

# Files d'attente

---

## Plan du cours :

- Chapitre 1 : Introduction
- Chapitre 2 : Rappels mathématiques
- Chapitre 3 : Les chaînes de Markov
- Chapitre 4 : Files d'attente
- **Chapitre 5 : Réseau de files d'attente**

Marion Gilson-Bagrel

1

# Plan

---

## Plan du chapitre 3 :

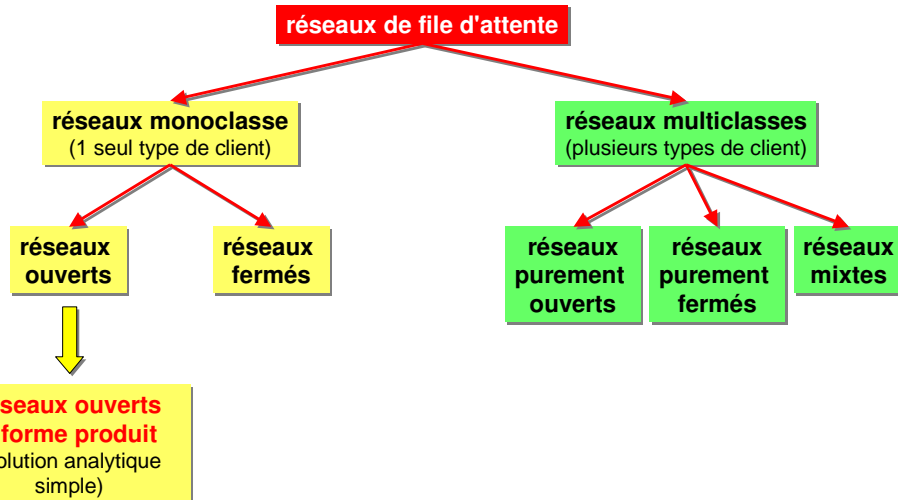
- **Introduction**
- Présentation
- Etude d'une file d'attente
- Exercices

2

## Introduction

### Définition (rappel)

- Réseau de file d'attente = ensemble de files d'attente interconnectées



3

## Plan

### Plan du chapitre 3 :

- Introduction

- **Caractéristiques**

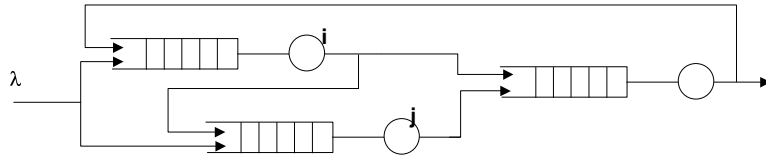
- Condition de stabilité
- Hypothèse forme produit
- Performances

- Exercices

4

## Caractéristiques

### Définition :



- $\lambda$  = taux d'arrivée des clients de l'extérieur
- $p_{ij}$  = proportion des clients qui, quittant la station  $i$ , vont à la station  $j$  (cheminement)
- **Taux de visite** d'un client à une station  $i$  ( $v_i$ ) = nombre moyen de passages à cette station  $i$  au cours du séjour du client dans le réseau

$$v_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^M v_j p_{ji} \quad i=1, \dots, M$$

- **Taux d'arrivée aux différentes stations :**

clients venant de l'extérieur

clients venant d'autres stations

$$\lambda_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{ji}$$

clients venant de l'extérieur

clients venant d'autres stations

5

## Caractéristiques

### Conditions de stabilité :

- **système stable pour M/M/1** : taux moyen d'arrivée des clients dans la file < taux moyen de service

- $\lambda < \mu$

- **Pour les réseaux** : stabilité liée

- Taux d'arrivée des clients dans le réseau
- Taux de service  $\mu_i$  des différentes stations
- Cheminement des clients

$$\lambda_i < \mu_i \quad i = 1, \dots, M$$

- **Les débits  $X_i$**  sont solutions de :

$$X_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^M X_j p_{ji} \quad i=1, \dots, M$$

Clients entrant dans la file

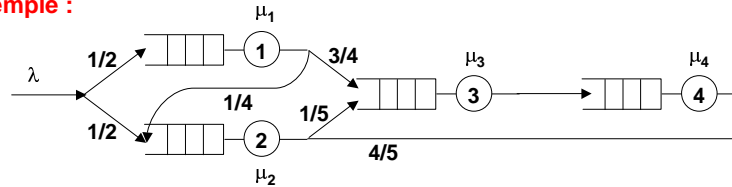
Clients d'autres stations

- $p_{0i} = 1$  si tous les clients entrent dans cette file

6

## Caractéristiques

Exemple :



➤ Taux de visite :

$$v_1 = \frac{1}{2} \quad v_2 = p_{02} + v_1 p_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} v_1 = \frac{5}{8}$$

$$v_3 = v_1 p_{13} + v_2 p_{23} = \frac{3}{4} v_1 + \frac{1}{5} v_2 = \frac{1}{2}$$

$$v_4 = v_3 = \frac{1}{2}$$

➤ Taux d'arrivée :

$$\lambda_1 = \lambda p_{01} = \frac{1}{2} \lambda$$

$$\lambda_2 = \lambda p_{02} + \lambda_1 p_{12} = \frac{5}{8} \lambda$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{23} = \frac{1}{2} \lambda$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 p_{34} = \frac{1}{2} \lambda$$

➤ taux entrée = taux sortie :

$$\text{taux entrée} = \lambda$$

$$\text{taux sortie} = \frac{4}{5} \lambda_2 + \lambda_4 = \lambda$$

7

## Caractéristiques

Hypothèses forme produit :

➤ Processus d'arrivée des clients extérieurs = processus de Poisson

➤ Cheminement des clients dans le réseau = processus markovien

➤ Chaque station :

- composée de  $C$  serveurs, de service moyen  $t_i = 1/\mu_i$
- File illimitée, gérée en PAPS
- Temps de service distribué exponentiellement

➤ Alors :

$$p_n = p(n_1, \dots, n_M) = \prod_{i=1}^M p_i(n_i)$$

$$p_i(n_i) = \text{proba d'une file } M/M/C_i$$

➤ Si  $C_i = +\infty$ , temps de service peut être de loi quelconque

8

## Caractéristiques

### Performances :

#### ➤ Etude de chaque file :

- Longueur moyenne :  $Q_i$
- Temps de réponse moyen :  $W_i$

#### ➤ Pour le réseau :

$$Q = \sum Q_i$$

$$W = \sum v_i W_i = \frac{Q}{\lambda}$$

permet la vérification

9

## Plan

### Plan du chapitre 3 :

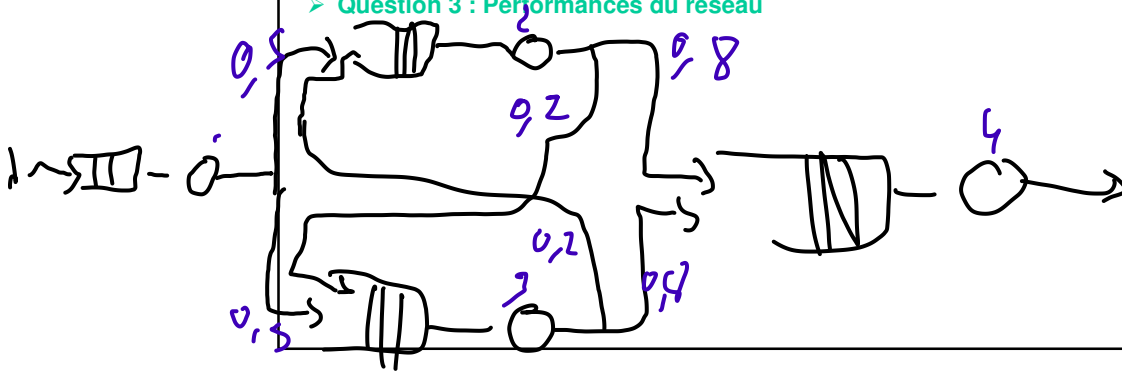
- Introduction
- Caractéristiques
- Exercices

10

## Exercices

### Exercice 1 : supermarché

- ① : serveur  $\infty$ ,  $t_1 = 20$
- ② et ③ : monoserveur :  $t_2 = t_3 = 5$
- ④ : C serveurs :  $t_4 = 5$
- Question 1 : écriture des débits (sous l'hypothèse de stabilité)
- Question 2 : conditions de stabilité
- Question 3 : Performances du réseau



11

## Exercices

### Exercice 1 : supermarché - corrections

- Question 1 : écriture des débits

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \lambda & x_1 &= \lambda \\
 x_2 &= 0,5x_1 + 0,2x_3 & \Leftrightarrow & x_2 = 0,625\lambda \\
 x_3 &= 0,5x_1 + 0,2x_3 & & x_3 = 0,625\lambda \\
 x_4 &= 0,8x_2 + 0,8x_3 & & x_4 = \lambda
 \end{aligned}$$

- Conditions de stabilité :

dans la file 1 : pas de condition sur  $x_1$   
2 et 3 :

$$x_2 < \mu_2 ; x_3 < \mu_3$$

4 :

$$x_4 < C \cdot \mu_4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,625 \cdot \lambda < 0,2 \Leftrightarrow \lambda < 0,32 \\ \frac{\lambda}{C} < 0,2 \Leftrightarrow C > 1,6 \end{cases}$$

12

## Exercices

### Exercice 1 : supermarché - corrections (suite)

#### ➤ Question 1 : Performances du réseau

1 : M/M/infini  $\Rightarrow W1 = t1 = 20$

2, 3 : M/M/1  $\Rightarrow$

$$\rho = \frac{\sum \lambda_i}{1 - c} = 0.625\lambda / \mu = 3.125\lambda$$

$$W = Q/X \text{ a/ } X2 = 0.625\lambda$$

$$\text{Donc } W2 = 5/(1 - 3.125\lambda)$$

On a  $W2 = W3$

4 : M/M/C :

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$W4 = 5/(1 - 5\lambda)$$

Tps attente total :

$$W = W1 + 0.625W2 + 0.625W3 + W4$$

Soit  $\lambda = 0.1$  (stabilité pour une caisse)

$$\text{Alors, } W2 = W3 = 7.25 ; W4 = 10 ; W = 39$$

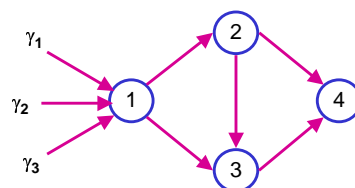
13

Amélioration system : augm C ou modif les MM1 en MMC sur files 2 et 3

## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission

#### ➤ On considère un réseau de transmission à commutation de paquets représenté par la figure suivante :



#### ➤ Le réseau = 4 nœuds de commutation, 5 liaisons.

#### ➤ 3 terminaux génèrent des trafics de taux respectifs $\gamma_1 = 0.5$ , $\gamma_2 = 1$ et $\gamma_3 = 1.5$ paquets/seconde. Tous les paquets ont pour destination le nœud 4.

#### ➤ Lorsqu'un paquet arrive au niveau d'un nœud ce dernier doit décider de la liaison vers laquelle il va diriger le paquet. Ce temps de traitement est supposé négligeable. Le paquet se place alors dans le buffer d'attente spécifique à la liaison choisie. Il y a dans chaque nœud de commutation autant de buffers d'attente que de liaisons de sortie.

#### ➤ Lorsqu'une liaison est disponible le premier paquet en attente de transmission sur cette liaison est émis. Le temps moyen d'émission d'un paquet est de 1/6 seconde. Le temps moyen de propagation sur la liaison est supposé négligeable. Un seul message peut donc circuler sur chaque liaison.

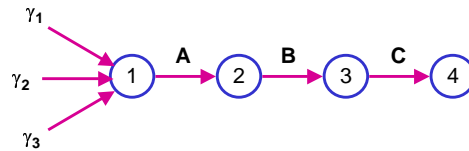
14

## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission (suite)

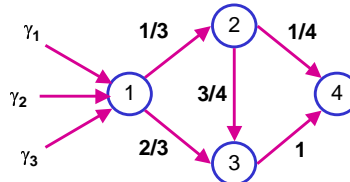
➤ On considère 2 configurations de routage :

1. Tous les paquets suivent le chemin :  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$



2. Le routage des paquets est aléatoire, avec les probabilités de routage suivantes :

- $p_{12} = 1/3$
- $p_{13} = 2/3$
- $p_{23} = 3/4$
- $p_{24} = 1/4$
- $p_{34} = 1$



3. Comparaison des architectures ?

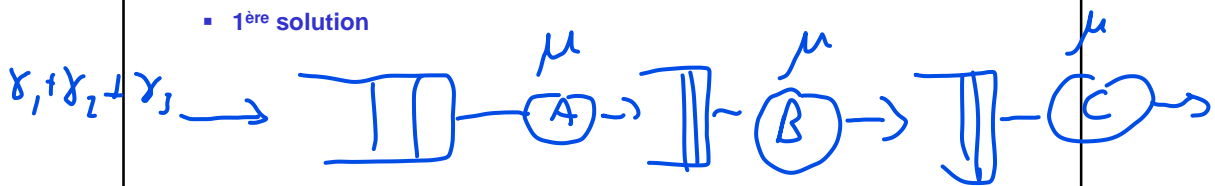
15

## Exercices

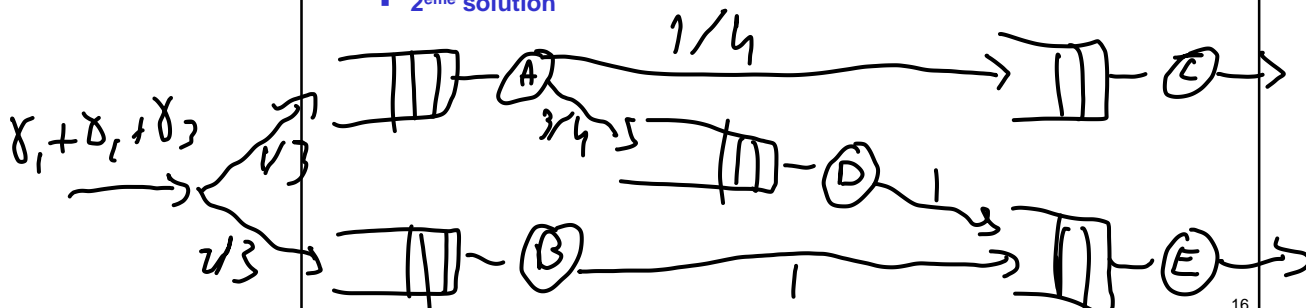
### Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

➤ Modélisation du réseau :

▪ 1<sup>ère</sup> solution



▪ 2<sup>ème</sup> solution



16



## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

#### ➤ Taux de visite :

$$v_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^M v_j p_{ji}$$

##### ▪ 1<sup>ère</sup> solution

$$\begin{aligned} \rightarrow V_a &= 1 \\ V_b &= V_c = V_a = 1 \end{aligned}$$

##### ▪ 2<sup>ème</sup> solution

$$\begin{aligned} V_a &= 1/3 \\ V_b &= 2/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_c &= p_{ac} \cdot v_a = 1/4 \cdot 1/3 = 1/12 \\ V_d &= p_{ad} \cdot v_a = 3/4 \cdot 1/3 = 1/4 \\ V_e &= p_{de} \cdot v_d + p_{be} \cdot v_b = 1 \cdot 1/4 + 1 \cdot 2/3 = 11/12 \end{aligned}$$

17

## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

#### ➤ Taux d'arrivée :

$$\lambda_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{ji}$$

##### ▪ 1<sup>ère</sup> solution

$$\begin{aligned} \rightarrow \lambda &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 3 \text{ paquets/s} \\ \lambda_A &= \lambda_B = \lambda_C = 3 \text{ paquets/s} \end{aligned}$$

##### ▪ 2<sup>ème</sup> solution

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \lambda \cdot p_{0A} = 1/3 \cdot \lambda = 1 \text{ paquet/s} \\ \lambda_B &= \lambda \cdot p_{0B} = 2/3 \cdot \lambda = 2 \text{ paquets/s} \\ \lambda_C &= \lambda_A \cdot p_{AC} = 1/4 \text{ paquet/s} \\ \lambda_D &= \lambda_A \cdot p_{AD} = 3/4 \text{ paquet/s} \\ \lambda_E &= \lambda_D \cdot p_{DE} + \lambda_B \cdot p_{BE} = 11/4 \text{ paquets/s} \end{aligned}$$

18

## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

#### ➤ Stabilité :

##### ▪ 1<sup>ère</sup> solution

$$\mu = \mu_A = \mu_B = \mu_C = 6 \text{ paquets/sec}$$

donc les  $\lambda$  sont bien inférieurs aux  $\mu$  : le réseau est stable

##### ▪ 2<sup>ème</sup> solution

idem, le réseau est stable

19

## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

#### ➤ Performances :

##### ▪ 1<sup>ère</sup> solution

pour tout  $i = A, B$  ou  $C$  :

$$\rho_i = \lambda_i / \mu_i = 1/2$$

$$Q_i = \rho_i / (1 - \rho_i) = 1$$

$$Q = 3 \text{ (somme)}$$

$$W_i = Q_i / \lambda_i = 1/3 \text{ s}$$

$$W = \sum (v_i * W_i) = 1 \text{ s}$$

20

## Exercices

### Exercice 2 : réseau de transmission (solution)

#### ➤ Performances :

##### ▪ 2<sup>ème</sup> solution

$$roA = \lambda A / \mu A = 0.1667$$

$$roB = \lambda B / \mu B = 0.33$$

$$roC = 0.04$$

$$roD = 0.125$$

$$roE = 0.4583$$

$$QA = roA / (1 - roA) = 0.2$$

$$QB = 0.49$$

$$QC = 0.042$$

$$QD = 0.14$$

$$QE = 0.846$$

$$WA = QA / \lambda A = 0.2$$

$$WB = 0.25$$

$$WC = 0.168$$

$$WD = 0.186$$

$$WE = 0.307$$

$$Q = \text{somme des } Qi \\ = 1.7231$$

$$W = \text{somme}(vi * Wi) \\ = 0.066 + 0.166 + 0.014 + 0.0465 + 0.2814 \\ = 0.57 \text{ s}$$