**TD Identification des systèmes n°2**

H. Garnier
M. Gilson

# Modèles à temps continu et discret de systèmes linéaires

**Exercice 2.1. Modèles d'un système linéaire à partir des données d'entrée/sortie échantillonnées**

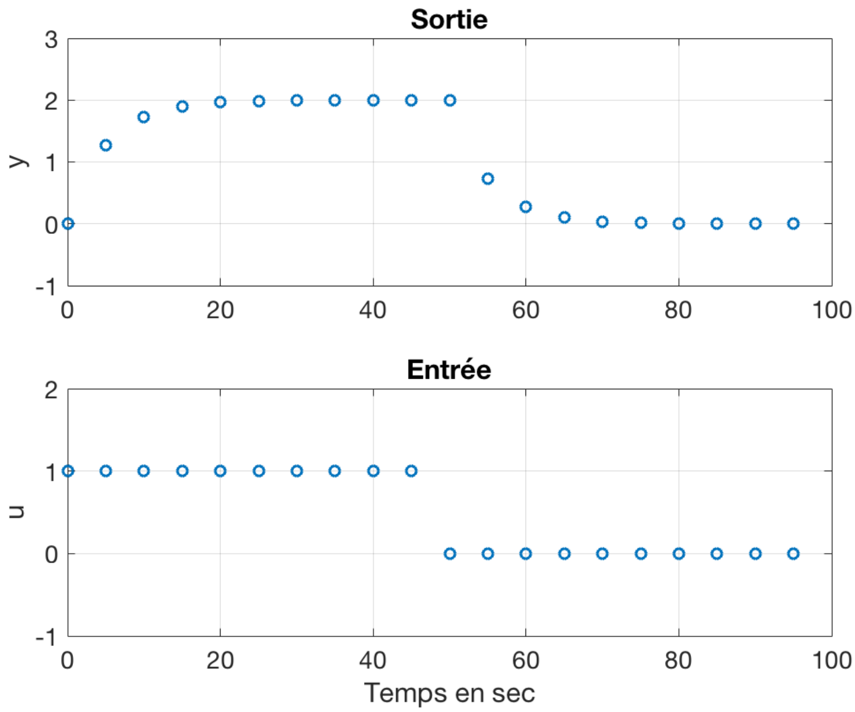


Figure 1.1: Echantillons des signaux d'entrée/sortie d'un système.

Sur la figure 1.1 sont représentés les échantillons déterministes des signaux d'entrée $u(t_k)$ et $y(t_k)$ d'un système linéaire à temps continu aux différents instants d'échantillonnage $t_k$ représentés par des petits cercles.
Le but de cet exercice est de proposer la meilleure forme de modèle à temps continu et de modèle à temps discret d'après les échantillons enregistrés.
On cherche dans un premier temps à représenter le système sous la forme d'un modèle à temps continu.

1. D'après l'allure de la réponse de la figure 1.1, proposer en justifiant une forme de modèle à temps continu.
2. Déterminer, d'après la réponse, la valeur numérique des paramètres du modèle retenu.
3. En déduire la fonction de transfert de Laplace $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. On remarquera que les paramètres de $G(s)$ ne dépendent pas de la période d'échantillonnage $T_e$.
4. On rappelle que la réponse indicielle d'un modèle à temps continu du premier ordre de gain statique $K$ et de constante de temps $T$ s'écrit :

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})\Gamma(t) \tag{1}$$

où $\Gamma(t)$ est l'échelon unitaire.
Calculer la réponse indicielle de votre modèle aux instants $t_k = kT_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez-les avec les valeurs enregistrées :
`[0 1.2642 1.7293 1.9004 1.9634 1.9865 1.9950 1.9982]`

5. Affiner si besoin la valeur numérique des paramètres de votre modèle pour faire coïncider les réponses du système et du modèle à temps continu.

On cherche à présent déterminer un modèle à temps discret *équivalent*.

On rappelle qu'il n'existe pas de méthode de discrétisation universelle de modèles à temps continu. Par exemple, la méthode de discrétisation dite du bloqueur d'ordre zéro n'est exacte que pour une entrée constante par morceaux. Pour toute autre entrée, le modèle à temps discret correspondant ne sera qu'une approximation du modèle à temps continu.

1. D'après l'allure du signal d'entrée représenté sur la figure 1.1, formuler une hypothèse sur la variation du signal d'entrée entre 2 instants d'échantillonnage.
2. La fonction de transfert en z équivalente à un modèle du 1er ordre à temps continu décrit par (1) lorsque l'entrée est constante entre deux instants d'échantillonnage s'écrit :
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1}{z + a_1} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{2}$$
avec
$$a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}} \quad b_1 = K(1 + a_1) \tag{3}$$
Notez la dépendance des coefficients de $G(z)$ vis à vis de la période d'échantillonnage $T_e$. Le même système échantillonné à une autre période d'échantillonnage aura donc la même forme mais des valeurs numériques différentes. Déterminer $a_1$ et $b_1$ lorsque $T_e = 5$s.
3. Déduire de $G(z)$ l'équation aux différences liant les échantillons des signaux d'entrée/sortie.
4. Calculer la réponse de votre modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez les échantillons avec les valeurs enregistrées.
5. Ecrire les trois lignes Matlab qui permettent de calculer/simuler la sortie du modèle à temps discret. Comparez votre implantation Matlab avec vos résultats précédents.
6. La fonction `filter` sous Matlab permet de calculer la réponse d'un système à temps discret (qui peut être vu comme un filtre numérique). Exploitez cette fonction pour calculer la réponse de votre modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparez-les avec les valeurs enregistrées.
7. Une autre méthode de discrétisation consiste à approcher la dérivée des signaux par approximation numérique. Déterminer l'équation aux différences obtenue à partir de l'équation différentielle discrétisée en remplaçant la dérivée première du signal de sortie par :
$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_k} = \frac{1}{T_e}\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big) \tag{4}$$
8. En déduire la fonction de transfert en z et comparez-la avec celle obtenue précédemment.
9. Calculer la réponse de votre nouveau modèle à temps discret aux instants $t_k = k \times T_e$ pour $k = 0$ à 7 et $T_e = 5$s et comparer les échantillons avec les valeurs enregistrées.