TD Identification des systèmes n°3

M. Gilson
H. Garnier

Rappels sur la régression linéaire et l'estimation par moindres carrés

Exercice 3.1 - Estimation paramétrique d'un modèle de la position d'un chariot par moindres carrés
On souhaite modéliser la position d'un chariot qui se déplace le long d'un rail rectiligne.
On supposera que le chariot se déplace à accélération constante.

Table 1: Position du chariot au cours du temps

t_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y(t_k)$	0.2	0.21	0.23	0.26	0.28	0.32	0.35	0.40	0.44	0.49

1. Les valeurs numériques de $y(t_k)$ pour quelques valeurs du temps sont rassemblées dans le tableau 1. Tracer la position du chariot au cours du temps.
2. Le modèle décrivant la position du chariot en fonction du temps est choisi comme :
$$y(t_k) = \frac{1}{2}at_k^2 + vt_k + c \tag{1}$$
Donner la signification physique et les unités des trois paramètres a,v,c du modèle.
3. Ecrire le modèle sous forme de regression linéaire.
$$y(t_k) = \phi^T(t_k)\theta \tag{2}$$
où $\theta = [a \quad v \quad c]^T$
4. A partir des $N = 10$ données du tableau 1, formuler le problème d'estimation des 3 paramètres sous forme matricielle :
$$Y = \Phi\theta \tag{3}$$
5. Préciser le nom et les dimensions de chacune des matrices.
6. L'estimation par moindres carrés ordinaires est rappelée ci-dessous :
$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y \tag{4}$$
Implanter sous Matlab cette estimation pour déterminer la valeurs numérique des trois paramètres.
7. Vérifier que vous obtenez les mêmes estimées à l'aide de la commande Matlab suivant (où `Phi` représente Φ) :
`thetaHat=Phi\Y`
On privilégiera cette implantation à l'avenir.
8. Donner le modèle de simulation de la position du chariot et calculer les positions simulées à partir du modèle estimé.
9. Calculer et tracer l'erreur de simulation (aussi appélée résidus) aux différents instants de mesure.
10. Calculer la moyenne et la variance des résidus.

Exercice 3.2 - Estimation paramétrique d'un modèle à temps discret d'un réacteur chimique par moindres carrés

Table 2: Données issues du réacteur chimique

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(t_k)$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$y(t_k)$	0	0.13	0.09	0.10	0.10	0.10	-0.17	-0.08	-0.11	-0.10	-0.10

1. Les mesures du flux d'entrée $u(t_k)$ et de la concentration du substrat de sortie $y(t_k)$ d'un réacteur chimique sont rassemblées dans le tableau 1.
2. Le modèle décrivant la réaction chimique est supposé pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$y(t_k) = b_0 u(t_k) + b_1 u(t_{k-1}) + b_2 u(t_{k-2}) + e(t_k) \tag{5}$$

   où $e(t_k)$ est un bruit blanc de variance σ_e^2.
   En utilisant l'opérateur retard q^{-1} $(q^{-1}u(t_k) = u(t_{k-1}))$, écrire le modèle sous forme polynomiale puis rappeler le nom de cette forme de modèle.
3. Que représentent les paramètres à estimer b_0, b_1 et b_2.
4. Ecrire le modèle sous forme de regression linéaire :

$$y(t_k) = \phi^T(t_k)\theta + e(t_k) \tag{6}$$

   où $\theta = [b_0 \quad b_1 \quad b_2]^T$
5. A partir des $N = 11$ données du tableau 2, formuler le problème d'estimation des 3 paramètres sous forme matricielle :

$$Y = \Phi\theta + E \tag{7}$$

6. Rappeler la solution des moindres carrés en fonction de Y et Φ qui permet d'estimer le vecteur des paramètres θ.
7. On donne :

$$\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2857 & -0.25 & 0.0357 \\ -0.25 & 0.50 & -0.25 \\ 0.0357 & -0.25 & 0.2857 \end{pmatrix} \qquad \Phi^T Y = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.95 \\ 0.61 \end{pmatrix} \tag{8}$$

   Calculer les valeurs numériques des trois paramètres.
8. Donner le modèle de simulation de la concentration de substrat de sortie et calculer les concentrations simulées à partir du modèle estimé.
9. En déduire l'erreur de simulation aux différents instants de mesure.