cherche, lorsque $y_c(k)=0$, à caractériser $y_D(k)$ pour $\boldsymbol{d(k)=\Gamma(k)}$

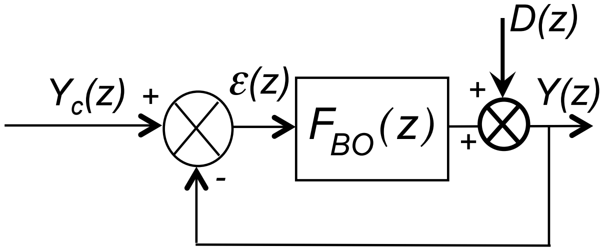
$$\lim_{k\to+\infty} y_D(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y_D(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)F_D(z)D(z)$$

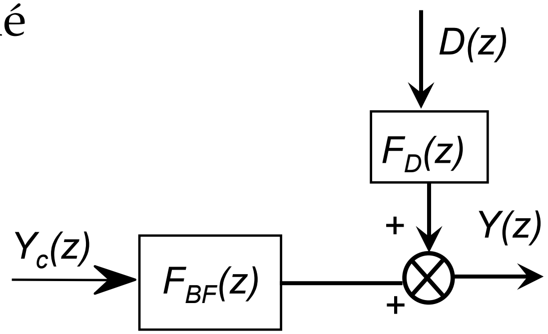
$$F_D(z) = \frac{1}{1+F_{BO}(z)}; \quad Y_D(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{k\to+\infty} y_D(k) = \overset{?}{\longrightarrow} 0$$

Stabilité et performances des structures bouclées de régulation numérique
Résumé des outils d'analyse

① A partir du schéma-bloc du système bouclé





② On calcule $F_{BO}(z)$. *On en déduit* $F_{BF}(z)$ *et* $F_D(z)$

③ On analyse la ***stabilité*** et les marges de stabilité du système bouclé

- Pôles de $F_{BF}(z)$
- critère de Routh (via la transformation en w)

④ On évalue les critères de performances. *Vérifient-ils le cahier des charges* ?

- ***Précision***
  - Calcul de l'erreur de précision
- ***Rapidité*** et ***amortissement***
  - Calcul du temps de réponse à n% et D_{max}