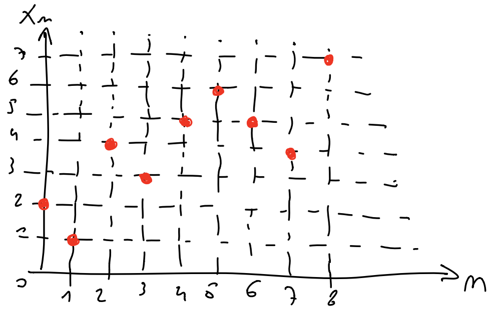
$\boxed{\text{CMTD}}$



$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une CMTD ssi :

$$P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}].$$

Matrice de transition :

P définie à partir des probabilités de transition d'un état i vers un état j.

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{p_{11} \quad p_{12} \quad p_{13} \quad \dots} \\ p_{21} \quad p_{22} \quad p_{23} \quad \dots \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \\ \qquad \qquad p_{ii} \\ p_{i1} \quad \dots \qquad \qquad \dots \end{pmatrix}$$

rebouclage sur l'état.

transition entre 2 états.

$\boxed{\sum p_{ij} = 1}$

Analyse - régime transitoire :

$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} . P^n$ (où $\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$).

avec $p_{ij}^{(n)}$ = élément (i,j) de la matrice P^n. $\Rightarrow P^{(n)} = P^n$

Analyse - régime permanent :

Recherche de la solution limite (⚠ si une limite existe).

1ère méthode : équation d'équilibre.

$$\pi_j = \pi_1 p_{1j} + \pi_2 p_{2j} + \dots + \pi_j p_{jj} + \dots + \pi_m p_{mj}$$

$$\Rightarrow \pi_j(1 - p_{jj}) = \pi_1 p_{1j} + \pi_2 p_{2j} + \dots + \pi_m p_{mj} \iff \begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{k \in E} \pi_k = 1. \end{cases}$$

(condition de normalisation)

2e méthode : (moins utilisée).

$$\bar{P} = \lim_{k \to \infty} P^k \Rightarrow \bar{\pi} = \pi^{(0)} . \bar{P} = \lim_{k \to \infty} \pi^{(k)}.$$

$\Rightarrow$ Calcul de $P^2, P^4, P^8 \dots$ jusqu'à obtenir une solution limite (ttes lignes identiques).

Délai et probabilité d'absorption.

1 seul état d'absorption : m_i = temps moyen d'absorption en partant de i

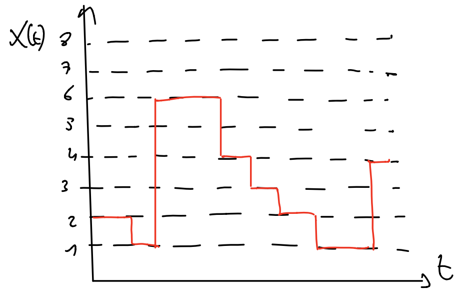
$$m_i = 1 + \sum_{k \in E'} p_{ik} m_k$$

avec i = état non absorbant
E' = tous les états non absorbants.

Plusieurs états d'absorption : b_{ij} : tps d'absorption dans j en partant de i

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in E'} p_{ik} b_{kj}$$

CMTC



$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est une CMTC ssi

$$P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}, \dots X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j \mid X(t_{n-1})=i_{n-1}].$$

Matrice de transition:

. P définie à partir des taux de transition (et non des probas): proba $= \underbrace{d_{ij}}_{\text{taux de transition}}\,dt$.

$$P = \begin{pmatrix} -\sum_{j\neq 1} d_{1j} & d_{12} & \cdots & d_{1j} & \cdots \\ d_{21} & -\sum_{j\neq 2} d_{2j} & \cdots & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ d_{i1} & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

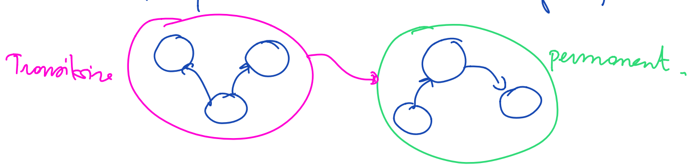
→ $\sum p_{ij} = 0$

→ Pas de rebouclage sur un état!

(état absorbant: ligne de 0).

Analyse - classification des états

2 classes possibles: transitoire ou ergodique. (pas de périodicité en continu).



$$\Rightarrow P = \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right)$$

Analyse - comportement transitoire.

$$\boxed{\overline{\tau} = -Q^{-1}}$$

ex. $\tau = -Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a : tps moyen passé dans ① venant de ①

b : ———— ② ———— ①

c : ———— ① ———— ②

d : ———— ② ———— ②

Analyse - comportement limite:

1ère méthode: equations d'équilibre.

Résolution de $\boxed{\begin{cases} \overline{\pi} P = 0 \\ \sum_i \overline{\pi}_i = 1. \end{cases}}$ (en colonne de P) et $\overline{\pi} = \lim_{t\to\infty} \pi(t)$.

2ème méthode: th. de la valeur finale. (bcp moins utilisé)

$$\lim_{t\to\infty} \pi(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot\pi(s).$$

FA

Notation de Kendall.

$A \,/\, B \,/\, C \,/\, K \,/\, M \,/\, Z$

- A : processus d'arrivée (λ)
- B : processus de service (μ)
- C : nombre de serveurs
- K : capacité de la FA (∞ si omise)
- M : population ($+\infty$ si omise)
- Z : Discipline de service (FIFO si omise).

Exemples : $M/M/1$: arrivée et service exp., 1 serveur, capacité ∞, FIFO.

$M/M/3/6$: ———, 3 serveurs, 6 client MAX, FIFO.

Principales performances.

- X = débit moyen de la FA.
- w = temps de réponse moyen.
- Q = nombre moyen de client.

Par définition :

$$X = (1 - p(0)) \times \mu \quad (\text{si } \mu = \text{taux de service})$$

$$Q = \sum_{n=0}^{N} n\,p(n) \quad (\text{si } N \text{ clients MAX}).$$

Loi de Little : $Q = w \cdot X$

Pour une FA de type $M/M/1$:

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Q = \dfrac{\rho}{1-\rho} \quad \text{avec } \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} \\ w = \dfrac{Q}{X} = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{1}{1-\rho} \end{cases}$$

Méthode de résolution pour accéder à X, Q et w dans le cas quelconque :

1. Dessiner la CMTC associée.
2. Écrire la matrice de transition.
3. Écrire les équations d'équilibre (si $\rho < 1$).
4. Simplifier les équations en utilisant la 1ère.
5. Multiplier membre à membre puis simplifier $\Rightarrow$ on obtient $p(n)$ en fonction de $p(0)$.
6. Utiliser la condition de normalisation $\sum_{i=1}^{N} p(i) = 1$ pour en déduire $p(0)$. Puis revenir sur $p(n)$ pour une expression ne dépendant pas de $p(0)$.
7. Calculer ensuite X, $Q = \sum n\,p(n)$ et $w = \frac{Q}{X}$ les performances de la file, connaissant $p(n)$.