Transformée en Z

Hugues GARNIER

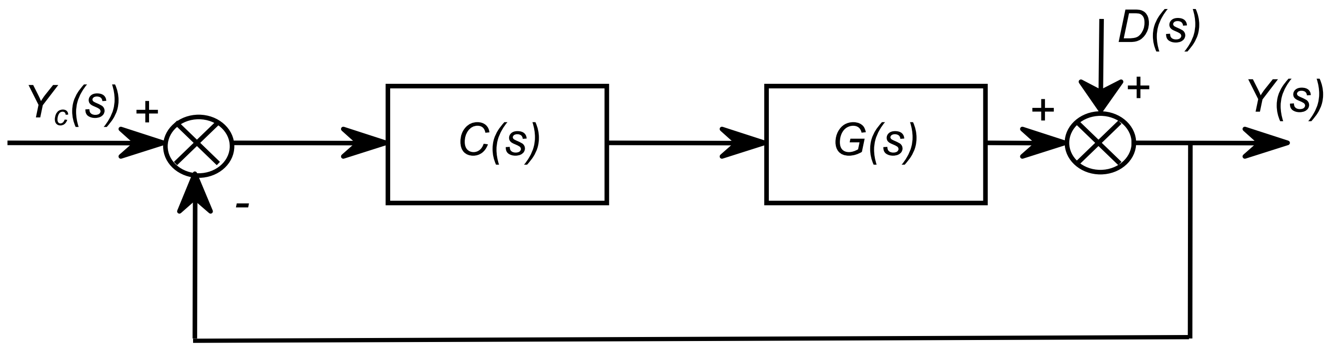
hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Intérêts de la transformée de Laplace *(rappels)*

- Permet de déterminer la solution d'une ***équation différentielle*** à coefficients constants
  - Ex: résoudre

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \qquad y(0) = 0; \dot{y}(0) = 1$$

- Est l'outil mathématique qui facilite ***l'analyse des boucles de régulation continue***



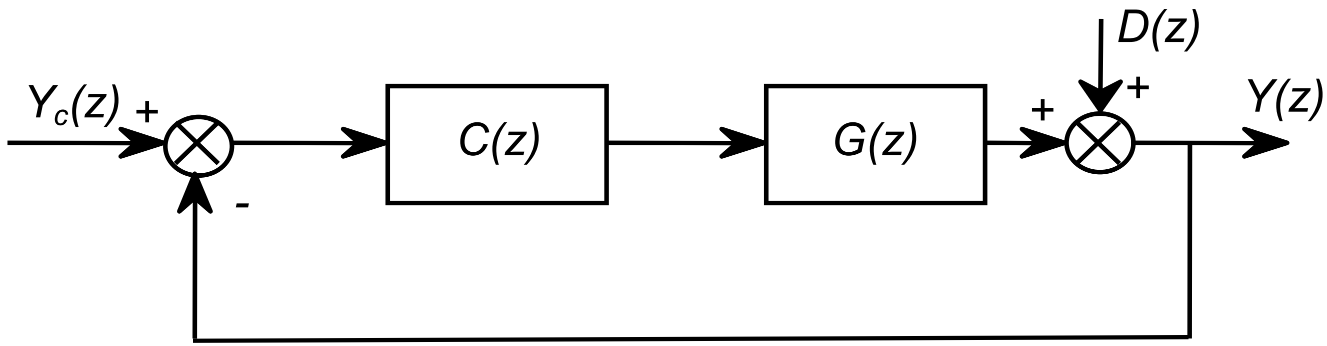
$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{1}{1+F_{BO}(s)} D(s)$$

Intérêts de la transformée en Z

- Permet de déterminer la solution d'une ***équation aux différences*** à coefficients constants
  - Ex : résoudre

$$y(k) - 4y(k-1) + 3y(k-2) = 1, \qquad y(-1) = y(-2) = 0$$

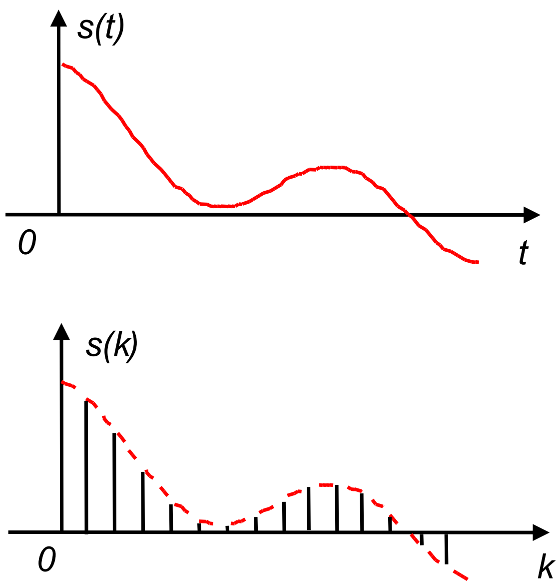
- Est l'outil mathématique qui facilite ***l'analyse des boucles de régulation numérique***



$$Y(z) = \frac{F_{BO}(z)}{1+F_{BO}(z)} Y_c(z) + \frac{1}{1+F_{BO}(z)} D(z)$$

Signal numérique

- Un signal numérique *(ou signal à temps discret)* sera noté $s(k)$ avec $k \in Z$
- Il est défini uniquement pour des valeurs discrètes du temps
- Il peut résulter de l'échantillonnage d'un signal à temps continu : les valeurs représentent les échantillons du signal



H. Garnier

Signal numérique

- ***Définition***
  - Un signal numérique *(ou signal à temps discret)* $s(k)$ est une ***suite numérique***, c'est à dire une liste ordonnée de nombres :

$$s(0)= 1,\ s(1)= 2,\ s(2)= 4,\ \dots$$

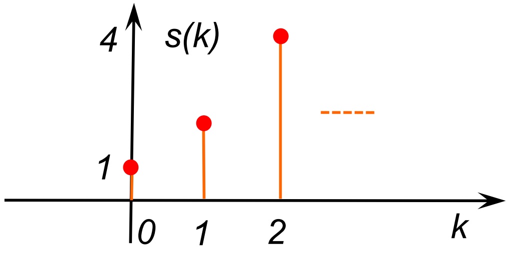
- ***Mode de représentation***
  - par une **expression analytique**

$$s(k) = 2^k,\ k \geq 0$$

  - par une **relation de récurrence**

$$s(k) = 2 \times s(k-1),\ k \geq 1 \quad \text{avec} \quad s(0) = 1$$

  - par une **représentation graphique**



Equations aux différences

- ***Définition***

  Soit un signal numérique $s(0), s(1), \ldots, s(k), \ldots$

  Une équation reliant le $k^{\text{ième}}$ terme à ses prédécesseurs est appelée **équation de récurrence** ou **équation aux différences**

$$s(k) - 4s(k-1) + 3s(k-2) = 1$$

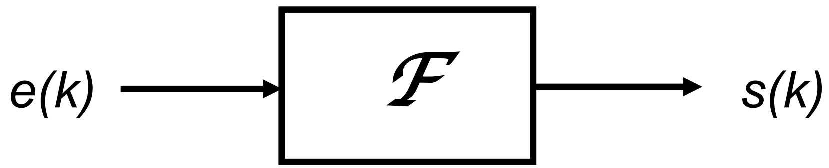
- **Résoudre une équation aux différences** consiste à déterminer la solution (le signal numérique) $s(k)$ qui vérifie l'équation. On montre

$$s(k) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1) \quad k \geq 0$$

- Il existe plusieurs méthodes pour résoudre les équations aux différences
  - L'une d'entre elles s'appuie sur la *transformée en Z*

Système numérique

- Un système numérique ou à temps discret est défini comme un opérateur entre ***deux signaux à temps discret.*** Il est décrit par une équation aux différences



$$s(k)=\mathcal{F}(s(k-1), (s(k-2), \ldots, e(k),e(k-1), \ldots.)$$

$\mathcal{F}$: est un ***système numérique*** qui sera supposé dans la suite

- linéaire
- invariant dans le temps
- causal

Outil d'analyse des caractéristiques d'un système numérique linéaire

- Un système numérique linéaire peut être décrit mathématiquement par :
  - une équation aux différences
  - un produit de convolution
  - sa fonction de transfert

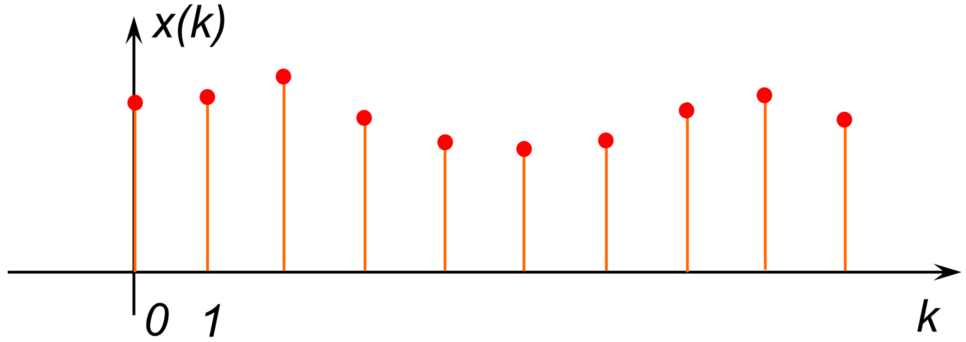
- ***L'outil mathématique*** exploité pour faciliter son analyse est :

la transformée en Z

Transformée en Z

- Soit un signal numérique *x(k)* causal. ***La transformée en Z*** est définie par :

$$Z\big(x(k)\big)=X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\,z^{-k}$$



où

– z est la variable de la transformée en Z

– $z = r\,e^{j\theta} = \alpha + j\beta$

- On dit que *X(z)* est la transformée en Z du signal *x(k)*

Lien entre transformée de Fourier et transformée en Z

- La transformée en Z définie précédemment est en fait la transformée en Z monolatère

  Il existe en effet la transformée en Z bilatère définie par :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$

- Il existe une relation entre la transformée en Z bilatère et la transformée de Fourier d'un signal à temps discret :

$$X(f) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T_e}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j2\pi f k T_e}$$

  – Avec T_e la période d'échantillonnage du signal

Lien entre transformée de Laplace et transformée en Z

Pour un <u>signal échantillonné</u> $x(kT_e)=x(k)$, la ***transformée de Laplace*** est donnée par :

$$X_e(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)e^{-ksT_e} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\left(e^{-sT_e}\right)^k$$

En posant $z=e^{sT_e}$

$$X(z) = Z\left(x_e(t)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k}$$

La ***transformée en Z*** peut donc être vue comme *la **transformée de Laplace*** appliquée à un signal échantillonné *(idéalement)* dans laquelle on a effectué le changement de variable :

$$z=e^{sT_e}$$

Série entière *(rappels)*

- ***Définition***

On appelle ***série entière*** de la variable x toute somme (finie ou infinie) des éléments d'une suite numérique de terme général $\boldsymbol{u_k = a_k x^k}$

où a_k est un réel et k un ***entier*** naturel

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Sur tout intervalle où elle est convergente, une série entière a pour somme une fonction. Une série entière est donc une fonction de la forme :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$$

- ***Remarques***
  - une série entière ne converge pas nécessairement pour tout x
  - il existe un entier R appelé ***rayon ou région de converge***nce tel que la série entière converge pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$

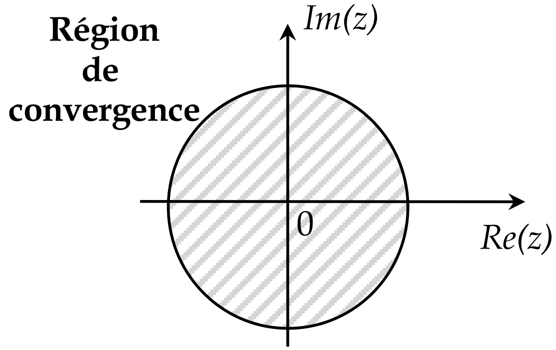
Région de convergence

- La transformée en Z d'un signal *x(k)* est définie par une série entière *(somme infinie des termes d'une suite numérique)*

$$X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\left(z^{-1}\right)^{k}$$

- Quand cette somme est finie, la série est dite convergente et *X(z)* existe
- C'est le cas pour certaines valeurs de la variable *z* qui définissent la Région de Convergence (RdC)

$$\text{RdC} = \left\{ z=\alpha+j\beta \text{ telles que } \sum_{k=0}^{+\infty} \left| x(k) z^{-k} \right| < \infty \right\}$$



- RdC ne contient pas de pôle de *X(z)*. Elle correspond, en général, pour les signaux causaux à l'extérieur d'un cercle $|z| > a$
- Pour les signaux physiques (qui ont une durée d'existence finie) :

RdC= ensemble du plan complexe avec l'exclusion possible de $z=0$ ou $z=\infty$

Région de convergence - Exemple

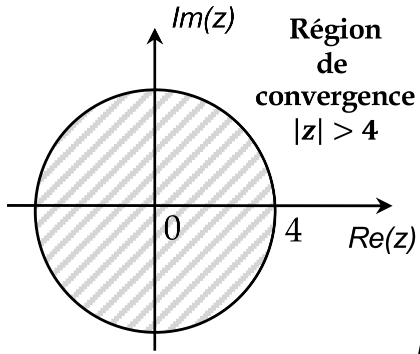
- Soit le signal numérique dont les premières valeurs sont :
  x(0) = 1, x(1) = 4, x(2) = 16, x(3) = 64, x(4) = 256 …

  En appliquant la définition de la transformée en *z*, déterminer *X(z)*. A quelle condition la série obtenue converge-t-elle ? Cette condition étant supposée respectée, donner la valeur de *X(z)*.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 4^2 z^{-2} + \dots = \left(\frac{4}{z}\right)^0 + \left(\frac{4}{z}\right)^1 + \left(\frac{4}{z}\right)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^k$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{z}} = \frac{z}{z-4} \quad si \quad |z| > 4$$



Rappel *: somme d'une suite géométrique de raison q* $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$

Transformée en Z - Exemple

- Soit le signal à temps discret à durée d'existence finie défini par :

x(0) = 1, x(1) = 2, x(2) = 3, x(k>2) = 0

En appliquant la définition de la transformée en Z, déterminer *X(z)*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1}$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2}$$

Forme courante d'une transformée en Z

- La transformée en Z peut s'écrire sous 2 formes :
  - ***Série entière (forme peu pratique)*** : obtenue à partir de la définition

    On obtient une série entière en puissance négative de z pondérée par $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots + x(i)z^{-i} + \ldots$$

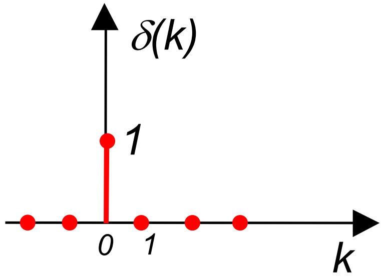
  - ***Fonction rationnelle (forme la plus courante)*** en puissance positive de z ou en puissance négative de z (z^{-1})

$$\text{Exemple : } X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad \text{ou} \qquad X(z) = \frac{z^2}{z^2-2z+1}$$

Signaux à temps discret usuels

- ***Impulsion unité ou impulsion de Kronecker***

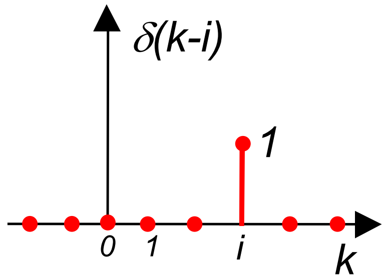
$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = 0 \\ 0 & \text{pour} \quad k \neq 0 \end{cases}$$



Elle ne doit pas être confondue avec l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ qui est un signal à temps continu. Elle est bien plus facile à manipuler !

- ***Impulsion de Kronecker retardée***

$$\delta(k-i) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = i \\ 0 & \text{pour} \quad k \neq i \end{cases}$$

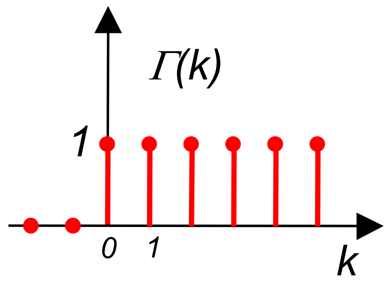


- Tout signal $s(k)$ peut s'écrire : $$s(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(i)\delta(k-i)$$

Signaux à temps discret usuels

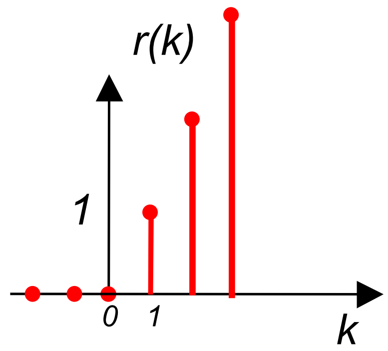
- ***Echelon unité***

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 1 \;\; pour \;\; k \geq 0 \\ 0 \;\; pour \;\; k < 0 \end{cases}$$



- ***Rampe unité***

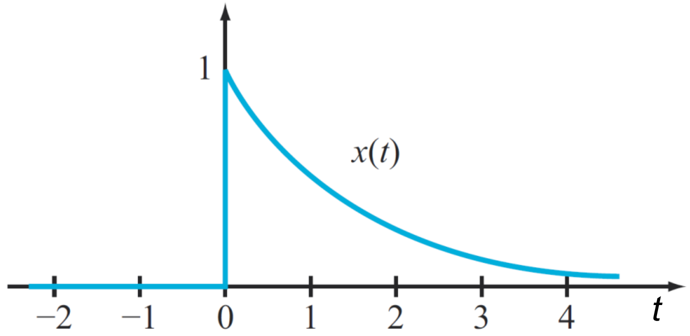
$$r(k) = \begin{cases} k \;\; pour \;\; k \geq 0 \\ 0 \;\; pour \;\; k < 0 \end{cases}$$



Signaux à temps discret usuels

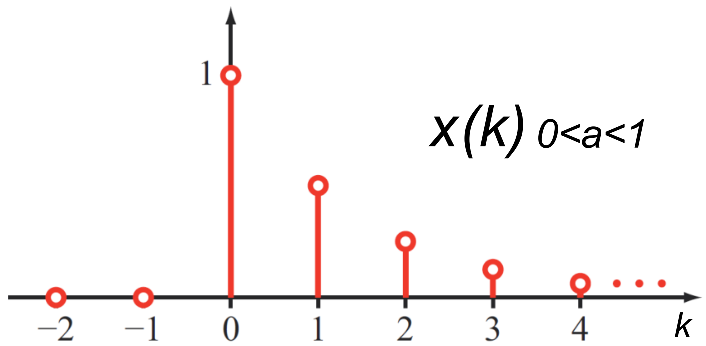
- *Rappel* : signal exponentiel à temps continu

$$x(t) = e^{-\alpha t}\Gamma(t)$$



- ***Signal géométrique* à temps discret** *(ou exponentiel de base a)*

$$x(k) = a^{k}\,\Gamma(k)$$

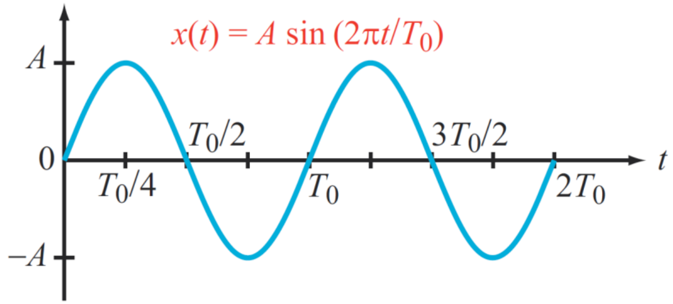


Signal sinusoïdal à temps discret

- Rappel : signal sinusoïdal *à temps continu*

$$x(t) = A\sin\left(\omega_o t + \varphi_o\right)$$

période: $T_o = \dfrac{2\pi}{\omega_o}$, ω_o en rad/s



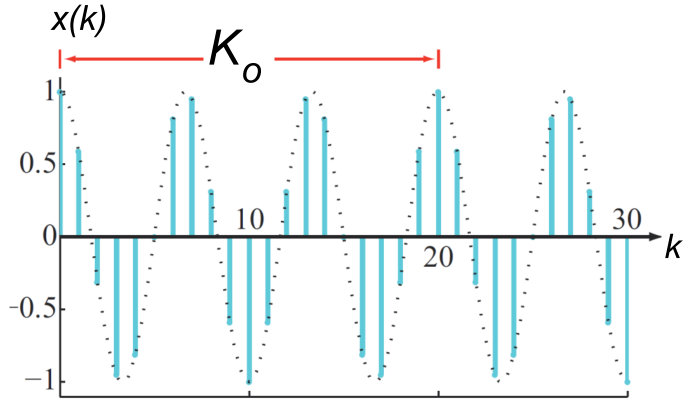
- ***Signal sinusoïdal à temps discret***

$$x(k) = A\sin\left(\Omega_o k + \phi_o\right)$$

$x(k)$ périodique de période $K_o = \dfrac{2\pi}{\Omega_o}, K_o \in Z$

si $\Omega_o = \dfrac{M}{N}2\pi$ avec M et N entiers, Ω_o en rad

K_o plus petit entier >0 tel que $\dfrac{M}{N}$ entier



Un signal sinusoïdal à temps discret n'est pas toujours périodique !

Transformée en Z de signaux usuels

- ***Impulsion unité*** $Z\left(\delta(k)\right) = 1$

$$Z\left(\delta(k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)\ z^{-k} = \delta(0)z^{-0} + \delta(1)z^{-1} + \ldots = 1$$

- ***Echelon unité*** $Z\left(\Gamma(k)\right) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z}{z - 1}$

$$Z\left(\Gamma(k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 1\ z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{k}$$

$$Z\left(\Gamma(k)\right) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{si} \quad \left|z^{-1}\right| < 1 \iff \left|z\right| > 1$$

Somme d'une suite géométrique de raison z^{-1}

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k} = \frac{1}{1 - q} \quad si \quad \left|q\right| < 1$$

Transformée en Z de signaux usuels

- ***Signal géométrique (causal)***

$$Z\left(a^k\Gamma(k)\right)=\frac{z}{z-a}$$

$$si\ a=e^{bT_e},\qquad Z\left(\left(e^{bT_e}\right)^k\Gamma(k)\right)=\frac{z}{z-e^{bT_e}}$$

- ***Signaux sinusoïdaux (causaux)***

$$Z\left(\sin\left(\omega_o kT_e\right)\Gamma(k)\right)=\frac{z\sin\left(\omega_o T_e\right)}{z^2-2\cos\left(\omega_o T_e\right)z+1}$$

$$Z\left(\cos\left(\omega_o kT_e\right)\Gamma(k)\right)=\frac{z\left(z-\cos\left(\omega_o T_e\right)\right)}{z^2-2\cos\left(\omega_o T_e\right)z+1}$$

Table de transformées en z

$x(k)$	$X(z)$
$\delta(k)$	1
$\delta(k-i)$	z^{-i}
$\Gamma(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$r(k) = kT_e\Gamma(k)$	$\dfrac{zT_e}{(z-1)^2}$
$(kT_e)^2\,\Gamma(k)$	$\dfrac{z(z+1)T_e^2}{(z-1)^3}$
$a^k\Gamma(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$

Table de transformées en z

$x(k)$	$X(z)$
$(kT_e)a^k\Gamma(k)$	$\dfrac{azT_e}{(z-a)^2}$
$(kT_e)^2 a^k\Gamma(k)$	$\dfrac{az(z+a)T_e^2}{(z-a)^3}$
$\sin(\omega_o kT_e)\Gamma(k)$	$\dfrac{z\sin(\omega_o T_e)}{z^2-2\cos(\omega_o T_e)z+1}$
$\cos(\omega_o k_e T)\Gamma(k)$	$\dfrac{z\,(z-\cos(\omega_o T_e))}{z^2-2\cos(\omega_o T_e)z+1}$

Propriétés de la transformée en Z *les plus importantes*

• ***Linéarité***

$$Z\left(a\,x(k)+b\,y(k)\right)=a\,X(z)+bY(z)$$

• ***Retard temporel***

$$Z\left(x(k-i)\right)=z^{-i}X(z)$$

$$Z\left(x(k-1)\right)=z^{-1}X(z)$$

$$Z\left(x(k-2)\right)=z^{-2}X(z)$$

• ***Avance temporelle***

$$Z\left(x(k+i)\right)=z^{i}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{i-1}x(k)\,z^{-k}\right]$$

$$Z\left(x(k+1)\right)=zX(z)-zx(0)$$

Propriétés de la transformée en Z

- ***Produit de convolution temporel***

$$x(k) * y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\, y(k-i)$$

$$Z\left(x(k) * y(k)\right) = X(z) \times Y(z)$$

- ***Théorème de la valeur initiale***

$$\lim_{k \to 0}\left(x(k)\right) = \lim_{z \to +\infty}\left(X(z)\right)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \to +\infty}\left(x(k)\right) = \lim_{z \to 1}\left(\left(z-1\right)X(z)\right)$$

Si les limites existent

Transformée en Z inverse

- ***La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal***

$$Z^{-1}\left(S(z)\right)=s(k)$$

- ***Plusieurs méthodes existent :***

1. <u>*Décomposition en somme de fonctions rationnelles et utilisation de tables*</u>

$$S(z)=A_1\frac{z}{z-a_1}+A_2\frac{z}{z-a_2}+\dots$$

Attention, ce n'est pas une décomposition en éléments simples habituelles. Présence d'un z au numérateur !

$$s(k)=Z^{-1}\left(S(z)\right)=Z^{-1}\left(A_1\frac{z}{z-a_1}+A_2\frac{z}{z-a_2}+\dots\right)$$

$$s(k)=A_1Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a_1}\right]+A_2Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a_2}\right]+\dots$$ *car la transformée en Z inverse est linéaire*

$$s(k)=A_1\left(a_1\right)^k\,\Gamma(k)\;+A_2\left(a_2\right)^k\,\Gamma(k)\;+\dots$$ car $Z\left(a^k\;\Gamma(k)\;\right)=\frac{z}{z-a}$

Transformée en Z inverse - Exemple

Trouver l'original *x(k)* de la transformée ci-dessous :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

En déduire les valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.

Transformée en Z inverse - Exemple

Trouver l'original *x(k)* de la transformée ci-dessous :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = A_1 \frac{z}{z-1} + A_2 \frac{z}{z-2}$$

$$A_1 = \lim_{z \to 1} \frac{z\text{-}1}{z} X(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z\text{-}1}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = -1$$

$$A_2 = \lim_{z \to 2} \frac{z\text{-}2}{z} X(z) = \lim_{z \to 2} \frac{z\text{-}2}{z} \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = 2$$

$$x(k) = Z^{-1}\left(X(z)\right) = -Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + 2Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

$$x(k) = -\Gamma(k) + 2 \times 2^k \Gamma(k) = (-1 + 2^{k+1})\Gamma(k)$$

$$k = 0, \quad x(0) = 1; \qquad k = 2, \quad x(2) = 7$$

$$k = 1, \quad x(1) = 3; \qquad k = 3, \quad x(3) = 15$$

Transformée en Z inverse

2. *Division polynomiale*

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0z^{n_b}+b_1z^{n_b-1}+\ldots+b_{n_b}}{a_0z^{n_a}+a_1z^{n_a-1}+\ldots+a_{n_a}}$$

Il suffit de diviser $B(z)$ par $A(z)$ définis en puissance positive de z pour obtenir une série en puissance décroissante de z^{-1} dont les coefficients sont les valeurs $x(k)$ recherchées.

$$\begin{array}{l|l} B(z) & A(z) \\ \hline & X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+\ldots \end{array}$$

Par identification, on en déduit : $x(0),\quad x(1),\quad x(2),\quad x(3),\cdots$

Transformée en Z inverse

2. *Division polynomiale* - *Exemple*

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

$$\begin{array}{r|l} z^2 & z^2 - 3z + 2 \\ \cline{2-2} -z^2 + 3z - 2 & 1 + 3z^{-1} + 7z^{-2} + 15z^{-3} + \ldots + x(i)z^{-i} + \ldots \\ 3z + 2 & \\ \vdots & \end{array}$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots + x(i)z^{-i} + \ldots$$

Par identification, on en déduit : $x(0) = 1, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 7, \quad x(3) = 15, \cdots$

Résolution d'équations aux différences l'aide de la transformée en Z

- La procédure de résolution est la suivante :

1. Appliquer la transformée en Z aux 2 membres de l'équation aux différences en $x(k)$

2. Calculer $X(z)$ en utilisant les propriétés de la transformée en Z

3. Décomposer $X(z)$ en fonctions rationnelles simples

4. Utiliser la table de transformées pour obtenir $x(k)$ par transformée inverse

Intérêts de la transformée en Z

- Permet de déterminer la solution d'une équation aux différences
  - Résoudre

$$y(k)-4y(k-1)+3y(k-2)=1$$

$$y(k)=\frac{1}{2}(3^{k+1}-1)\Gamma(k)$$

- Facilite l'analyse des systèmes à temps discret
  - Déterminer la réponse à un échelon d'un système numérique. Cela revient à résoudre une équation aux différences

$$s(k)=-\frac{1}{2}s(k-1)+e(k), \qquad e(k)=\Gamma(k)$$

$$s(k)=\frac{1}{3}\left(2+\left(-0,5\right)^{k}\right)\Gamma(k) \qquad Z^{-1}\left(\frac{z}{z+0,5}\right)=Z^{-1}\left(\frac{z}{z-(-0,5)}\right)=(-0,5)^{k}\Gamma(k)$$