Files d'attente

Plan du cours :

- Chapitre 1 : Introduction
- Chapitre 2 : Rappels mathématiques
- Chapitre 3 : Les chaînes de Markov
- Chapitre 4 : Files d'attente
- Chapitre 5 : Réseau de files d'attente

Plan

Plan du chapitre 2 :

- Probabilités élémentaires
- Variables aléatoires
- Processus stochastiques
- > Le processus de Poisson
- > La transformée de Laplace

Evénements et expériences :

- Expérience aléatoire
 - Ω = espace de toutes les réalisations (résultats) possibles de l'expérience
 - univers des événements
 - Chaque ω élément de Ω
 - → Événement élémentaire
 - Exemple du lancé de dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\omega = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$
- Définition de nouveaux événements
 - Événement A = sous-ensemble de Ω
 - Définition à partir d'opérations :
 - → L'union (ou) : A ∪ B (arrivée de l'un au moins des événements A ou B)
 - \checkmark $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in A$ ou $\omega \in B$
 - → L'intersection (et) : A ∩ B (arrivée de ts les événements simultanément)
 - $\checkmark \quad \omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A \text{ et } \omega \in B$

Evénements et expériences (suite) :

- → La différence (sauf) : A \ B
 - \checkmark $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in A$ et $\omega \notin B$
- Le complémentaire (non) : A^c (non arrivée de l'événement A)
 ✓ ω ∈ Ω tel que ω ∉ A
- \rightarrow L'événement certain : I (arrivée d'un des événements de Ω)
- L'événement impossible (ou nul) : Ø (non-arrivée de tous les événements de Ω)
- Exemple du lancé de dé :
 - → Nouvel événement A : si le résultat est soit {1}, soit {2}, soit {5}

$$\checkmark$$
 A = {1} \cup {2} \cup {5} = {1,2,5}

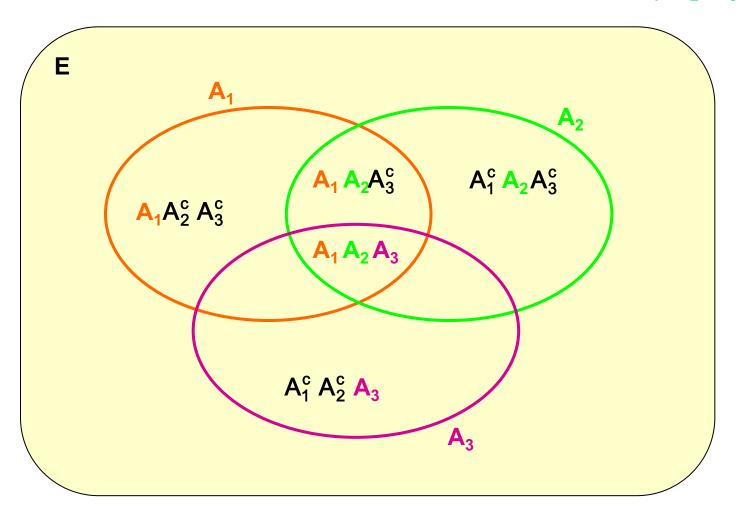
Nouvel événement B : si le résultat est pair

$$\checkmark$$
 B = {2,4,6}

- \rightarrow Union : A \cup B = {1,2,4,5,6}
- → Intersection : A ∩ B = ^{2}

Composition:

➢ Partitionnement de l'ensemble E par trois événements A₁, A₂, A₃



Axiomes de probabilité :

- **Définition d'une probabilité** : une application qui associe à chaque élément de Ω un réel compris entre 0 et 1 (P : Ω ⇒ [0,1])
- Propriétés :
 - 0 ≤ P[A] ≤ 1
 - P[I] = 1 et P[Ø]=0
 - Axiome de la somme : si A et B sont mutuellement exclusif (A \cap B = \emptyset), alors
 - → $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

(A) (B) + (A)(B)

- Sinon : P[A ∪ B] = P[A] + P[B] P[A ∩ B]
- → Exemple dé : P[3]=1/6, P[4]=1/6, P[3 ∪ 4]=2/6=1/3
- Axiome du produit : ∀ A et B :
 - → $P[A \cap B] = P[B|A] \times P[A] = P[A|B] \times P[B]$
- Probabilité conditionnelle : si P[B]>0, la proba que A se produise sachant B

$$\Rightarrow P[A \mid B] = \frac{P[A \cup B]}{P[B]}$$

Axiomes de probabilité (suite) :

Exemple : Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant qu'au moins un est un garçon ?

$$\Omega = FF, FG, GF, GGG$$

$$On U k$$

$$P(GG \mid GUGFUFG) = \frac{P(GG)}{P(GF) * P(GF) * P(FG)}$$

$$= \frac{1/u}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Indépendance statistique :

- Deux événements sont indépendants si :
 - P[A ∩ B] = P[A] ∩ P[B]
 - d'où : P[A|B]=P[A] ou encore P[B|A]=P[B]
 - Commentaire : la probabilité de A n'est pas influencée par celle de B
 - Exemple du dé :
 - → P[3]=1/6
 - et la probabilité de tirer 3 sachant que l'on a tiré 3 la fois précédente est 1/6 (le premier jet n'influence pas le deuxième)

Loi de composition :

- > Propriétés
 - P[A^c]=1-P[A]
 - → Au dé : si A={5}, P[A]=1/6 et P[A^c]=5/6
 - Probabilité de la réunion de 2 événements
 - → $P[A \cup B] = P[A] + P[B] P[A \cap B]$
 - Probabilité d'arrivée d'au moins 1 parmi n événements indépendants
 - → $P[A \cup B \cup ... \cup N] = 1-P[A^{c}] P[B^{c}]... P[N^{c}]$
 - Probabilité d'arrivée de tous les événements A,B, ...,N indépendants
 - \rightarrow P[A \cap B \cap ... \cap N] = P[A] P[B] ... P[N]

Probabilité a posteriori :

- Formule des probabilités totales
 - Une famille $\{A_i\}_{i\in E}$ d'événements forme une partition de Ω ssi

$$\rightarrow \bigcup_{i \in E} A_i = \Omega$$

- \rightarrow A_i \cap A_j = Ø, \forall i \neq j (indépendants)
- Soit {A_i}_{i∈E} une partition de Ω, la proba d'un événement B se décompose :

$$\Rightarrow P[B] = \sum_{i \in E} P[B|A_i] P[A_i]$$

- > Exemple
 - Vacances. 2 possibilités : plage ou cinéma suivant la météo (BT ou MT)
 - Quantifier les probas conditionnelles : P[plage|BT] ou P[plage|MT] et P[ciné|BT] ou P[ciné|MT] (les complémentaires)

Probabilité a posteriori (suite):

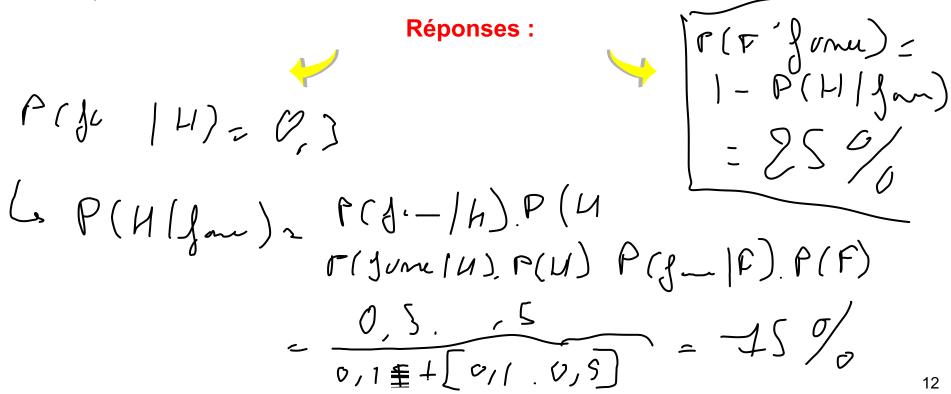
- Formules de Bayes :
 - Soit {A_i}_{i∈E} une partition de Ω, la proba d'un des événements Aj conditionnée par un événement B s'écrit :

$$\Rightarrow P[A_j | B] = \frac{P[B | A_j] P[A_j]}{\sum_{i \in E} P[B | A_i] P[A_i]}$$

- Exemple (suite des vacances) :
 - Téléphone à un ami : vous lui dites revenir de la plage
 - Connaissant vos habitudes (P[plage|BT] et P[plage|MT]) et ayant regardé les prévisions météo de la veille (cad P[BT] et P[MT])
 - Déduction de votre ami : probabilité qu'il ait fait BT

Exercice:

- Considérons le fait d'être fumeur comme événement A et le fait d'être femme F ou homme H comme causes potentielles
- > A priori, P[F]=P[H]=0.5
- Supposons que 30% des hommes et seulement 10% pour les femmes.
- Question : si une personne fume, quelles est la probabilité qu'elle soit une femme ou qu'il soit un homme ?



Exercice récapitulatif:

Dans un élevage de moutons, on estime que 30% sont atteints par une certaine maladie. On dispose d'un test pour cette maladie. Si un mouton n'est pas atteint, il a 9 chances sur 10 d'avoir une réaction négative au test ; s'il est atteint, il a 8 chances sur 10 d'avoir une réaction positive. On soumet tous les moutons de l'élevage au test.

On notera:

- M : l'événement « le mouton est malade »
- T: l'événement « le mouton a une réaction positive au test »

Traduction mathématique du texte :

$$P[M] = 0.3, \qquad P[\overline{T}|\overline{M}] = 0.9, \qquad P[T|M] = 0.8$$

Questions

- 1. Quelle est la probabilité qu'un mouton de cet élevage ne soit pas malade?
- 2. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un mouton ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?
- 3. Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade ET ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?
- 4. Quelle proportion de moutons de l'élevage réagit positivement au test ?
- 5. Quelle est la probabilité qu'un mouton soit malade, sachant qu'il a réagit positivement ?
- 6. Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade, sachant qu'il a réagi négativement ?

1. Quelle est la probabilité qu'un mouton de cet élevage ne soit pas malade?

2. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un mouton ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

$$P(T \mid \widehat{M}) = I - P(T \mid \widehat{M})$$

$$= O(I)$$

3. Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade ET ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

$$P(Tnh) = 0, + .0, 1 = P(Th).P(h)$$

= 0,07

4. Quelle proportion de moutons de l'élevage réagit positivement au test ?

On peut utiliser la formule des probabilités totales ou raisonner directement, en distinguant, parmi les moutons ayant réagi positivement, ceux qui sont malades de ceux qui ne le sont pas.

5. Quelle est la probabilité qu'un mouton soit malade, sachant qu'il a réagit positivement ?

On peut utiliser la formule de Bayes ou la retrouver comme ci-dessous

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M)} + P(T|M)P(M)$$

$$= 0,774$$

6. Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade, sachant qu'il a réaginégativement ?

De même, on peut utiliser la formule de Bayes ou la retrouver comme ci-dessous

Plan

Plan du chapitre 2 :

- Probabilités élémentaires
- Variables aléatoires
- Processus stochastiques
- > Le processus de Poisson
- > La transformée de Laplace

Introduction:

- Expérience = décrite par ses événements élémentaires (ω) mutuellement exclusifs
 - Événement particulier = réunion de certains événements élémentaires
 - Probabilité de cet événement = somme des probabilités de ces événements élémentaires
- Variable aléatoire = correspondance biunivoque avec un ensemble d'événements élémentaires et caractérisée par la distribution de probabilité de cet ensemble
 - Une VA peut-être réelle ou complexe, mono ou multidimensionnelle, discrète ou continue
- Concrètement : exemple du lancé de dé
 - 6 événements possibles : {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}
 - On associe à chaque événement la valeur de la face : définition d'une VA à 6 valeurs (1,2,3,4,5,6) qui ont chacune une probabilité de 1/6.
 - VA scalaire, discrète, monodimensionnelle
 - Autre possibilité : associer à chaque évént, la valeur du chiffre de la face au carré.
 Les valeurs de la VA sont alors (1,4,9,16,25,36), tjrs avec une proba de 1/6

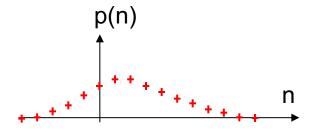
Introduction (suite):

- Autre expérience = relevé de toutes les communications téléphoniques partant du central de Nancy
 - Définition d'une VA : durée des communications
 - → VA réelle, scalaire, continue
 - Autre VA possible : numéro de l'appelé
 - → VA entière, scalaire, discrète
 - Autre VA possible : coordonnée géographique (x,y) de l'appelé
 - → VA réelle, bi-dimensionnelle, continue
- Notations
 - Majuscule X = la VA
 - Minuscule x = une réalisation particulière de cette VA
 - E = ensemble des valeurs prises par la VA

Variable aléatoire discrète E ⊂ Z

- définie par ses probabilités d'état
 - → p(n)=P[X=n] pour n=[-∞ ... ∞] qui sont telles que :

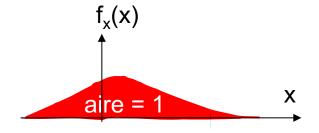
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(n) = 1$$



Variable aléatoire continue E ⊂ R

- définie par sa fonction densité de probabilité
 - \rightarrow $f_x(x)$ pour $x \in [-\infty ... \infty]$ qui est tq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \, dx = 1$$



$$f_x(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x < X \le x + \Delta x]}{\Delta x}$$

→ f_x(x) dx (dx petit) = probabilité pour que X soit comprise entre x et x+dx

Fonction de répartition :

- Une VA est parfaitement caractérisée par sa fonction de répartition
- Propriétés de la fonction de répartition :
 - $F_{v}(x) \ge 0$ pour tout x
 - $F_x(x) \ge F_y(y)$ pour tout $x \ge y$ (monotone non décroissante)
 - $F_{*}(-\infty)=0$ et $F_{*}(+\infty)=1$
 - $P[a < X \le b] = F_x(b) F_x(a)$ pour tout $a \le b$.



VA discrète : fonction en escalier

$$P[n < X \le m] = \sum_{k=n+1}^{m} p(k) = F_x(m) - F_x(n)$$



VA continue : fonction continue

$$P[n < X \le m] = \sum_{k=n+1}^{m} p(k) = F_x(m) - F_x(n) \qquad P[a < X \le b] = \int_{a}^{b} f_x(y) \, dy = F_x(b) - F_x(a)$$

Densité de probabilité :

$$f_x(x) = \frac{dF_x}{dx}$$

Moments d'une VA:

Espérance mathématique ou moyenne



VA discrète :

$$E[X] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n p(n)$$

$$E[X^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} n^k p(n)$$
 (me

 $n = -\infty$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$$

$$E[X^k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k p(n)$$
 (moments d'ordre k) $E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_x(x) dx$

- *Variance* V[X] et écart-type $\sigma[X]$
 - $V[X] = E[X^2] (E[X])^2$
 - $\sigma^2[X] = V[X]$
- Coefficient de variation
- $cv[X] = \sigma[X] / E[X]$
 - Utilisation de cv² = mesure de la dispersion relative de la VA X par rapport à sa moyenne

Deux VA:



VA discrète : Probabilités d'états jointes

p[X=n, Y=m] pour n=[
$$-\infty$$
 ... ∞] et m=[$-\infty$... ∞] telles que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p[X = n, Y = m] = 1$$

-

VA continue:

Fonction densité de probabilité jointe

$$f_{XY}(x,y)$$
 pour $x \in [-\infty ... \infty]$ et $y \in [-\infty ... \infty]$ telles que :

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

Fonction de répartition jointe $F_{XY}(x,y)$:

$$F_{XY}(x,y)=P[X \le x, Y \le y]$$

$$F_{XY}(n,m) = \sum_{k=-\infty}^n \sum_{l=-\infty}^m p[X=k,Y=l]$$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{x} \int_{x=0}^{y} f_{XY}(u, v) du dv$$

soit
$$f_{XY}(x, y) = \frac{d^2 F_{XY}(x, y)}{dx dy}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_y(y)$$

pour tout x et tout y

Deux VA indépendantes :

La VA somme des deux VA X et Y est définie par (Z=X+Y) :



VA continue:

4

VA discrète:

ses probabilités d'états

$$\begin{aligned} p[Z &= n] &= p[X + Y = n] \\ &= \sum_{k = -\infty}^{+\infty} p[X = k] p[Y = n - k] \\ &= p_X \otimes p_Y (n) \end{aligned}$$

produit de convolution (discret) des probabilités d'états de X et de Y

sa fonction densité de probabilité

$$f_{Z}(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X}(u) f_{Y}(z - u) du$$
$$= f_{X} \otimes f_{Y}(z)$$

produit de convolution (continu) des fonctions densités de probabilité de X et de Y

Loi de probabilité importantes :

La loi de Poisson

La loi de Poisson de paramètre λ est une VA discrète X à valeurs positives définie par ses probabilités d'état :

$$\Rightarrow P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$
 pour $n = 0, 1, 2, \cdots$

- Moyenne et variance :
 - \rightarrow E[X]=V[X]= λ
- Caractéristique : somme de deux lois de poisson indépendantes X et Y de paramètres λ_1 et λ_2
 - Loi de Poisson de paramètre λ₁+λ₂

Loi de probabilité importantes :

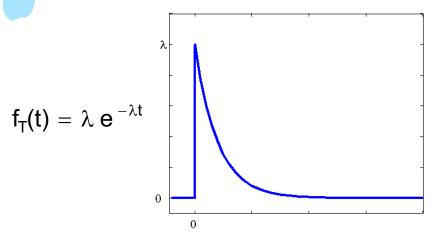
- > La loi exponentielle
 - La plus utilisée dans la théorie des files d'attente
 - Modélisation des temps de service à valeur non constante
 - La loi exponentielle de paramètre λ est une VA continue T à valeurs positives définie par sa densité de probabilité :

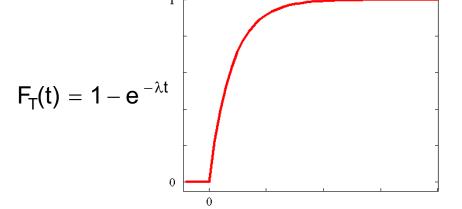
$$\Rightarrow \begin{array}{ll} f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{pour } t \ge 0 \\ (f_T(t) = 0 & \text{pour } t < 0) \end{array}$$

Fonction de répartition de la loi exponentielle :

$$F_{T}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \text{pour } t \ge 0$$

$$(F_{T}(t) = 0 \qquad \text{pour } t < 0)$$





Plan

Plan du chapitre 2 :

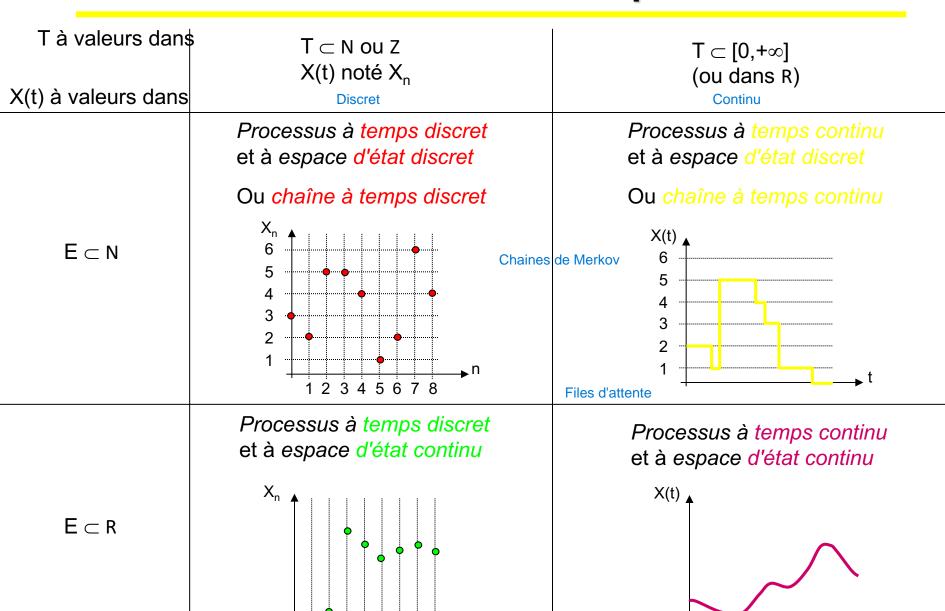
- Probabilités élémentaires
- Variables aléatoires
- Processus stochastiques
- > Le processus de Poisson
- > La transformée de Laplace

Introduction:

- VA (rappel) = correspondance biunivoque des résultats d'une expérience avec les valeurs de la VA
- Processus stochastique = correspondance biunivoque des résultats d'une expérience avec une fonction du temps
 - Notation : {X(t)}_{t∈T}
 - Processus stochastique = famille de VA (généralement non indépendantes)
 - L'ensemble des temps T = discret ou continu
 - X(t) = état du processus à l'instant t
 - Ensemble E = valeurs prises par le processus à chaque instant,
 - discret ou continu

Exemple:

- Exemple de processus continu
 - Expérience : choix d'un amplificateur-opérationnel parmi un stock d'amplis identiques
 - Résultats possibles : tous les amplificateurs
 - Pour chaque ampli : mesure de la tension en sortie en fonction du temps X(t)
 - Pour un ampli donné : réalisation particulière de cette courbe ⇒ x(t)
 - Pour un instant donné : X(t₁) représente une VA continue
 - Processus X(t) continu, à temps continu
- Exemple de processus discret
 - Expérience : choix d'une image photographique numérique sur un site
 - Une photo = réalisation particulière de l'expérience
 - Une photo couleur : 3 signaux (rouge, vert, bleu)
 - → Échantillonnés (espace discret : coordonnées) et à valeurs discrètes (quantifiées sur 8 bits)
 - Processus discret



2 3 4 5 6 7 8

Exemples tirés du domaine des réseaux, pour chaque type de processus

	$n \in Z$	t ∈ [0,+∞]
E⊂N	nb d'appels échangés suivant le jour de l'année	nb de messages dans un intervalle de tps donné
E⊂R	tps moyen de traitement chaque jours de la semaine	tout et n'importe quoi (pas de simplification mathématiques !)

Réalisation particulière d'un processus stochastique selon les différents cas

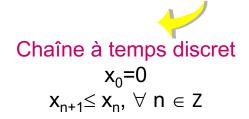
_		n ∈ Z	t ∈ [0,+∞]
	$E \subset N$	une suite d'entier	une fonction discontinue à valeurs entières
	$E \subset R$	une suite de reels	une fonction à valeurs réelles

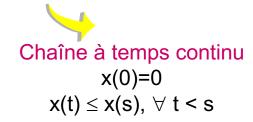
Suite du cours :

Processus stochastique à espace d'état discret ou *chaînes* (moitié supérieure des tableaux)

Définitions:

- Processus de comptage :
 - un processus stochastique X à E ⊂ N est un processus de comptage ssi tte réalisation particulière de ce processus est une fonction croissante nulle en 0





- Utilisation : généralement utilisée pour les chaînes à temps continu
 - Pour compter le nombre d'occurrences d'un événement dans [0,t]
 - → Exemple : nombre de clients arrivés dans un système à l'instant t. Par def, ce nombre vaut 0 à l'instant t=0 et ne peut pas diminuer



Définitions:

- Incréments indépendants :<=> le deuxième tirage ne dépend pas du premier
 - un processus stochastique X est dit à incréments indépendants ssi :



Chaîne à temps discret

Les VA
$$X_n$$
- X_{n-1} , X_{n-1} - X_{n-2} , ..., X_1 - X_0 sont indépendantes

$$\forall\ n\in Z$$



Chaîne à temps continu

$$\label{eq:lossymmetric} \begin{array}{l} \text{Les VA X}(t_n)\text{-X}(t_{n-1}), \ X(t_{n-1})\text{-X}(t_{n-2}), \ \dots, \ X(t_1)\text{-X}(t_0) \\ \text{sont indépendantes,} \ \forall \ n \in \textbf{Z} \ , \\ \forall \ t_n\text{>}t_{n-1}\text{>}\ \dots\text{>}t_1\text{>}t_0 \in [0,+\infty] \end{array}$$

- Stationnaire:
 - Un processus stochastique X est dit stationnaire ssi :



Chaîne à temps discret

Les VA X_{n+1} - X_n et X_1 - X_0 sont distribués suivant la même loi

$$\forall$$
 n \in Z



Chaîne à temps continu

Les VA X(s+t)-X(s) et X(t)-X(0)sont distribués suivant la même loi,

$$\forall$$
 s et t \in [0,+ ∞]

- > Stationnaire à incréments indépendants
 - Pour caractériser un processus stationnaire et à incréments indépendants, il suffit de caractériser la distribution de loi :

$$D=X_{n+1}-X_n$$

$$D(t)=X(s+t)-X(s) \forall t \in [0,+\infty]$$

Plan

Plan du chapitre 2 :

- Probabilités élémentaires
- Variables aléatoires
- Processus stochastiques
- Le processus de Poisson
- > La transformée de Laplace

Processus de Poisson:

- Caractéristique :
 - le processus le plus utilisé dans la théorie des files d'attente
 - Modélisation du processus d'arrivée des clients dans un système
 - "arrivée poissoniennes"



- Définition :
 - Une chaîne à temps continu N est un processus de Poisson de paramètre λ ssi :
 - → N est un processus de comptage
 - → N est un processus stationnaire et à incréments indépendants

$$P[N(s+t) - N(s) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$
 pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Propriétés :

$$P[N(t+dt)=k+j\big|\,N(t)=k]=\begin{cases} \begin{array}{ccc} \lambda dt + \circ(dt) & \text{si } j=1 \\ \\ \circ (dt) & \text{si } j>1 \\ \\ 1-\lambda dt + \circ(dt) & \text{si } j=0 \end{array} \end{cases}$$

- Interprétation : arrivée poissonienne des clients dans un système,
 - → la probabilité d'arrivée d'un client entre t et t+dt (dt très petit) est égale à λdt, ∀t et
 - probabilité d'arrivée de plus d'un client est négligeable

Processus de Poisson (suite):

- Deux propriétés essentielles :
 - Propriété caractéristique du processus de Poisson
 - Arrivées poissoniennes ⇔ probabilité pour qu'un client arrive pendant dt ≈ λdt
 - Liaison entre le processus d'arrivée (poissonnien) et les VA mesurant le temps d'inter-arrivée (exponentielle) :
 - → Arrivées poissoniennes ⇔ inter-arrivées exponentielles

Plan

Plan du chapitre 2 :

- Probabilités élémentaires
- Variables aléatoires
- Processus stochastiques
- Le processus de Poisson
- > La transformée de Laplace

Transformée de Laplace

Définitions:

➢ Si X = VA continue à valeurs positives ou nulles, la transformée de Laplace de X est obtenue par :

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{s}) = \Psi_{\mathbf{X}}(-\mathbf{s}) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-\mathbf{s}t} \, f_{\mathbf{X}}(t) \, dt$$

- Notations: $F^*(s) \Leftrightarrow f_X(t) \Leftrightarrow X$
- - → La TL associée à la VA Z=X+Y :

$$H^*(s) \Leftrightarrow h_z(t) = \int_0^t f_X(x)g_Y(t-x)dx = f_x \otimes g_y(t) \Leftrightarrow Z = X + Y$$

est simplement donnée par :

$$H^*(s) = F^*(s) G^*(s)$$

Contrainte : convergence de l'intégrale résultante

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$
 pour tout s tel que $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt < \infty$