Files d'attente

Plan du cours :

- **Chapitre 1 : Introduction**
- **Chapitre 2 : Rappels mathématiques**
- **Chapitre 3 : Les chaînes de Markov**
- **Chapitre 4 : Files d'attente**
- **Chapitre 5 : Réseau de files d'attente**

Marion Gilson-Bagrel

Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- **Chaînes de Markov à temps continu**

Introduction

Pourquoi ?

- **Une analyse de système par Graphe d'état**
  - une représentation sous forme graphique
  - permet de décrire les états du système ainsi que toutes les relations qui permettent de passer d'un état à un autre
- **Modélisation choisie : Chaînes ou Graphes de Markov**
  - = un réseau décrivant les états possibles d'un système et les lois de passage d'un état à un autre
- **Un graphe de Markov permet de modéliser des processus markoviens.**
  - Cad des processus stochastiques dans lesquels l'état du système ne dépend que de l'état précédent et non de son passé
  - L'état du système ne dépend donc pas de comment le système à atteint son état précédent, ni de combien de temps il y est resté.
  - C'est un processus sans mémoire

Plan

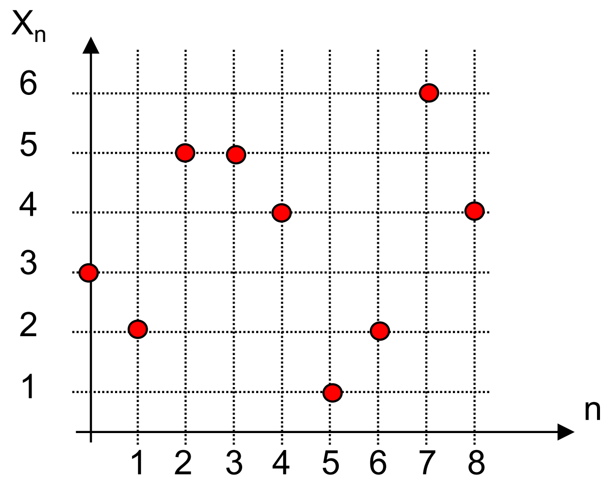
Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
  - **Définitions**
  - **Modélisation**
  - **Analyse**
  - **Comportement limite**
  - **Exercice**
- **Chaînes de Markov à temps continu**

Chaînes de Markov à temps discret

Définitions :

- **Rappel : processus stochastique $\{X_n\}_{n\in N}$ à espace d'état discret et à temps discret.**
  - Chaîne à temps discret (E = espace d'état dénombrable car discret)



- **Chaîne de Markov à temps discret (CMTD) :**
  - $\{X_n\}_{n\in N}$ est une chaîne de Markov à temps discret ssi

    → $P[X_n=j \mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_0=i_0] = P[X_{n=j} \mid X_{n-1}=i_{n-1}]$

  - Interprétation : proba pour que la chaîne soit dans un certain état à la $n^{ième}$ étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape précédente

    → Étapes antérieures : aucun rôle

Chaînes de Markov à temps discret

Définitions (suite) :

- **CMTD homogènes**
  - Les probabilités ne dépendent pas de n
    - ➔ Déduction : définition d'une probabilité de transition d'un état i vers un état j $\Rightarrow p_{ij}$
      - ✓ $p_{ij}=P[X_n=j \mid X_{n-1}=i] \; \forall\, n \in N$
      - ✓ $p_{ij} \geq 0$ (possibilité de rester dans un certain état i entre 2 étapes)
      - ✓ $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$
  - Matrice de transition
    - ➔ Matrice carré d'ordre fini ou infini (suivant E) : $P = [p_{ij}]_{i,j \in E}$
    - ➔ $$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{i1} & \cdots & \cdots & p_{ij} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

rebouclage

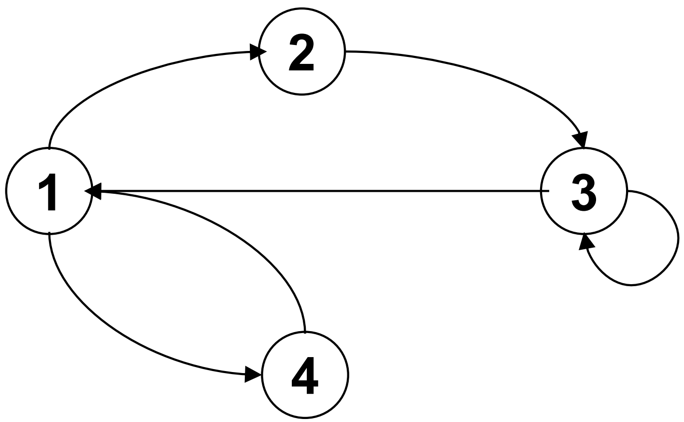
transition

- **Suite du cours : CMTD homogènes**

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple :

- **CMTD homogènes représentés par un graphe orienté**
  - Association
    - ➔ À chaque état = un noeud
    - ➔ À chaque transition possible entre 2 états = arc orienté pondéré par la proba de transition



E={1,2,3,4}

$p_{23}=p_{41}=1$

$p_{12}+p_{14}=1$

$p_{31}+p_{33}=1$

Version mathématique du graph :

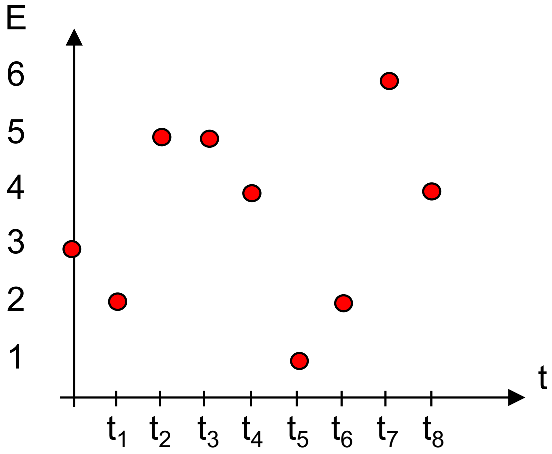
Matrice de transition ?

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\
\hline
2 & 0 & 0 & p_{23} & 0 \\
\hline
3 & p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\
\hline
4 & p_{41} & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Chaînes de Markov à temps discret

Modélisation :

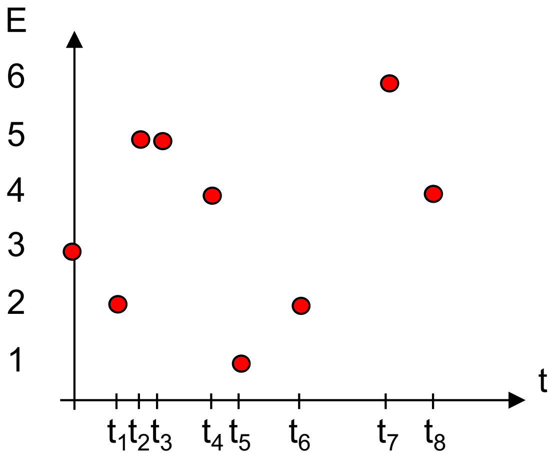
- **CMTD à changements d'états équidistants**



État du système à des intervalles de temps réguliers : tous les jours, toutes les heures …

➔ t_n=nT, où T= unité de temps considéré

- **CMTD à instants de changement d'état quelconque**



État du système juste après un événement :

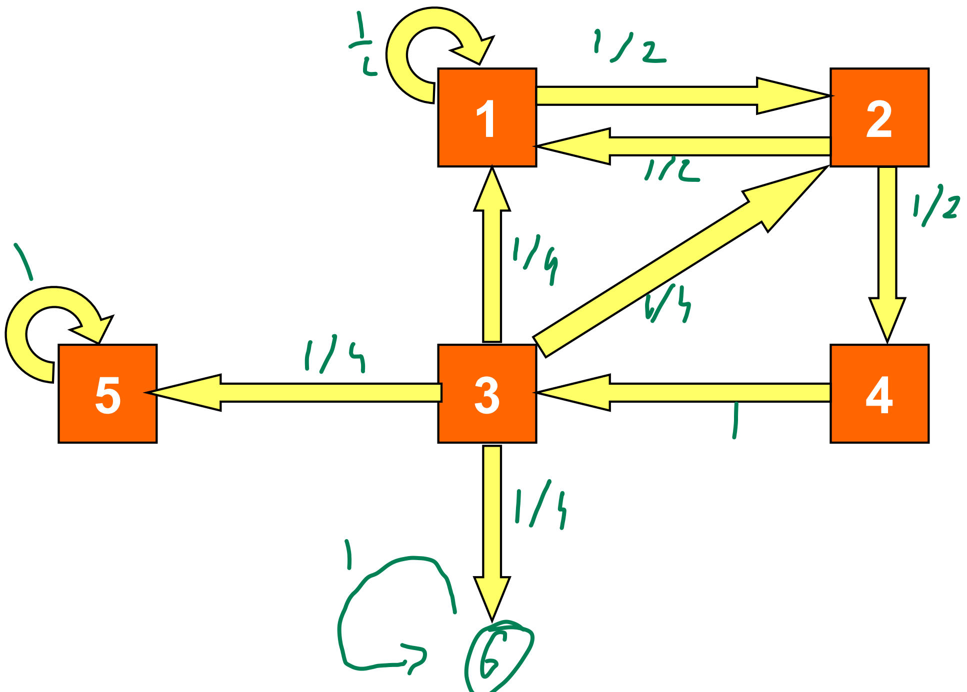
➔ t_n= instant du $n^{ième}$ événement

➔ instants de changements d'états non équidistants

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple 1 :

- **Labyrinthe dans lequel circule une souris**
  - 5 pièces et une sortie
  - Couloir à sens unique, pas de demi-tour
  - Pièce 5 : impossibilité d'en sortir
  - Hypothèses de travail :
    - Non prise en compte du tps passé dans les pièces et dans les couloirs
    - La souris ne garde pas en mémoire les pièces visitées
    - Les choix de couloir équiprobables



Pour réa le graph, il faut ajouter un état de sortie. En effet, il toutes les transitions vont d'un état à un autre <=> il n'y a pas de "trait dans le vide"
De plus, on ne peut pas avoir une ligne de 0 dans la matrice. Nous devons donc reboucler sur l'état de sortie

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple 1 (suite) :

- **Modélisation par une CMTD homogène**
  - États de la chaînes : pièces visitées
  - Transitions : couloirs
  - Probabilités sur transitions : choix aléatoire de couloirs

	1	2	3	4	5	Sortie
Sortie	0	0	0	0	0	1
1	1/2	/2	0	0	0	0
2	1/2	0	0	1/2	0	0
3	1/4	1/4	0	0	1/4	1/4
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0

➔ Questions : matrice de transition ?

Il faut garder le même ordre des états sur lignes et colonnes !!!!
(pas comme moi quoi)
ça nous permet de voir directement les états permanents : les 1 sur la diagonale

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - régime transitoire :

- **= déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$** des probabilités d'états $\pi^j=P[X_n=j]$ pour que le processus $\{X_n\}_{n\in N}$ se trouve dans l'état j à la $n^{ième}$ étape :

  - $\pi^{(n)} = [\pi_j^{(n)}]_{j \in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots]$

  - Ce vecteur de probabilité dépend :

    - ➔ de la matrice de transition P
    - ➔ du vecteur des probabilités d'états initiales $\pi^{(0)}$

- **Déduction**

  - Décrire l'évolution du processus depuis l'état initial ($\pi^{(0)}$) jusqu'à l'étape n ($\pi^{(n)}$) en passant par les étapes intermédiaires

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 1 & \cdots\longrightarrow & j & \cdots\longrightarrow & n \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \pi^{(0)} & & \pi^{(1)} & & \pi^{(j)} & & \pi^{(n)} \end{array}$$

  - Formule de probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i\in E} P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]\, P[X_{n-1} = i]$$

soit $\quad \pi_j^{(n)} = \sum_{i\in E} \pi_i^{(n-1)} p_{ij}$ (proba d'être dans l'état j à n = proba de passage de i à j x proba d'être en i à n-1)

  - Sous forme matricielle : $\boxed{\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P}$

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - régime transitoire :

- **Exemple du labyrinthe**
  - Pour se trouver dans l'état 1 à l'étape n, il fallait se trouver :
    - soit dans l'état 2 et faire une transition 2 → 1
    - soit dans l'état 3 et faire une transition 3 → 1

$$\pi_1^{(n)} = \pi_2^{(n)}\, p_{21} + \pi_3^{(n)}\, p_{31}$$

- **Relation entre l'état à l'étape n et l'état à l'étape initiale**
  - $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$ appliquée n fois → $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$ (ou $\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$)

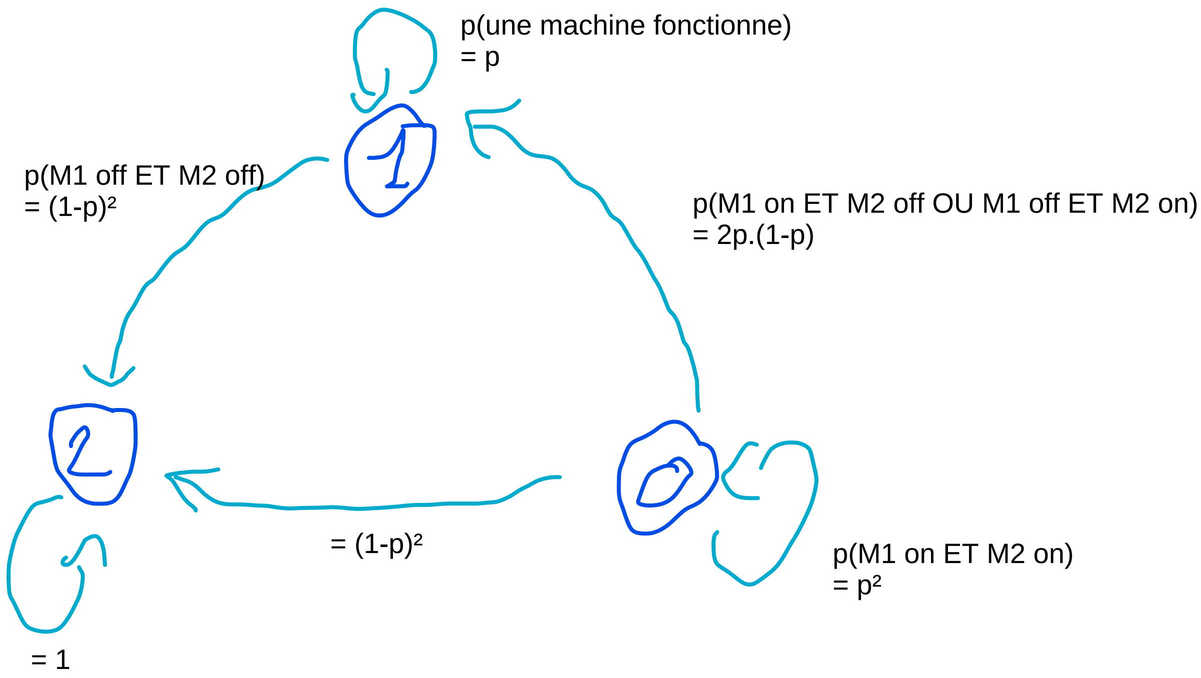
- **Remarque**
  - $p_{ij}^{(n)}$ = élément (i,j) de la matrice P^n
    - D'où : $P^{(n)} = P^n$
  - Un processus de Markov est entièrement défini si on connaît :
    - Sa matrice de transition
    - Sa distribution initiale X_0

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- **2 machines fonctionnent en parallèle et sont indépendantes.**
- **Chaque machine a une fiabilité égale à p au cours d'une journée**
- **Aucune possibilité de réparation**
- **X_n = nombre de machines en panne au début de la $n^{ième}$ journée**

- **Question 1 : représentation graphique ?**



Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- ➢ **Question 2 : matrice de transition ?**

	0	1	2
0	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	0	p	$1-p$
2	0	0	1

Chaînes de Markov à temps discret

Exemple machines :

- Question 3 : distribution du nombre de machine en panne après n jours.

  On suppose que $\pi^{(0)}$=(1,0,0) <=> état initial

$\hookrightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$

ici $n = 10$

AN : $p = 0,9$

$\hookrightarrow P = \begin{vmatrix} 0,9^2 & 0,18 & 0,01 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \pi^{(10)} = [1,0,0] \cdot P^{10}$

(Merci matlab)

$= [0.34, 0.48, 0.17]$

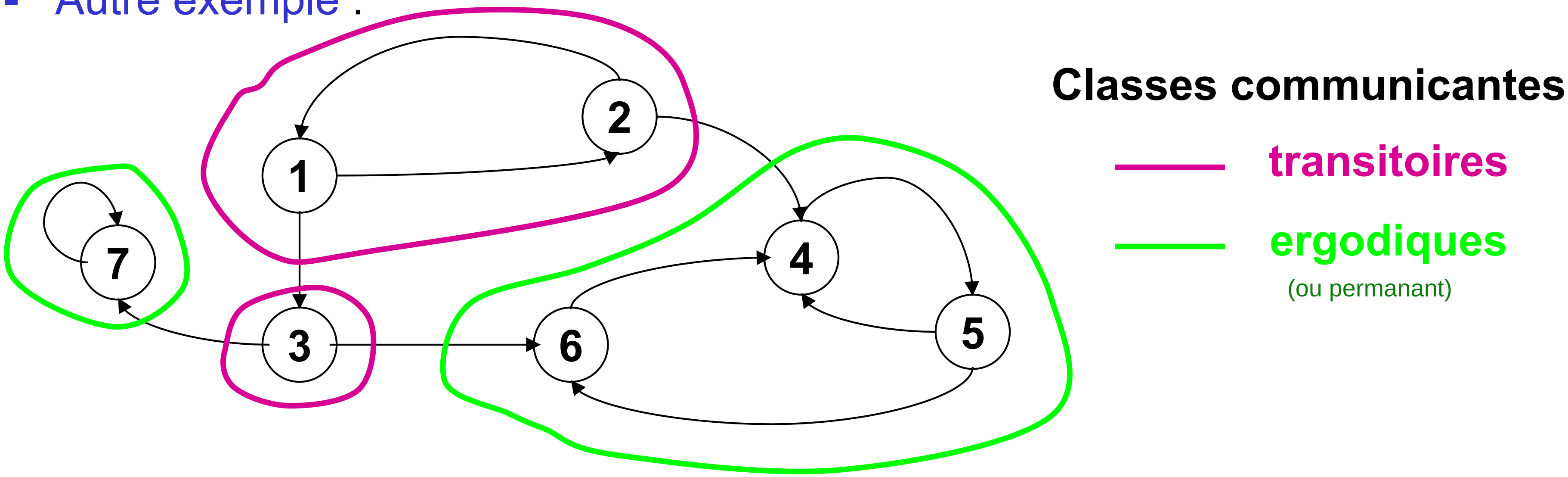
On a donc après 10j, 34% de chances d'avoir nos deux machines qui fonctionnent toujours, 48% qu'une des deux soit tombée en panne, et 17% que les deux soient en panne.

Exemple : p=0.9, n=10 jours

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - classification des états :

- **États communicants :**
  - = s'il existe un chemin pour aller de i à j et de j à i
- **Exemples :**
  - Exemple des machines : 3 classes communicantes
  - Autre exemple :



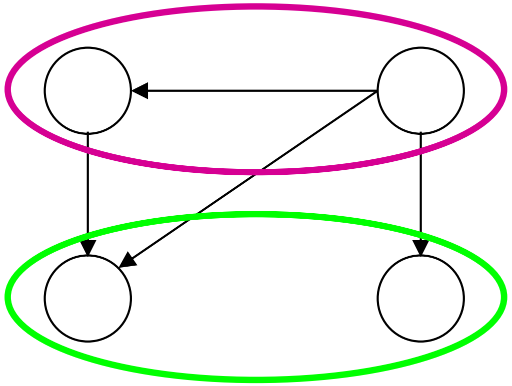
Transitoires : possibilité de sortir de cette classe - impossibilité d'y revenir

Ergodiques : possibilité d'arriver dans cette classe - impossibilité d'en sortir (régime permanent)

Chaînes de Markov à temps discret

Analyse - classification des états :

- **Graphe réduit :**



Classes transitoires : le processus ne peut pas y revenir

Classes ergodiques : le processus ne peut pas en sortir

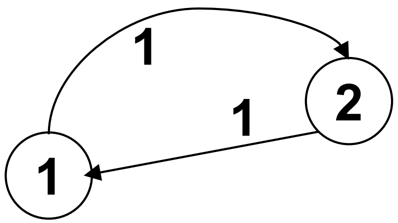
- **Il existe toujours au moins une classe ergodique**

  - Car tous les états communiquent entre eux (chaîne irréductible)

Chaînes de Markov à temps discret

Comportement limite :

- **Définition :** étude de la limite du vecteur de probabilité $\pi^{(n)}$ lorsque $n \to \infty$
  - Cette limite existe-elle ?
  - Si oui, comment la calculer ?
- **Distribution limite :** la limite existe si pas de comportement périodique



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

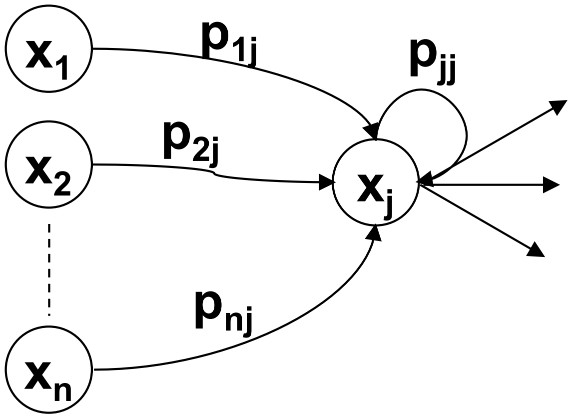
$\Rightarrow$ P^k n'a pas de limite quand $k \to \infty$

- **Propriété :** si la distribution limite existe, elle est stationnaire
- **Théorème :**
  - Il existe une distribution limite indépendante de l'état initial ssi la chaîne a une seule classe ergodique
- **Exemple des machines :**
  - États 0 et 1 : transitoires
  - État 2 : ergodique ⇨ il existe une limite qui est (0 0 1) ⇨ pas tjrs aussi évident

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

- **$1^{ère}$ méthode :**
  - Objectif : résolution de $\pi = \pi P$
    - ➔ Cad recherche du vecteur propre p associé à la valeur propre 1
    - ➔ Méthode : écriture des équations d'équilibre (ou équations de balance)



$$\pi_j = \pi_1 p_{1j} + \pi_2 p_{2j} + \cdots + \pi_j p_{jj} + \cdots + \pi_n p_{nj}$$

$$\underbrace{\pi_j (1 - p_{jj})}_{\textbf{flux entrant}} = \underbrace{\pi_1 p_{1j} + \cdots + \pi_{j-1} p_{j-1,j} + \pi_{j+1} p_{j+1,j} + \cdots + \pi_n p_{nj}}_{\textbf{flux sortant}}$$

  - Résumé :
    - ➔ résolution du système :

diagonale

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{k \in E} \pi_k = 1 \end{cases}$$

les autres

(condition de normalisation)

Chaînes de Markov à temps discret

Recherche de la solution limite :

- **$1^{ère}$ méthode - exemple :**
  - Chaîne de Markov :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

  - Equations d'équilibre (balance) : (par colonne)

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_3$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 4/9 \\ \pi_2 = 1/9 \\ \pi_3 = 4/9 \end{cases}$$

  - En tenant de : $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

Recherche de la solution limite :

➢ 2ième méthode :

- Moins utilisée
- Recherche de la limite de P^k, pour $k \to \infty$:
  - ➔ Soit $\overline{P} = \lim_{k\to\infty} P^k$
  - $$\overline{\pi} = \pi^{(0)}\,\overline{P} = \lim_{k\to\infty} \pi^{(k)}$$
- Méthode :
  - ➔ Calcul de P^2, P^4, P^8 …jusqu'à obtenir une solution limite
    - ✓ $\overline{\pi} = \begin{pmatrix} \overline{\pi}_1 & \overline{\pi}_2 & \overline{\pi}_3 & \cdots & \overline{\pi}_n \end{pmatrix}$
- Remarque : $\overline{\pi}$ indépendant de $\pi^{(0)}$
  - ➔ Toutes les lignes de $\overline{\pi}$ sont identiques

$$\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ x & x & \cdots & x \\ x & x & \cdots & x \end{pmatrix}$$

mais aussi $\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ x & x & \cdots & x \end{pmatrix}$

Chaînes de Markov à temps discret

Délai et probabilité d'absorption :

- **Nécessité : ∃ un état d'absorption**

- **1 seul état d'absorption**
  - n_i = temps moyen d'absorption en partant de i :

$$n_i = 1 + \sum_{k \in E'} p_{ik}\, n_k$$

i = état non absorbant
E' = ensemble de tous les états non absorbants

- **Plusieurs états d'absorption**
  - bij = probabilité d'absorption dans j si l'état initial est i

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in E'} p_{ik}\, b_{kj}$$

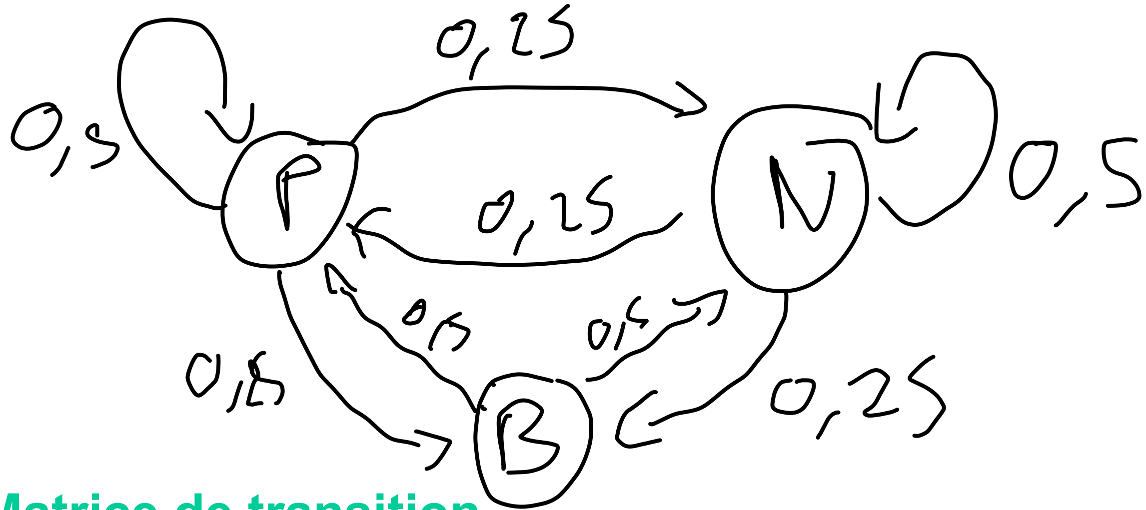
- **Exemple des machines, question 4 = durée de bon fonctionnement ?**
  - Plus de fonctionnement en 2 ⇨ en combien de temps arrive-t-on en 2 ?
  - Seul 2 est absorbant, donc E'=[0,1]

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1 : météo du pays d'Oz

P N

- Pas 2 jours de beau temps consécutifs : pluie ou neige le lendemain
- Si pluie ou neige, le lendemain ⇨ à 50 % = même temps
  ⇨ 25 % pour les autres possibilités
- Question 1 : construire le graphe associé



- Question 2 : Matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- Question 3 : décomposition en classe

1classe ergodite car pas de cas absorbants (de 1 sur la diag)

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1 : météo du pays d'Oz (suite)

- **Question 4 : comportement limite**

  existence d'une limite car 1 classe ergo donc pas de periodicité

- **Question 5 : calcul de la solution limite**

  - $1^{\text{ère}}$ méthode : équations d'équilibre (résolution de $\pi=\pi P$)

1

$\pi_1 = 0,25\,\pi_2 + 0,25\,\pi_3$

$\pi_2 = 0,5\,\pi_1 + 0,5\,\pi_2 + 0,25\,\pi_3$

$\pi_3 = 0,5\,\pi_1 + 0,25\,\pi_2 + 0,5\,\pi_3$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

2

$0 = 0,25\,\pi_2 + 0,25\,\pi_3 - \pi_1$

$0 = \pi_1 + 0,5\,\pi_3 - \pi_2$

$0 = \pi_1 + 0,5\,\pi_2 - \pi_3$

3

$\pi_2 = \pi_3$

$\pi_1 = 0,5\,\pi_2$

$\pi_1 + 2\pi_2 = 1$

4

$$\boxed{\begin{array}{l}\pi_1 = 0,2\\ \pi_2 = 0,4\\ \pi_3 = 0,4\end{array}}$$

  - $2^{\text{ème}}$ méthode limite de P^k

$\pi_{1:m} = (0,2 \quad 0,4 \quad 0,4)$

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur

- Dans une école d'ingénieur dont le cycle de fin d'étude comporte 3 années, on constate qu'un étudiant en fin d'année à la probabilité :
  - p de passer en année supérieure ou d'obtenir son diplôme (en fin de 3ème année du cycle)
  - q de redoubler (avec $p+q+r = 1$)
  - r d'être renvoyé

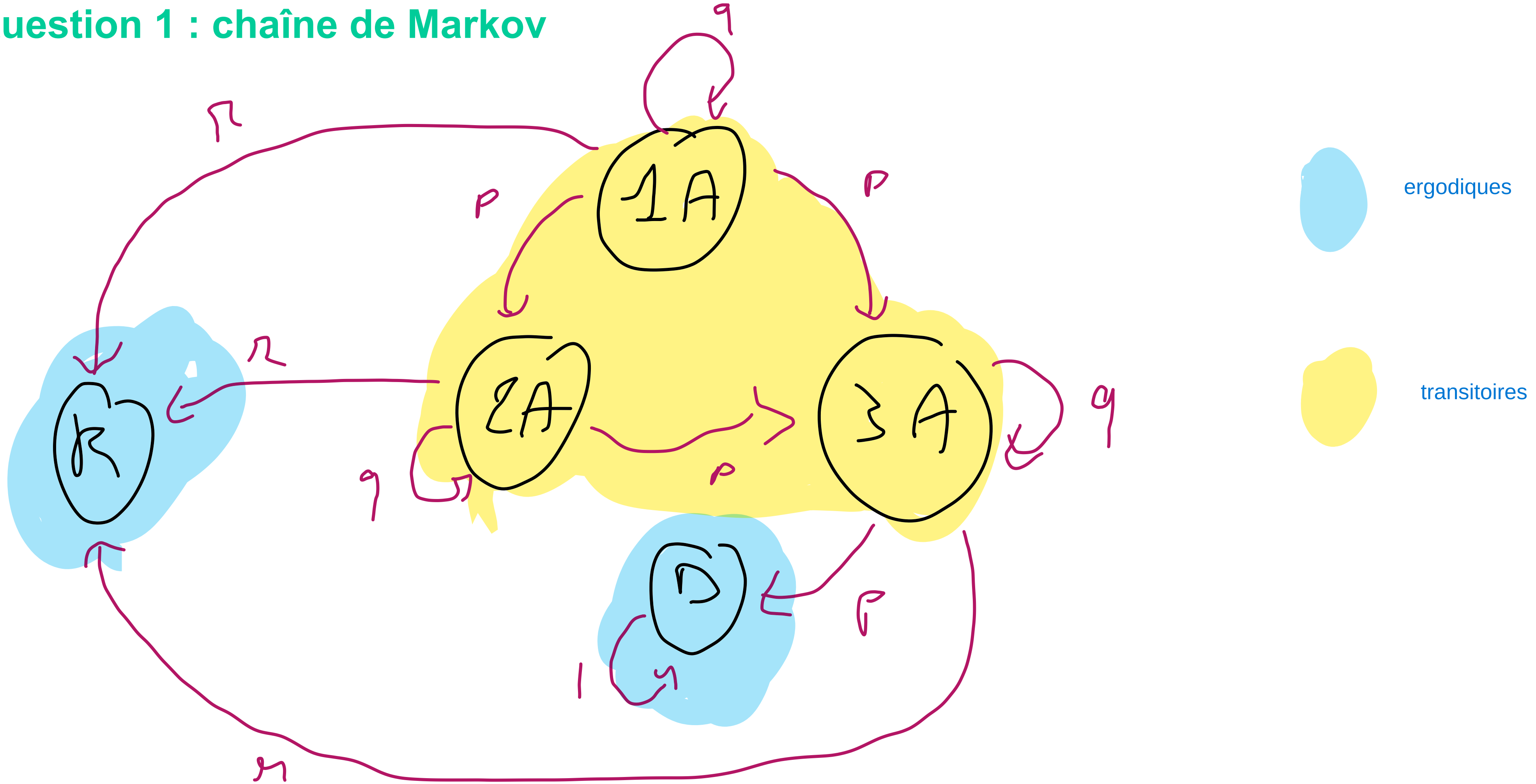
- Question 1 : représenter le déroulement de ce cycle par une chaîne de Markov

- Question 2 : quelles sont les probabilités d'être reçu ou renvoyé ?

- Question 3 : Que devient cette chaîne si, au plus, un redoublement est autorisé dans la scolarité ?

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (1)

- **Question 1 : chaîne de Markov**



Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (2)

- Question 2 : probabilités d'être reçu ou renvoyé

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & R & D \\
\hline
1 & q & p & 0 & r & 0 \\
2 & 0 & q & p & r & 0 \\
3 & 0 & 0 & q & r & p \\
R & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
D & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (3)

➢ Question 2 (suite) : probabilités d'être reçu ou renvoyé

$b_{14} = p_{14}+p_{11}b_{14} + p_{12}b_{24}+p_{13}b_{34}$
$b_{24} = p_{24} + p_{21}b_{14} + p_{22}b_{24} + p_{23}b_{34}$
$b_{34} = p_{34} + p_{31}b_{14} + p_{32}b_{24} + p_{33}b_{23}$

$b_{34} = r/(1-q)$
$b_{24} = (r(1-q)+rp)/(1-q)^2$
$b_{14} = (r(1-q)^2+rp(1-q)+rp)/(1-q)^3$

$b_{15} = p_{15} + p_{11}b_{15} + p_{12}b_{25} + p_{13}b_{35}$
$b_{25} = p_{25} + p_{21}b_{15} + p_{22}b_{25} + p_{23}b_{35}$
$b_{35} = p_{35} + p_{31}b_{15} + p_{32}b_{35} + p_{33}b_{35}$

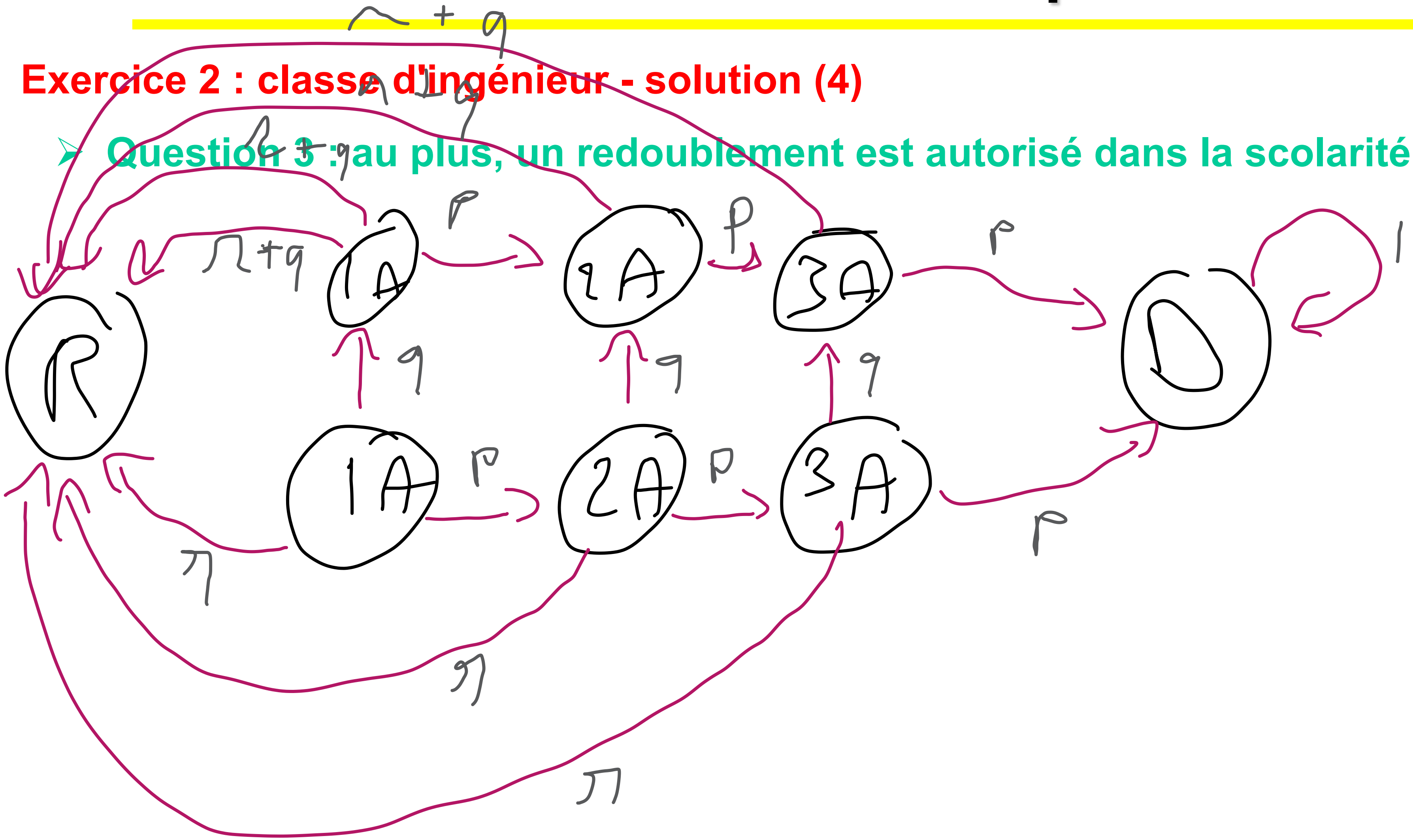
$b_{35} = p/(1-q)$
$b_{25} = p^2/(1-q)^2$
$b_{15} = p^3 / (1-q)^3$

b14 est la proba d'être renvoyé en entrant en 1A
b24 est la proba d'être renvoyé en entrant en 2A
b34 est la proba d'être renvoyé en entrant en 3A
b15 est la proba d'être diplômé en entrant en 1A
b25 est la proba d'être diplômé en entrant en 2A
b35 est la proba d'être diplômé en entrant en 3A

Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 2 : classe d'ingénieur - solution (4)

➢ Question 3 : au plus, un redoublement est autorisé dans la scolarité



Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- **Chaînes de Markov à temps continu**
  - **Définitions**
  - **Modélisation**
  - **Analyse**
  - **Comportement limite**
  - **Exercice**

Chaînes de Markov à temps continu

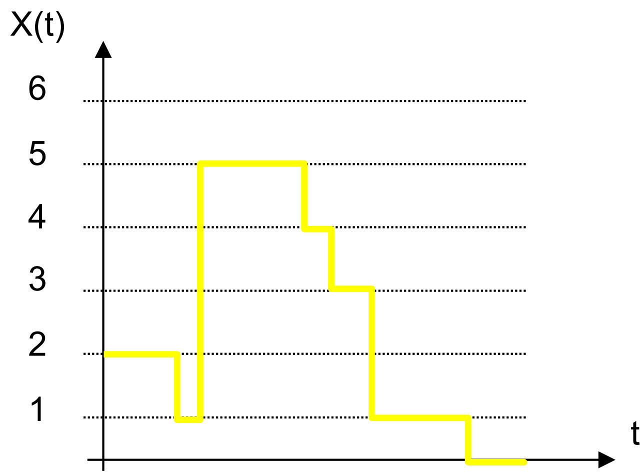
Introduction = pourquoi une CMTC ?

- **Utilisation d'une CMTD :**
  - Étude de phénomènes aléatoires pour lesquels les chgts d'état se produisent à des instants fixés par avance
  - Pas de problème pour certains processus :
    - ➔ processus techniques décomposés en étapes bien définies (déroulement dans l'étape sans intérêt)
    - ➔ problèmes économiques ou sociologiques (observations à intervalles réguliers), ex. : sondage tous les mois, puis chaque semaine (élection)
  - Problèmes pour certains systèmes :
    - ➔ Ex. : fiabilité d'un système technique ⇨ nécessite une intervention sans retard en cas de défaillance
      - ✓ Maths : modèle stochastique connu à chaque instant ⇨ processus continu
      - ✓ Ex. : central téléphonique - lois de proba discrètes pas assez précise pour caractériser les durées de communication ou instants d'arrivées des appels
- **CMTC fondée sur le processus de Poisson**
  - Réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné, par ex. :
    - ➔ Arrivée de clients vers un guichet
    - ➔ Occurrence d'accidents dans une entreprise
    - ➔ Apparition de pannes dans un parc de machines
    - ➔ Arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur

Chaînes de Markov à temps continu

Définitions :

- **Rappel : processus stochastique $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ à espace d'état discret et à temps continu.**
  - Chaîne à temps continu (E = espace d'état dénombrable car discret)



- **Chaîne de Markov à temps continu (CMTC) :**
  - $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu ssi

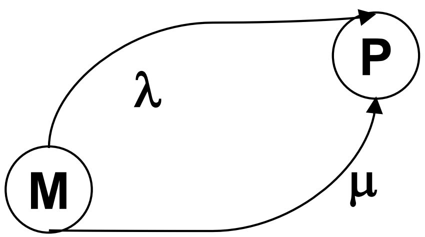
    ➔ $P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}, X(t_{n-2})=i_{n-2}, \ldots, X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}]$

- **CMTC homogènes :**
  - Les probas $P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}]$ ne dépendent pas des instants d'observation t_n et t_{n-1} mais uniquement de la durée (t_n-t_{n-1}) qui sépare 2 observations
  - Nous n'étudierons que des CMTC homogènes

Chaînes de Markov à temps continu

Caractérisation d'une CMTC :

- **L'évolution d'une CMTC peut se voir sous 2 façons :**
  - On reste un certain temps (distribué suivant une loi exponentielle) dans un état
  - En quittant un état, on choisit l'état de destination qui ne dépend :
    - ➔ Ni du temps passé dans l'état
    - ➔ Ni du chemin parcouru précédemment
- **Définition**
  - Probabilité de passage de l'état i à l'état j entre t et t+dt :
    - ➔ **Proba = λ_{ij}dt**
    - ➔ λ_{ij} = taux de transition pour $i \neq j$
  - Le choix de la destination = caractérisé par des probas (ou taux) de transition
  - Pas de mémoire
- **Exemple :** machine à 2 états : marche ou panne
  - Taux de panne : λ
  - Taux de réparation : μ



Le taux de transition remplace la probabilité

Chaînes de Markov à temps continu

Temps de séjour dans un état :

- **Notations :**
  - λ = somme des taux de sortie (d'un état)
  - τ = temps de séjour dans un état
  - $G(t) = e^{-\lambda t}$: probabilité d'être encore dans l'état à l'instant t
- **Valeur moyenne de τ :**
  - Par définition :

$$\rightarrow \quad \overline{\tau} = \int_0^\infty t\, G(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\tau} = \frac{1}{\lambda}}$$

Matrice de transition :

- **Principe :**

$$P[X(t+dt) = x_j \mid X(t) = x_i] = \lambda_{ij}\, dt$$

$$\underbrace{P[X(t+dt) = x_j]}_{\text{Soit système dans l'état} \Rightarrow \text{il y reste, Soit pas dans l'état} \Rightarrow \text{il y va}} = \underbrace{\sum_{i \neq j} P[X(t) = x_i]\, \lambda_{ij}\, dt}_{\text{Proba d'arrivée dans l'état}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} P[X(t) = x_j] \left(1 - \sum_{k \neq j} \lambda_{jk}\, dt\right)}_{\text{Proba de rester dans l'état}}$$

Soit système dans l'état
⇨ il y reste
Soit pas dans l'état
⇨ il y va

Proba d'arrivée dans l'état

Proba de rester dans l'état

Chaînes de Markov à temps continu

Matrice de transition (suite) :

- **A une CMTD :**
  - Association d'une matrice des probas de transition P, p_{ij} = proba de passage de i à j
- **A une CMTC :**
  - Association d'une matrice P (générateur infinitésimal),
    - ➔ p_{ij} = taux de transition λ_{ij} de i vers j
    - ➔ Éléments :
      - ✓ Non diagonaux : $p_{ij}=\lambda_{ij}, \forall\ i \neq j$
      - ✓ Diagonaux : $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} \mu_{ij} = -\sum_{j \neq i} \mu_i \, p_{ij} = -\mu_i \sum_{j \neq i} p_{ij} = -\mu_i$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{j\neq 1} \lambda_{1j} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1j} & \\ \lambda_{21} & -\sum_{j\neq 2} \lambda_{2j} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \lambda_{i1} & & & \lambda_{ij} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

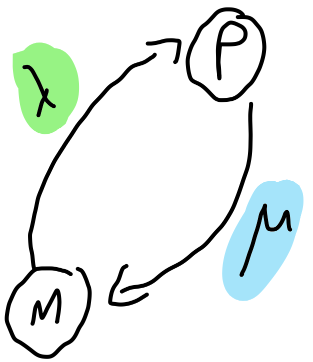
$$\boxed{\sum p_{ij} = 0}$$

État absorbant = ligne de 0

Chaînes de Markov à temps continu

Matrice de transition (suite) :

- **Exemple : machine à 2 états**
  - Matrice de transition :



$$P = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

complément à 0

- **Définition :**
  - P est solution de :

    ➔ $\dot{\pi} = \pi P$

  - Solution :

    ➔ $\pi(t) = \pi(0)\, e^{Pt}$

    ➔ Transformée de Laplace : $\pi(s) = \pi(0)\,(sI - P)^{-1}$

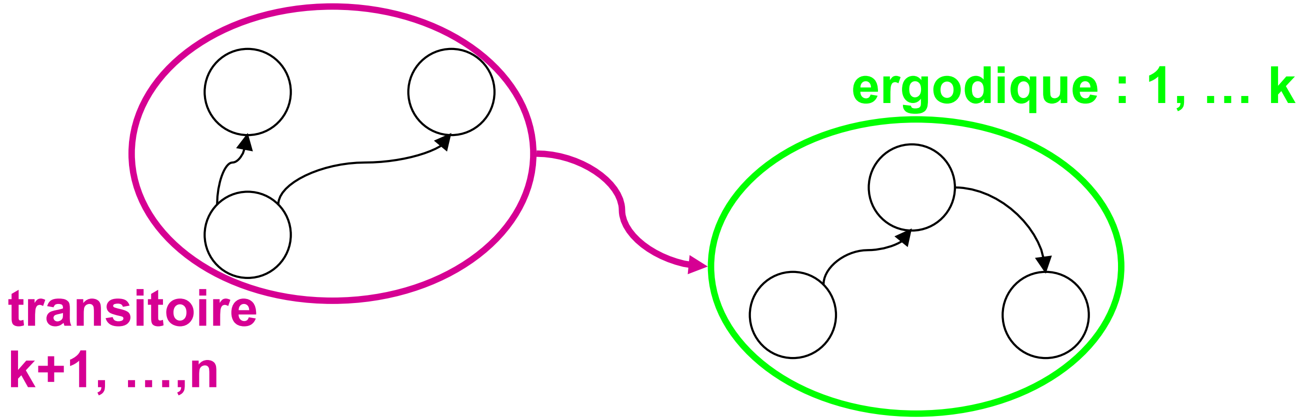
Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - classification des états :

- **2 classes possibles**
  - Transitoire (le processus ne peut pas y revenir)
  - Ergodique (le processus ne peut pas en sortir)
    - ➔ Pas de périodicité en continu

- **Décomposition de la matrice de transition :**

$$P = \begin{pmatrix} S & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1,1 & 1,k & 1,k+1 & 1,n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1,1 \\ \\ k,1 \\ k+1,1 \\ \\ n,1 \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} S & 0 \\ \hdashline R & Q \end{array}\right) \end{array}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement transitoire :

- **définition**

  - Étude du temps de séjour dans les états transitoires avant disparition dans une classe ergodique

  - On a vu que : $\pi(s) = \pi(0)\,(sI - P)^{-1}$

    ➔ p_{ij} (s) = élément (i,j) de $(sI\text{-}P)^{-1}$

    ➔ Si x_i et xj = états transitoires ⇨ p_{ij} (s) = élément (i,j) de $(sI\text{-}Q)^{-1}$

  - Utilisation de la transformée de Laplace :

$$\int_0^t p_{ij}(u)\,du \quad \xrightarrow{\text{T.L.}} \quad \frac{1}{s}\,p_{ij}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t p_{ij}(u)\,du = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\,p_{ij}(s)$$

(théorème de la valeur finale)

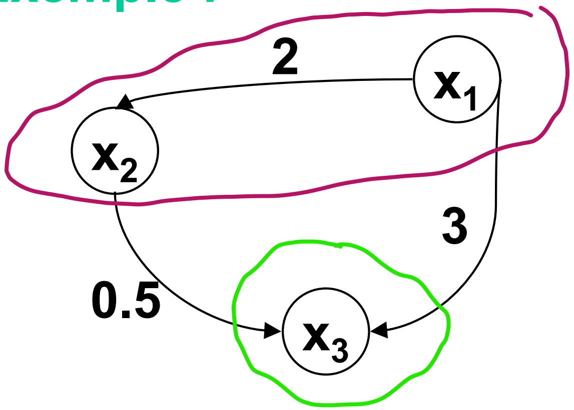
$$\bar{\tau} = \int_0^\infty p_{ij}(u)\,du = \lim_{s\to 0} p_{ij}(s) = -Q^{-1}$$

Élément correspondant à x_i, x_j dans - Q^{-1}

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement transitoire :

➢ Exemple :



transitoire

ergodique

- Matrice de transition ?

→ mat. transitoire Q

complement à 0

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -5 & 2 \\ 0 & -0{,}5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 0{,}5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

← que des 0, cā prevu !

- Temps moyen de séjour dans le transitoire ?

$$\tau = -Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0.2 tps moy passé dans 1 venant de 1
0.8 tps moy passé dans 2 venant de 1
0 tps moy passé dans 2 venant de 1
2 tps moy passé dans 2 venant de 2

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- **Définition :**
  - Il existe un comportement limite (cad une distribution de probabilité limite) quand t → ∞, indépendante de $\pi(0)$, ssi il existe une seule classe ergodique
- **Calcul :**
  - 1ère méthode : équations d'équilibre

    → Résolution de : $\begin{cases} \overline{\pi}\, P = 0 \\ \sum \overline{\pi}_i = 0 \end{cases}$ avec $\overline{\pi} = \lim\limits_{t \to \infty} \pi(t)$

    → Équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \sum\limits_j \pi_j \lambda_{ij} = 0 \\ \lambda_{ii} \overline{\pi}_i = \sum\limits_{j \neq i} \lambda_{ji} \overline{\pi}_j \end{cases}$$

  - 2ème méthode : théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} \pi(t) = \lim_{s \to 0} s\, \pi(s)$$

Chaînes de Markov à temps continu

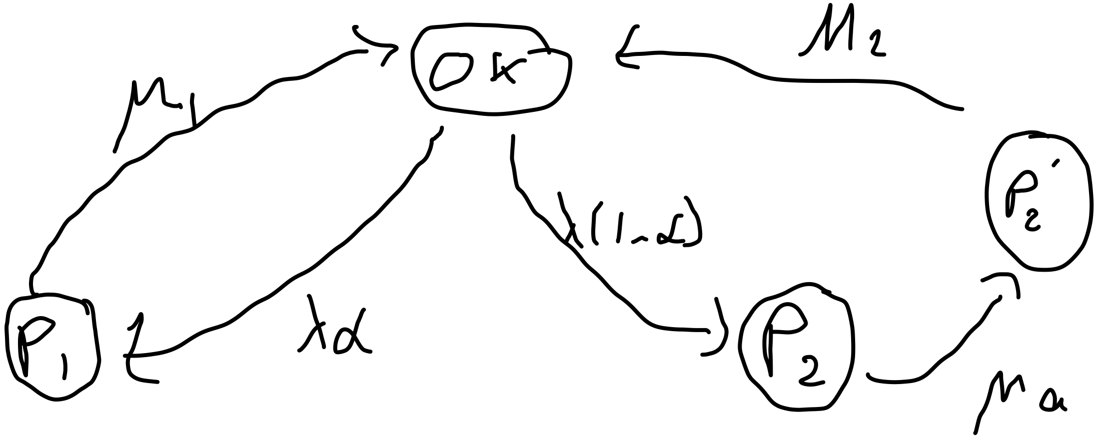
Analyse - comportement limite :

- Exemple : une machine peut subir plusieurs types de panne
  - P_1 : taux de ~~réparation immédiate~~ panne = $\lambda\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$

    taux de réparation = μ_1
  - P_2 : taux de ~~réparation extérieure~~ panne = $\lambda(1-\alpha)$

    durée d'attente exponentielle : taux d'attente = μ_a
  - P_2 (suite) : si réparateur présent : taux d'attente = μ_2

- Question 1 : tracer la chaîne de Markov correspondante



Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- Exemple (suite)
- Question 2 : matrice de transition

$$P = \begin{array}{c|cccc} & Ok & P_1 & P_2 & P_2' \\ Ok & -\lambda & \lambda\alpha & \lambda(1-\alpha) & 0 \\ P_1 & \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & -\mu_a & \mu_a \\ P_2' & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{array}$$

- Question 3 : état permanent ? (on choisira : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$)

1seule classe : ergodique, donc existence d'un comportement limite
calcul par equations d'equilibre :

$$\bar{\pi} P = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\pi_1 + 10\lambda\pi_2 + 10\lambda\pi_4 = 0 \\ \lambda\alpha\pi_1 - 10\lambda\pi_2 = 0 \\ \lambda(1-\alpha)\pi_1 - 10\lambda\pi_3 = 0 \\ 10\lambda\pi_3 - 10\lambda\pi_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2 = \dfrac{\lambda\alpha\pi_1}{10\lambda} = \dfrac{\alpha}{\lambda} \cdot \dfrac{10\pi_4}{1-\alpha} \\ \pi_1 = \dfrac{10\lambda\pi_3}{\lambda(1-\alpha)} = \dfrac{10\pi_4}{1-\alpha} \\ \pi_3 = \pi_4 \\ 0 = -\lambda \cdot \dfrac{10\pi_4}{1-\alpha} + 10\alpha \cdot \dfrac{10\pi_4}{1-\alpha} + 10\lambda\pi_4 \end{cases}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

$+ \quad =$

. . .

Bref,

$\hookrightarrow \pi_4 = \pi_3 = \dfrac{1-\alpha}{12-\alpha}$; $\pi_2 = \dfrac{\alpha}{12-\alpha}$; $\pi_1 = \dfrac{10}{12-\alpha}$

Chaînes de Markov à temps continu

Analyse - comportement limite :

- **Exemple (suite)**

- **Question 3 : état permanent ? (on choisira : $\mu_1=\mu_2=\mu_a=10\lambda$)**

théoreme de la valeur finale :

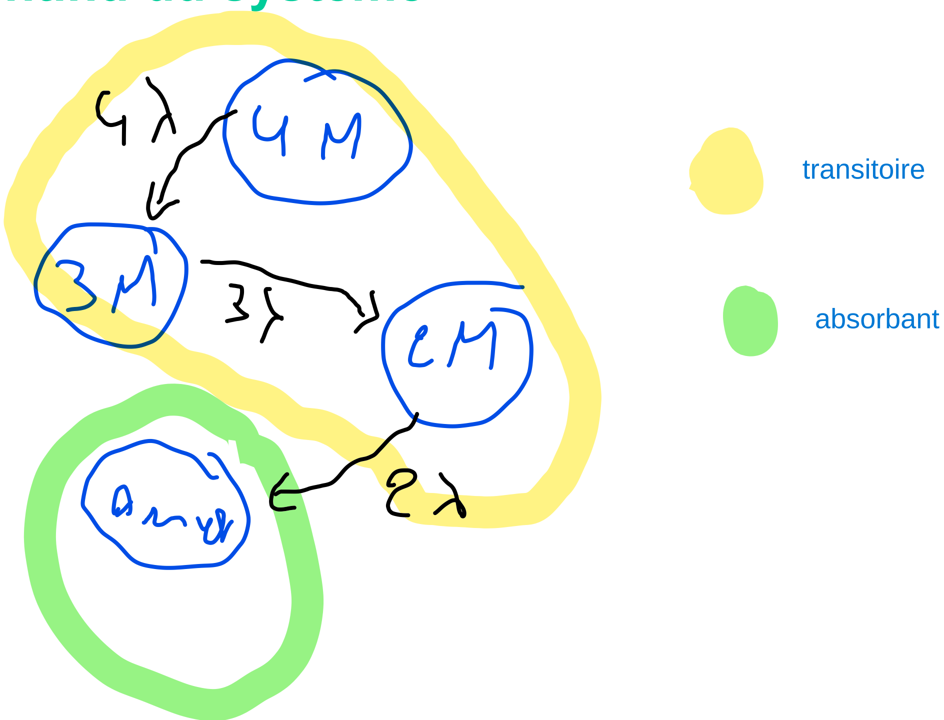
lim(pi(t)) = lim(s.pi(s))
t->inf   s->0

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- Chaque moteur (identique) d'un quadrimoteur a un taux de panne égal) λ. L'avion peut continuer à voler si au moins 2 moteurs fonctionnent.
- Calculer la durée de vie du système.

- Chaîne de Markov à temps continu du système



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- **Matrice de transition**

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4M & 3M & 2M & A \\
\hline
4M & -4\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\
3M & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 \\
2M & 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda \\
A & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad Q
$$

- **Temps absorption ou temps moyen de séjour dans le transitoire**

$$\hat{\tau} = -Q^{-1}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{24\lambda^2}\begin{pmatrix} 6\lambda^2 & 8\lambda^2 & 12\lambda^2 \\ 0 & 8\lambda^2 & -12\lambda^2 \\ 0 & 0 & 12\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \quad -Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/12\lambda \\ 5/6\lambda \\ 1/2\lambda \end{pmatrix}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice :

- **Un système client/serveur reçoit en moyenne 1000 requêtes/s arrivant suivant un processus de Poisson. À titre expérimental, on envisage un système sans file d'attente mais comportant plusieurs serveurs de front. Lorsque tous les serveurs sont occupés, les requêtes sont rejetées.**
  - **1. Quel est le pourcentage de clients rejetés pour un système comportant 1 serveur traitant 4000 requêtes par seconde ?**
  - **2. Même question pour un système comportant 2 serveurs traitant chacun 2000 requêtes par seconde ?**
  - **3. Même question pour un système comportant 4 serveurs traitant chacun 1000 requêtes par seconde ?**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 :

- Un dispositif réseau comprend un routeur R et un routeur de secours R'. Les taux de panne et de réparation sont respectivement :
  - λ et μ pour le routeur R
  - λ' et μ' pour le routeur R'
- Hypothèses : un routeur ne peut tomber en panne que s'il est effectivement utilisé et un seul routeur à la fois est utilisé.
- Le routeur R est prioritaire, s'il est en bon fonctionnement, il est utilisé
- Si les deux routeur sont en panne, l'unique réparateur se consacre à R, même s'il avait commencé à réparer R'.

- Question 1 : tracer le graphe de Markov à temps continu
- Question 2 : quel est le temps de bon fonctionnement moyen du dispositif ?
- Question 3 : calculer la disponibilité avec $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'=10\lambda$.

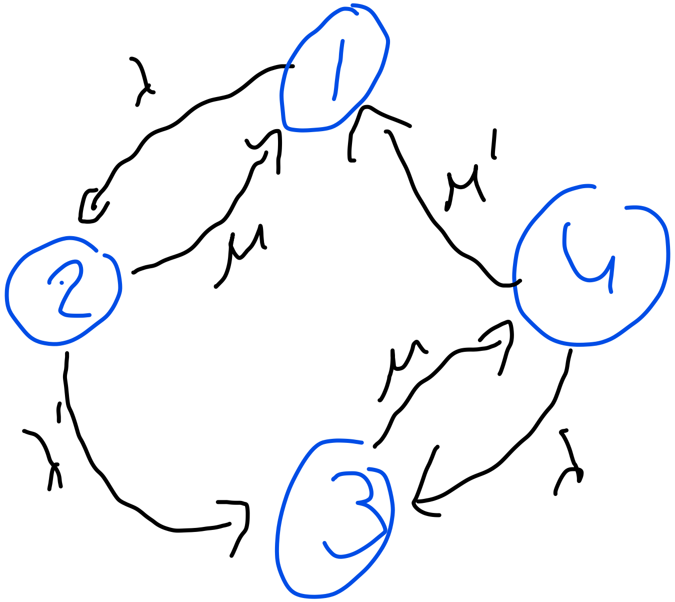
Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

- **Question 1 : états du système**

1 = R et R' ok
2 = pasR, R'
3 = pas R, pas R'
4 = R, pas R'

- **CMTC associée**



- **Question 2 : Temps moyen de bon fonctionnement du dispositif**

  - Matrice de transition :

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\
2 & \mu & -\mu-\lambda' & \lambda' & 0 \\
3 & 0 & 0 & -\mu & \mu \\
4 & \mu' & 0 & \lambda & -\mu'-\lambda
\end{array}
$$

pas d'état absorbants => Q = P

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 2 (solutions) :

- Temps de bon fonctionnement (avec $\lambda=\lambda'$ et $\mu=\mu'=10\lambda$) ; $\lambda=1$ et $\mu=10$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 10 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \det = 0 \Rightarrow$ matrice non inversible

en partant de 1, le syst fonctionne dans les état 1 et 2
en 4 il fonctionne aussi mais passe par un etat de non fonctionnement
donc calcul de tau moyen se fait uniquement avec les état 1 et 2 (matrice 2 2)

Exercice 2 (solutions) :

- Temps de bon fonctionnement (suite) :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1$$

$$-Q^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

- Temps avant mauvais fonctionnement :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda\lambda'} \begin{pmatrix} \mu + \lambda' + \lambda \\ \mu + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

tps pass" dans 1 et 2 avant d'arriver dans 3, venant de 1

tps passé dans 1 et 2 avant d'arriver de 3, venant de 2

Exercice 2 (solutions) :

➢ Question 3 : disponibilité du système

= proba d'être dans l'état 1 ou 2 ou 4

-> eq d'equilibre

$$\begin{cases} -\lambda\pi_1 + 10\lambda\pi_2 + 10\lambda\pi_4 = 0 \\ \lambda\pi_1 - 11\lambda\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_2 - 10\lambda\pi_3 + \lambda\pi_4 = 0 \\ 10\lambda\pi_3 - 11\lambda\pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi_1 = 110\,\pi_4 = 0,9009 \\ \pi_2 = 10\,\pi_4 = 0,082 \\ \pi_3 = \frac{11}{10}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{10}{1221} = 0,0082 \end{cases}$$

+

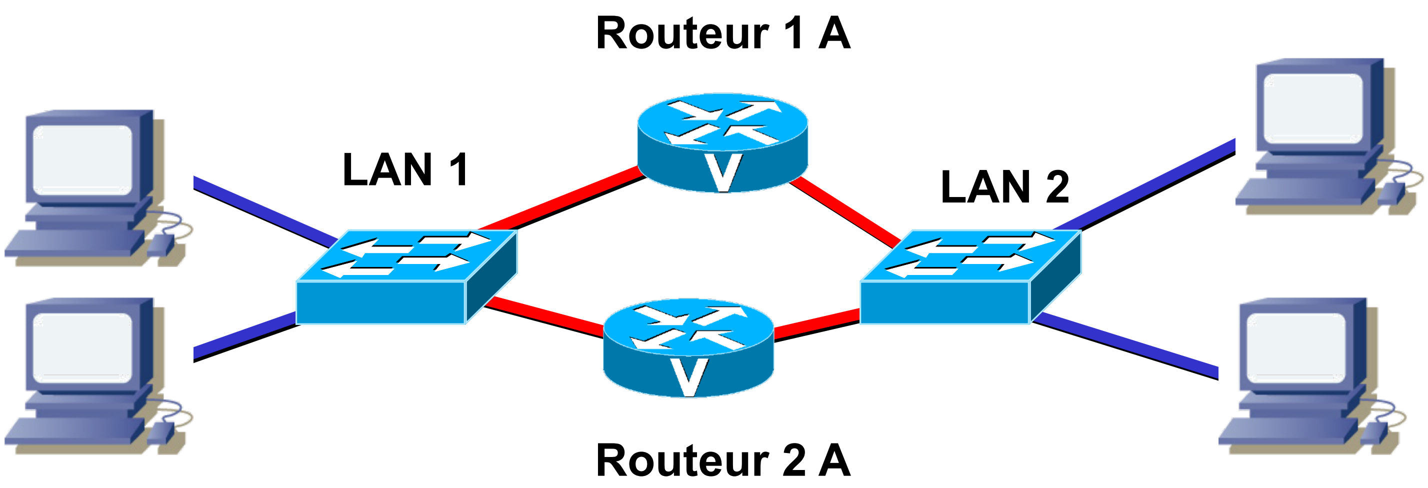
+

$$\boxed{\text{dispo syst} = 0,991}$$

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est λ = 0.2 et le taux de réparation est μ = 0.3.
- Pour limiter les défaillances de transmission, deux routeurs A sont mis en *parallèle* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux.
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent

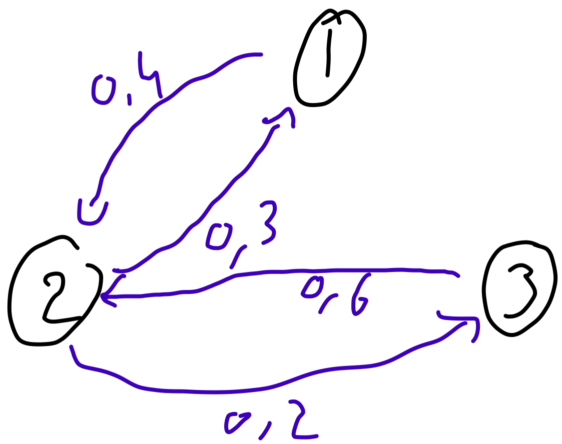


Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 (solutions) :

Etats du système :

1 : 2A : ok
2 : 1A ok
3 : 0A ok



CMTC associée

pas d'état absorbant

Matrice de transition :

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & -0,4 & 0,4 & 0 \\
2 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\
3 & 0 & 0,6 & -0,6
\end{array}
$$

Régime permanent (équations d'équilibre) :

$$
\begin{cases}
-0,4\,\pi_1 + 0,3\,\pi_2 = 0 \\
0,4\,\pi_1 - 0,5\,\pi_2 + 0,6\,\pi_3 = 0 \\
0,2\,\pi_2 - 0,6\,\pi_3 = 0 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\pi_1 = 9/25 \\
\pi_3 = 4/25 \\
\pi_2 = 12/25
\end{cases}
$$

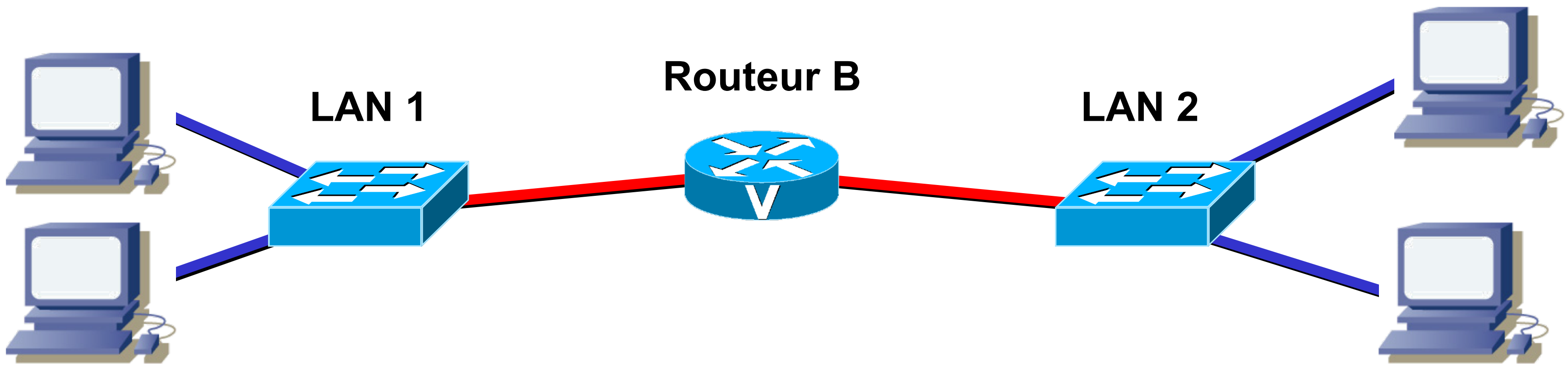
proba fonctionnement

proba non fonctiont

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 - suite :

- On remplace les deux routeurs A par un seul routeur B plus performant dont le taux de panne est $\lambda/2$ et le taux de réparation est toujours μ.
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent
- Question 4 : comparer les 2 architectures



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 3 - suite (solution) :

- **Etats du système :**

- **CMTC associée**

- **Matrice de transition :**

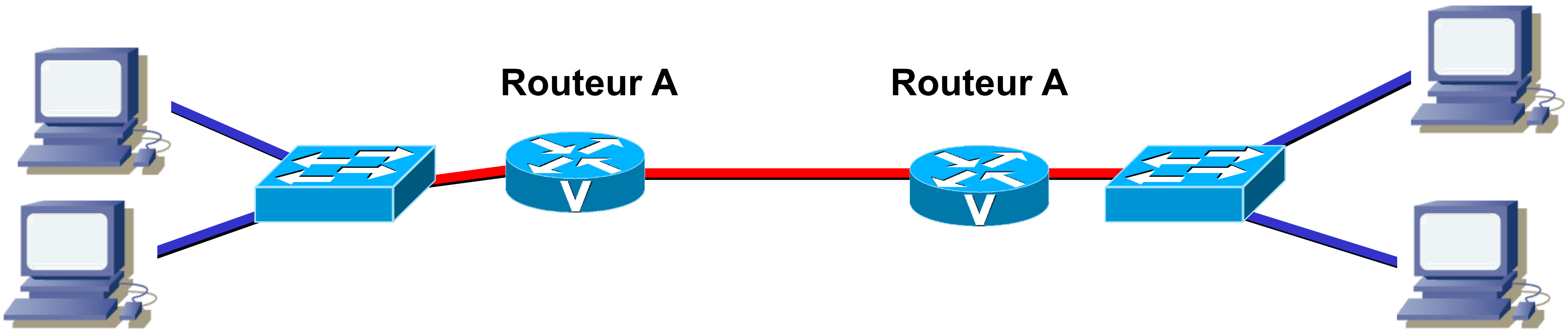
- **Régime permanent (équations d'équilibre) :**

- **Comparaison des 2 systèmes :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est $\lambda = 0.1$ et le taux de réparation est $\mu = 0.3$.
- Deux routeurs A sont mis en *série* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux (grande distance par exemple).
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 (solution) :

- Etats du système :

- CMTC associée

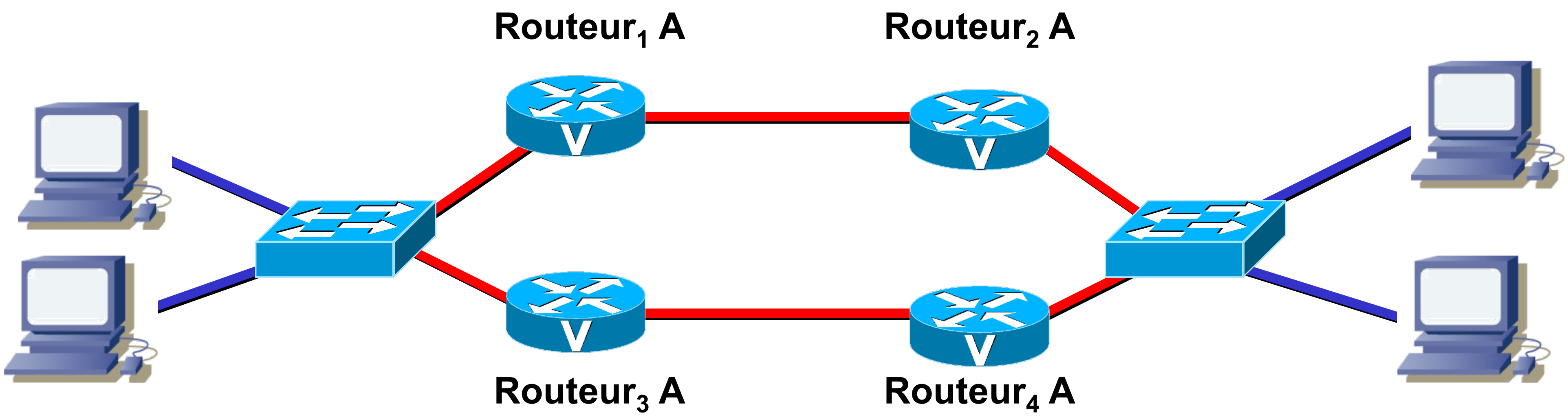
- Matrice de transition :

- Régime permanent (équations d'équilibre) :

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite :

- On considère un routeur A dont le taux de panne est λ = 0.1 et le taux de réparation est μ = 0.3.
- Les routeurs A sont mis en *parallèle* pour réaliser l'interconnexion de deux réseaux locaux (grande distance par exemple).
- Question 1. Définir les états de ce système
- Question 2. Représenter la CMTC associée et donner la matrice de transition.
- Question 3. Calculer les différentes valeurs des probabilités des états du système en régime permanent
- Question 4 : comparer les 2 architectures



Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- Etats du système :

Exercice 4 - suite (solution) :

- **CMTC associée :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- **Utilisation de CARMS pour tracer la CMTC :**

Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 4 - suite (solution) :

- **Utilisation de CARMS pour obtenir le régime permanent :**
  - Simulation sur 10 s