Files d'attente

Plan du cours :

Marion Gilson-Bagrel

Plan

Plan du chapitre 2 :

- **Probabilités élémentaires**
- **Variables aléatoires**
- **Processus stochastiques**
- **Le processus de Poisson**
- **La transformée de Laplace**

Probabilités élémentaires

Evénements et expériences :

- **Expérience aléatoire**
  - **Ω =** espace de toutes les réalisations (résultats) possibles de l'expérience
    - ➔ *univers des événements*
  - Chaque ω élément de Ω
    - ➔ *Événement élémentaire*
  - Exemple du lancé de dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\omega = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

- **Définition de nouveaux événements**
  - Événement A = sous-ensemble de Ω
  - Définition à partir d'opérations :
    - ➔ L'union (ou) : $A \cup B$ (arrivée de l'un au moins des événements A ou B)
      - ✓ $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in A$ **ou** $\omega \in B$
    - ➔ L'intersection (et) : $A \cap B$ (arrivée de ts les événements simultanément)
      - ✓ $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in A$ **et** $\omega \in B$

Probabilités élémentaires

Evénements et expériences (suite) :

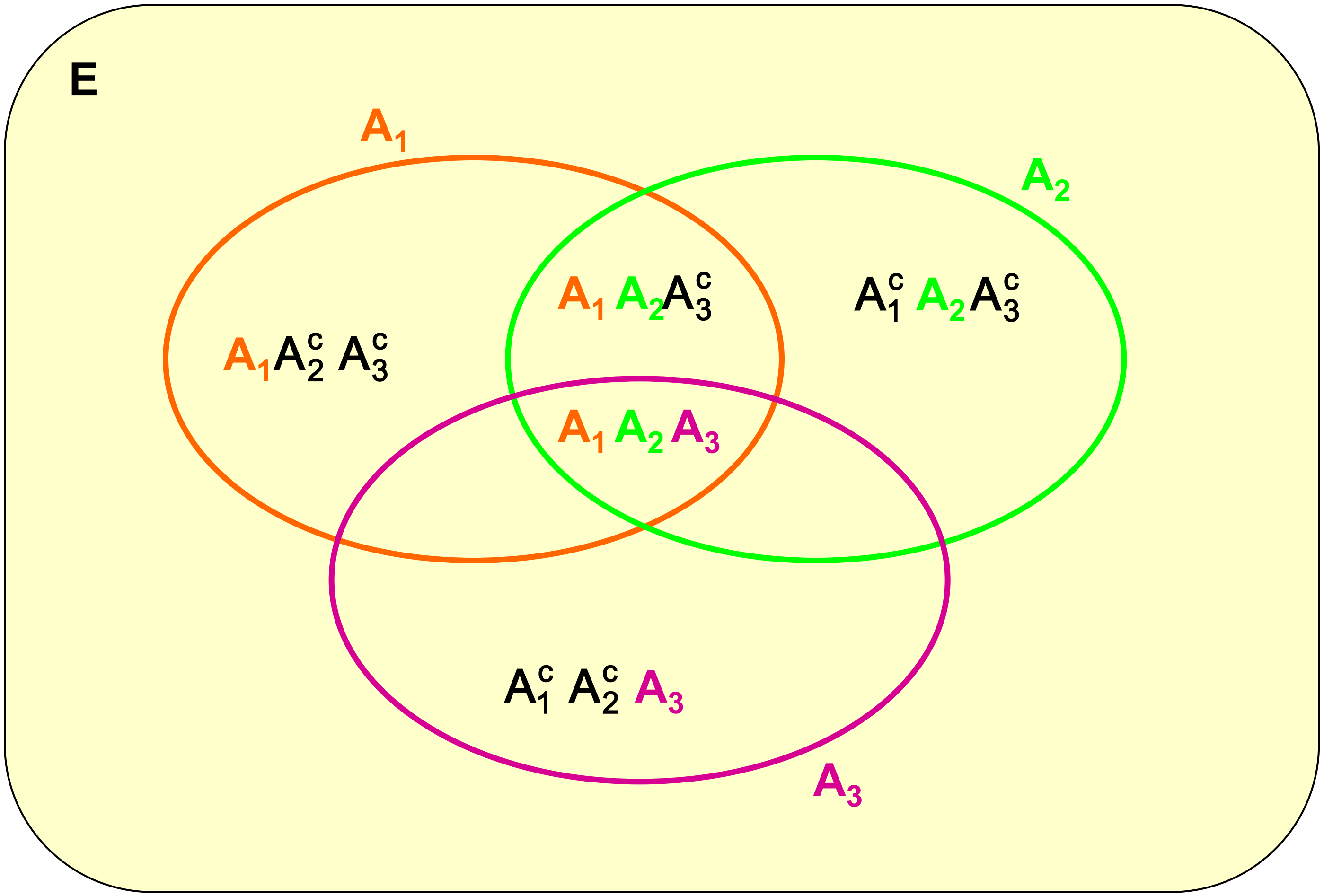
- ➔ La différence (sauf) : $A \setminus B$
  - ✓ $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in A$ **et** $\omega \notin B$
- ➔ Le complémentaire (non) : A^c (non arrivée de l'événement A) $\hookrightarrow \bar{A}$
  - ✓ $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \notin A$
- ➔ L'événement certain : I (arrivée d'un des événements de Ω)
- ➔ L'événement impossible (ou nul) : Ø (non-arrivée de tous les événements de Ω)

- **Exemple du lancé de dé :**
  - ➔ Nouvel événement A : si le résultat est soit {1}, soit {2}, soit {5}
    - ✓ $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{5\} = \{1,2,5\}$
  - ➔ Nouvel événement B : si le résultat est pair
    - ✓ $B = \{2,4,6\}$
  - ➔ Union : $A \cup B =$ $\{1,2,4,5,6\}$
  - ➔ Intersection : $A \cap B =$ $\{2\}$

Probabilités élémentaires

Composition :

- Partitionnement de l'ensemble E par trois événements A_1, A_2, A_3

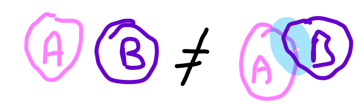


Probabilités élémentaires

Axiomes de probabilité :

- **Définition d'une probabilité :** une application qui associe à chaque élément de Ω un réel compris entre 0 et 1 ($P : \Omega \Rightarrow [0,1]$)

- **Propriétés :**
  - $0 \leq P[A] \leq 1$
  - $P[I] = 1$ et $P[\varnothing]=0$
  - Axiome de la somme : si A et B sont mutuellement exclusif ($A \cap B = \varnothing$), alors
    - ➔ $P[A \cup B\ ] = P[A] + P[B]$
    - ➔ Sinon : $P[A \cup B\ ] = P[A] + P[B] - P[A \cap B\ ]$
    - ➔ Exemple dé : $P[3]=1/6$, $P[4]=1/6$, $P[3 \cup 4]=2/6=1/3$



  - Axiome du produit : $\forall$ A et B :
    - ➔ $P[A \cap B\ ] = P[B|A] \times P[A] = P[A|B] \times P[B]$
  - Probabilité conditionnelle : si $P[B]>0$, la proba que A se produise sachant B
    - ➔ $P[A|B] = \dfrac{P[A \cup B]}{P[B]}$

Probabilités élémentaires

Axiomes de probabilité (suite) :

- **Exemple : Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant qu'au moins un est un garçon ?**

$\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$

On a

$$P(GG \mid GG \cup GF \cup FG) = \frac{P(GG)}{P(GG) + P(GF) + P(FG)}$$

$$= \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Probabilités élémentaires

Indépendance statistique :

- **Deux événements sont indépendants si :**
  - $P[A \cap B] = P[A] \cap P[B]$
  - d'où : $P[A|B]=P[A]$ ou encore $P[B|A]=P[B]$
  - Commentaire : la probabilité de A n'est pas influencée par celle de B
  - Exemple du dé :
    - ➔ $P[3]=1/6$
    - ➔ et la probabilité de tirer 3 sachant que l'on a tiré 3 la fois précédente est 1/6 (le premier jet n'influence pas le deuxième)

Probabilités élémentaires

Loi de composition :

➢ Propriétés

- $P[A^c]=1-P[A]$
  - ➔ Au dé : si $A=\{5\}$, $P[A]=1/6$ et $P[A^c]=5/6$
- Probabilité de la réunion de 2 événements
  - ➔ $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- Probabilité d'arrivée d'au moins 1 parmi *n* événements **indépendants**
  - ➔ $P[A \cup B \cup \ldots \cup N] = 1-P[A^c]\, P[B^c] \ldots P[N^c]$
- Probabilité d'arrivée de tous les événements A,B, …,N **indépendants**
  - ➔ $P[A \cap B \cap \ldots \cap N] = P[A]\, P[B] \ldots P[N]$

Probabilités élémentaires

Probabilité *a posteriori* :

- **Formule des probabilités totales**
  - Une famille $\{A_i\}_{i \in E}$ d'événements forme une partition de Ω ssi
    - ➔ $\bigcup_{i \in E} A_i = \Omega$
    - ➔ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i \neq j$ (indépendants)
  - Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition de Ω, la proba d'un événement B se décompose :
    - ➔ $\boxed{P[B] = \sum_{i \in E} P[B|A_i]\, P[A_i]}$
- **Exemple**
  - **Vacances**. 2 possibilités : plage ou cinéma suivant la météo (BT ou MT)
  - Quantifier les probas conditionnelles : P[plage|BT] ou P[plage|MT] et P[ciné|BT] ou P[ciné|MT] (les complémentaires)

$\rightarrow P(\text{plage}) = P(\text{plage}|BT)\,P(BT) + P(\text{plage}|MT)\,P(MT)$

Probabilités élémentaires

Probabilité *a posteriori* (suite):

Formules de Bayes :

- Soit $\{A_i\}_{i \in E}$ une partition de Ω, la proba d'un des événements Aj conditionnée par un événement B s'écrit :

$$\rightarrow \quad P[A_j | B] = \frac{P[B | A_j] P[A_j]}{\sum_{i \in E} P[B | A_i] P[A_i]}$$

Exemple (suite des vacances) :

- Téléphone à un ami : vous lui dites revenir de la plage
- Connaissant vos habitudes (P[plage|BT] et P[plage|MT]) et ayant regardé les prévisions météo de la veille (cad P[BT] et P[MT])
- Déduction de votre ami : probabilité qu'il ait fait BT

$$P(BT | plage) = \frac{P(plage | BT)\, P(BT)}{P(plage | BT)\, (BT) . + P(plage | MT) . P(MT)}$$

Probabilités élémentaires

Exercice :

- Considérons le fait d'être fumeur comme événement A et le fait d'être femme F ou homme H comme causes potentielles
- A priori, P[F]=P[H]=0.5
- Supposons que **30% des hommes** et seulement **10% pour les femmes**.
- **Question** : si une personne fume, quelles est la probabilité qu'elle soit une femme ou qu'il soit un homme ?

Réponses :

$P(fu \mid H) = 0{,}3$

$\hookrightarrow P(H \mid fum) = \dfrac{P(fu \mid H) \cdot P(H)}{P(fume \mid H) \cdot P(H) \;\; P(fum \mid F) \cdot P(F)}$

$= \dfrac{0{,}3 \cdot {,}5}{0{,}15 + [0{,}1 \cdot 0{,}5]} = 75\%$

$$\boxed{P(F \mid fume) = 1 - P(H \mid fum) = 25\%}$$

Probabilités élémentaires

Exercice récapitulatif :

Dans un élevage de moutons, on estime que 30% sont atteints par une certaine maladie. On dispose d'un test pour cette maladie. Si un mouton n'est pas atteint, il a 9 chances sur 10 d'avoir une réaction négative au test ; s'il est atteint, il a 8 chances sur 10 d'avoir une réaction positive. On soumet tous les moutons de l'élevage au test.

On notera :

- *M : l'événement « le mouton est malade »*
- *T : l'événement « le mouton a une réaction positive au test »*

Traduction mathématique du texte :

$$P[M] = 0.3, \qquad P[\bar{T}|\bar{M}] = 0.9, \qquad P[T|M] = 0.8$$

Questions

1.Quelle est la probabilité qu'un mouton de cet élevage ne soit pas malade ?

2.Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un mouton ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

3.Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade ET ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

4.Quelle proportion de moutons de l'élevage réagit positivement au test ?

5.Quelle est la probabilité qu'un mouton soit malade, sachant qu'il a réagit positivement ?

6.Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade, sachant qu'il a réagi négativement ?

Probabilités élémentaires

1. Quelle est la probabilité qu'un mouton de cet élevage ne soit pas malade ?

$$P(\bar{M}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

2. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un mouton ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

$$P(T \mid \bar{M}) = 1 - P(\bar{T} \mid \bar{M})$$
$$= 0,1$$

3. Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade ET ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

$$P(T \cap \bar{M}) = 0,7 \cdot 0,1 = P(T \mid \bar{M}) \cdot P(\bar{M})$$
$$= 0,07$$

Probabilités élémentaires

4. Quelle proportion de moutons de l'élevage réagit positivement au test ?

On peut utiliser la formule des probabilités totales ou raisonner directement, en distinguant, parmi les moutons ayant réagi positivement, ceux qui sont malades de ceux qui ne le sont pas.

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})$$

$$= P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})$$

$$= 0,31$$

5. Quelle est la probabilité qu'un mouton soit malade, sachant qu'il a réagit positivement ?

On peut utiliser la formule de Bayes ou la retrouver comme ci-dessous

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)\,P(M)}{P(T \mid M)\,P(M) + P(T \mid \bar{M})\,P(\bar{M})}$$

$$\simeq 0{,}774$$

Probabilités élémentaires

6. Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade, sachant qu'il a réagi négativement ?

De même, on peut utiliser la formule de Bayes ou la retrouver comme ci-dessous

$$P(\overline{M} \mid \overline{T}) \approx 0{,}913$$

Plan

Plan du chapitre 2 :

- Probabilités élémentaires
- **Variables aléatoires**
- Processus stochastiques
- Le processus de Poisson
- La transformée de Laplace

Variables aléatoires

Introduction :

- **Expérience =** décrite par ses événements élémentaires (ω) mutuellement exclusifs
  - Événement particulier = réunion de certains événements élémentaires
  - Probabilité de cet événement = somme des probabilités de ces événements élémentaires
- **Variable aléatoire =** correspondance biunivoque avec un ensemble d'événements élémentaires et caractérisée par la distribution de probabilité de cet ensemble
  - Une VA peut-être réelle ou complexe, mono ou multidimensionnelle, discrète ou continue
- **Concrètement : exemple du lancé de dé**
  - 6 événements possibles : {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}
  - On associe à chaque événement la valeur de la face : définition d'une VA à 6 valeurs (1,2,3,4,5,6) qui ont chacune une probabilité de 1/6.
  - VA scalaire, discrète, monodimensionnelle
  - Autre possibilité : associer à chaque évént, la valeur du chiffre de la face au carré. Les valeurs de la VA sont alors (1,4,9,16,25,36), tjrs avec une proba de 1/6

Variables aléatoires

Introduction (suite):

- **Autre expérience =** relevé de toutes les communications téléphoniques partant du central de Nancy
  - Définition d'une VA : durée des communications
    - ➔ VA réelle, scalaire, continue
  - Autre VA possible : numéro de l'appelé
    - ➔ VA entière, scalaire, discrète
  - Autre VA possible : coordonnée géographique (x,y) de l'appelé
    - ➔ VA réelle, bi-dimensionnelle, continue

- **Notations**
  - Majuscule **X** = la VA
  - Minuscule **x** = une réalisation particulière de cette VA
  - E = ensemble des valeurs prises par la VA

Variables aléatoires

Variable aléatoire discrète

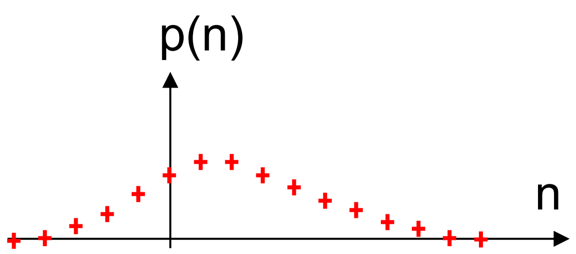
$E \subset Z$

- définie par ses ***probabilités d'état***

  ➔ $p(n)=P[X=n]$ pour $n=[-\infty \dots \infty]$

  qui sont telles que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(n) = 1$$



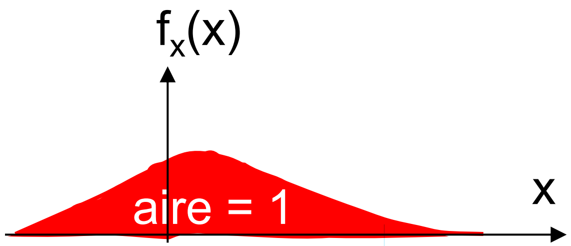
Variable aléatoire continue

$E \subset R$

- définie par sa fonction ***densité de probabilité***

  ➔ $f_x(x)$ pour $x \in [-\infty \dots \infty]$ qui est tq :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\, dx = 1$$



$$f_x(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x < X \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$$

➔ $f_x(x)\, dx$ (dx petit) = probabilité pour que X soit comprise entre x et x+dx

Variables aléatoires

Fonction de répartition :

- **Une VA est parfaitement caractérisée par sa fonction de répartition**
- **Propriétés** de la fonction de répartition :
  - $F_x(x) \geq 0$ pour tout x
  - $F_x(x) \geq F_y(y)$ pour tout $x \geq y$ (monotone non décroissante)
  - $F_x(-\infty)=0$ et $F_x(+\infty)=1$
  - $P[a < X \leq b] = F_x(b) - F_x(a)$ pour tout $a \leq b$.

VA discrète : fonction en escalier

$$P[n < X \leq m] = \sum_{k=n+1}^{m} p(k) = F_x(m) - F_x(n)$$

VA continue : fonction continue

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f_x(y)\,dy = F_x(b) - F_x(a)$$

Densité de probabilité :

$$f_x(x) = \frac{dF_x}{dx}$$

Variables aléatoires

Moments d'une VA :

- ***Espérance mathématique ou moyenne***

VA discrète :

$$E[X] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, p(n)$$

$$E[X^k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k\, p(n)$$

(moments d'ordre k)

VA continue :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, f_x(x)\, dx$$

- ***Variance*** $V[X]$ **et *écart-type*** $\sigma[X]$
  - $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
  - $\sigma^2[X] = V[X]$

- ***Coefficient de variation***
  - $cv[X] = \sigma[X] / E[X]$
  - Utilisation de cv^2 = mesure de la dispersion relative de la VA X par rapport à sa moyenne

Variables aléatoires

Deux VA :

VA discrète :
Probabilités d'états jointes

p[X=n, Y=m] pour n=[-∞ … ∞] et m=[-∞ … ∞] telles que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p[X = n, Y = m] = 1$$

VA continue :
Fonction densité de probabilité jointe

$f_{XY}(x,y)$ pour $x \in [-\infty \dots \infty]$ et $y \in [-\infty \dots \infty]$ telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Fonction de répartition jointe $F_{XY}(x,y)$:

$$\boxed{F_{XY}(x,y)=P[X \leq x, Y \leq y]}$$

$$F_{XY}(n, m) = \sum_{k=-\infty}^{n} \sum_{l=-\infty}^{m} p[X = k, Y = l]$$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, v)\, du\, dv$$

$$\text{soit} \quad f_{XY}(x, y) = \frac{d^2 F_{XY}(x, y)}{dx\, dy}$$

2 VA X et Y sont indépendantes ssi :

p[X=n, Y=m] = p[X=n] p[Y=m]
pour tout n et tout m

$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_y(y)$
pour tout x et tout y

Variables aléatoires

Deux VA indépendantes :

- **La VA somme des deux VA X et Y** est définie par (Z=X+Y) :

VA continue :

VA discrète :

ses probabilités d'états

$$p[Z = n] = p[X + Y = n]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[X = k]\, p[Y = n - k]$$
$$= p_X \otimes p_Y\,(n)$$

produit de convolution (discret) des probabilités d'états de X et de Y

sa fonction densité de probabilité

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(z - u)\, du$$
$$= f_X \otimes f_Y\,(z)$$

produit de convolution (continu) des fonctions densités de probabilité de X et de Y

Variables aléatoires

Loi de probabilité importantes :

➢ **La loi de Poisson**

- La loi de Poisson de paramètre λ est une VA discrète X à valeurs positives définie par ses probabilités d'état :

  ➔ $P[X=n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ pour $n = 0,1,2,\cdots$

- Moyenne et variance :

  ➔ $E[X]=V[X]=\lambda$

- Caractéristique : somme de deux lois de poisson indépendantes X et Y de paramètres λ_1 et λ_2

  ➔ Loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$

Variables aléatoires

Loi de probabilité importantes :

➢ La loi exponentielle

- La plus utilisée dans la théorie des files d'attente

  ➔ Modélisation des temps de service à valeur non constante

- La loi exponentielle de paramètre λ est une VA continue T à valeurs positives définie par sa densité de probabilité :

  ➔ $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$

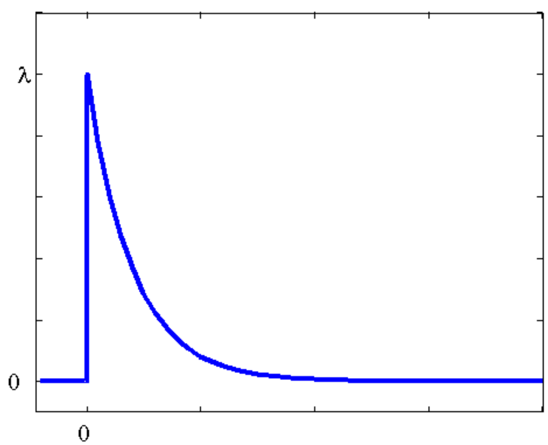
  $(f_T(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0)$

- Fonction de répartition de la loi exponentielle :

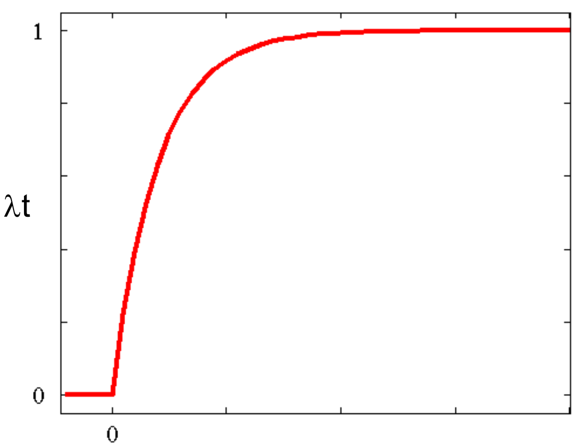
  ➔ $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$

  $(F_T(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0)$

$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$



$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$



Plan

Plan du chapitre 2 :

- **Probabilités élémentaires**
- **Variables aléatoires**
- **Processus stochastiques**
- **Le processus de Poisson**
- **La transformée de Laplace**

Processus stochastiques

Introduction :

- **VA (rappel) =** correspondance biunivoque des résultats d'une expérience avec les valeurs de la VA

- **Processus stochastique =** correspondance biunivoque des résultats d'une expérience avec une fonction du temps

  - Notation : $\{X(t)\}_{t \in T}$

  - Processus stochastique = famille de VA (généralement non indépendantes)

  - L'ensemble des temps T = discret ou continu

  - X(t) = état du processus à l'instant t

  - Ensemble E = valeurs prises par le processus à chaque instant,

    ➔ discret ou continu

Processus stochastiques

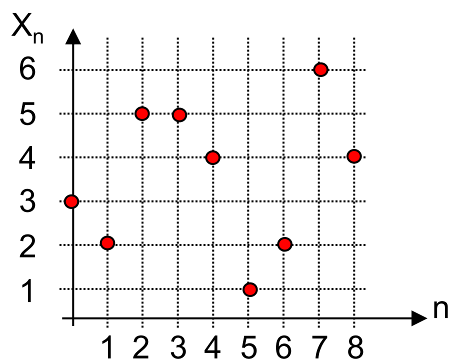
Exemple :

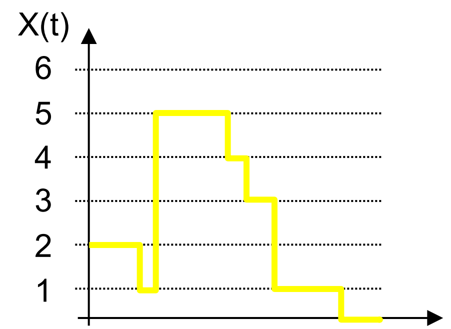
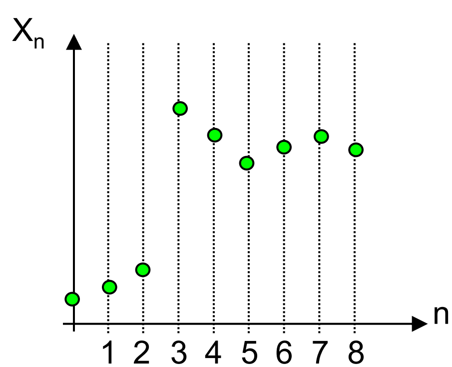
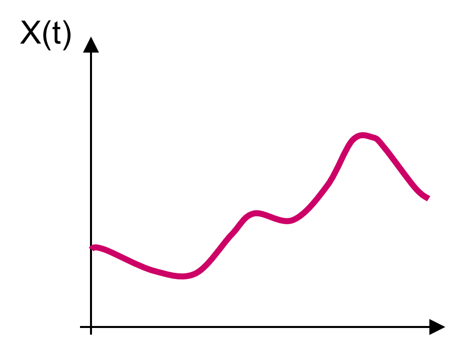
- **Exemple de processus continu**
  - Expérience : choix d'un amplificateur-opérationnel parmi un stock d'amplis identiques
  - Résultats possibles : tous les amplificateurs
  - Pour chaque ampli : mesure de la tension en sortie en fonction du temps $X(t)$
  - Pour un ampli donné : réalisation particulière de cette courbe ⇨ $x(t)$
  - Pour un instant donné : $X(t_1)$ représente une VA continue
  - Processus $X(t)$ continu, à temps continu
- **Exemple de processus discret**
  - Expérience : choix d'une image photographique numérique sur un site
  - Une photo = réalisation particulière de l'expérience
  - Une photo couleur : 3 signaux (rouge, vert, bleu)
    - ➔ Échantillonnés (espace discret : coordonnées) et à valeurs discrètes (quantifiées sur 8 bits)
  - Processus discret

Processus stochastiques

<table>
<tr><td>T à valeurs dans

X(t) à valeurs dans</td><td>T ⊂ N ou Z
X(t) noté X_n
Discret</td><td>T ⊂ [0,+∞]
(ou dans R)
Continu</td></tr>
<tr><td>E ⊂ N</td><td>Processus à temps discret
et à espace d'état discret

Ou chaîne à temps discret
</td><td>Chaines de Merkov
Processus à temps continu
et à espace d'état discret

Ou chaîne à temps continu

Files d'attente</td></tr>
<tr><td>E ⊂ R</td><td>Processus à temps discret
et à espace d'état continu
</td><td>Processus à temps continu
et à espace d'état continu
</td></tr>
</table>

Processus stochastiques

Exemples tirés du domaine des réseaux, pour chaque type de processus

	$n \in Z$	$t \in [0,+\infty]$
$E \subset N$	nb d'appels échangés suivant le jour de l'année	nb de messages dans un intervalle de tps donné
$E \subset R$	tps moyen de traitement chaque jours de la semaine	tout et n'importe quoi (pas de simplification mathématiques !)

Réalisation particulière d'un processus stochastique selon les différents cas

	$n \in Z$	$t \in [0,+\infty]$
$E \subset N$	une suite d'entier	une fonction discontinue à valeurs entières
$E \subset R$	une suite de reels	une fonction à valeurs réelles

Suite du cours :

Processus stochastique à espace d'état discret ou *chaînes* (moitié supérieure des tableaux)

Processus stochastiques

Définitions :

➢ Processus de comptage :

- un processus stochastique X à $E \subset \mathbb{N}$ est un processus de comptage ssi tte réalisation particulière de ce processus est une fonction croissante nulle en 0

Chaîne à temps discret

$x_0=0$

$x_{n+1} \leq x_n, \; \forall \; n \in Z$

Chaîne à temps continu

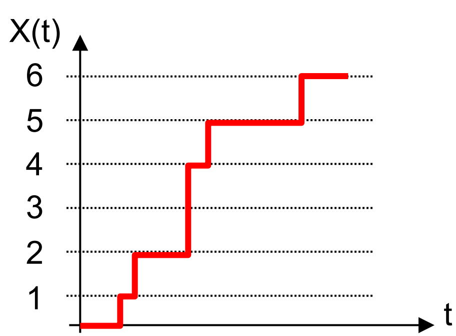
$x(0)=0$

$x(t) \leq x(s), \; \forall \; t < s$

- Utilisation : généralement utilisée pour les chaînes à temps continu

➔ Pour compter le nombre d'occurrences d'un événement dans [0,t]

➔ Exemple : nombre de clients arrivés dans un système à l'instant t. Par def, ce nombre vaut 0 à l'instant t=0 et ne peut pas diminuer



processus de comptage

Processus stochastiques

Définitions :

- **Incréments indépendants :**
  - un processus stochastique X est dit à incréments indépendants ssi :

Chaîne à temps discret

Les VA $X_n - X_{n-1}, X_{n-1} - X_{n-2}, \ldots, X_1 - X_0$ sont indépendantes $\forall n \in Z$

Chaîne à temps continu

Les VA $X(t_n)-X(t_{n-1}), X(t_{n-1})-X(t_{n-2}), \ldots, X(t_1)-X(t_0)$ sont indépendantes, $\forall n \in Z$, $\forall t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > t_0 \in [0,+\infty]$

- **Stationnaire :**
  - Un processus stochastique X est dit stationnaire ssi :

Chaîne à temps discret

Les VA $X_{n+1}-X_n$ et X_1-X_0 sont distribués suivant la même loi $\forall n \in Z$

Chaîne à temps continu

Les VA $X(s+t)-X(s)$ et $X(t)-X(0)$ sont distribués suivant la même loi, $\forall$ s et t $\in [0,+\infty]$

- **Stationnaire à incréments indépendants**
  - Pour caractériser un processus stationnaire et à incréments indépendants, il suffit de caractériser la distribution de loi :

$D=X_{n+1}-X_n$

$D(t)=X(s+t)-X(s)\ \forall t \in [0,+\infty]$

Plan

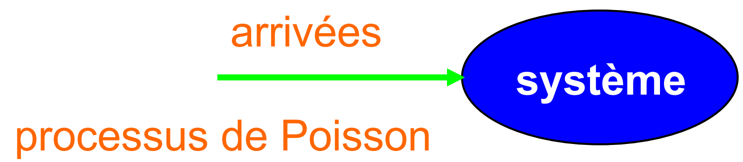
Plan du chapitre 2 :

- **Probabilités élémentaires**
- **Variables aléatoires**
- **Processus stochastiques**
- **Le processus de Poisson**
- **La transformée de Laplace**

Processus stochastiques

Processus de Poisson :

- **Caractéristique :**
  - le processus le plus utilisé dans la théorie des files d'attente
    - ➔ Modélisation du processus d'arrivée des clients dans un système
    - ➔ "arrivée poissoniennes"



- **Définition :**
  - Une chaîne à temps continu N est un processus de Poisson de paramètre λ ssi :
    - ➔ N est un processus de comptage
    - ➔ N est un processus stationnaire et à incréments indépendants

$$\boxed{P[N(s+t)-N(s)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}} \qquad \text{pour } k=0,1,2,\cdots$$

- **Propriétés :**

$$P[N(t+dt)=k+j \mid N(t)=k]=\begin{cases} \boxed{\lambda dt}+\circ(dt) & \text{si } j=1 \\ \circ(dt) & \text{si } j>1 \\ 1-\lambda dt+\circ(dt) & \text{si } j=0 \end{cases}$$

  - Interprétation : arrivée poissonienne des clients dans un système,
    - ➔ la probabilité d'arrivée d'un client entre t et t+dt (dt très petit) est égale à λdt, $\forall t$ et
    - ➔ probabilité d'arrivée de plus d'un client est négligeable

Processus stochastiques

Processus de Poisson (suite) :

- **Deux propriétés essentielles :**
  - Propriété caractéristique du processus de Poisson
    - ➔ Arrivées poissoniennes ⇔ probabilité pour qu'un client arrive pendant dt ≈ λdt
  - Liaison entre le processus d'arrivée (poissonnien) et les VA mesurant le temps d'inter-arrivée (exponentielle) :
    - ➔ Arrivées poissoniennes ⇔ inter-arrivées exponentielles

Plan

Plan du chapitre 2 :

- **Probabilités élémentaires**
- **Variables aléatoires**
- **Processus stochastiques**
- **Le processus de Poisson**
- **La transformée de Laplace**

Transformée de Laplace

Définitions :

- **Si X = VA continue à valeurs positives ou nulles, la transformée de Laplace de X est obtenue par :**
  - $$F^*(s) = \Psi_X(-s) = \int_0^\infty e^{-st} f_X(t)\,dt$$
  - Notations : $F^*(s) \Leftrightarrow f_X(t) \Leftrightarrow X$
  - Propriétés : X et Y 2 VA continues et indépendantes $\begin{cases} F^*(s) \Leftrightarrow f_X(t) \Leftrightarrow X \\ G^*(s) \Leftrightarrow g_Y(t) \Leftrightarrow Y \end{cases}$

    ➔ La TL associée à la VA Z=X+Y :

    $$H^*(s) \Leftrightarrow h_z(t) = \int_0^t f_X(x) g_Y(t-x)dx = f_x \otimes g_y(t) \Leftrightarrow Z = X + Y$$

    ➔ est simplement donnée par :

    $$H^*(s) = F^*(s)\,G^*(s)$$

  - Contrainte : convergence de l'intégrale résultante

    $$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad \text{pour tout s tel que} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt < \infty$$