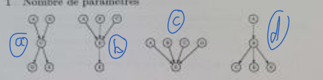
TD3

lundi 19 septembre 2022 07:59

Intelligence Artificielle
TD 3 : Réseaux bayésiens

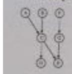
Dans tout le TD, toutes les variables aléatoires sont binaires.

1 Nombre de paramètres



1. Pour chaque réseau ci-dessus, donner le nombre de paramètres nécessaires pour coder la loi jointe.
2. Même question, mais en supposant que les variables aléatoires prennent leurs valeurs dans {1, 2, 3}.
3. En déduire une formule générale pour le nombre de paramètres d'un réseau bayésien en fonction du nombre de parents $|parents(X_i)|$ de chacun des n noeuds $X_1, \ldots, X_n$ prenant leurs valeurs dans $\{1, \ldots, m\}$.

2 Indépendance et indépendance conditionnelle



1. Etant donné le réseau bayésien ci-dessus, quelles sont les affirmations ci-dessous qui sont valides ?
   (a) $A \perp B$
   (b) $A \perp B \mid C$
   (c) $A \perp E$
   (d) $A \perp E \mid C$
   (e) $D \perp E$
   (f) $D \perp E \mid C$
   (g) $A \perp F$
   (h) $A \perp F \mid E$
   (i) $A \perp F \mid E, G$

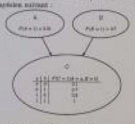
3 Conditionnement

On considère deux tests médicaux A et B pour détecter la présence d'une maladie C dont la prévalence (le pourcentage de malades dans la population) est de 1%. Bien que différents, ces tests ont la même sensibilité, à savoir qu'ils donnent un résultat positif dans 90% des cas où la maladie est présente et un résultat négatif dans 80% des cas où la maladie est absente.

1. Modéliser cette expérience avec un réseau bayésien.
2. Calculer la probabilité a priori $P(A=1)$ d'observer un résultat positif sur un des tests ($P(B=1)$ doit être égale à $P(A=1)$ puisque les deux tests ont les mêmes caractéristiques).
3. Calculer la probabilité $P(C=1|A=1)$ d'être malade sachant qu'un des tests est positif.
4. Est-ce beaucoup ? Quel paramètre devrait être modifié pour augmenter $P(C=1|A=1)$ significativement ?
5. Calculer la probabilité $P(C=1|A=1, B=1)$ d'être malade sachant que les deux tests sont positifs.
6. Calculer la probabilité $P(C=1|A=1, B=0)$ d'être malade sachant qu'un des deux tests est positif et l'autre négatif.
7. Calculer la probabilité $P(A=1|B=1)$ d'observer un résultat positif sur un des tests sachant que l'autre est positif.
8. Calculer la probabilité $P(A=1|B=0)$ d'observer un résultat positif sur un des tests sachant que l'autre est négatif.

4 Expliquer les effets observés

Considérons maintenant un phénomène C pouvant s'expliquer par 2 causes A et B et le réseau bayésien suivant :



1. Calculer $P(A=1|B=1)$
2. Calculer $P(A=1|B=1, C=1)$
3. Calculer $P(A=1|B=0, C=1)$
4. Pourquoi $P(A=1|B=0, C=1)$ n'est-elle pas plus grande (a priori, si le phénomène C est observé mais pas la cause B, cela devrait être dû à la cause A) ?
5. Calculer $P(A=1|C=1)$

5 Inférence exacte

1. Pensez-vous que la probabilité qu'il y ait un vol sachant que John vous appelle est supérieure ou inférieure à 0.5 ?
2. Calculer $P(V=1|J=1)$.
3. Calculer $P(V=1|J=1, M=1)$.

6 Inférence approximative

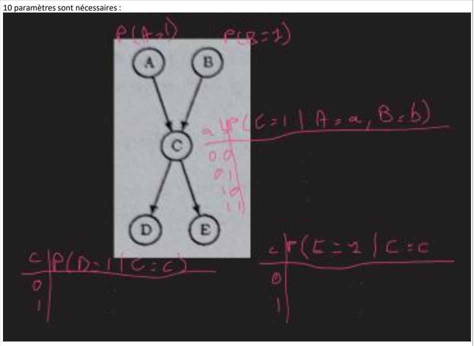
Nous allons maintenant chercher à estimer $P(J=1|V=1)$ approximativement par échantillonnage.

1. Simuler l'échantillonnage du réseau d'alarme pour obtenir $N=10$ échantillons issus de la loi jointe et calculer une estimation de $P(J=1|V=1)$.
2. Qual est le problème avec cette approche pour estimer $P(J=1|V=1)$?
3. Calculer une nouvelle estimation en utilisant la pondération par vraisemblance des échantillons où l'évidence est fixée. Cette estimation est-elle plus raisonnable ?

Suite de nombres aléatoires tirés uniformément entre 0 et 1 :
[illegible]

3

1 Nombre de paramètres

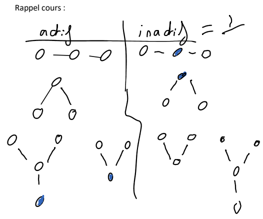
	a	b	c	d
1.	10 paramètres sont nécessaires : 	13 paramètres sont nécessaires :	4+2^4 = 20 paramètres sont nécessaires	1+2+2+2+2 = 9 paramètres sont nécessaires
2.	2+2+2*3*3+2*3+2*3 = 34	2+2+2+2*3*3*3+6=66	2+2+2+2+3^4*2=170	26

3. $\sum_{i=1}^{m} \underbrace{m^{|\text{Parents}(X_i)|}}_{\text{nb lignes}} \underbrace{(m-1)}_{\text{nb colones}}$

Sum chaque noeuds

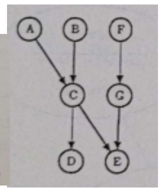
2 Indépendance et indépendance conditionnelle

Rappel cours :



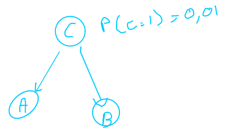
Sachant que

(a) $A \perp B$
(b) $A \perp B \mid C$
(c) $A \perp E$
(d) $A \perp E \mid C$
(e) $D \perp E$
(f) $D \perp E \mid C$
(g) $A \perp F$
(h) $A \perp F \mid E$
(i) $A \perp F \mid E, G$



a) Indépendants
b) Dépendants (car il existe un chemin actif entre A et B sachant C)
c) Dépendants
d) Indépendants
e) Dépendants
f) Indépendants
g) Indépendants
h) Dépendants
i) Indépendants

3 Conditionnement



$P(C=1) = 0,01$

C	P(A=1 | C)
0	0,2
1	0,9

C	P(B=1 | C)
0	0,2
1	0,9

2. $P(A=1) = P(A=1, C=1) + P(A=1, C=0)$
$= P(A=1|C=1).P(C=1) + P(A=1|C=0).P(C=0)$
$= 0,2 . 0,99 + 0,9 . 0,01$
$= 0,207$

3. $P(C=1|A=1) = \dfrac{P(A=1|C).P(C)}{P(A=1)} = \dfrac{0,9 . 0,01}{0,207}$

4. Cette probabilité est très faible !
Il faut qu'on augmente le 0.8 (pour ne pas faire de faux positifs)

5. $P(C=1 \mid A=1, B=1) = \dfrac{P(A=1, B=1 \mid C=1).P(C=1)}{P(A=1, B=1)}$

$= \dfrac{P(A=1, B=1, C=1)}{P(A=1, B=1)}$

$= \dfrac{P(A=1|C=1)P(B=1|C=1)P(C=1)}{P(A=1, B=1, C=0)+P(A=1, B=1, C=1)}$