Typage d'une version décorée du π-calcul

Julien Gabet
sous la direction d'Emmanuel Beffara

Institut de Mathématiques de Marseille

Mars-Juin 2018

π-termes

Definition

Soit $\mathcal{N} := \{t, u, v, \ldots\}$ un ensemble dénombrable de noms. Les termes du π-calcul sont donnés par la grammaire suivante :

$$P, Q ::= 0 \;\; ; \;\; P|Q \;\; ; \;\; u(t).P \;\; ; \;\; \bar{u}(v).P \;\; ; \;\; \tau.P \;\; ; \;\; (\nu u)P$$

et l'ensemble des noms libres d'un terme $fn(P)$ par induction sur les termes comme suit :

$$\begin{aligned} fn(0) &= \emptyset & fn(P|Q) &= fn(P) \cup fn(Q) \\ fn(u(t).P) &= (fn(P)\backslash\{t\}) \cup \{u\} & fn(\bar{u}(v).P) &= fn(P) \cup \{u, v\} \\ fn(\tau.P) &= fn(P) & fn((\nu u)P) &= fn(P)\backslash\{u\} \end{aligned}$$

Congruence structurelle et réduction

Definition

On définit la congruence structurelle comme une congruence sur les termes avec les axiomes suivants :

$$\begin{array}{cc} P|0 \equiv P & P|Q \equiv Q|P \\ P|(Q|R) \equiv (P|Q)|R & (\nu u)(\nu v)P \equiv (\nu v)(\nu u)P \\ (\nu u)0 \equiv 0 & (\nu u)(P|Q) \equiv P|(\nu u)Q \quad \text{if } u \notin fn(P) \end{array}$$

et on se donne les règles de réduction suivantes :

$$\frac{}{u(t).P|\bar{u}(v).Q \rightarrow P[v/t]|Q} \qquad \frac{}{\tau.P \rightarrow P}$$

$$\frac{P \rightarrow P'}{P|Q \rightarrow P'|Q} \qquad \frac{P \rightarrow P'}{(\nu u)P \rightarrow (\nu u)P'} \qquad \frac{P \equiv Q \rightarrow Q' \equiv P'}{P \rightarrow P'}$$

Exemple

Un terme simple pour voir le système de réduction :

$$\Big(u(t).P|Q\Big)\Big|\bar{u}(v).R$$

Exemple

Un terme simple pour voir le système de réduction :

$$\Big(u(t).P|Q\Big)\Big|\bar{u}(v).R \equiv \Big(Q|u(t).P\Big)\Big|\bar{u}(v).R$$

Exemple

Un terme simple pour voir le système de réduction :

$$\begin{aligned}\Big(u(t).P|Q\Big)\Big|\bar{u}(v).R &\equiv \Big(Q|u(t).P\Big)\Big|\bar{u}(v).R \\ &\equiv Q\Big|\Big(u(t).P|\bar{u}(v).R\Big)\end{aligned}$$

Exemple

Un terme simple pour voir le système de réduction :

$$\begin{aligned}
\Big(u(t).P|Q\Big)\Big|\bar{u}(v).R &\equiv \Big(Q|u(t).P\Big)\Big|\bar{u}(v).R \\
&\equiv Q\Big|\Big(u(t).P|\bar{u}(v).R\Big) \\
&\rightarrow Q\Big|\Big(P[v/t]|R\Big)
\end{aligned}$$

Exemple

Un exemple non confluent :

$$
\begin{array}{ccc}
(u(t).P|\bar{u}(v).Q)|u(t).S & \equiv & u(t).P|(\bar{u}(v).Q|u(t).S) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(P[v/t]|Q)|u(t).S & & u(t).P|(Q|S[v/t])
\end{array}
$$

Les termes annotés

Definition

Soient $\mathcal{N} := \{t, u, v, \ldots\}$ et $\mathcal{V} := \{x, y, z, \ldots\}$ deux ensembles de noms et de variables, dénombrables et disjoints. Les termes annotés sont donnés par la grammaire suivante :

$$
\begin{array}{rll}
P, Q ::= & x \leftrightarrow y \ \ ; \ \ 0_x \ \ ; & \text{termes de base} \\
& P|_x Q \ \ ; \ \ P||_x Q \ \ ; & \text{parallèle et synchronisation} \\
& u_x(t).P \ \ ; \ \ \bar{u}_x(v).P \ \ ; & \text{préfixes d'action} \\
& \epsilon_x.P \ \ ; \ \ \lambda_x y.P \ \ ; & \text{préfixes de planification} \\
& (\nu u)P & \text{privatisation de nom}
\end{array}
$$

où $x \in fv(P) \cap fv(Q)$ pour les règles $|$ et $||$,
$x \notin fv(P)$ pour la règle ϵ, et $x, y \in fv(P)$ pour les autres règles.

Les termes annotés

Definition

Et où l'ensemble des variables libres d'un terme $fv(P)$ est défini par induction sur les termes :

$$fv(x \leftrightarrow y) = \{x, y\} \qquad fv(0_x) = \{x\}$$
$$fv(P|_x Q) = fv(P) \cup fv(Q) \qquad fv(P||_x Q) = (fv(P) \cup fv(Q)) \backslash \{x\}$$
$$fv(u_x(t).P) = fv(P) \qquad fv(\bar{u}_x(v).P) = fv(P)$$
$$fv(\epsilon_x.P) = fv(P) \cup \{x\} \qquad fv(\lambda_x y.P) = fv(P) \backslash \{y\}$$
$$fv((\nu u)P) = fv(P)$$

L'ensemble des noms libres est défini comme pour le π-calcul classique en considérant $x \leftrightarrow y$ comme 0 et λ, ϵ comme τ

Projection des termes annotés sur π

Definition

On définit la projection comme suit :

$$
\begin{aligned}
\lfloor 0_x \rfloor &= 0 & \lfloor x \leftrightarrow y \rfloor &= \tau.0 \\
\lfloor P|_x Q \rfloor &= \lfloor P \rfloor | \lfloor Q \rfloor & \lfloor P||_x Q \rfloor &= \lfloor P \rfloor | \lfloor Q \rfloor \\
\lfloor u_x(t).P \rfloor &= u(t).\lfloor P \rfloor & \lfloor \bar{u}_x(v).P \rfloor &= \bar{u}(v).\lfloor P \rfloor \\
\lfloor \epsilon_x.P \rfloor &= \tau.\lfloor P \rfloor & \lfloor \lambda_x y.P \rfloor &= \tau.\lfloor P \rfloor \\
\lfloor (\nu u)P \rfloor &= (\nu u)\lfloor P \rfloor
\end{aligned}
$$

La réduction

Ici la flèche $\rightarrow$ et la remontée $\succ$

La réduction

Ici les règles de congruence $\equiv$

Confluence de $\rightarrow$ et $\succ$

Prop : confluence de $\rightarrow$

Confluence de $\to$ et $\succ$

Prop : confluence de $\succ$ à $\equiv$ près

Confluence de $\rightarrow$ et $\succ$

Fermeture spécifique de $\equiv$ pour $\rightarrow$, avec $\succ$: donner un exemple

Le système de types : langage

Le système de types : règles

Préservation du type : proposition

Préservation du type : un exemple ?

Terminaison de $\rightarrow$ et $\succ$ + un exemple peut-être

Extension du système de réduction

Élimination de la coupure