

Files d'attente

Plan du cours :

- Chapitre 1 : Introduction
- Chapitre 2 : Rappels mathématiques
- Chapitre 3 : Les chaînes de Markov
- Chapitre 4 : Files d'attente
- Chapitre 5 : Réseau de files d'attente

Marion Gilson-Bagrel

Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- **Chaînes de Markov à temps continu**

Introduction

Pourquoi ?

➤ Une analyse de système par Graphe d'état

- une représentation sous forme graphique
- permet de décrire les états du système ainsi que toutes les relations qui permettent de passer d'un état à un autre

➤ Modélisation choisie : Chaînes ou Graphes de Markov

- = un réseau décrivant les états possibles d'un système et les lois de passage d'un état à un autre

➤ Un graphe de Markov permet de modéliser des processus markoviens.

- Cad des processus stochastiques dans lesquels l'état du système ne dépend que de l'état précédent et non de son passé
- L'état du système ne dépend donc pas de comment le système a atteint son état précédent, ni de combien de temps il y est resté.
- C'est un processus sans mémoire

Plan

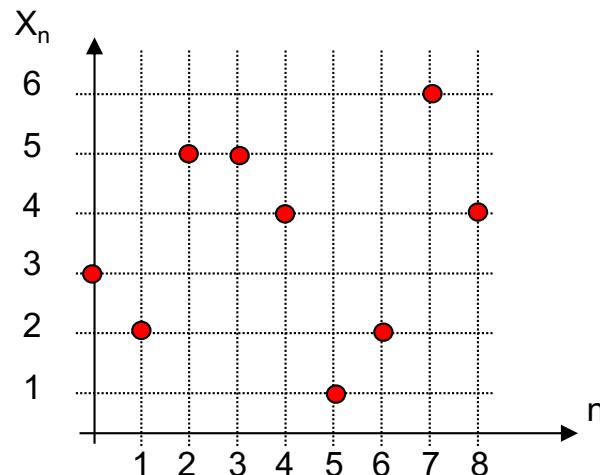
Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
 - Définitions
 - Modélisation
 - Analyse
 - Comportement limite
 - Exercice
- **Chaînes de Markov à temps continu**

Chaînes de Markov à temps discret

Définitions :

- Rappel : processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à espace d'état discret et à temps discret.
 - Chaîne à temps discret ($E = \text{espace d'état dénombrable car discret}$)



- Chaîne de Markov à temps discret (CMTD) :
 - $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à temps discret ssi
 - ➔ $P[X_n=j | X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \dots, X_0=i_0] = P[X_{n=j} | X_{n-1}=i_{n-1}]$
 - Interprétation : proba pour que la chaîne soit dans un certain état à la $n^{\text{ième}}$ étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape précédente
 - ➔ Étapes antérieures : aucun rôle

Chaînes de Markov à temps discret

Définitions (suite) :

➤ CMTD homogènes

- Les probabilités ne dépendent pas de n

➔ Déduction : définition d'une **probabilité de transition** d'un état i vers un état j $\Rightarrow p_{ij}$

✓ $p_{ij} = P[X_n=j \mid X_{n-1}=i] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

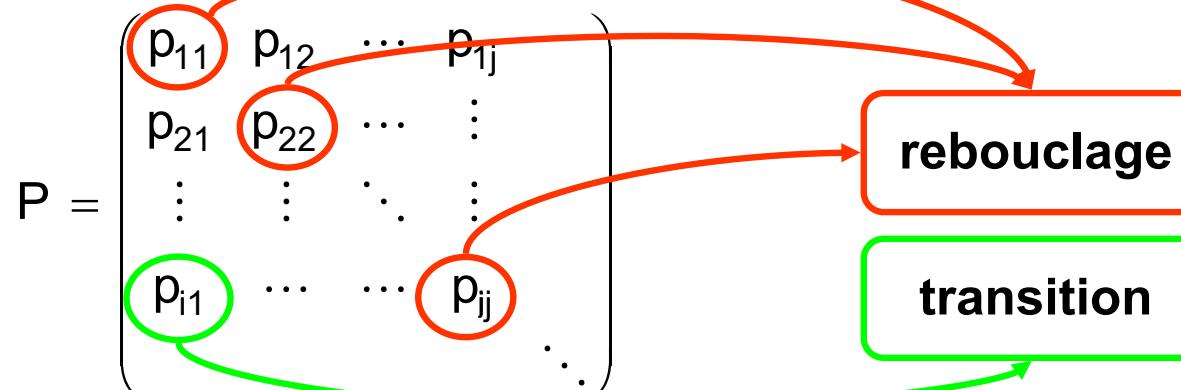
✓ $p_{ij} \geq 0$ (possibilité de rester dans un certain état i entre 2 étapes)

✓ $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$

- Matrice de transition

➔ Matrice carré d'ordre fini ou infini (suivant E) : $P = [p_{ij}]_{i,j \in E}$

➔



- Suite du cours : CMTD homogènes

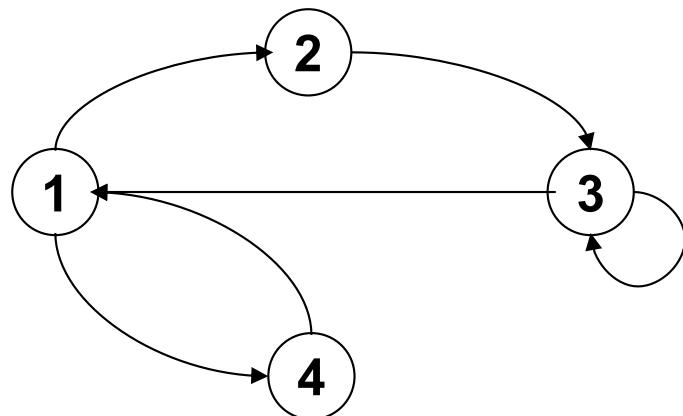
Chaînes de Markov à temps discret

Exemple :

➤ CMTD homogènes représentés par un graphe orienté

- Association

- ➔ À chaque état = un noeud
- ➔ À chaque transition possible entre 2 états = arc orienté pondéré par la proba de transition



$$E=\{1,2,3,4\}$$

$$p_{23}=p_{41}=1$$

$$p_{12}+p_{14}=1$$

$$p_{31}+p_{33}=1$$

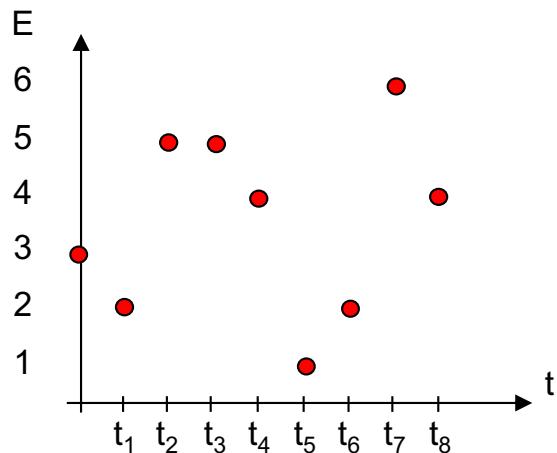
Version mathématique du graph :
Matrice de transition ?

1	0	p_{1c}	0	p_{14}
2	0	0	p_{23}	0
3	p_{31}	0	p_{33}	0
4	p_{41}	0	0	0

Chaînes de Markov à temps discret

Modélisation :

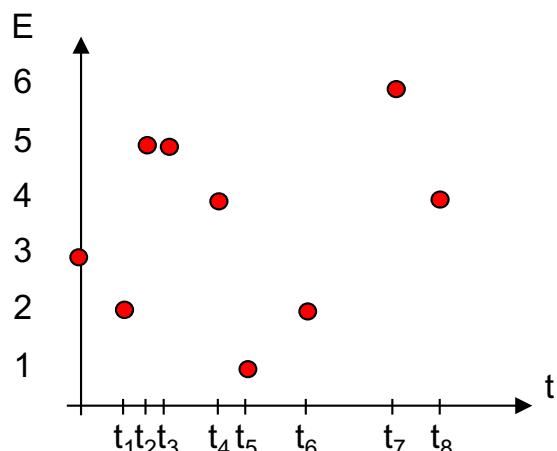
➤ CMTD à changements d'états équidistants



État du système à des **intervalles de temps réguliers** : tous les jours, toutes les heures ...

→ $t_n = nT$, où $T = \text{unité de temps considéré}$

➤ CMTD à instants de changement d'état quelconque



État du système **juste après un événement** :

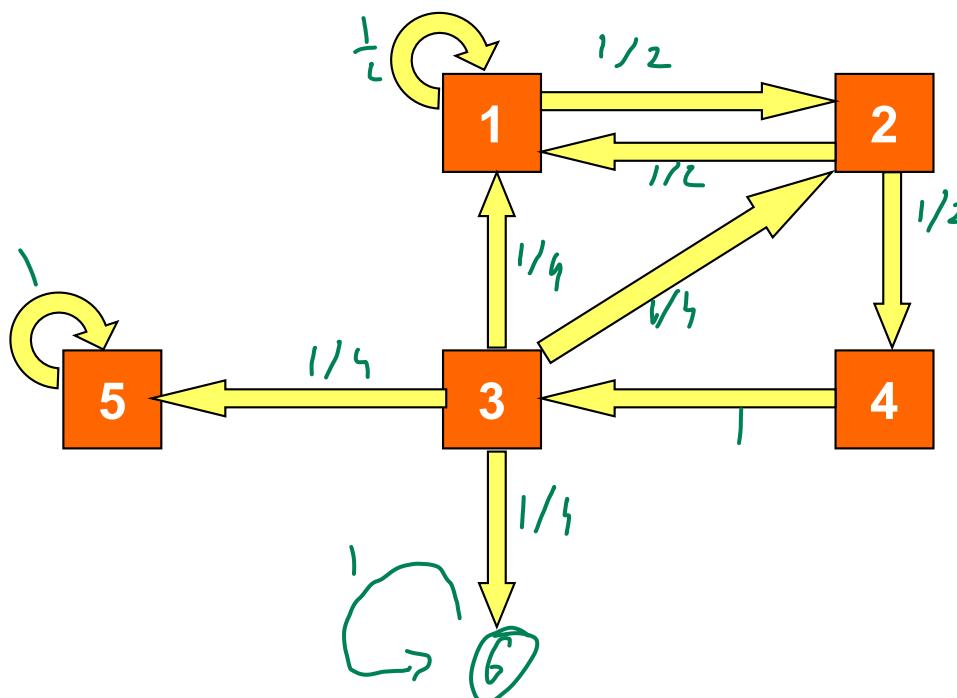
→ $t_n = \text{instant du } n^{\text{ième}} \text{ événement}$
→ instants de changements d'états non équidistants

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple 1 :

➤ Labyrinthe dans lequel circule une souris

- 5 pièces et une sortie
- Couloir à sens unique, pas de demi-tour
- Pièce 5 : impossibilité d'en sortir
- Hypothèses de travail :
 - ➔ Non prise en compte du **tps** passé dans les pièces et dans les couloirs
 - ➔ La souris ne garde **pas en mémoire** les pièces visitées
 - ➔ Les choix de couloir **équiprobables**



Pour réaliser le graph, il faut ajouter un état de sortie. En effet, toutes les transitions vont d'un état à un autre => il n'y a pas de "trait dans le vide"

De plus, on ne peut pas avoir une ligne de 0 dans la matrice. Nous devons donc reboucler sur l'état de sortie

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple 1 (suite) :

➤ Modélisation par une CMTD homogène

- États de la chaînes : pièces visitées
- Transitions : couloirs
- Probabilités sur transitions : choix aléatoire de couloirs

S	0	1	2	3	4	5	S
0	0	0	0	0	0	1	0
1	1/2	1/2	0	0	0	0	0
2	1/2	0	0	1/2	0	0	0
3	1/4	1/4	0	0	1/4	1/4	0
4	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0

➔ Questions : matrice de transition ?

Il faut garder le même ordre des états sur lignes et colonnes !!!!
(pas comme moi quoi)
ça nous permet de voir directement les états permanents : les 1 sur la diagonale

Chaînes de Markov à temps discret

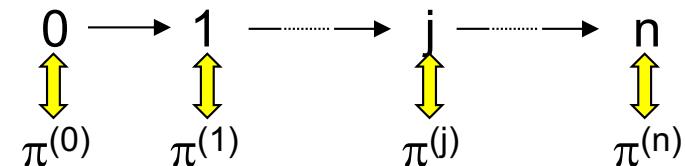
Analyse - régime transitoire :

- = déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilités d'états $\pi^j = P[X_n=j]$ pour que le processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans l'état j à la $n^{\text{ième}}$ étape :

- $\pi^{(n)} = [\pi_j^{(n)}]_{j \in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots]$
- Ce vecteur de probabilité dépend :
 - ➔ de la matrice de transition P
 - ➔ du vecteur des probabilités d'états initiales $\pi^{(0)}$

➤ Déduction

- Décrire l'évolution du processus depuis l'état initial ($\pi^{(0)}$) jusqu'à l'étape n ($\pi^{(n)}$)
en passant par les étapes intermédiaires



- Formule de probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j | X_{n-1} = i] P[X_{n-1} = i]$$

soit $\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} p_{ij}$ (proba d'être dans l'état j à n = proba de passage de i à j x proba d'être en i à $n-1$)

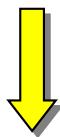
- Sous forme matricielle : $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - régime transitoire :

➤ Exemple du labyrinthe

- Pour se trouver dans l'état 1 à l'étape n, il fallait se trouver :
 - ➔ soit dans l'état 2 et faire une transition $2 \rightarrow 1$
 - ➔ soit dans l'état 3 et faire une transition $3 \rightarrow 1$



$$\pi_1^{(n)} = \pi_2^{(n)} p_{21} + \pi_3^{(n)} p_{31}$$

➤ Relation entre l'état à l'étape n et l'état à l'étape initiale

- $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$ appliquée n fois $\Rightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$ (ou $\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$)

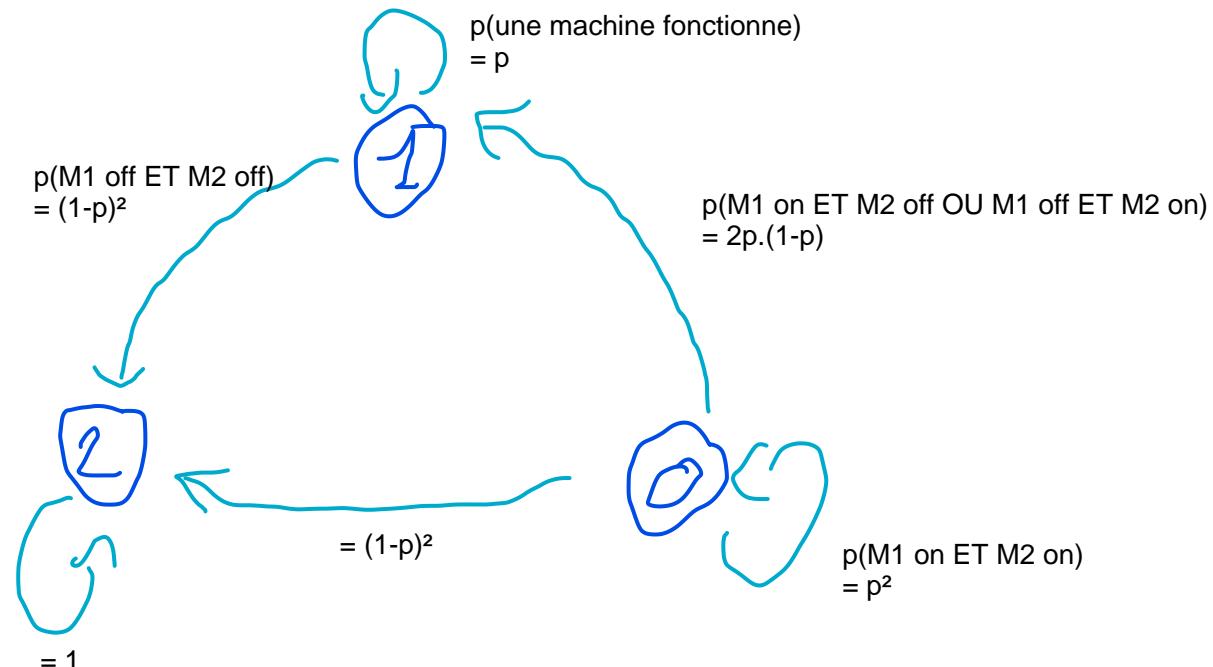
➤ Remarque

- $p_{ij}^{(n)} = \text{élément } (i,j) \text{ de la matrice } P^n$
 - ➔ D'où : $P^{(n)} = P^n$
- Un processus de Markov est entièrement défini si on connaît :
 - ➔ Sa matrice de transition
 - ➔ Sa distribution initiale X_0

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- 2 machines fonctionnent en parallèle et sont indépendantes.
 - Chaque machine a une fiabilité égale à p au cours d'une journée
 - Aucune possibilité de réparation
 - $X_n = \text{nombre de machines en panne au début de la } n^{\text{ième}} \text{ journée}$
- Question 1 : représentation graphique ?



Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- Question 2 : matrice de transition ?

0	0	1	2
0	ρ^2	$\rho(1-\rho)$	$(1-\rho)^2$
1	0	ρ	$1-\rho$
2	0	0	1

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

➤ Question 3 : distribution du nombre de machine en panne après n jours.

On suppose que $\pi^{(0)} = (1, 0, 0)$ (\Leftrightarrow état initial)

$$\hookrightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

$$\text{avec } n = 10$$

$$AN: p = 0,9$$

$$\hookrightarrow P = \begin{pmatrix} 0,9^2 & 0,1p & 0,0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi^{(10)} = [1, 0, 0] \cdot P^{10}$$

(Merci matlab)

$$= [0.34, 0.48, 0.17]$$

On a donc après 10j, 34% de chances d'avoir nos deux machines qui fonctionnent toujours, 48% qu'une des deux soit tombée en panne, et 17% que les deux soient en panne.

Exemple : $p=0.9$, $n=10$ jours

Chaînes de Markov à temps discret

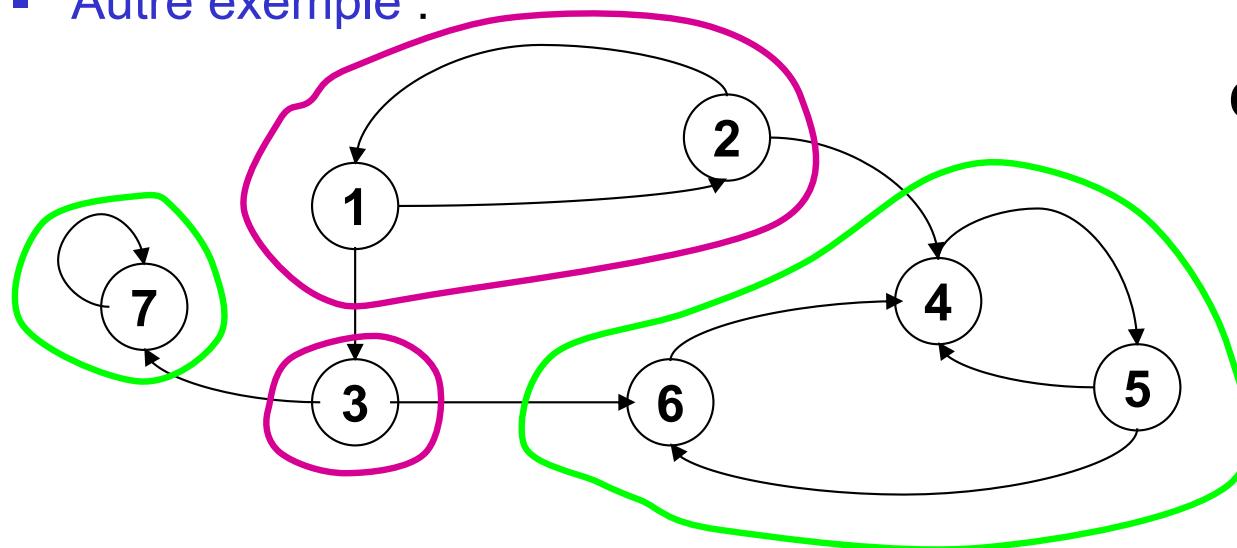
Analyse - classification des états :

➤ États communicants :

- = s'il existe un chemin pour aller de i à j et de j à i

➤ Exemples :

- Exemple des machines : 3 classes communicantes
- Autre exemple :



Classes communicantes

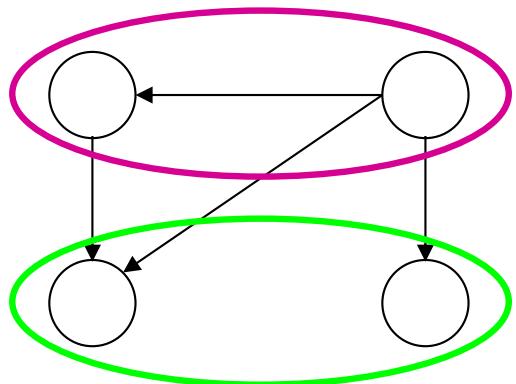
- **transitoires**
- **ergodiques**
(ou permanent)

- **Transitoires** : possibilité de sortir de cette classe - impossibilité d'y revenir
- **Ergodiques** : possibilité d'arriver dans cette classe - impossibilité d'en sortir
(régime permanent)

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - classification des états :

➤ Graphe réduit :



Classes transitoires : le processus ne peut pas y revenir

Classes ergodiques : le processus ne peut pas en sortir

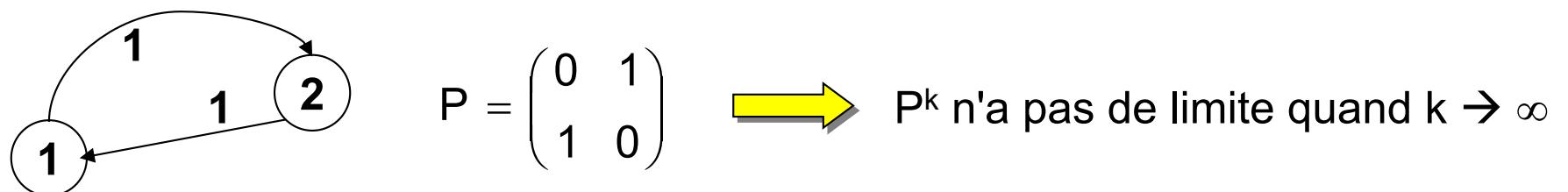
➤ Il existe toujours au moins une classe ergodique

- Car tous les états communiquent entre eux (chaîne irréductible)

Chaînes de Markov à temps discret

Comportement limite :

- **Définition** : étude de la limite du vecteur de probabilité $\pi^{(n)}$ lorsque $n \rightarrow \infty$
 - Cette limite existe-t-elle ?
 - Si oui, comment la calculer ?
- **Distribution limite** : la limite existe si pas de comportement périodique



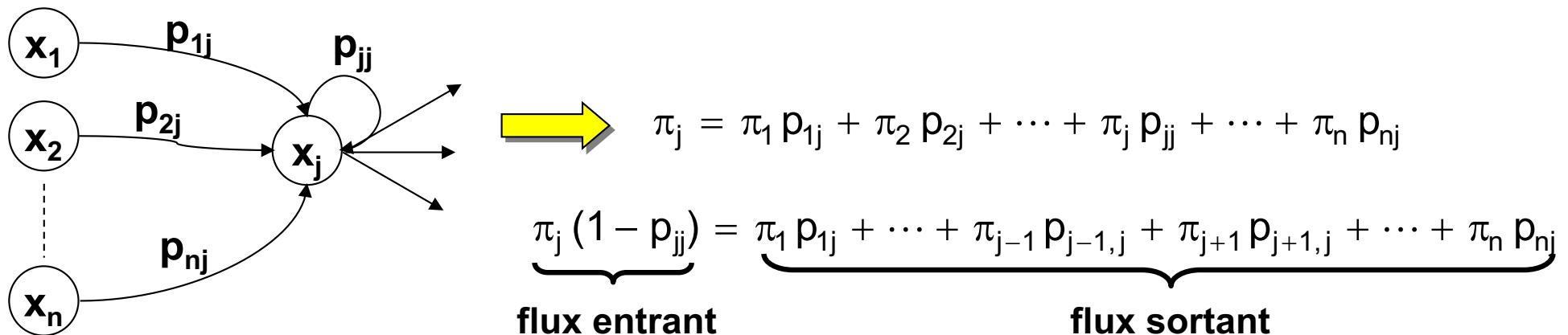
- **Propriété** : si la distribution limite existe, elle est stationnaire
- **Théorème** :
 - Il existe une distribution limite indépendante de l'état initial ssi la chaîne a une seule classe ergodique
- **Exemple des machines** :
 - États 0 et 1 : transitoires
 - État 2 : ergodique \Rightarrow il existe une limite qui est (0 0 1) \Rightarrow pas tjs aussi évident

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

➤ 1^{ère} méthode :

- Objectif : résolution de $\pi = \pi P$
 - ➔ Cad recherche du vecteur propre p associé à la valeur propre 1
 - ➔ Méthode : écriture des équations d'équilibre (ou équations de balance)



- Résumé :

➔ résolution du système :

diagonale

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{k \in E} \pi_k = 1 \end{cases}$$

les autres

(condition de normalisation)

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

➤ 1^{ère} méthode - exemple :

- Chaîne de Markov :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Equations d'équilibre (balance) : (par colonne)

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \pi_2 + \pi_2 + \frac{1}{3} \pi_3$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{3} \pi_3$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2} \pi_1 + \frac{1}{2} \pi_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{4}{9} g \\ \pi_2 = \frac{1}{3} g \\ \pi_3 = \frac{1}{9} g \end{cases}$$

↓

- En tenant de : $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

?

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

➤ 2^{ième} méthode :

- Moins utilisée
- Recherche de la limite de P^k , pour $k \rightarrow \infty$:

→ Soit $\bar{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$


$$\bar{\pi} = \pi^{(0)} \bar{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi^{(k)}$$

- Méthode :
 - Calcul de $P^2, P^4, P^8 \dots$ jusqu'à obtenir une solution limite

✓ $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_1 \quad \bar{\pi}_2 \quad \bar{\pi}_3 \quad \dots \quad \bar{\pi}_n)$

- Remarque : $\bar{\pi}$ indépendant de $\pi^{(0)}$
 - Toutes les lignes de $\bar{\pi}$ sont identiques

$$\bar{\pi} = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \\ x & x & \dots & x \\ x & x & \dots & x \end{pmatrix}$$

mais aussi $\bar{\pi} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \\ x & x & \dots & x \end{pmatrix}$

Chaînes de Markov à temps discret

Délai et probabilité d'absorption :

- Nécessité : \exists un état d'absorption
- 1 seul état d'absorption
 - n_i = temps moyen d'absorption en partant de i :

$$n_i = 1 + \sum_{k \in E'} p_{ik} n_k$$

i = état non absorbant

E' = ensemble de tous les états non absorbants

- Plusieurs états d'absorption
 - b_{ij} = probabilité d'absorption dans j si l'état initial est i

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in E'} p_{ik} b_{kj}$$

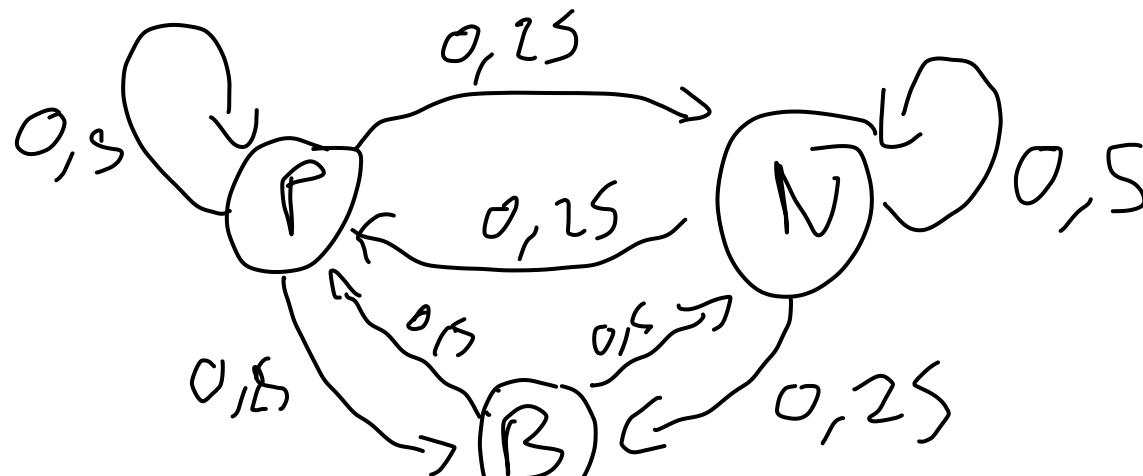
- Exemple des machines, question 4 = durée de bon fonctionnement ?
 - Plus de fonctionnement en 2 \Rightarrow en combien de temps arrive-t-on en 2 ?
 - Seul 2 est absorbant, donc $E'=[0,1]$

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1 : météo du pays d'Oz

P
↑
T
↑
N

- Pas 2 jours de beau temps consécutifs : pluie ou neige le lendemain
- Si pluie ou neige, le lendemain \Rightarrow à 50 % = même temps
 \Rightarrow 25 % pour les autres possibilités
- Question 1 : construire le graphe associé



- Question 2 : Matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- Question 3 : décomposition en classe

1 classe ergodique car pas de cas absorbants (de 1 sur la diag)

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1 : météo du pays d'Oz (suite)

➤ Question 4 : comportement limite

existence d'une limite car 1 classe ergo donc pas de périodicité

➤ Question 5 : calcul de la solution limite

- 1^{ère} méthode : équations d'équilibre (résolution de $\pi = \pi P$)

①

$$\pi_1 = 0,25\pi_L + 0,25\pi_S$$

$$② \quad 0 = 0,25\pi_L + 0,25\pi_S - \pi_1$$

$$\pi_2 = 0,5\pi_1 + 0,5\pi_2 + 0,25\pi_S$$

$$0 = \pi_1 + 0,5\pi_2 - \pi_2$$

$$\pi_3 = 0,5\pi_1 + 0,25\pi_2 + 0,5\pi_3$$

$$0 = \pi_1 + 0,5\pi_2 - \pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

③ $\pi_L = \pi_3$

$$\pi_1 = 0,5\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

④ $\begin{cases} \pi_1 = 0,2 \\ \pi_2 = 0,4 \\ \pi_3 = 0,4 \end{cases}$

$$\pi_{1:m} = (0,2 \quad 0,4 \quad 0,4)$$

Chaînes de Markov à temps discret

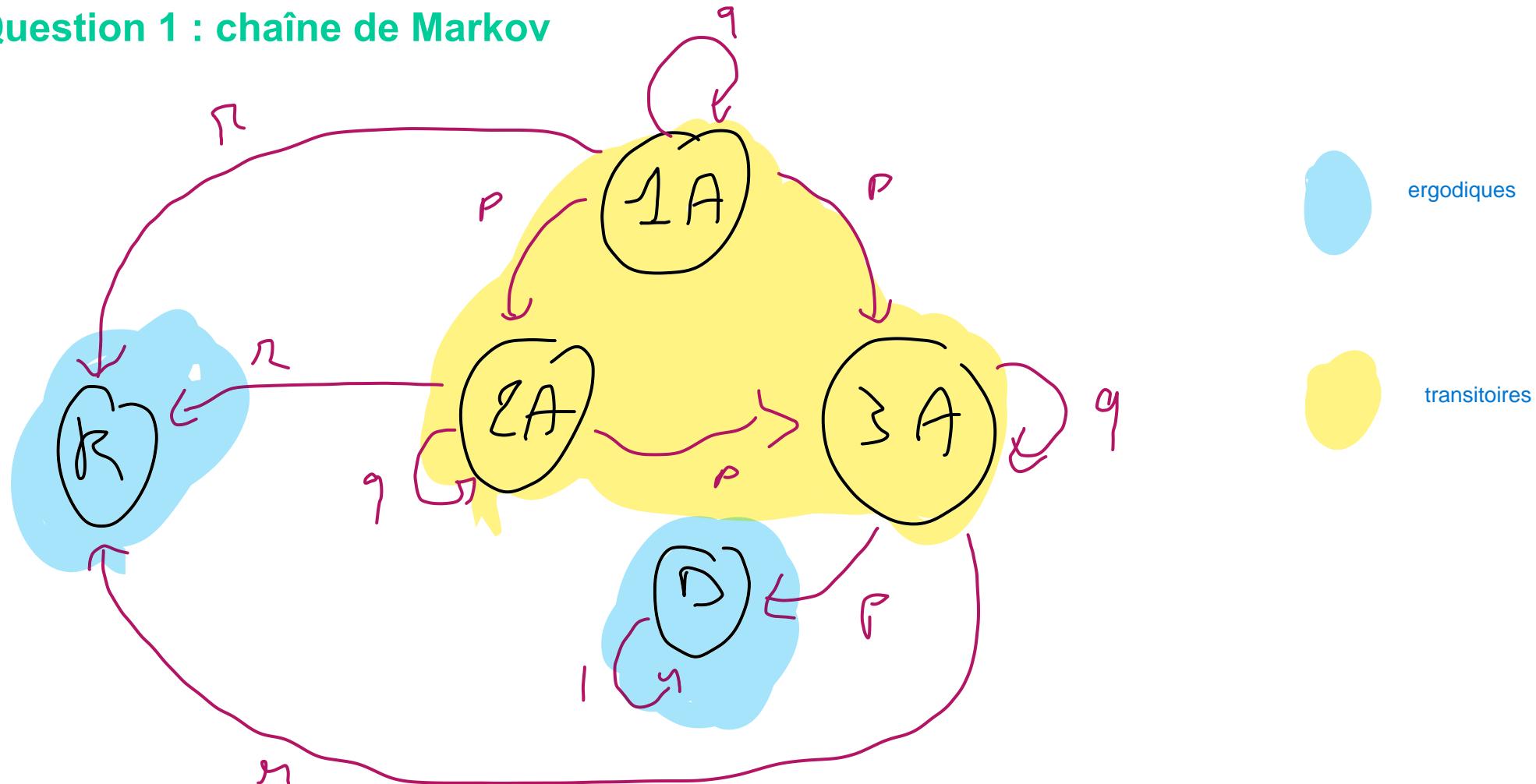
Exercice 2 : classe d'ingénieur

- Dans une école d'ingénieur dont le cycle de fin d'étude comporte 3 années, on constate qu'un étudiant en fin d'année à la probabilité :
 - p de passer en année supérieure ou d'obtenir son diplôme (en fin de 3^{ème} année du cycle)
 - q de redoubler (avec $p+q+r = 1$)
 - r d'être renvoyé
- Question 1 : représenter le déroulement de ce cycle par une chaîne de Markov
- Question 2 : quelles sont les probabilités d'être reçu ou renvoyé ?
- Question 3 : Que devient cette chaîne si, au plus, un redoublement est autorisé dans la scolarité ?

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (1)

➤ Question 1 : chaîne de Markov



Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (2)

➤ Question 2 : probabilités d'être reçu ou renvoyé

	I	L	3	R	D	
I	1	q	p	0	λ	0
L	0	1	q	p	λ	0
3	0	0	q	1	p	
R	0	0	0	1	0	
D	0	0	0	0	1	

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (3)

➤ Question 2 (suite) : probabilités d'être reçu ou renvoyé

$$b_{14} = p_{14} + p_{11}b_{14} + p_{12}b_{24} + p_{13}b_{34}$$

$$b_{24} = p_{24} + p_{21}b_{14} + p_{22}b_{24} + p_{23}b_{34}$$

$$b_{34} = p_{34} + p_{31}b_{14} + p_{32}b_{24} + p_{33}b_{23}$$

$$b_{34} = r/(1-q)$$

$$b_{24} = (r(1-q)+rp)/(1-q)^2$$

$$b_{14} = (r(1-q)^2+rp(1-q)+rp)/(1-q)^3$$

$$b_{15} = p_{15} + p_{11}b_{15} + p_{12}b_{25} + p_{13}b_{35}$$

$$b_{25} = p_{25} + p_{21}b_{15} + p_{22}b_{25} + p_{23}b_{35}$$

$$b_{35} = p_{35} + p_{31}b_{15} + p_{32}b_{25} + p_{33}b_{35}$$

$$b_{35} = p/(1-q)$$

$$b_{25} = p^2/(1-q)^2$$

$$b_{15} = p^3 / (1-q)^3$$

b₁₄ est la proba d'être renvoyé en entrant en 1A

b₂₄ est la proba d'être renvoyé en entrant en 2A

b₃₄ est la proba d'être renvoyé en entrant en 3A

b₁₅ est la proba d'être diplômé en entrant en 1A

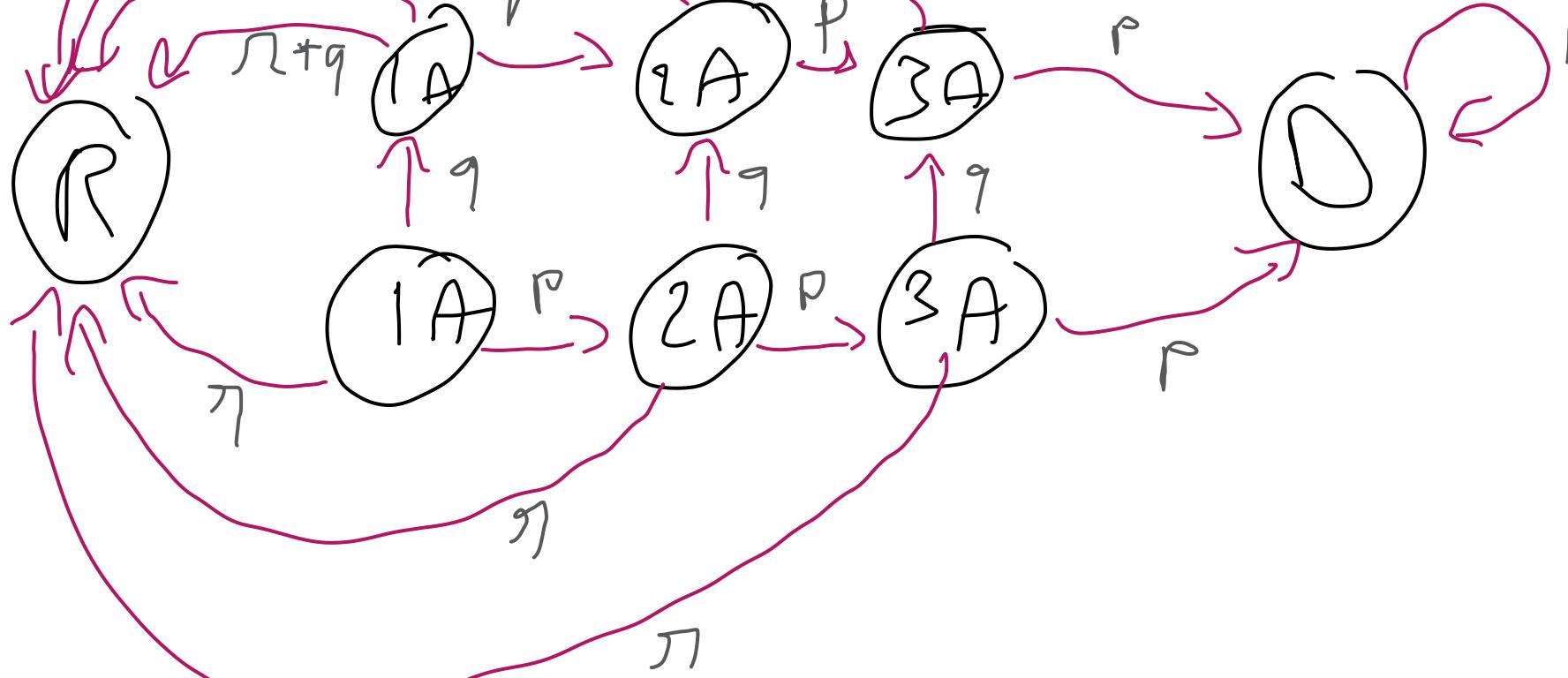
b₂₅ est la proba d'être diplômé en entrant en 2A

b₃₅ est la proba d'être diplômé en entrant en 3A

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (4)

Question 3 : au plus, un redoublement est autorisé dans la scolarité



Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- **Chaînes de Markov à temps continu**
 - **Définitions**
 - **Modélisation**
 - **Analyse**
 - **Comportement limite**
 - **Exercice**

Chaînes de Markov à temps continu

Introduction = pourquoi une CMTC ?

➤ Utilisation d'une CMTD :

- Étude de phénomènes aléatoires pour lesquels les chgts d'état se produisent à des instants fixés par avance
- Pas de problème pour certains processus :
 - ➔ processus techniques décomposés en étapes bien définies (déroulement dans l'étape sans intérêt)
 - ➔ problèmes économiques ou sociologiques (observations à intervalles réguliers), ex. : sondage tous les mois, puis chaque semaine (élection)
- Problèmes pour certains systèmes :
 - ➔ Ex. : fiabilité d'un système technique ⇒ nécessite une intervention sans retard en cas de défaillance
 - ✓ Maths : modèle stochastique connu à chaque instant ⇒ processus continu
 - ✓ Ex. : central téléphonique - lois de proba discrètes pas assez précise pour caractériser les durées de communication ou instants d'arrivées des appels

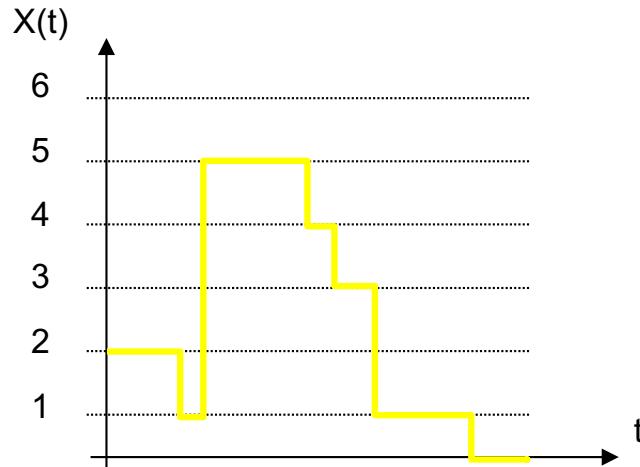
➤ CMTC fondée sur le processus de Poisson

- Réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné, par ex. :
 - ➔ Arrivée de clients vers un guichet
 - ➔ Occurrence d'accidents dans une entreprise
 - ➔ Apparition de pannes dans un parc de machines
 - ➔ Arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur

Chaînes de Markov à temps continu

Définitions :

- Rappel : processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ à espace d'état discret et à temps continu.
 - Chaîne à temps continu ($E = \text{espace d'état dénombrable car discret}$)

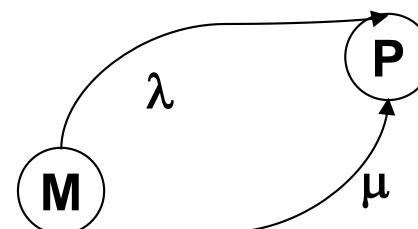


- Chaîne de Markov à temps continu (CMTC) :
 - $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu ssi
 - ➔ $P[X(t_n)=j | X(t_{n-1})=i_{n-1}, X(t_{n-2})=i_{n-2}, \dots, X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j | X(t_{n-1})=i_{n-1}]$
- CMTC homogènes :
 - Les probas $P[X(t_n)=j | X(t_{n-1})=i_{n-1}]$ ne dépendent pas des instants d'observation t_n et t_{n-1} mais uniquement de la durée $(t_n - t_{n-1})$ qui sépare 2 observations
 - Nous n'étudierons que des CMTC homogènes

Chaînes de Markov à temps continu

Caractérisation d'une CMTC :

- L'évolution d'une CMTC peut se voir sous 2 façons :
 - On reste un certain temps (distribué suivant une loi exponentielle) dans un état
 - En quittant un état, on choisit l'état de destination qui ne dépend :
 - ➔ Ni du temps passé dans l'état
 - ➔ Ni du chemin parcouru précédemment
- Définition
 - Probabilité de passage de l'état i à l'état j entre t et t+dt :
 - ➔ **Proba = $\lambda_{ij} dt$**
 - ➔ λ_{ij} = taux de transition pour $i \neq j$
 - Le choix de la destination = caractérisé par des probas (ou taux) de transition
 - Pas de mémoire
- Exemple : machine à 2 états : marche ou panne
 - Taux de panne : λ
 - Taux de réparation : μ



Le taux de transition remplace la probabilité

Chaînes de Markov à temps continu

Temps de séjour dans un état :

➤ Notations :

- λ = somme des taux de sortie (d'un état)
- τ = temps de séjour dans un état
- $G(t) = e^{-\lambda t}$: probabilité d'être encore dans l'état à l'instant t

➤ Valeur moyenne de τ :

- Par définition :

$$\rightarrow \bar{\tau} = \int_0^{\infty} t G(t) dt \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}$$

Matrice de transition :

➤ Principe :

$$P[X(t + dt) = x_j | X(t) = x_i] = \lambda_{ij} dt$$
$$P[X(t + dt) = x_j] = \underbrace{\sum_{i \neq j} P[X(t) = x_i] \lambda_{ij} dt}_{\text{Soit système dans l'état}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} P[X(t) = x_j] \left(1 - \sum_{k \neq j} \lambda_{jk} dt\right)}_{\text{Proba d'arrivée dans l'état}}$$

Soit système dans l'état
⇒ il y reste

Soit pas dans l'état
⇒ il y va

Proba d'arrivée
dans l'état

Proba de rester
dans l'état

Chaînes de Markov à temps continu

Matrice de transition (suite) :

➤ A une CMTD :

- Association d'une matrice des probas de transition P , p_{ij} = proba de passage de i à j

➤ A une CMTC :

- Association d'une matrice P (générateur infinitésimal),

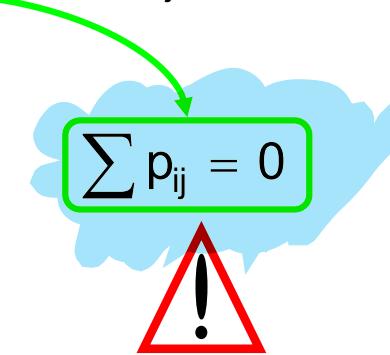
→ p_{ij} = taux de transition λ_{ij} de i vers j

→ Éléments :

✓ Non diagonaux : $p_{ij} = \lambda_{ij}, \forall i \neq j$

✓ Diagonaux : $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij} = -\sum_{j \neq i} \mu_i p_{ij} = -\mu_i \sum_{j \neq i} p_{ij} = -\mu_i$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \lambda_{1j} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1j} \\ \lambda_{21} & -\sum_{j \neq 2} \lambda_{2j} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \dots & \lambda_{ij} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$



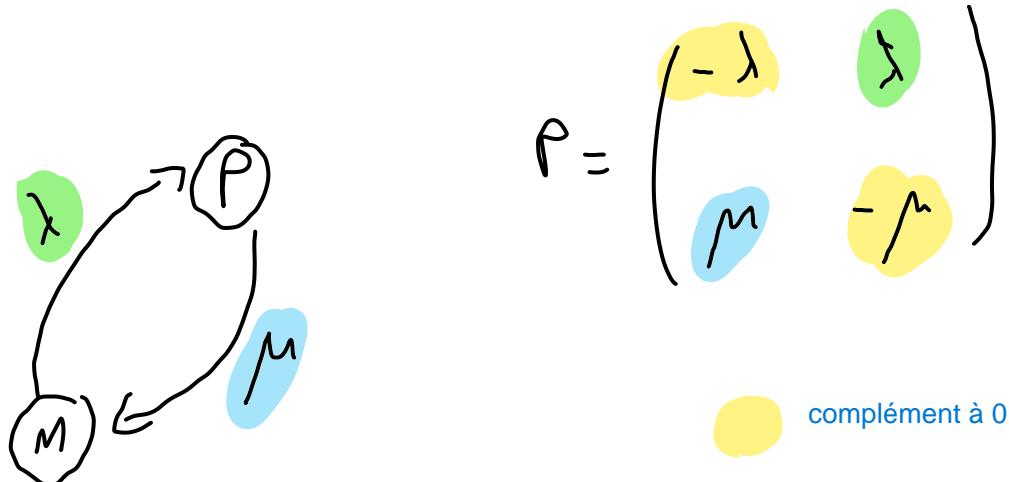
État absorbant = ligne de 0

Chaînes de Markov à temps continu

Matrice de transition (suite) :

➤ Exemple : machine à 2 états

- Matrice de transition :



➤ Définition :

- P est solution de :

$$\rightarrow \dot{\pi} = \pi P$$

- Solution :

$$\rightarrow \pi(t) = \pi(0) e^{Pt}$$

$$\rightarrow \text{Transformée de Laplace : } \pi(s) = \pi(0) (sI - P)^{-1}$$

Chaînes de Markov à temps continu

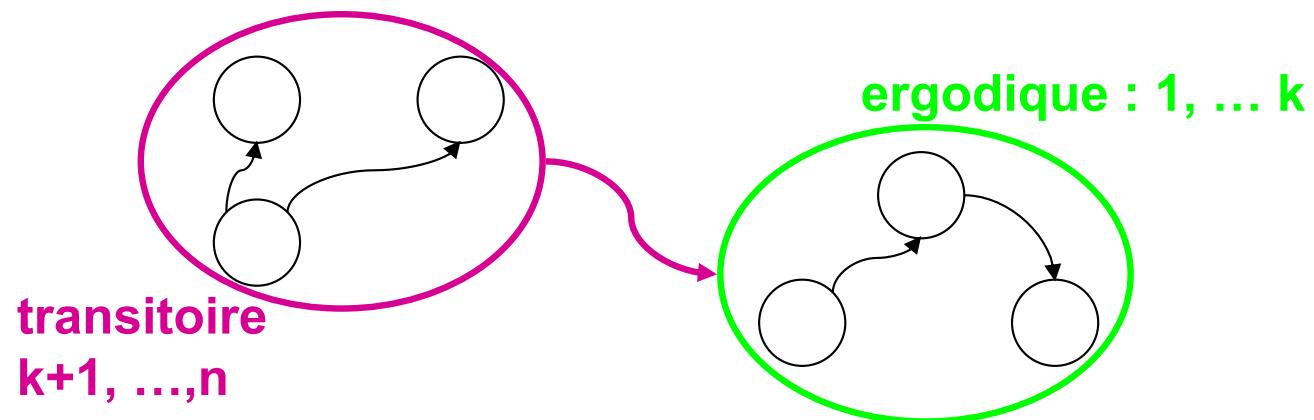
Analyse - classification des états :

➤ 2 classes possibles

- Transitoire (le processus ne peut pas y revenir)
- Ergodique (le processus ne peut pas en sortir)
→ Pas de périodicité en continu

➤ Décomposition de la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} S & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,1 & 1,k & 1,k+1 & 1,n \\ k,1 & S & 0 & & \\ k+1,1 & & & Q & \\ n,1 & R & & & \end{pmatrix}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement transitoire :

➤ définition

- Étude du temps de séjour dans les états transitoires avant disparition dans une classe ergodique
- On a vu que : $\pi(s) = \pi(0)(sl - P)^{-1}$
 - ➔ $p_{ij}(s)$ = élément (i,j) de $(sl-P)^{-1}$
 - ➔ Si x_i et x_j = états transitoires $\Rightarrow p_{ij}(s)$ = élément (i,j) de $(sl-Q)^{-1}$
- Utilisation de la transformée de Laplace :

$$\int_0^t p_{ij}(u) du \xrightarrow{\text{T.L.}} \frac{1}{s} p_{ij}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t p_{ij}(u) du = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} p_{ij}(s)$$

(théorème de la valeur finale)

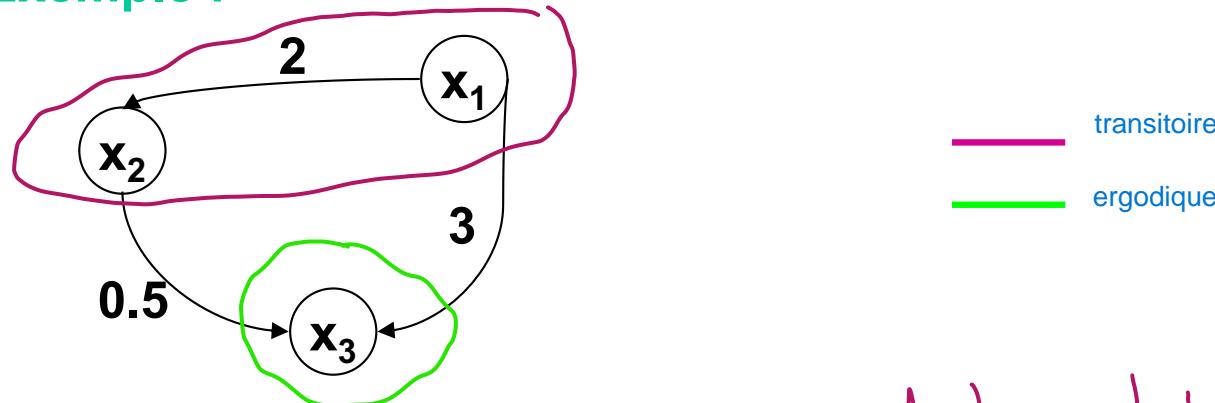
$$\bar{\tau} = \int_0^\infty p_{ij}(u) du = \lim_{s \rightarrow 0} p_{ij}(s) = -Q^{-1}$$

Élément correspondant à x_i, x_j dans $-Q^{-1}$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement transitoire :

➤ Exemple :



- Matrice de transition ?

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mat. transitoire Q

• Complément à 0

que des 0, ça preuve !

- Temps moyen de séjour dans le transitoire ?

$$\bar{\tau} = -Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.2 tps moy passé dans 1 venant de 1
0.8 tps moy passé dans 2 venant de 1
0 tps moy passé dans 2 venant de 1
2 tps moy passé dans 2 venant de 2

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

➤ Définition :

- Il existe un **comportement limite** (cad une distribution de probabilité limite) quand $t \rightarrow \infty$, indépendante de $\pi(0)$, **ssi il existe une seule classe ergodique**

➤ Calcul :

- 1^{ère} méthode : équations d'équilibre

→ Résolution de :
$$\begin{cases} \bar{\pi} P = 0 \\ \sum \bar{\pi}_i = 0 \end{cases}$$
 avec $\bar{\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$

→ Équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \sum_j \pi_j \lambda_{ij} = 0 \\ \lambda_{ii} \bar{\pi}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} \bar{\pi}_j \end{cases}$$

- 2^{ème} méthode : théorème de la valeur finale

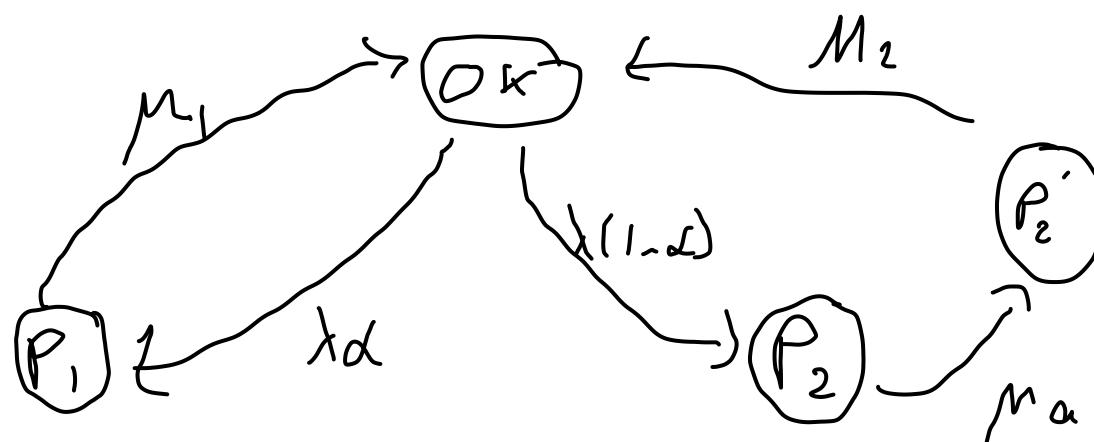
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \pi(s)$$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- Exemple : une machine peut subir plusieurs types de panne
 - P_1 : taux de ~~réparation immédiate~~ = $\lambda\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$
 $\overset{P_{imm}}{\lambda\alpha}$
taux de réparation = μ_1
 - P_2 : taux de ~~réparation extérieure~~ = $\lambda(1-\alpha)$
 $\overset{P_{ext}}{\lambda(1-\alpha)}$
durée d'attente exponentielle : taux d'attente = μ_a
 - P_2 (suite) : si réparateur présent : taux d'attente = μ_2

- Question 1 : tracer la chaîne de Markov correspondante



Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- Exemple (suite)
- Question 2 : matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_2' \\ \sigma h & -\lambda & \lambda\alpha & \lambda(1-\alpha) & 0 \\ P_1 & \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & -\mu_a & \mu_a \\ P_2' & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

- Question 3 : état permanent ? (on choisira : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$)

1 seule classe : ergodique, donc existence d'un comportement limite
calcul par équations d'équilibre :

$$\bar{\pi} P = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\pi_1 + 10\lambda\pi_2 + 10\lambda\pi_4 = 0 \\ \lambda\alpha\pi_1 - 10\lambda\pi_2 = 0 \\ \lambda(1-\alpha)\pi_1 - 10\lambda\pi_3 = 0 \\ 10\lambda\pi_3 - 10\lambda\pi_4 = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{Bnobj}}$ $\pi_1 = \pi_3 = \frac{1-\alpha}{12-\alpha}$; $\pi_2 = \frac{\alpha}{12-\alpha}$; $\pi_4 = \frac{10}{12-\alpha}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2 = \frac{\lambda\alpha\pi_1}{10\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{10\pi_4}{1-\alpha} \\ \pi_1 = \frac{10\lambda\pi_3}{\lambda(1-\alpha)} = \frac{10\pi_3}{1-\alpha} \\ \pi_3 = \pi_4 \\ 0 = -\lambda \cdot \frac{10\pi_4}{1-\alpha} + 10\alpha \cdot \frac{10\pi_3}{1-\alpha} + 10\lambda\pi_4 \end{cases}$$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$
● + ● = ●
 . . .

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- Exemple (suite)
- Question 3 : état permanent ? (on choisira : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$)

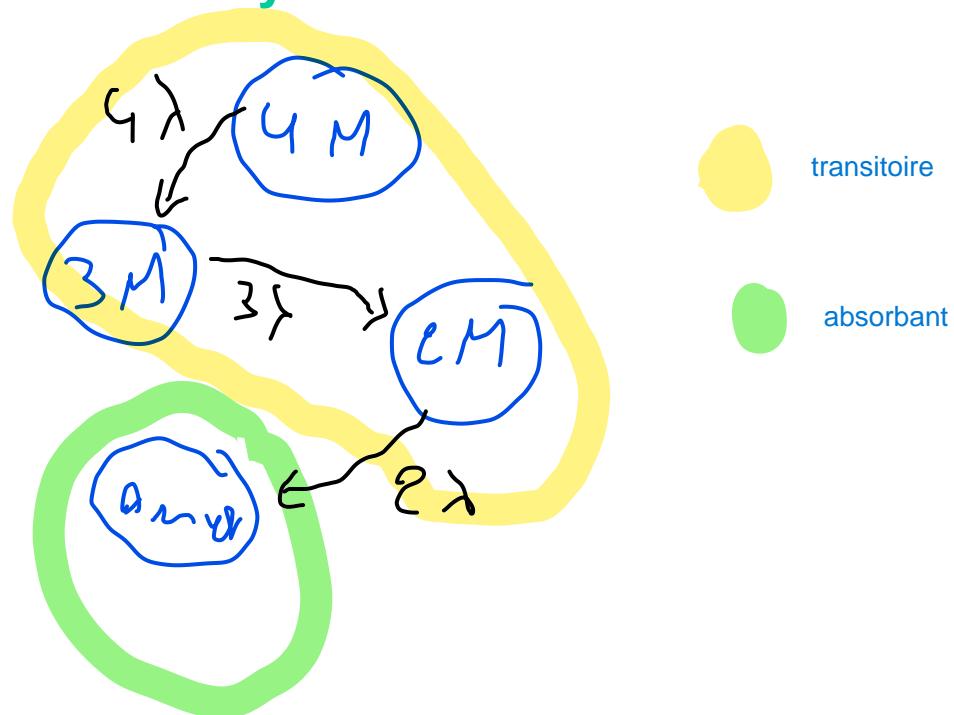
théoreme de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\pi_i(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot \pi_i(s))$$

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- Chaque moteur (identique) d'un quadrimoteur a un taux de panne égal λ . L'avion peut continuer à voler si au moins 2 moteurs fonctionnent.
- Calculer la durée de vie du système.
- Chaîne de Markov à temps continu du système



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

➤ Matrice de transition

$$\begin{matrix} & \text{4M} & \text{3M} & \text{2M} & \text{A} \\ \text{4M} & -4 & 4 & 0 & 0 \\ \text{3M} & 0 & -3 & 3 & 0 \\ \text{2M} & 0 & 0 & -2 & 2 \\ \text{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$



➤ Temps absorption ou temps moyen de séjour dans le transitoire

$$\tilde{\tau} = -Q^{-1}$$

$$Q' = \frac{1}{24\lambda^2} \begin{pmatrix} 6\lambda^2 & 8\lambda^2 & 12\lambda^2 \\ 0 & 8\lambda^2 & -12\lambda^2 \\ 0 & 0 & 12\lambda^2 \end{pmatrix}$$



$$-Q'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/12\lambda \\ 5/6\lambda \\ 1/2\lambda \end{pmatrix}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- Un système client/serveur reçoit en moyenne 1000 requêtes/s arrivant suivant un processus de Poisson. À titre expérimental, on envisage un système sans file d'attente mais comportant plusieurs serveurs de front. Lorsque tous les serveurs sont occupés, les requêtes sont rejetées.
 - 1. Quel est le pourcentage de clients rejetés pour un système comportant 1 serveur traitant 4000 requêtes par seconde ?
 - 2. Même question pour un système comportant 2 serveurs traitant chacun 2000 requêtes par seconde ?
 - 3. Même question pour un système comportant 4 serveurs traitant chacun 1000 requêtes par seconde ?

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 :

- Un dispositif réseau comprend un routeur R et un routeur de secours R'. Les taux de panne et de réparation sont respectivement :
 - λ et μ pour le routeur R
 - λ' et μ' pour le routeur R'
- Hypothèses : un routeur ne peut tomber en panne que s'il est effectivement utilisé et un seul routeur à la fois est utilisé.
- Le routeur R est prioritaire, s'il est en bon fonctionnement, il est utilisé
- Si les deux routeurs sont en panne, l'unique réparateur se consacre à R, même s'il avait commencé à réparer R'.

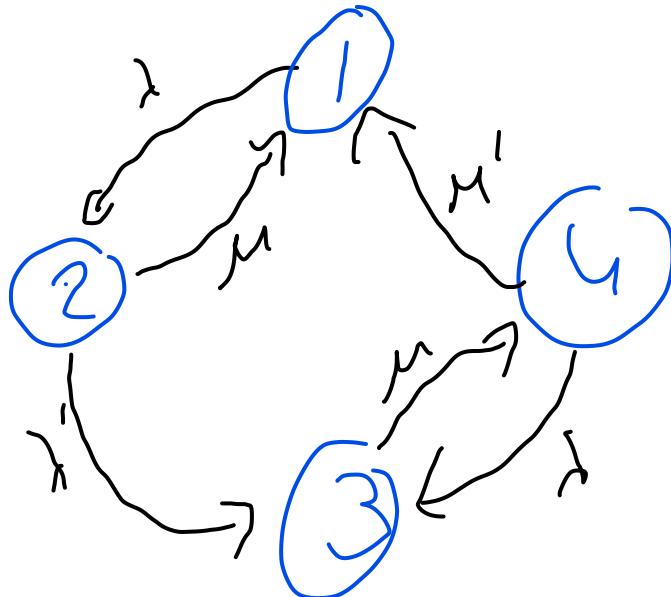
- Question 1 : tracer le graphe de Markov à temps continu
- Question 2 : quel est le temps de bon fonctionnement moyen du dispositif ?
- Question 3 : calculer la disponibilité avec $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'=10\lambda$.

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

➤ Question 1 : états du système

1 = R et R' ok
2 = pasR, R'
3 = pas R, pas R'
4 = R, pas R'



➤ CMTC associée

➤ Question 2 : Temps moyen de bon fonctionnement du dispositif

▪ Matrice de transition :

$$\begin{matrix} & \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{4} \\ \text{1} & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \text{2} & \lambda & -\mu - \lambda' & \lambda' & 0 \\ \text{3} & 0 & 0 & -\mu & \mu \\ \text{4} & \lambda' & 0 & \lambda & -\lambda' - \lambda \end{matrix}$$

pas d'état absorbants => $Q = P$

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

- Temps de bon fonctionnement (avec $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'=10\lambda$); $\lambda=1$ et $\mu=10$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 10 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \det P = 0 \Rightarrow$ matrice non inversible

en partant de 1, le syst fonctionne dans les état 1 et 2
en 4 il fonctionne aussi mais passe par un etat de non fonctionnement
donc calcul de tau moyen se fait uniquement avec les état 1 et 2 (matrice 2x2)

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

- Temps de bon fonctionnement (suite) :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \det E = 1$$
$$-Q^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

- Temps avant mauvais fonctionnement :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} \mu + \lambda' + \lambda \\ \mu + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

tps passé dans 1 et 2 avant d'arriver dans 3, venant de 1

tps passé dans 1 et 2 avant d'arriver de 3, venant de 2

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

➤ Question 3 : disponibilité du système

= proba d'être dans l'état 1 ou 2 ou 4

-> eq d'équilibre

$$\begin{cases} -\lambda \pi_1 + 10\lambda \pi_2 + 10\lambda \pi_4 = 0 \\ \lambda \pi_1 - 11\lambda \pi_2 = 0 \\ \lambda \pi_2 - 10\lambda \pi_3 + \lambda \pi_4 = 0 \\ 10\lambda \pi_3 - 11\lambda \pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

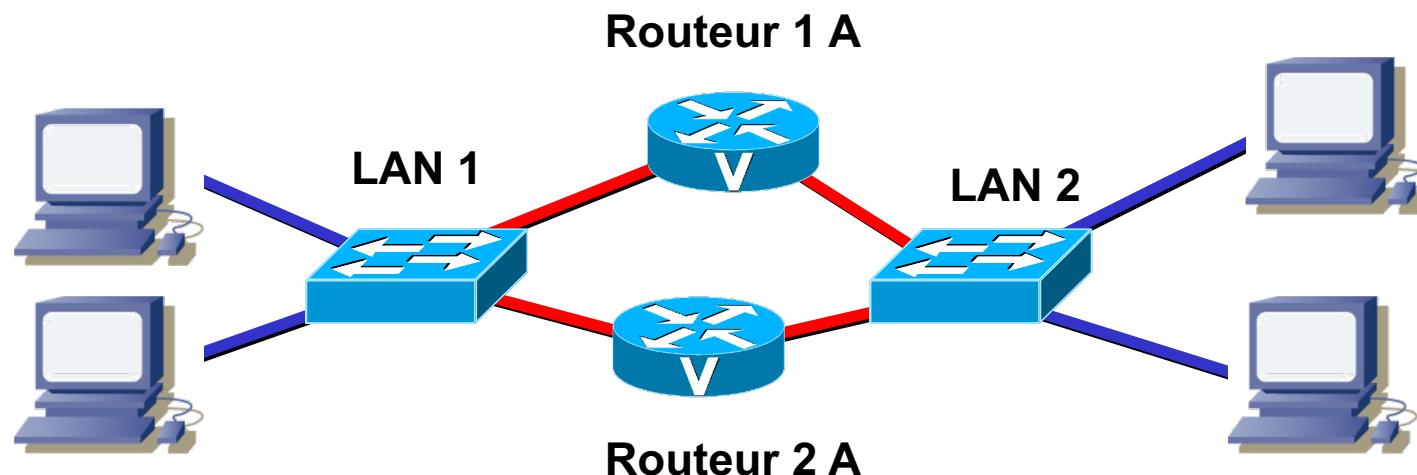
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 110 \pi_4 = 0,9009 \\ \pi_2 = 10 \pi_4 = 0,0092 \\ \pi_3 = \frac{1}{10} \pi_4 \\ \pi_4 = \frac{10}{1221} = 0,0082 \end{cases}$$

dispo syst = 0,991

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.2$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Pour limiter les défaillances de transmission, deux routeurs A sont mis en *parallèle* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux.
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent

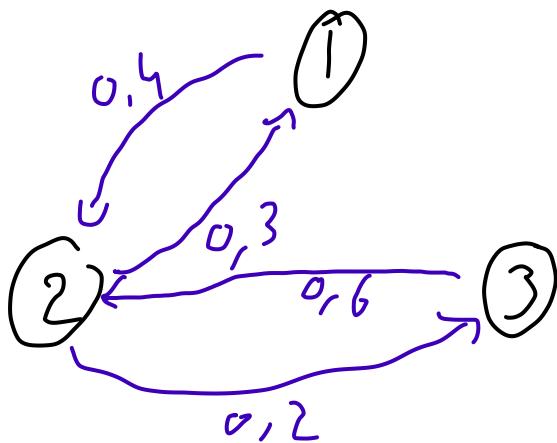


Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 (solutions) :

➤ Etats du système :

1 : 2A : ok
2 : 1A ok
3 : 0A ok



➤ CMTC associée

pas d'état absorbant

➤ Matrice de transition :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & -0,5 & 0,6 \\ 0 & 0,6 & -0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

➤ Régime permanent (équations d'équilibre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,4\pi_1 + 0,3\pi_2 = 0 \\ 0,4\pi_1 - 0,5\pi_2 + 0,6\pi_3 = 0 \\ 0,2\pi_2 - 0,6\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array} \right. \quad \left(\Rightarrow \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 9/25 \\ \pi_2 = 4/25 \\ \pi_3 = 12/25 \end{array} \right.$$

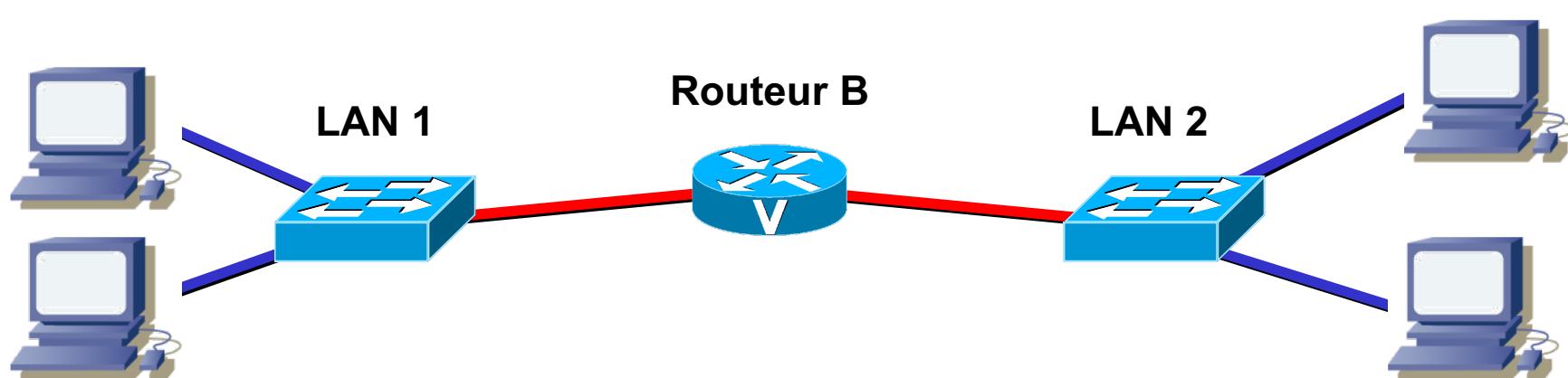
proba fonctionnement

proba non fonction

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 - suite :

- On remplace les deux routeurs A par un seul routeur B plus performant dont le taux de panne est $\lambda/2$ et le taux de réparation est toujours μ .
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent
- Question 4 : comparer les 2 architectures

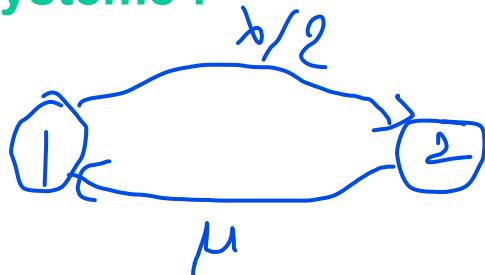


Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 - suite (solution) :

➤ CMTC associée

➤ Etats du système :



➤ Matrice de transition :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -\lambda/2 & \lambda/2 \\ 2 & \mu & -\mu \end{matrix} & \end{matrix}$$

➤ Régime permanent (équations d'équilibre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda}{2}\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 3\pi_2 \\ \pi_2 = 1 \end{array} \right.$$

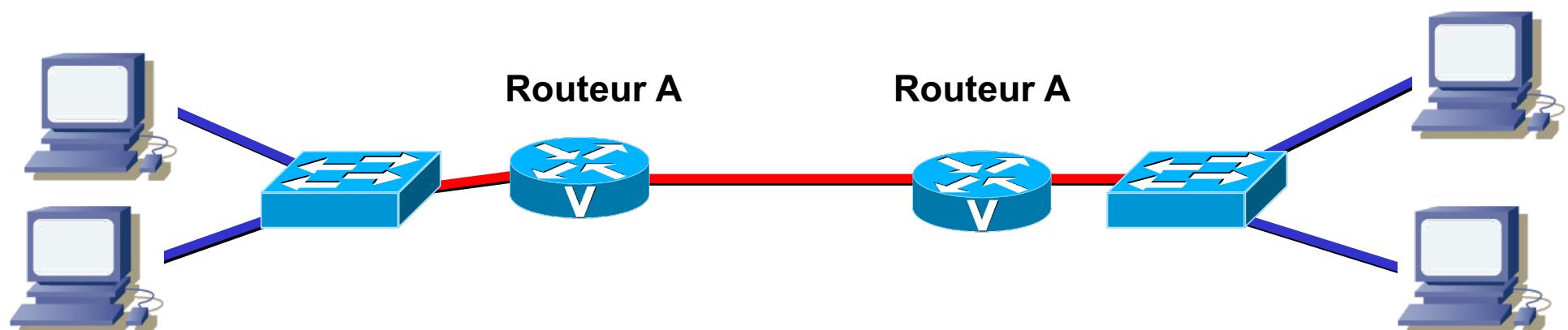
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_2 = \frac{1}{4} \\ \pi_1 = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

➤ Comparaison des 2 systèmes :

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 :

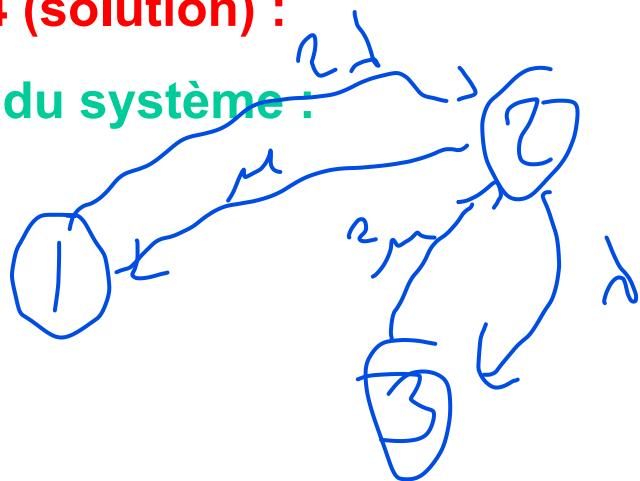
- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.1$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Deux routeurs A sont mis en série pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux (grande distance par exemple).
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTS associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 (solution) :

➤ Etats du système :



➤ CMTC associée

➤ Matrice de transition :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 2\mu & -2\mu & -\lambda \end{pmatrix} \end{matrix}$$

➤ Régime permanent (équations d'équilibre) :

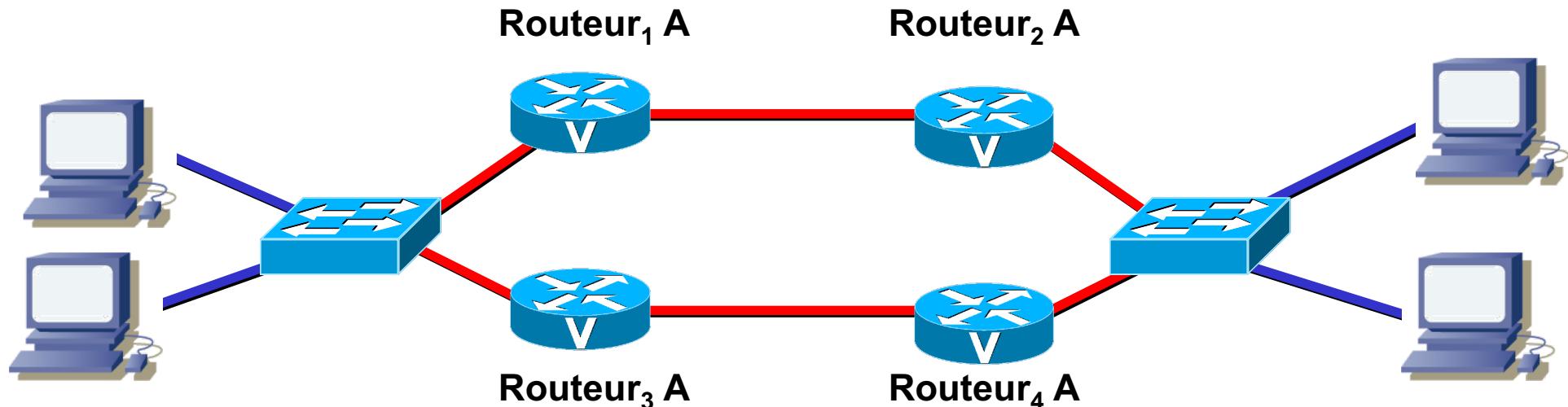
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \pi_2 - 2\lambda \pi_1 = 0 \\ 2\lambda \pi_1 - (\mu + \lambda) \pi_2 + 2\mu \pi_3 = 0 \quad (:) \\ \lambda \pi_2 - 2\mu \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = g/15 \\ \pi_2 = ? \\ \pi_3 = 1/15 \end{array} \right.$$

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.1$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Les routeurs A sont mis en *parallèle* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux (grande distance par exemple).
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent
- Question 4 : comparer les 2 architectures



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

➤ Etats du système :

- 1 : 4 routeurs opérationnels (2020)
 - 2 : R1 et R2 opéra, R3 ou R4 panne (2011)
 - 3 : R1 ou R2 en panne, R3 et R4 opera (1120)
 - 4 : R1 et R2 opéra, R3 et R4 panne (2002)
 - 5 : R3 et R4 panne, R1 et R2 opera (1111)
 - 6 : R1 et R2 panne, R3 ou R4 panne (0211)
 - 7 : R3 et R4 panne, R1 ou R2 panne (1102)
 - 8 : R1 et R2 et R3 et R4 panne (0202)
- il m'en manque un mdrr

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

➤ CMTA associée :

[voir notes](#) [one note](#)

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

➤ Utilisation de CARMS pour tracer la CMTC :

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- Utilisation de CARMS pour obtenir le régime permanent :
 - Simulation sur 10 s