Files d’attente

Plan du cours :

- **Chapitre 1 :** Introduction
- **Chapitre 2 :** Rappels mathématiques
- **Chapitre 3 :** Les chaînes de Markov
- **Chapitre 4 :** Files d'attente
- **Chapitre 5 :** Réseau de files d'attente

Marion Gilson-Bagrel

Plan

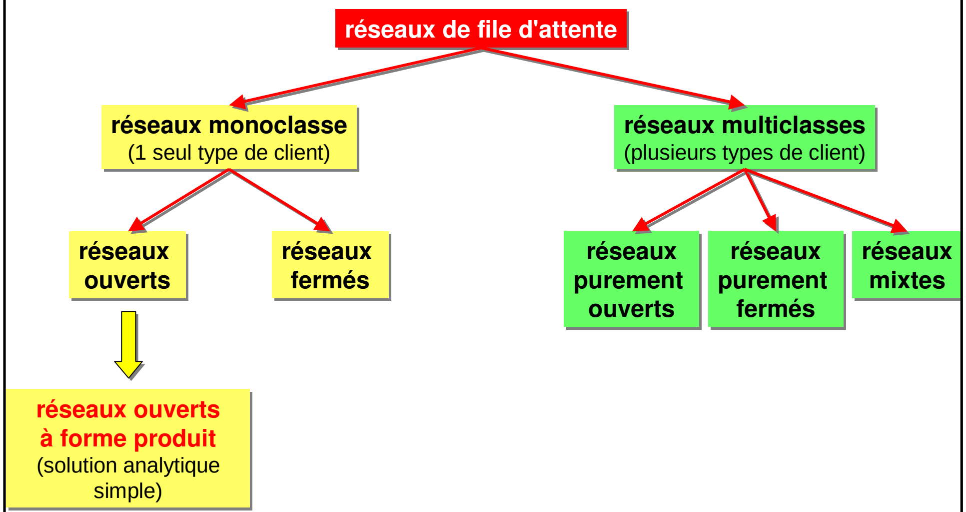
Plan du chapitre 3 :

- Introduction
- Présentation
- Etude d'une file d'attente
- Exercices

Introduction

Définition (rappel)

- **Réseau de file d'attente =** ensemble de files d'attente interconnectées



3

Plan

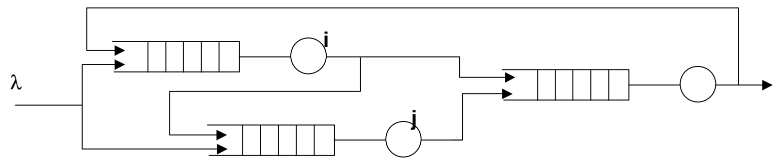
Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Caractéristiques**
  - **Condition de stabilité**
  - **Hypothèse forme produit**
  - **Performances**
- **Exercices**

4

Caractéristiques

Définition :



- λ = taux d'arrivée des clients de l'extérieur
- p_{ij} = proportion des clients qui, quittant la station i, vont à la station j (cheminement)
- **Taux de visite** d'un client à une station i (v_i) = nombre moyen de passages à cette station i au cours du séjour du client dans le réseau

$$v_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} v_j \, p_{ji} \qquad i=1,\ldots M$$

clients venant de l'extérieur — clients venant d'autres stations

- **Taux d'arrivée aux différentes stations :**

$$\lambda_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \, p_{ji}$$

clients venant de l'extérieur — clients venant d'autres stations

Caractéristiques

Conditions de stabilité :

- **système stable pour M/M/1 :** taux moyen d'arrivée des clients dans la file < taux moyen de service
  - $\lambda < \mu$
- **Pour les réseaux :** stabilité liée
  - Taux d'arrivée des clients dans le réseau
  - Taux de service μ_i des différentes stations
  - Cheminement des clients

$$\Rightarrow \quad \lambda_i < \mu_i, \quad i = 1, \cdots, M$$

- **Les débits X_i** sont solutions de :

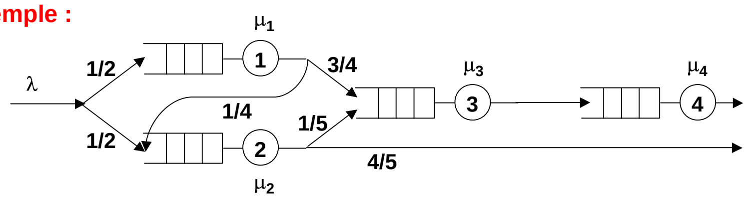
$$X_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} X_j \, p_{ji} \qquad i=1,\ldots,M$$

Clients entrant dans la file — Clients d'autres stations

- p_{0i} = 1 si tous les clients entrent dans cette file

Caractéristiques

Exemple :



- **Taux de visite :**

$$v_1 = \frac{1}{2} \qquad v_2 = p_{02} + v_1 p_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} v_1 = \frac{5}{8}$$

$$v_3 = v_1 p_{13} + v_2 p_{23} = \frac{3}{4} v_1 + \frac{1}{5} v_2 = \frac{1}{2}$$

$$v_4 = v_3 = \frac{1}{2}$$

- **Taux d'arrivée :**

$$\lambda_1 = \lambda p_{01} = \frac{1}{2}\lambda$$

$$\lambda_2 = \lambda p_{02} + \lambda_1 p_{12} = \frac{5}{8}\lambda$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{23} = \frac{1}{2}\lambda$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 p_{34} = \frac{1}{2}\lambda$$

$\Rightarrow$

- **taux entrée = taux sortie :**

taux entrée = λ

taux sortie = $\frac{4}{5}\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda$

Caractéristiques

Hypothèses forme produit :

- Processus **d'arrivée** des clients **extérieurs** = processus de **Poisson**
- **Cheminement** des clients dans le réseau = processus **markovien**
- **Chaque station :**
  - composée de C serveurs, de service moyen $t_i=1/\mu_i$
  - File illimitée, gérée en PAPS
  - Temps de service distribué exponentiellement
- **Alors :**

$$\boxed{p_n = p(n_1, \cdots, n_M) = \prod_{i=1}^{M} p_i(n_i)}$$

$p_i(n_i)$ = proba d'une file $M/M/C_i$

- **Si $C_i = +\infty$,** temps de service peut être de loi quelconque

Caractéristiques

Performances :

- **Etude de chaque file :**
  - Longueur moyenne : Q_i
  - Temps de réponse moyen : W_i
- **Pour le réseau :**

$$Q = \sum Q_i$$

$$W = \sum v_i W_i = \frac{Q}{\lambda}$$

permet la vérification

9

Plan

Plan du chapitre 3 :

- **Introduction**
- **Caractéristiques**
- **Exercices**

10

Exercices

Exercice 1 : supermarché

- ① : serveur ∞, $t_1 = 20$
- ② et ③ : monoserveur : $t_2 = t_3 = 5$
- ④ : C serveurs : $t_4 = 5$

- Question 1 : écriture des débits (sous l'hypothèse de stabilité)
- Question 2 : conditions de stabilité
- Question 3 : Performances du réseau

11

Exercices

Exercice 1 : supermarché - corrections

- Question 1 : écriture des débits

- Conditions de stabilité :

12

Exercices

Exercice 1 : supermarché - corrections (suite)

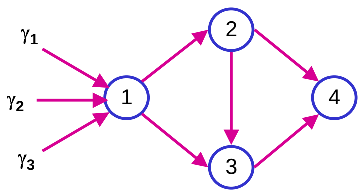
- **Question 1 : Performances du réseau**

13

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission

- **On considère un réseau de transmission à commutation de paquets représenté par la figure suivante :**



- **Le réseau = 4 nœuds de commutation, 5 liaisons.**
- **3 terminaux génèrent des trafics de taux respectifs γ_1 =0,5, γ_2=1 et γ_3=1,5 paquets/seconde. Tous les paquets ont pour destination le nœud 4.**
- **Lorsqu'un paquet arrive au niveau d'un nœud ce dernier doit décider de la liaison vers laquelle il va diriger le paquet. *Ce temps de traitement est supposé négligeable.* Le paquet se place alors dans le buffer d'attente spécifique à la liaison choisie. Il y a dans chaque nœud de commutation autant de buffers d'attente que de liaisons de sortie.**
- **Lorsqu'une liaison est disponible le premier paquet en attente de transmission sur cette liaison est émis. Le temps moyen d'émission d'un paquet est de 1/6 seconde. Le temps moyen de propagation sur la liaison est supposé négligeable. *Un seul message peut donc circuler sur chaque liaison.***

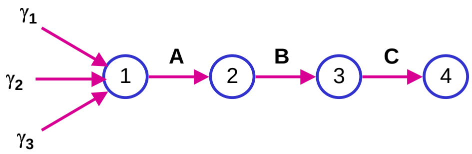
14

Exercices

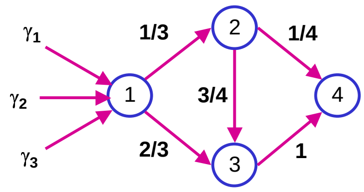
Exercice 2 : réseau de transmission (suite)

- On considère 2 configurations de routage :

1. Tous les paquets suivent le chemin : 1 ⇨ 2 ⇨ 3 ⇨ 4



2. Le routage des paquets est aléatoire, avec les probabilités de routage suivantes :
   - p_{12}= 1/3
   - p_{13}= 2/3
   - p_{23}= 3/4
   - p_{24}= 1/4
   - p_{34}= 1



3. Comparaison des architectures ?

15

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

- Modélisation du réseau :
  - 1ère solution
  - 2ème solution

16

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

- **Taux de visite :** $$v_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} v_j\, p_{ji}$$
  - **1ère solution**

    ➔

  - **2ème solution**

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

- **Taux d'arrivée :** $$\lambda_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j\, p_{ji}$$
  - **1ère solution**

    ➔

  - **2ème solution**

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

- **Stabilité :**
  - **1ère solution**
  - **2ème solution**

19

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

- **Performances :**
  - **1ère solution**

20

Exercices

Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

- **Performances :**
  - **2ème solution**

21