Files d'attente

Plan du cours :

- **Chapitre 1 : Introduction**
- **Chapitre 2 : Rappels mathématiques**
- **Chapitre 3 : Les chaînes de Markov**
- **Chapitre 4 : Files d'attente**
- **Chapitre 5 : Réseau de files d'attente**

Marion Gilson-Bagrel

Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- **Chaînes de Markov à temps continu**

Introduction

Pourquoi ?

- **Une analyse de système par Graphe d'état**
  - une représentation sous forme graphique
  - permet de décrire les états du système ainsi que toutes les relations qui permettent de passer d'un état à un autre

- **Modélisation choisie : Chaînes ou Graphes de Markov**
  - = un réseau décrivant les états possibles d'un système et les lois de passage d'un état à un autre

- **Un graphe de Markov permet de modéliser des processus markoviens.**
  - Cad des processus stochastiques dans lesquels l'état du système ne dépend que de l'état précédent et non de son passé
  - L'état du système ne dépend donc pas de comment le système à atteint son état précédent, ni de combien de temps il y est resté.
  - C'est un processus sans mémoire

Plan

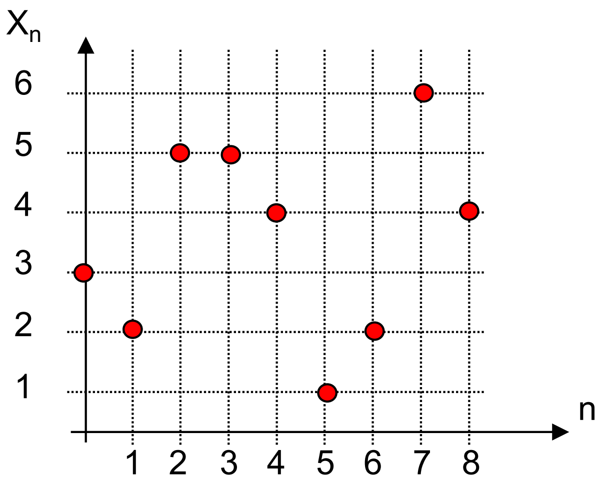
Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
  - **Définitions**
  - **Modélisation**
  - **Analyse**
  - **Comportement limite**
  - **Exercice**
- **Chaînes de Markov à temps continu**

Chaînes de Markov à temps discret

Définitions :

- **Rappel : processus stochastique $\{X_n\}_{n \in N}$ à espace d'état discret et à temps discret.**
  - Chaîne à temps discret (E = espace d'état dénombrable car discret)



- **Chaîne de Markov à temps discret (CMTD) :**
  - $\{X_n\}_{n \in N}$ est une chaîne de Markov à temps discret ssi

    → $$P[X_n=j \mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_0=i_0] = P[X_{n=j} \mid X_{n-1}=i_{n-1}]$$

  - Interprétation : proba pour que la chaîne soit dans un certain état à la $n^{ième}$ étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape précédente

    → Étapes antérieures : aucun rôle

Définitions (suite) :

➢ CMTD homogènes

- Les probabilités ne dépendent pas de n

  ➔ Déduction : définition d'une probabilité de transition d'un état i vers un état j $\Rightarrow p_{ij}$

  ✓ $p_{ij}=P[X_n=j \mid X_{n-1}=i] \ \forall\ n \in N$

  ✓ $p_{ij} \geq 0$ (possibilité de rester dans un certain état i entre 2 étapes)

  ✓ $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$

- Matrice de transition

  ➔ Matrice carré d'ordre fini ou infini (suivant E) : $P = [p_{ij}]_{i,j \in E}$

  ➔

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & \cdots & p_{ij} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

rebouclage

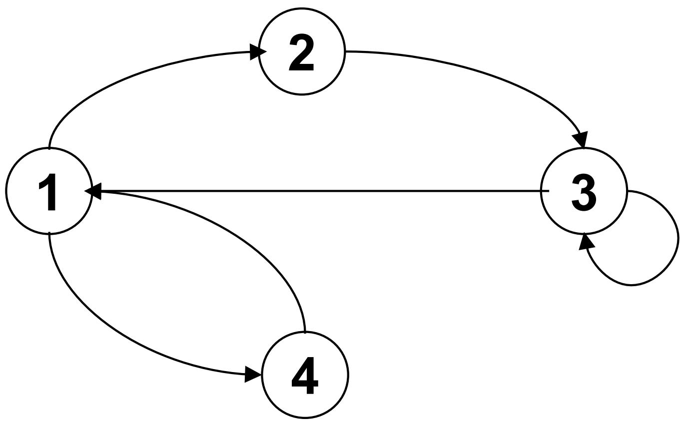
transition

- **Suite du cours : CMTD homogènes**

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple :

- **CMTD homogènes représentés par un graphe orienté**
  - Association
    - ➔ À chaque état = un noeud
    - ➔ À chaque transition possible entre 2 états = arc orienté pondéré par la proba de transition



$E=\{1,2,3,4\}$

$p_{23}=p_{41}=1$

$p_{12}+p_{14}=1$

$p_{31}+p_{33}=1$

Version mathématique du graph :

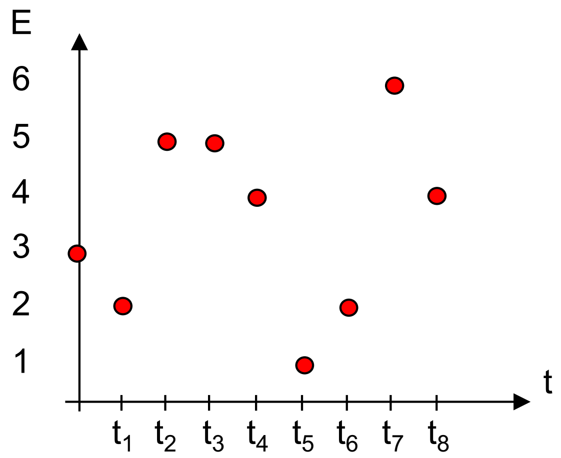
Matrice de transition ?

	1	2	3	4
1	0	p_{12}	0	p_{14}
2	0	0	p_{23}	0
3	p_{31}	0	p_{33}	0
4	p_{41}	0	0	0

Chaînes de Markov à temps discret

Modélisation :

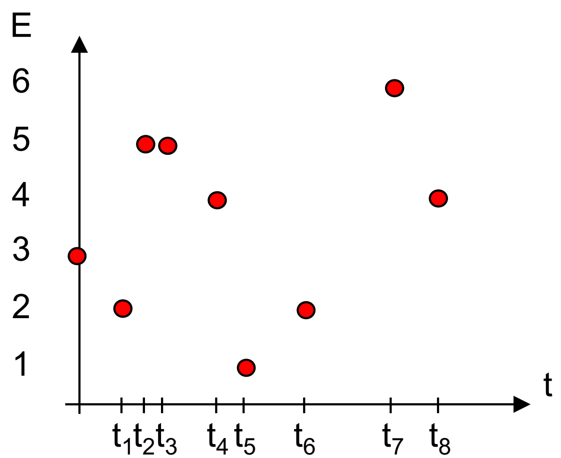
- **CMTD à changements d'états équidistants**



État du système à des intervalles de temps réguliers : tous les jours, toutes les heures …

➔ t_n=nT, où T= unité de temps considéré

- **CMTD à instants de changement d'état quelconque**



État du système juste après un événement :

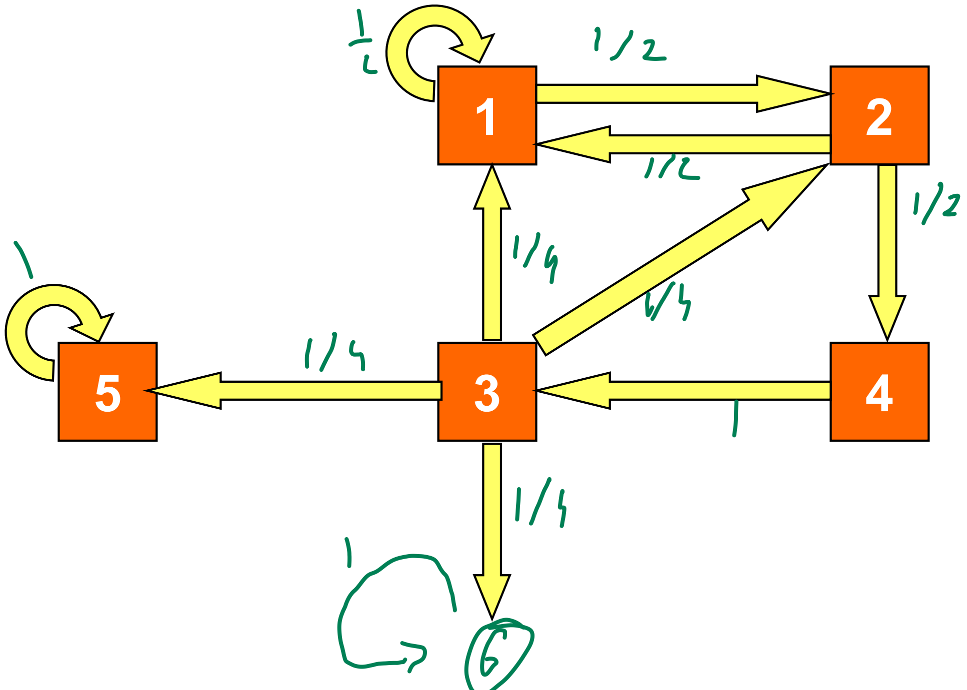
➔ t_n= instant du $n^{ième}$ événement

➔ instants de changements d'états non équidistants

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple 1 :

- **Labyrinthe dans lequel circule une souris**
  - 5 pièces et une sortie
  - Couloir à sens unique, pas de demi-tour
  - Pièce 5 : impossibilité d'en sortir
  - Hypothèses de travail :
    - ➔ Non prise en compte du tps passé dans les pièces et dans les couloirs
    - ➔ La souris ne garde pas en mémoire les pièces visitées
    - ➔ Les choix de couloir équiprobables



Pour réa le graph, il faut ajouter un état de sortie. En effet, il toutes les transitions vont d'un état à un autre <=> il n'y a pas de "trait dans le vide"
De plus, on ne peut pas avoir une ligne de 0 dans la matrice. Nous devons donc reboucler sur l'état de sortie

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple 1 (suite) :

- **Modélisation par une CMTD homogène**
  - États de la chaînes : pièces visitées
  - Transitions : couloirs
  - Probabilités sur transitions : choix aléatoire de couloirs

	1	2	3	4	5	Sortie
Sortie	0	0	0	0	0	1
1	1/2	/2	0	0	0	0
2	1/2	0	0	1/2	0	0
3	1/4	1/4	0	0	1/4	1/4
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0

➔ Questions : matrice de transition ?

Il faut garder le même ordre des états sur lignes et colonnes !!!!
(pas comme moi quoi)
ça nous permet de voir directement les états permanents : les 1 sur la diagonale

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - régime transitoire :

- **= déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$** des probabilités d'états $\pi^{j}=P[X_n=j]$ pour que le processus $\{X_n\}_{n\in N}$ se trouve dans l'état j à la $n^{\text{ième}}$ étape :
  - $\pi^{(n)} = [\pi_j^{(n)}]_{j\,\in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots]$
  - Ce vecteur de probabilité dépend :
    - ➔ de la matrice de transition P
    - ➔ du vecteur des probabilités d'états initiales $\pi^{(0)}$
- **Déduction**
  - Décrire l'évolution du processus depuis l'état initial ($\pi^{(0)}$) jusqu'à l'étape n ($\pi^{(n)}$) en passant par les étapes intermédiaires

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 1 & \cdots\longrightarrow & j & \cdots\longrightarrow & n \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \pi^{(0)} & & \pi^{(1)} & & \pi^{(j)} & & \pi^{(n)} \end{array}$$

  - Formule de probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i\in E} P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]\, P[X_{n-1} = i]$$

soit $$\pi_j^{(n)} = \sum_{i\in E} \pi_i^{(n-1)}\, p_{ij}$$ (proba d'être dans l'état j à n = proba de passage de i à j x proba d'être en i à n-1)

  - Sous forme matricielle : $\boxed{\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}\, P}$

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - régime transitoire :

- **Exemple du labyrinthe**
  - Pour se trouver dans l'état 1 à l'étape n, il fallait se trouver :
    - ➔ soit dans l'état 2 et faire une transition 2 → 1
    - ➔ soit dans l'état 3 et faire une transition 3 → 1

$$\pi_1^{(n)} = \pi_2^{(n)}\, p_{21} + \pi_3^{(n)}\, p_{31}$$

- **Relation entre l'état à l'étape n et l'état à l'étape initiale**
  - $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$ appliquée n fois → $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$ (ou $\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$)

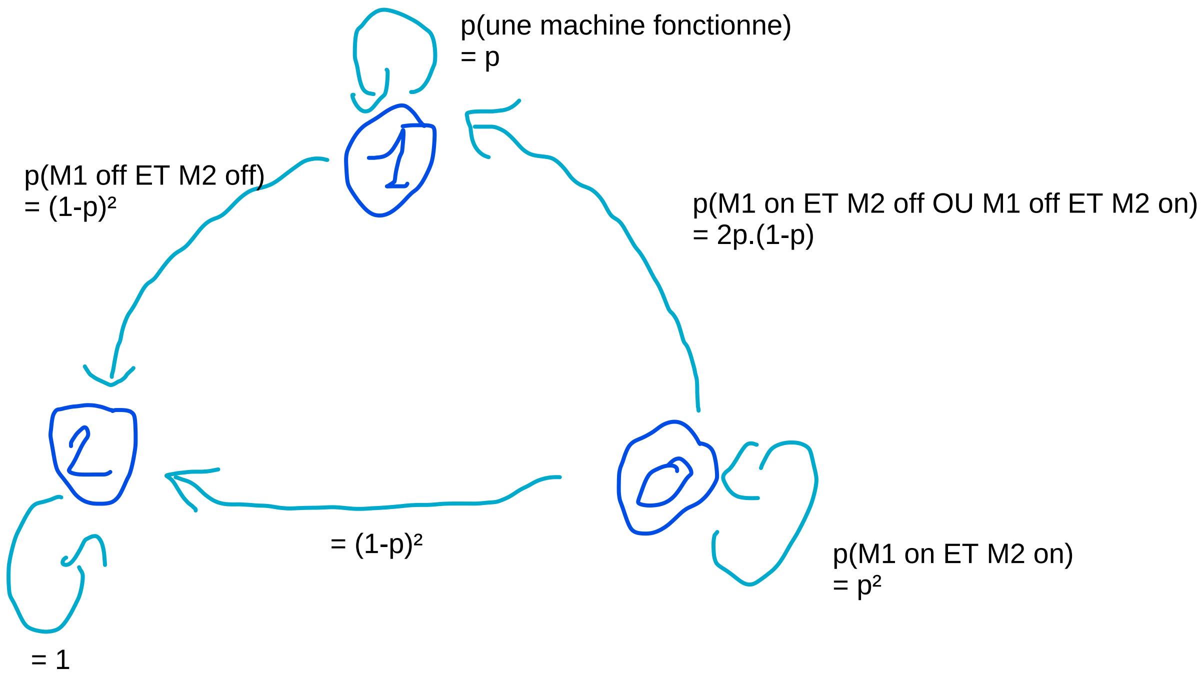
- **Remarque**
  - $p_{ij}^{(n)}$ = élément (i,j) de la matrice P^n
    - ➔ D'où : $P^{(n)} = P^n$
  - Un processus de Markov est entièrement défini si on connaît :
    - ➔ Sa matrice de transition
    - ➔ Sa distribution initiale X_0

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- 2 machines fonctionnent en parallèle et sont indépendantes.
- Chaque machine a une fiabilité égale à p au cours d'une journée
- Aucune possibilité de réparation
- X_n = nombre de machines en panne au début de la $n^{ième}$ journée

- Question 1 : représentation graphique ?



Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

➢ **Question 2 : matrice de transition ?**

	0	1	2
0	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	0	p	$1-p$
2	0	0	1

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- **Question 3 : distribution du nombre de machine en panne après n jours.**

On suppose que $\pi^{(0)}$=(1,0,0) <=> état initial

$\hookrightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$

ici $n = 10$

AN : $p = 0,9$

$$\hookrightarrow P = \begin{vmatrix} 0,9^2 & 0,18 & 0,01 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi^{(10)} = [1, 0, 0] \cdot P^{10}$$

(Merci matlab)

$$= [0.34, 0.48, 0.17]$$

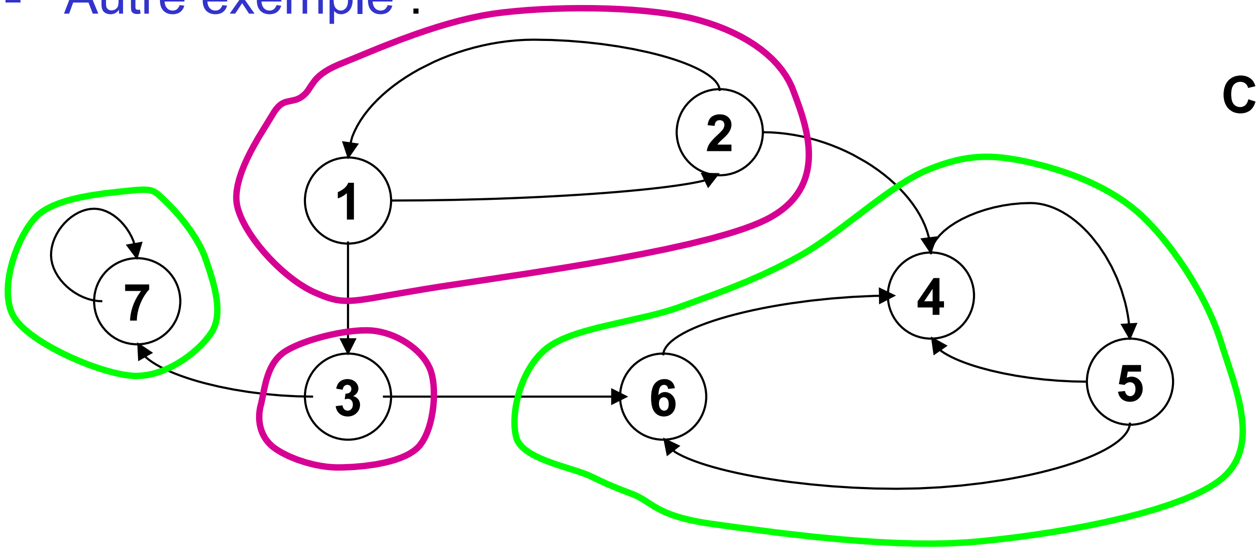
On a donc après 10j, 34% de chances d'avoir nos deux machines qui fonctionnent toujours, 48% qu'une des deux soit tombée en panne, et 17% que les deux soient en panne.

Exemple : p=0.9, n=10 jours

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - classification des états :

- **États communicants :**
  - = s'il existe un chemin pour aller de i à j et de j à i
- **Exemples :**
  - Exemple des machines : 3 classes communicantes
  - Autre exemple :



Classes communicantes

transitoires

ergodiques

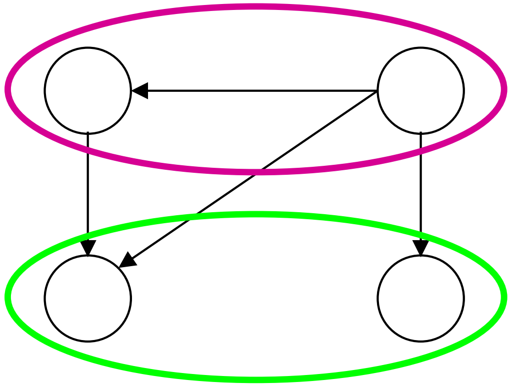
Transitoires : possibilité de sortir de cette classe - impossibilité d'y revenir

Ergodiques : possibilité d'arriver dans cette classe - impossibilité d'en sortir (régime permanent)

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - classification des états :

- **Graphe réduit :**



Classes transitoires : le processus ne peut pas y revenir

Classes ergodiques : le processus ne peut pas en sortir

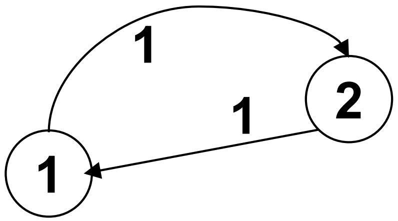
- **Il existe toujours au moins une classe ergodique**

  - Car tous les états communiquent entre eux (chaîne irréductible)

Chaînes de Markov à temps discret

Comportement limite :

- **Définition :** étude de la limite du vecteur de probabilité $\pi^{(n)}$ lorsque $n \to \infty$
  - Cette limite existe-elle ?
  - Si oui, comment la calculer ?
- **Distribution limite :** la limite existe si pas de comportement périodique



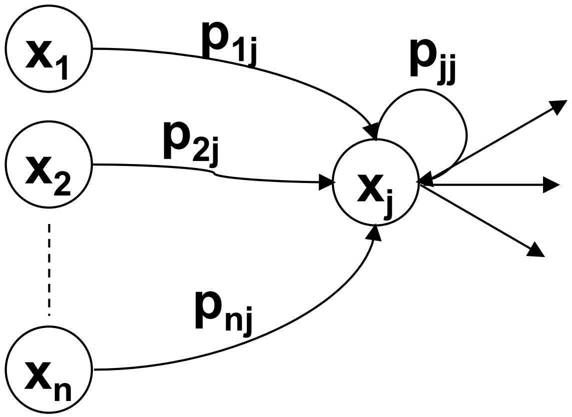
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^k \text{ n'a pas de limite quand } k \to \infty$$

- **Propriété :** si la distribution limite existe, elle est stationnaire
- **Théorème :**
  - Il existe une distribution limite indépendante de l'état initial ssi la chaîne a une seule classe ergodique
- **Exemple des machines :**
  - États 0 et 1 : transitoires
  - État 2 : ergodique ⇨ il existe une limite qui est (0 0 1) ⇨ pas tjrs aussi évident

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

- **$1^{\text{ère}}$ méthode :**
  - Objectif : résolution de $\pi = \pi P$
    - ➔ Cad recherche du vecteur propre p associé à la valeur propre 1
    - ➔ Méthode : écriture des équations d'équilibre (ou équations de balance)



$$\pi_j = \pi_1 p_{1j} + \pi_2 p_{2j} + \cdots + \pi_j p_{jj} + \cdots + \pi_n p_{nj}$$

$$\underbrace{\pi_j (1 - p_{jj})}_{\textbf{flux entrant}} = \underbrace{\pi_1 p_{1j} + \cdots + \pi_{j-1} p_{j-1,j} + \pi_{j+1} p_{j+1,j} + \cdots + \pi_n p_{nj}}_{\textbf{flux sortant}}$$

  - Résumé :
    - ➔ résolution du système :

diagonale

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{k \in E} \pi_k = 1 \end{cases}$$

les autres

(condition de normalisation)

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

- **1ère méthode - exemple :**
  - Chaîne de Markov :

  - Equations d'équilibre (balance) : (par colonne)

  - En tenant de : $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

- **2^{ième} méthode :**
  - Moins utilisée
  - Recherche de la limite de P^k, pour k →∞ :
    - ➔ Soit $\overline{P} = \lim_{k \to \infty} P^k$

$$\overline{\pi} = \pi^{(0)}\,\overline{P} = \lim_{k \to \infty} \pi^{(k)}$$

  - Méthode :
    - ➔ Calcul de P^2, P^4, P^8 …jusqu'à obtenir une solution limite
      - ✓ $\overline{\pi} = \begin{pmatrix} \overline{\pi}_1 & \overline{\pi}_2 & \overline{\pi}_3 & \cdots & \overline{\pi}_n \end{pmatrix}$
  - Remarque : $\overline{\pi}$ indépendant de $\pi^{(0)}$
    - ➔ Toutes les lignes de $\overline{\pi}$ sont identiques

$$\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ x & x & \cdots & x \\ x & x & \cdots & x \end{pmatrix}$$

mais aussi $$\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ x & x & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Chaînes de Markov à temps discret

Délai et probabilité d'absorption :

- **Nécessité : ∃ un état d'absorption**

- **1 seul état d'absorption**
  - n_i = temps moyen d'absorption en partant de i :

$$n_i = 1 + \sum_{k \in E'} p_{ik}\, n_k$$

i = état non absorbant
E' = ensemble de tous les états non absorbants

- **Plusieurs états d'absorption**
  - bij = probabilité d'absorption dans j si l'état initial est i

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in E'} p_{ik}\, b_{kj}$$

- **Exemple des machines, question 4 = durée de bon fonctionnement ?**
  - Plus de fonctionnement en 2 ⇨ en combien de temps arrive-t-on en 2 ?
  - Seul 2 est absorbant, donc E'=[0,1]

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1 : météo du pays d'Oz

- Pas 2 jours de beau temps consécutifs : pluie ou neige le lendemain
- Si pluie ou neige, le lendemain ⇨ à 50 % = même temps
  ⇨ 25 % pour les autres possibilités
- Question 1 : construire le graphe associé
- Question 2 : Matrice de transition
- Question 3 : décomposition en classe

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1 : météo du pays d'Oz (suite)

- **Question 4 : comportement limite**

- **Question 5 : calcul de la solution limite**

  - 1ère méthode : équations d'équilibre (résolution de $\pi=\pi P$)

  - 2ème méthode limite de P^k

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur

- Dans une école d'ingénieur dont le cycle de fin d'étude comporte 3 années, on constate qu'un étudiant en fin d'année à la probabilité :
  - p de passer en année supérieure ou d'obtenir son diplôme (en fin de 3ème année du cycle)
  - q de redoubler (avec p+q+r = 1)
  - r d'être renvoyé

- Question 1 : représenter le déroulement de ce cycle par une chaîne de Markov

- Question 2 : quelles sont les probabilités d'être reçu ou renvoyé ?

- Question 3 : Que devient cette chaîne si, au plus, un redoublement est autorisé dans la scolarité ?

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (1)

- Question 1 : chaîne de Markov

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (2)

- Question 2 : probabilités d'être reçu ou renvoyé

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (3)

- Question 2 (suite) : probabilités d'être reçu ou renvoyé

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (4)

- Question 3 : au plus, un redoublement est autorisé dans la scolarité

Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- **Chaînes de Markov à temps continu**
  - **Définitions**
  - **Modélisation**
  - **Analyse**
  - **Comportement limite**
  - **Exercice**

Chaînes de Markov à temps continu

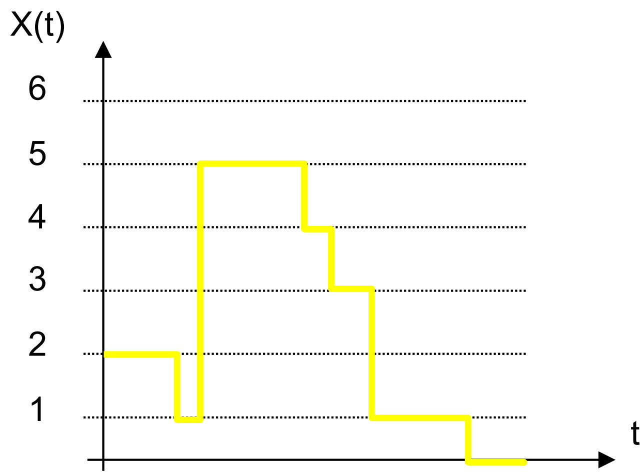
Introduction = pourquoi une CMTC ?

- **Utilisation d'une CMTD :**
  - Étude de phénomènes aléatoires pour lesquels les chgts d'état se produisent à des instants fixés par avance
  - Pas de problème pour certains processus :
    - ➔ processus techniques décomposés en étapes bien définies (déroulement dans l'étape sans intérêt)
    - ➔ problèmes économiques ou sociologiques (observations à intervalles réguliers), ex. : sondage tous les mois, puis chaque semaine (élection)
  - Problèmes pour certains systèmes :
    - ➔ Ex. : fiabilité d'un système technique ⇨ nécessite une intervention sans retard en cas de défaillance
      - ✓ Maths : modèle stochastique connu à chaque instant ⇨ processus continu
      - ✓ Ex. : central téléphonique - lois de proba discrètes pas assez précise pour caractériser les durées de communication ou instants d'arrivées des appels
- **CMTC fondée sur le processus de Poisson**
  - Réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné, par ex. :
    - ➔ Arrivée de clients vers un guichet
    - ➔ Occurrence d'accidents dans une entreprise
    - ➔ Apparition de pannes dans un parc de machines
    - ➔ Arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur

Chaînes de Markov à temps continu

Définitions :

- **Rappel : processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ à espace d'état discret et à temps continu.**
  - Chaîne à temps continu (E = espace d'état dénombrable car discret)



- **Chaîne de Markov à temps continu (CMTC) :**
  - $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu ssi

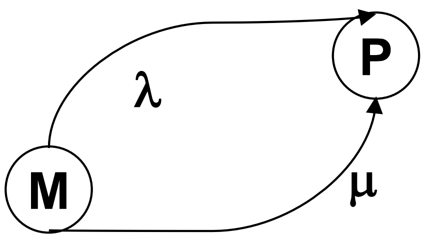
    ➔ $P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}, X(t_{n-2})=i_{n-2}, \ldots, X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}]$

- **CMTC homogènes :**
  - Les probas $P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}]$ ne dépendent pas des instants d'observation t_n et t_{n-1} mais uniquement de la durée (t_n-t_{n-1}) qui sépare 2 observations
  - Nous n'étudierons que des CMTC homogènes

Chaînes de Markov à temps continu

Caractérisation d'une CMTC :

- **L'évolution d'une CMTC peut se voir sous 2 façons :**
  - On reste un certain temps (distribué suivant une loi exponentielle) dans un état
  - En quittant un état, on choisit l'état de destination qui ne dépend :
    - ➔ Ni du temps passé dans l'état
    - ➔ Ni du chemin parcouru précédemment
- **Définition**
  - Probabilité de passage de l'état i à l'état j entre t et t+dt :
    - ➔ **Proba = λ_{ij}dt**
    - ➔ λ_{ij} = taux de transition pour $i \neq j$
  - Le choix de la destination = caractérisé par des probas (ou taux) de transition
  - Pas de mémoire
- **Exemple :** machine à 2 états : marche ou panne
  - Taux de panne : λ
  - Taux de réparation : μ



Le taux de transition remplace la probabilité

Chaînes de Markov à temps continu

Temps de séjour dans un état :

- **Notations :**
  - $\lambda =$ somme des taux de sortie (d'un état)
  - $\tau =$ temps de séjour dans un état
  - $G(t) = e^{-\lambda t}$: probabilité d'être encore dans l'état à l'instant t
- **Valeur moyenne de τ :**
  - Par définition :

$$\Rightarrow \quad \bar{\tau} = \int_0^\infty t\, G(t)\, dt \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}}$$

Matrice de transition :

- **Principe :**

$$P[X(t+dt) = x_j \mid X(t) = x_i] = \lambda_{ij}\, dt$$

$$\underbrace{P[X(t+dt) = x_j]}_{\substack{\text{Soit système dans l'état} \Rightarrow \text{il y reste} \\ \text{Soit pas dans l'état} \Rightarrow \text{il y va}}} = \underbrace{\sum_{i \neq j} P[X(t) = x_i]\, \lambda_{ij}\, dt}_{\text{Proba d'arrivée dans l'état}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} P[X(t) = x_j] \left(1 - \sum_{k \neq j} \lambda_{jk}\, dt \right)}_{\text{Proba de rester dans l'état}}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Matrice de transition (suite) :

- **A une CMTD :**
  - Association d'une matrice des probas de transition P, p_{ij} = proba de passage de i à j
- **A une CMTC :**
  - Association d'une matrice P (générateur infinitésimal),
    - ➔ p_{ij} = taux de transition λ_{ij} de i vers j
    - ➔ Éléments :
      - ✓ Non diagonaux : $p_{ij}=\lambda_{ij}$, $\forall\ i \neq j$
      - ✓ Diagonaux : $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij} = -\sum_{j \neq i} \mu_i \, p_{ij} = -\mu_i \sum_{j \neq i} p_{ij} = -\mu_i$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \lambda_{1j} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1j} & \\ \lambda_{21} & -\sum_{j \neq 2} \lambda_{2j} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \lambda_{i1} & & & \lambda_{ij} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sum p_{ij} = 0}$$

État absorbant = ligne de 0

Chaînes de Markov à temps continu

Matrice de transition (suite) :

- **Exemple : machine à 2 états**
  - Matrice de transition :

- **Définition :**
  - P est solution de :

    ➔ $\dot{\pi} = \pi P$

  - Solution :

    ➔ $\pi(t) = \pi(0)\, e^{Pt}$

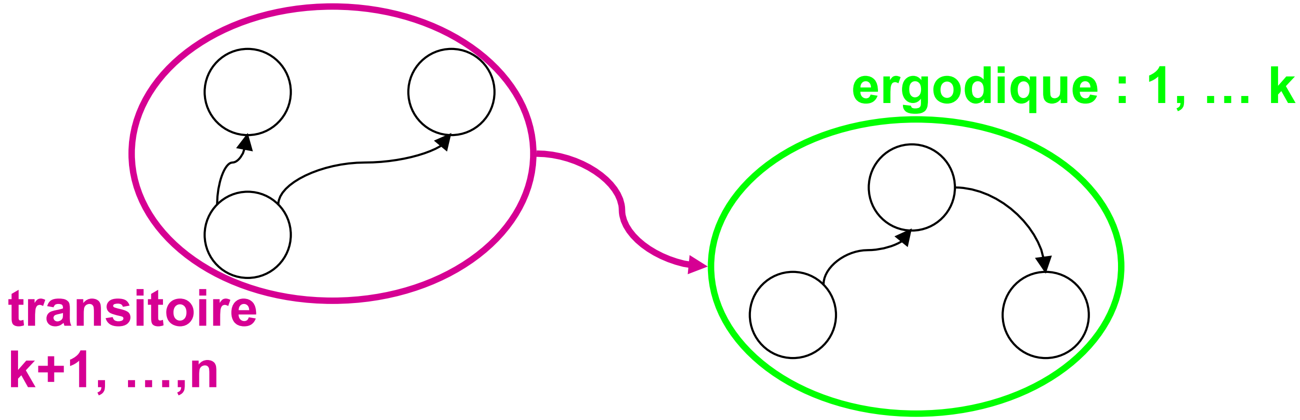
    ➔ Transformée de Laplace : $\pi(s) = \pi(0)\,(sI - P)^{-1}$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - classification des états :

- **2 classes possibles**
  - Transitoire (le processus ne peut pas y revenir)
  - Ergodique (le processus ne peut pas en sortir)
    - ➔ Pas de périodicité en continu
- **Décomposition de la matrice de transition :**

$$P = \begin{pmatrix} S & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{array}{c} \\ 1,1 \\ \\ k,1 \\ k+1,1 \\ \\ n,1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1,1 & 1,k & 1,k+1 & 1,n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right) \end{array}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement transitoire :

- définition

  - Étude du temps de séjour dans les états transitoires avant disparition dans une classe ergodique
  - On a vu que : $\pi(s) = \pi(0)\,(sI - P)^{-1}$

    ➔ p_{ij} (s) = élément (i,j) de $(sI-P)^{-1}$

    ➔ Si x_i et xj = états transitoires ⇨ p_{ij} (s) = élément (i,j) de $(sI-Q)^{-1}$

  - Utilisation de la transformée de Laplace :

$$\int_0^t p_{ij}(u)\,du \xrightarrow{\text{T.L.}} \frac{1}{s}\,p_{ij}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t p_{ij}(u)\,du = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\,p_{ij}(s)$$

(théorème de la valeur finale)

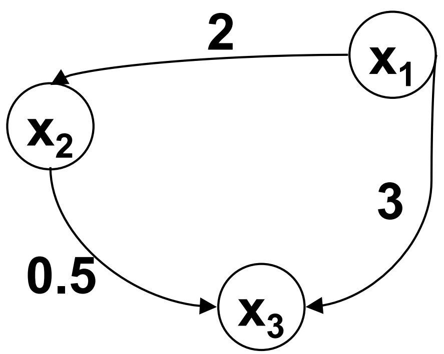
$$\bar{\tau} = \int_0^\infty p_{ij}(u)\,du = \lim_{s\to 0} p_{ij}(s) = -Q^{-1}$$

Élément correspondant à x_i, x_j dans - Q^{-1}

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement transitoire :

- **Exemple :**



- Matrice de transition ?

- Temps moyen de séjour dans le transitoire ?

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- **Définition :**
  - Il existe un comportement limite (cad une distribution de probabilité limite) quand t → ∞, indépendante de $\pi(0)$, ssi il existe une seule classe ergodique
- **Calcul :**
  - 1[ère] méthode : équations d'équilibre
    - → Résolution de : $\begin{cases} \overline{\pi}\, P = 0 \\ \sum \overline{\pi}_i = 0 \end{cases}$ avec $\overline{\pi} = \lim_{t \to \infty} \pi(t)$
    - → Équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \sum_j \pi_j \, \lambda_{ij} = 0 \\ \lambda_{ii} \, \overline{\pi}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} \, \overline{\pi}_j \end{cases}$$

  - 2[ème] méthode : théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} \pi(t) = \lim_{s \to 0} s\, \pi(s)$$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- **Exemple : une machine peut subir plusieurs types de panne**
  - **P_1 : taux de réparation immédiate = $\lambda\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$**

    taux de réparation = μ_1
  - **P_2 : taux de réparation extérieure = $\lambda(1-\alpha)$**

    durée d'attente exponentielle : taux d'attente = μ_a
  - **P_2 (suite) : si réparateur présent : taux d'attente = μ_2**

- **Question 1 : tracer la chaîne de Markov correspondante**

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- **Exemple (suite)**
- **Question 2 : matrice de transition**

- **Question 3 : état permanent ? (on choisira : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$)**

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- **Exemple (suite)**

- **Question 3 : état permanent ? (on choisira : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$)**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- **Chaque moteur (identique) d'un quadrimoteur a un taux de panne égal) λ. L'avion peut continuer à voler si au moins 2 moteurs fonctionnent.**
- **Calculer la durée de vie du système.**

- **Chaîne de Markov à temps continu du système**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- **Matrice de transition**

- **Temps absorption ou temps moyen de séjour dans le transitoire**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- **Un système client/serveur reçoit en moyenne 1000 requêtes/s arrivant suivant un processus de Poisson. À titre expérimental, on envisage un système sans file d'attente mais comportant plusieurs serveurs de front. Lorsque tous les serveurs sont occupés, les requêtes sont rejetées.**

  - **1. Quel est le pourcentage de clients rejetés pour un système comportant 1 serveur traitant 4000 requêtes par seconde ?**

  - **2. Même question pour un système comportant 2 serveurs traitant chacun 2000 requêtes par seconde ?**

  - **3. Même question pour un système comportant 4 serveurs traitant chacun 1000 requêtes par seconde ?**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 :

- Un dispositif réseau comprend un routeur R et un routeur de secours R'. Les taux de panne et de réparation sont respectivement :
  - λ et μ pour le routeur R
  - λ' et μ' pour le routeur R'
- Hypothèses : un routeur ne peut tomber en panne que s'il est effectivement utilisé et un seul routeur à la fois est utilisé.
- Le routeur R est prioritaire, s'il est en bon fonctionnement, il est utilisé
- Si les deux routeur sont en panne, l'unique réparateur se consacre à R, même s'il avait commencé à réparer R'.

- Question 1 : tracer le graphe de Markov à temps continu
- Question 2 : quel est le temps de bon fonctionnement moyen du dispositif ?
- Question 3 : calculer la disponibilité avec $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'=10\lambda$.

Exercice 2 (solutions) :

- **Question 1 : états du système**

- **CMTC associée**

- **Question 2 : Temps moyen de bon fonctionnement du dispositif**
  - Matrice de transition :

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

- Temps de bon fonctionnement (avec $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'=10\lambda$) :

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

- Temps de bon fonctionnement (suite) :

- Temps avant mauvais fonctionnement :

Chaînes de Markov à temps continu

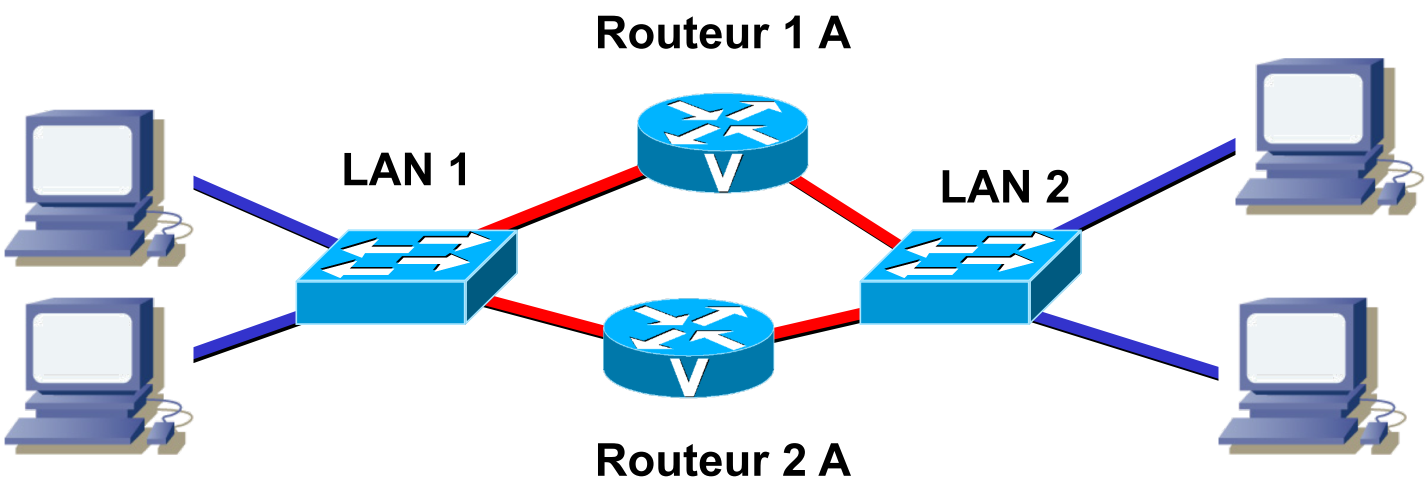
Exercice 2 (solutions) :

- Question 3 : disponibilité du système

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.2$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Pour limiter les défaillances de transmission, deux routeurs A sont mis en *parallèle* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux.
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent



Chaînes de Markov à temps continu

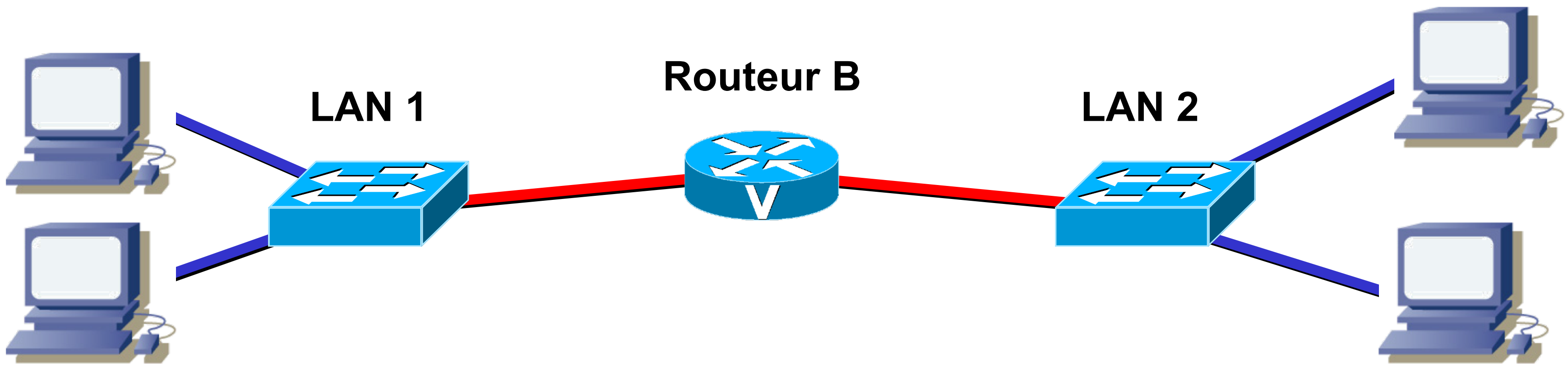
Exercice 3 (solutions) :

- **Etats du système :**
- **CMTC associée**
- **Matrice de transition :**
- **Régime permanent (équations d'équilibre) :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 - suite :

- On remplace les deux routeurs A par un seul routeur B plus performant dont le taux de panne est $\lambda/2$ et le taux de réparation est toujours μ.
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent
- Question 4 : comparer les 2 architectures



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 - suite (solution) :

- **Etats du système :**

- **CMTC associée**

- **Matrice de transition :**

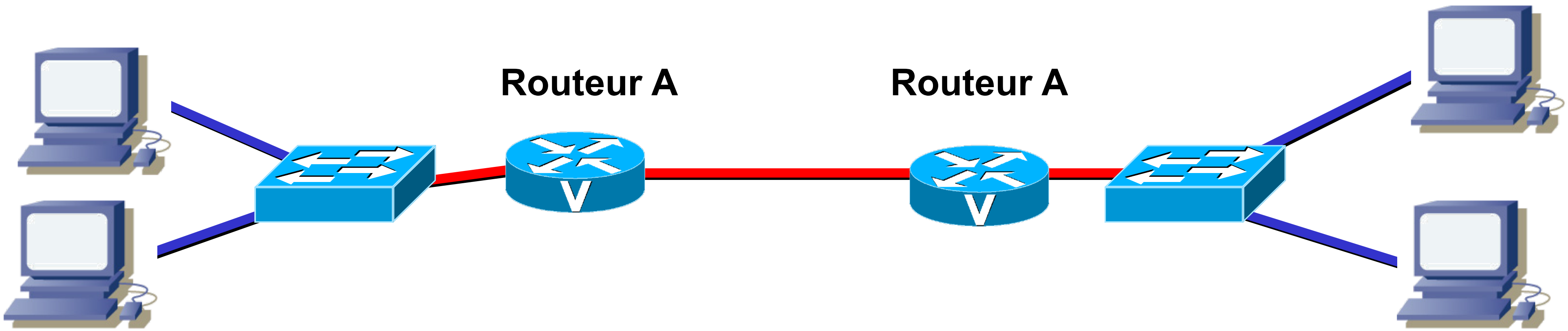
- **Régime permanent (équations d'équilibre) :**

- **Comparaison des 2 systèmes :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.1$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Deux routeurs A sont mis en *série* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux (grande distance par exemple).
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent



Chaînes de Markov à temps continu

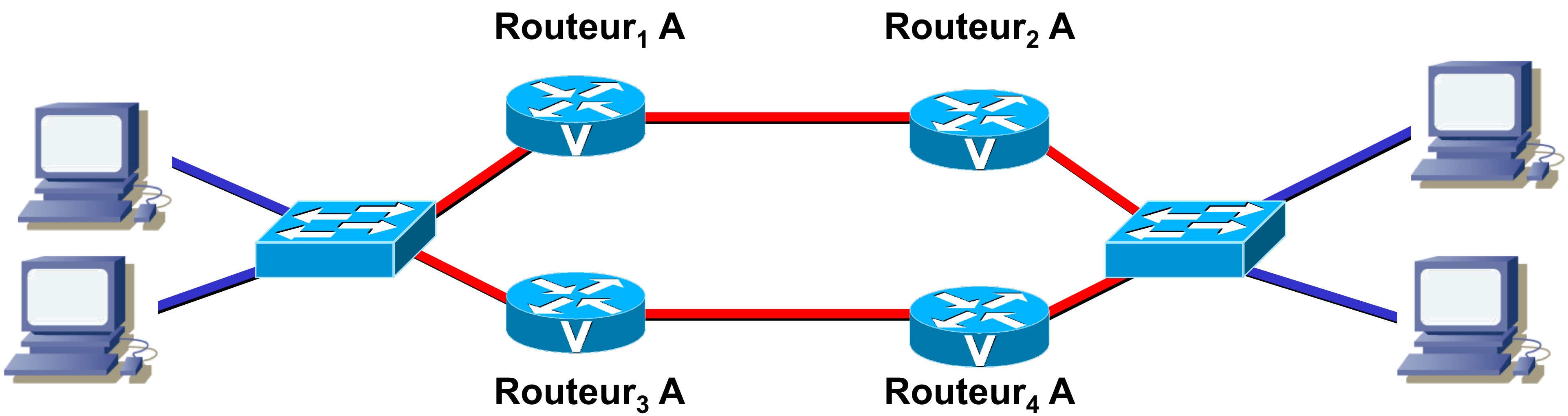
Exercice 4 (solution) :

- **Etats du système :**
- **CMTC associée**
- **Matrice de transition :**
- **Régime permanent (équations d'équilibre) :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.1$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Les routeurs A sont mis en *parallèle* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux (grande distance par exemple).
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent
- Question 4 : comparer les 2 architectures



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- **Etats du système :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- **CMTC associée :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- **Utilisation de CARMS pour tracer la CMTC :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- **Utilisation de CARMS pour obtenir le régime permanent :**
  - Simulation sur 10 s