

布莱克-舒尔斯期权定价公式的扩展

前面在一系列假定条件下推导得到了著名的布莱克-舒尔斯期权定价公式，在现实生活中，这些假设条件往往是无法成立的，本章的主要目的，就是从多个方面逐一放松这些假设，对布莱克-舒尔斯期权定价公式进行扩展。但是我们也将看到，在有些时候，模型在精确度方面确实获得了相当的改进，但其所带来的收益却无法弥补为达到改进而付出的成本，或是这些改进本身也存在问题，这使得布莱克-舒尔斯期权定价公式仍然在现实中占据重要的地位。

第一节 布莱克-舒尔斯期权定价模型的缺陷

在实际经济生活中，布莱克-舒尔斯期权定价模型（为简便起见，我们后文都称之为 BS 模型）应用得非常广泛，对金融市场具有很大的影响。其三个作者中的两个更是曾经因此获得诺贝尔奖。因此，无论是从商业上还是从学术上来说，这个模型都非常成功。但是理论模型和现实生活终究会有所差异，对于大多数理论模型来说，模型假设的非现实性往往成为模型主要缺陷之所在，BS 公式也不例外。本章的主要内容，就是从多方面逐一放松 BS 模型的假设，使之更符合实际情况，从而实现对 BS 定价公式的修正和扩展。

BS 模型最基本的假设包括：

1. 没有交易成本或税收。
2. 股票价格服从波动率 σ 和无风险利率 r 为常数的对数正态分布。
3. 所有证券都是高度可分的且可以自由买卖，可以连续进行证券交易。
4. 不存在无风险套利机会。

在现实生活中，这些假设显然都是无法成立的。本章的后面几节，将分别讨论这些假设放松之后的期权定价模型。

1.交易成本的假设：BS 模型假定交易成本为零，可以连续进行动态的套期保值，从而保证无风险组合的存在和期权定价的正确性。但事实上交易成本总是客观存在的，这使得我们无法以我们所希望的频率进行套期保值；同时，理论上可行的价格，考虑了交易成本之后就无法实现预期的收益。我们将在第二节中介绍一些对这一假设进行修正的模型。

2.波动率为常数的假设：BS 模型假定标的资产的波动率是一个已知的常数或者是一个确定的已知函数。这一点在标的资产价格的实证检验中被否定，期权市场本身反映的隐含波动率也提出了相反的证据。实际上波动率本身就是一个随机变量。为了解决这个问题，人们从两个角度来对 BS 模型进行修正：从期权价格的隐含波动率中获取波动率的信息，来为期权定价；从标的资产市场出发获取波动率变化过程的信息，对 BS 公式进行修正和扩展。我们将在第三节和第四节讨论这个问题。

3.不确定的参数：BS 模型假设波动率、利率、股利等参数都是已知的常数（或是已知的确定函数）。但事实上它们都不是一个常数，甚至也不是一个时间和标的资产价格的确定函数，波动率甚至完全无法在市场观察到，也无法预测。这时可以采取的方法之一是为这些参数的价值确定一个变动区间，从而在最糟糕的情景下为期权定价。我们将在第五节介绍这一方法。

4.资产价格的连续变动：BS 模型假定标的资产的价格是连续变动的，服从对数正态分布。然而在我们的市场中，不连续是常见的：资产价格常常跳跃，并且经常是向下跳跃。这在对数正态分布的资产定价模型中并没有体现出来：对于正态分布来说，这些突然变动的幅度太大，发生太过频繁；同时，由于跳跃来得太突然，这使我们无法单纯依靠对数正态扩散模型对它们进行动态保值。因此我们需要在

模型中考虑跳跃的情形，同时我们也需要考察在极端变动的情况下，可能导致的最差结果。我们将在第六节和第七节中对跳跃扩散模型和崩盘模型进行分析，讨论这些问题。

第二节 交易成本

BS 期权定价公式的一个重要假设就是没有交易成本，在此基础上，BS 公式的分析过程要求对股票和期权组合进行连续的调整再平衡，以实现无风险定价策略。在实际生活中，这个假设显然是难以成立的。即使交易成本很低，连续的交易也将导致很高的交易费用；即使只进行离散的保值调整，但只要进行交易，投资者就必须承担或多或少的交易成本。一般来说，交易成本在以下两种情形下是尤其重要的：

1. 在一个交易费用很高的市场中进行保值操作，比如股票市场和新兴证券市场。
2. 组合头寸经常需要进行调整。其中包括处于平价状态附近的期权和即将到期的期权，这样的期权的套期比率 Δ 对标的资产价格的变动最为敏感，从而导致调整频率较高。

所以，交易成本在期权价格的确定当中是不可忽略的部分。因此，人们对存在交易费用的情形进行了考察，并得到了基于 BS 公式的一些修正模型。

值得注意的是，在美国，主要的证券市场都实行专家（Specialists）或做市商（Market-maker）制度，因此，这里的交易成本主要是指在标的资产买卖过程中发生的买卖价差（Bid-offer Spread）。

一、交易成本的影响分析

交易成本的存在，会影响我们进行套期保值的次数和期权价格：交易成本一方面

会使得调整次数受到限制，使基于连续组合调整的 BS 模型定价成为一种近似；另一方面，交易成本也直接影响到期权价格本身，使得合理的期权价格成为一个区间而不是单个数值，同时许多理论上值得进行的策略，一旦考虑交易成本之后，就变得不可行。进一步来看，交易成本的影响具有以下两个性质：

1.规模效应和交易成本差异化。不同的投资者需要承担的交易成本是不一样的，交易规模越大，成本的重要性程度越低。这就意味着与基本的 BS 定价公式相悖，现实世界中并不存在唯一的期权价值，而是有赖于投资者的具体情况，相同的合约对于不同的投资者具有不同的价值。

2.即使是同一个投资者，在调整过程中，持有同一个合约的多头头寸和空头头寸，价值也不同。为什么呢？这是因为交易成本对于保值者来说总是一种沉没成本，无论是多头还是空头，对保值成本的估计都必须从期权价值中扣除。这样一个投资者会认为多头的价值低于 BS 公式理论价值，而空头价值则应高于理论价值。因此，交易成本的存在，实际上意味着动态保值不再产生期权价格的唯一均衡，而是会针对每一个投资者的不同头寸都出现一个可行价格区间。在这个范围内波动的期权价格都无法进行套利，因为套利获得的无风险收益将被交易费用所抵消。当价格跌到这个区间的下限之外的時候，才存在利用期权多头进行套利的机会，当价格涨到这个区间的上限之上的時候，才存在利用期权空头进行套利的机会。我们将在后面对交易成本模型的描述中进一步阐述这些性质。

二、Hoggard-Whalley-Wilmott 交易成本模型

交易成本模型最早是由 Leland¹在 1985 年提出的，他的主要结论是：可以用一个考虑了交易成本后的波动率 σ 代入 BS 公式得到期权价格，这个模型采用的策略

¹参见 H. E. Leland, "Option pricing and replication with transaction costs," *Journal of Finance*, 40 (1985), 1283-1301.

和基本结论为后来的交易成本研究奠定了重要的基础，但是具有一定的局限性。基于此，Hoggard, Whalley 和 Wilmott 三个人于 1992 年提出了一个考虑交易成本的期权组合定价模型（简称为 H-W-W 模型）²，这个模型也是衍生工具理论中最早的非线性模型之一。Leland 的结论同样可以在 H-W-W 模型中得到解释。

（一） 基本思路

H-W-W 模型仍然采用推导 BS 微分方程时的无套利均衡的分析思路，采用无收益资产的欧式期权组合为代表来进行分析，但是现在的整个组合价值修正为原来的价值减去交易成本，而这个交易成本的计算则根据事先确定的保值调整策略和交易成本结构进行，由此得到一个新的非线性偏微分方程，即考虑了交易成本之后的期权定价微分方程。

（二） 基本假定

H-W-W 模型的主要假定基本与推导 BS 微分方程的假设相同，主要变量符号不变，只是做了如下修正，：

第一，投资者投资于欧式期权的组合而不仅仅是单个期权；

第二，整个投资组合的调整存在交易成本，交易成本结构假设如下：买卖资产时的交易成本正比于所交易的资产价格，这样如果买卖 n 股（买入时 $n > 0$ ，卖出时 $n < 0$ ）价格为 S 的股票，交易成本为 $kS|n|$ ，其中 k 是取决于投资者个人具体成本情况的常数；

第三，投资者的组合调整策略事先确定：按照规定的时间长度进行调整，即每隔 Δt 时间进行一次再平衡，这里的 Δt 不再是无穷小的，不再求趋于 0 的极限，而是一个固定的很短的时间段；

² 更详细的推导和分析参见 T. Hoggard, A. E. Whalley and P. Wilmott, "Hedging option portfolios in the presence of transaction costs," *Advances in Futures and Options Research*, 7 (1994), 21-35.

第四，股票价格的随机过程以离散的形式给出： $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \varepsilon S \sqrt{\Delta t}$ ，其中 ε 是一个服从标准正态分布的随机变量；

第五，保值组合的预期收益率等于无风险银行存款利率。

（三） 推导过程

1.构造与 BS 分析类似的无风险组合

无风险组合包括一单位价值为 f 的衍生证券组合多头和 Δ^3 单位的标的资产 S 空头（价值为 $-\Delta S$ ）。这里，为了消除组合中的不确定性，仍然要求 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}(S, t)$ 。令 Π 代表整个投资组合的价值，则 $\Pi = f - \frac{\partial f}{\partial S} S$ 。

2.计算一个时间长度 Δt 之后的预期组合价值变化

由于需要考虑交易成本，整个组合价值的变化会相应减少：

$$E[\Delta \Pi] = E\left[\Delta f - \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S - kS|n|\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) \Delta t - E[kS|n|] \quad (7.1)$$

其中 Δf 由 Ito 引理求得。我们可以看到，实际上这就是第六章中 $d\Pi$ 的离散形式再减去一个交易成本项。

由无风险套利假设，有

$$E[\Delta \Pi] = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t \quad (7.2)$$

3.求交易成本的预期值

要求交易成本项 $kS|n|$ ，关键在于获得 n 值，即为了保值需要买卖的资产数量。显然：

$$n = \frac{\partial f}{\partial S}(S + \Delta S, t + \Delta t) - \frac{\partial f}{\partial S}(S, t)$$

即 n 为经过 Δt 时间后持有的标的资产数量与期初持有数量之差。应用 Ito 引理， n

³ 为了与业界习惯和本书其它章节统一，我们同时用 Δ 表示无风险组合中标的资产的数量以及变量的变化，如 Δt ，请读者注意区分。

的主要部分是

$$n \approx \Delta S \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) \approx \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (7.3)$$

4. 得到期权定价方程

将 (7.1) 和 (7.3) 代入 (7.2) 中计算得到 (我们简称为 H-W-W 方程):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - k \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right| = rf \quad (7.4)$$

其中 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 是 $|\varepsilon|$ 的期望值⁴。

(四) 对 H-W-W 方程的理解

我们将 H-W-W 方程与 BS 微分方程进行比较, 可以发现, 在考虑交易成本问题

之后, 我们得到了一个类似的偏微分方程, 唯一的区别在于 $-k \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right|$ 项。这

一项具有十分重要的意义。

1. $-k \sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right|$ 项在实际中具有深刻的金融含义

首先, 让我们来考察 $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ 项。我们知道, 通过选定适合的 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$, 我们消去了资产

⁴ 推导过程如下:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon + \int_{-\infty}^0 (-\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\frac{\varepsilon^2}{2} - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\frac{\varepsilon^2}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}) \Big|_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}) \Big|_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

价格变动导致的不确定性，但是因为期权组合价格对资产价格的函数是一条曲线而非直线，这个 Δ 仅仅对很短的时间间隔成立，随着资产价格 S 的变化，如果继续维持原先的保值比率 Δ ，就不再是无风险组合，这时如果不进行调整，就会出现“保值误差”。而公式中的 $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ ，又称为 Γ ，其含义是期权价格对标的资产价格的二阶偏导，就是对保值误差程度的衡量。由于存在保值误差，就需要调整资产头寸，因此很自然地它必然和预期的调整交易成本相联系。

其次， $-k\sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right|$ 实际上可以分解为 Γ 绝对值和资产价格 S^2 的乘积，该项中的其他部分 $-k\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}}$ 都是已知的，可以看作一个与具体交易成本相关的常数。因此，这整项确实体现了组合调整成本的影响，是 BS 公式中没有的。值得注意的是，其中的 k 是依赖于投资者个人特殊情形的常数，因此相应的期权价格显然将会随着投资者情况的不同而不同。

2. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right|$ 的存在使得 H-W-W 方程大部分时候是一个非线性方程

H-W-W 方程的一个重要特点在于它同时适用于单个期权和期权组合，这是它优于 Leland 模型的主要原因之一。在不考虑交易成本的时候，期权组合的价值是单个期权价值的线性加总；但是当存在交易费用时，这个线性关系就不再成立。这是因为组合中可能存在内部互相保值的现象而无需进行保值操作，这样，计算期权组合时需要考虑的交易成本会相应减少，从而使得考虑了交易费用之后的单个期权价值之和并不等于整个组合的价值。因此，H-W-W 方程是一个非线性的偏微分方程。在这里也可以体现交易成本的规模效应性质：组合规模越大，相互保值的可能性越大，从而大大减少交易费用。

H-W-W 方程的非线性来源于 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right|$ 的绝对值符号。由于 Γ 是期权价格曲线的二次偏导,这意味着对于期权的多方来说(无论是看涨还是看跌期权),始终存在 $\Gamma > 0$; 相反,期权的空方 $\Gamma < 0$ 。因此只有在整个组合中所有 S 的 Γ 都是同一符号即同为多头(或同为空头)的情况下,这个方程才是线性的,否则就会出现内部自我保值的现象而导致非线性。

3. 期权多头和空头价值的不一致性

从以上分析可见,对于期权合约的多头和空头而言,如果考虑交易费用,期权的价值会因 Γ 符号不同而不同。这和我们用直观分析得到的结论一致:考察交易成本的情况下,即使是同一个投资者,在套期保值过程中,持有同一个合约的多头头寸和空头头寸,价值也不同。关于这一点,我们会在后面进一步讲解。

4. 考虑单个普通期权的情形

由于单个普通期权的 Γ 符号确定,所以我们可以去掉绝对值符号,得到更精确的结论。对式(7.4)进行整理,我们发现,对于单个期权多头,由于 $\Gamma > 0$, H-W-W 方程实际上是一个以

$$\hat{\sigma} = \left(\sigma^2 - 2k\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.5)$$

为波动率的 BS 公式;相反,由于单个期权的空头 $\Gamma < 0$, H-W-W 方程则化为一个以

$$\hat{\sigma} = \left(\sigma^2 + 2k\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.6)$$

为波动率的 BS 公式。

也就是说,考虑了交易成本之后的单个期权的定价,在 BS 公式中使用一个修正后的波动率即可求得。这实际上是 Leland 模型的基本结论。但是 Leland 模型只

适用于单个简单期权或是所有的 Γ 符号都相同的情形，因此 H-W-W 模型可以说是它的推广。

式 (7.5) 和 (7.6) 显示，当处于多头情形时，考虑交易费用后的波动率要明显小于实际波动程度。这是因为当资产价格上涨时，需要卖出部分资产实现保值，卖出资产的交易成本降低了因价格上升而带来的收益，可以理解为波动水平在一定程度上被降低了。空头时情况正好相反。因此，我们进一步看到，对于同一个投资者而言，同一份期权合约上的多头头寸价值要低于空头头寸的价值。

这种在 BS 公式中使用修正后波动率的办法也可以推广到期权组合，条件是期权组合中的 Γ 值必须无论何时何地都总是保持同一个符号。

(五) 交易成本和保值频率选择

对于单个期权而言，我们可以通过 $f(S,t) - \hat{f}(S,t)$ ，即用原来波动率和修正后波动率得到的期权价值之差算出交易成本。对于很小的 k 展开上式得：

$$(\sigma - \hat{\sigma}) \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \dots$$

代入欧式期权的表达式可得预期的交易费用为

$$\frac{2kSN(d_1)\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi\Delta t}}$$

其中 $N(d_1)$ 定义同 BS 公式。

进一步定义

$$K = \frac{k}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (7.7)$$

当 K 远大于 1 时，说明交易成本过高， Δt 太小，调整过于频繁；如果 K 很小，说明成本对期权价值影响很小，选择的时间间隔太长，因此要降低 Δt ，增加组合保值调整次数，以降低风险。

三、 交易成本的其他模型

H-W-W 模型是比较完善的交易成本模型，但是其中也存在一些问题，经济学家和实际工作者对此做了进一步的修正。主要问题包括：

1. 期权组合中的 Γ 值不是同一个符号的情形。由于 H-W-W 模型是非线性的，一般情况下，都使用数值方法为其定价。关于数值方法的使用，我们将在第八章作深入的阐述。

2. 交易成本不是前述的简单结构，而是资产价格和调整数量的函数 $k(n, S)$ 的情况。更具体的说，一个最常见的假设就是

$$k = k_1 + k_2 n + k_3 n S \quad (7.8)$$

即交易成本包括一个固定成本 k_1 ，一个与交易规模成比例的成本 $k_2 n$ 和一个与交易总价值成比例的成本 $k_3 n S$ 。这时相应的微分方程扩展为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = \frac{k_1}{\Delta t} + (k_2 + k_3 S) \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right| \quad (7.9)$$

注意式 (7.9) 是非线性的。

3. H-W-W 模型的整个组合调整策略是固定的，即按照规定的时间长度进行调整，而不考虑这样调整是否最优。而在现实生活中，投资者采取的策略一般都是对价格变动进行持续的监测，并给定一个风险限度，当头寸变动超过风险限度时才进行保值调整。Whalley & Wilmott (1993)⁵ 和 Henrotte (1993)⁶ 都对这一情形进行了研究。他们发现，由于没有进行完美保值，在 Δt 时间段中投资组合的方差为 $\sigma^2 S^2 \left(D - \frac{\partial f}{\partial S} \right)^2 \Delta t$ ，这里的 D 是投资者实际持有的标的资产空头数量。投资者总是设定一个参数 H_0 ，投资组合的风险要保持在此限度之内，即

⁵ A. E. Whalley and P. Wilmott, "Option Pricing with Transaction Costs," MFG Working Paper, Oxford, 1993.

⁶ P. Henrott, "Transaction Costs and Duplication Strategies," Working Paper, Stanford University, 1993.

$$\sigma S \left| D - \frac{\partial f}{\partial S} \right| \leq H_0 \quad (7.10)$$

当 D 和 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 的变动超过式 (7.10) 给定的宽度时, 就需要进行组合的调整和再平衡。

Whalley & Wilmott 发现, 一个考虑了 H_0 和形如 (7.8) 的交易成本结构的微分方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = \frac{\sigma^2 S^4 \Gamma^2}{H_0} \left(k_1 + (k_2 + k_3 S) \frac{H_0^{\frac{1}{2}}}{S} \right)$$

这同样是一个依赖于 Γ 值的微分方程, 是对 BS 微分方程的非线性修正。

第三节 波动率微笑和波动率期限结构

BS 公式的另一个重要假设是: 标的资产的波动率是常数。在现实世界中, 这个假设显然是无法成立的。尽管我们无法直接市场中观测到资产波动率的大小, 然而任何处于市场中的投资者都可以明显感觉到这一点, 对资产价格时间序列数据的统计检验更进一步证实了资产价格波动率并非常数。

换一个角度来看, 假如波动率是常数, 那么对于标的资产相同的一类期权, 无论其执行价格或到期时间有多大的差异, 从它们的期权价格中推导出来的隐含波动率都应该是大致相同的, 否则就意味着期权市场存在着套利机会。更具体地说, 隐含波动率高的期权价值相对被高估, 可以做空; 隐含波动率低的期权相对被低估, 可以做多, 从而获得无风险收益。从理论上说, 这种套利行为的大量存在会使得不同期权品种所对应的隐含波动率差异消失。但是, 人们却发现这种差异始终存在, 显然, 不同的执行价格和不同的到期时间对应不同的隐含波动率, 这一现象似乎是客观存在的, 而非市场偶然性错误定价的结果。也就是说, 波动率并非常数, 因而 BS 公式得到的期权价格并不完全符合现实。

更具体地说, 人们通过研究发现, 应用期权的市场价格和 BS 公式推算出来的隐

含波动率具有以下两个方向的变动规律：

1. 隐含波动率会随着期权执行价格不同而不同，这个规律被称为“波动率微笑”（VolatilitySmiles）；
2. 隐含波动率会随期权到期时间不同而变化，这叫做波动率期限结构（VolatilityTermStructure）。

通过把波动率微笑和波动率期限结构放在一起，实际从业人员构造出一个波动率矩阵（VolatilityMatrices），它是我们考察和应用波动率变动规律的基本工具之一。

一、波动率微笑

对具有相同标的资产和到期日，但执行价格不同的期权价格隐含波动率进行比较，我们就可以绘出一个隐含波动率对执行价格的变化曲线。一般来说，这条曲线常常呈现形如图 7.1 的形状，象是一个微笑的表情，波动率微笑因此而得名。

显然，波动率微笑很直观地告诉我们，执行价格不同，也就是说，当期权分别处于平价、实值和虚值状态时，即使其他条件全都相同，标的资产的隐含波动率也并不相同。为了解释这一广泛存在的现象，人们提出了一些理论，由于波动率微笑的具体形状会随着标的资产的不同而不同，而这些形状往往可以在标的资产价格的概率分布中得到解释，因此最具说服力的是“分布理论”。该理论认为，BS 定价模型假设标的资产价格服从对数正态分布，但市场并不这样认为，市场分布和 BS 分布之间的差异导致了波动率微笑的出现。

一般说来，波动率微笑有以下两种常见模式：

1. 货币期权的波动率微笑

对于货币期权而言，隐含波动率常常呈现如 7.1 所示的近似 U 形。也就是说，平价期权的波动率最低，而实值和虚值期权的波动率会随着实值或虚值程度的增大

而增大，两边比较对称。这一波动率微笑对应着如图 7.2 中实线所描绘的概率分布，为了与虚线表示的 BS 对数正态分布相区别，我们把它叫做隐含分布。注意，这两个分布具有同样的均值和标准差，但是隐含分布比 BS 分布尖峰胖尾。

我们可以从如下分析中看到这两个图是相互一致的。先考虑一个深度虚值的货币看涨期权，执行价格很高，为 x_2 ，当且仅当汇率上升到高于 x_2 时，这个期权才会被执行，图 7.2 显示隐含分布中价格大于 x_2 的概率显然大于 BS 分布的概率。因此，隐含概率分布意味着更高的期权价格，从而得到更高的隐含波动率。这显然符合图 7.1 中较高的执行价格对应较高的波动率的现象。然后再考虑一个深度虚值的货币看跌期权，价格是较低的 x_1 ，只有当标的资产价格下降到低于 x_1 时，这个期权才会被执行。图 7.2 同样显示，低于 x_1 的概率大于正态分布的情形。因此，我们可以预期隐含分布会得到一个更高的价格从而得到更高的隐含波动率。⁷

⁷由于 PCP 公式的得到与资产价格概率分布无关，假设 p_{mkt} 和 c_{mkt} 分别代表期权的市场价值而 p_{bs} 和 c_{bs} 分别代表从 BS 公式得到的理论期权价值，那么，我们可以同时得到：

$$p_{bs} + S_0 e^{-q(T-t)} = c_{bs} + X e^{-r(T-t)}$$

$$p_{mkt} + S_0 e^{-q(T-t)} = c_{mkt} + X e^{-r(T-t)}$$

两式相减得到

$$p_{bs} - p_{mkt} = c_{bs} - c_{mkt}$$

可见，具有相同的标的资产和到期日的欧式看涨期权和欧式看跌期权，它们的理论价格和市场价格之间的差异是等同的，这意味着它们所适用的隐含波动率将是一样的。所以以上两种情形同样适用于以 X_2 为执行价格的深度实值货币看跌期权和以 X_1 为执行价格的深度实值货币看涨期权。

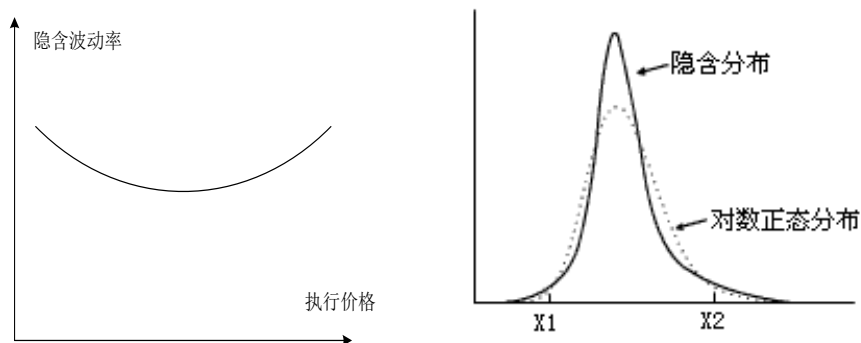


图 7.1 货币期权的波动率微笑 图 7.2 货币期权的对数正态分布和隐含分布

研究发现，货币期权的波动率微笑符合我们对汇率数据的实证结果。实证数据同样表明，汇率的极端变化要比对数正态分布所描绘的更经常出现。这是因为一种资产的价格为对数正态分布需要两个条件：第一，资产波动率为常数；第二，资产价格变动连续平滑，没有跳跃。但是在现实中，汇率价格的变化并不满足这两个条件。汇率的波动率不是常数，而且汇率常常出现跳跃。这两个原因导致了极端情况变得更有可能出现。实际上许多金融资产价格都具有以上两个特征，从而使得它们对应的隐含波动率也常常呈现“波动率微笑”，只是它们往往同时也受到其他因素的影响，使波动率的形状发生了相应的变化，如我们将在下面介绍的波动率偏斜。

需要注意的是，价格的跳跃和波动率的随机性对波动率微笑的影响还会因时间而改变。离到期时间越远，跳跃和随机波动率对波动率微笑的影响都会降低，因为时间越长，跳跃和随机波动所造成的效果越可能被“平均化”，从而在价格的分布中几乎看不到，因此到期日越远，波动率微笑越不明显，隐含波动率越接近常数。

2. 股票期权⁸的波动率偏斜

股票期权的波动率微笑则呈现另一种不同的形状，如图 7.3 所示。有时被叫做“波动率偏斜”（Volatility Skew），看起来象一个偏斜了的微笑。当执行价格上升的时

⁸ 股票指数期权也具有类似特征。

候，波动率下降，而一个较低的执行价格所隐含的波动率则大大高于执行价格较高的期权。也就是说，这时，波动率曲线的形状不再象货币期权那么对称，而是向右下方偏斜的。

股票期权的波动率微笑对应着图 7.4 给出的隐含分布。与虚线的对数正态分布相比，隐含分布左尾更大，这意味着一个执行价格为 x_1 的深度虚值看跌期权（或深度实值看涨期权）价格会偏高，从而有较高的波动率；同时隐含分布的右尾更小，这意味着一个执行价格为 x_2 的深度虚值看涨期权（或深度实值看跌期权）价格会偏低，从而波动率较低。这显然符合 7.3 的波动率微笑曲线。

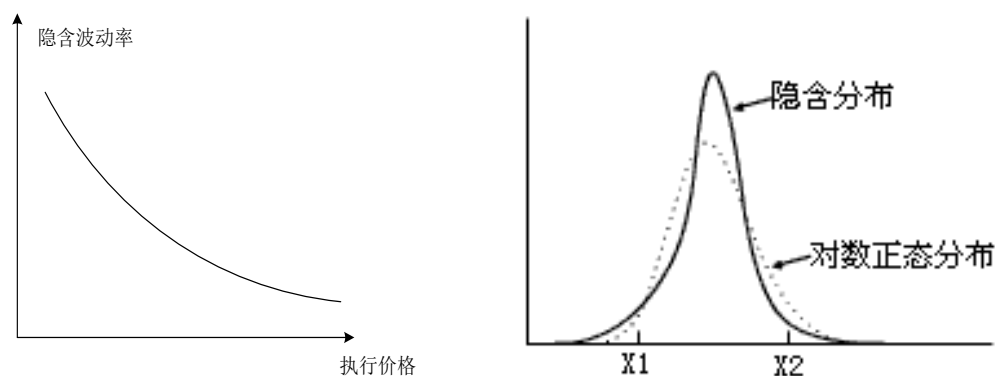


图 7.3 股票期权的波动率微笑（偏斜）图 7.4 股票期权的对数正态分布和隐含分布

股票期权之所以会有偏斜的波动率微笑，一个可能的解释与股市的“崩盘”有关。偶尔发生的崩盘事件深刻影响了投资者的心理，投资者很担心一个类似于 1987 年 10 月的暴跌再次发生，因此市场对价格变化的概率估计是不对称的，即价格显著下跌的可能性远远大于显著上升的可能性，这导致了隐含波动率的偏斜。

二、波动率期限结构

除了波动率微笑，期权交易者还常常使用波动率期限结构。这是指其他条件不变时，平价期权所对应的隐含波动率随到期日不同所表现出来的变化规律。一般来

说，不同的标的资产所表现出来的期限结构具体形状会有所不同，但它们大都具有以下两个特点：

1.从长期来看，波动率大多表现出均值回归（Mean-reverting）。即到期日接近时，隐含波动率的变化较剧烈，随着到期时间的延长，隐含波动率将逐渐向历史波动率的平均值靠近，呈现均值回归现象。

2 波动率微笑的形状也受到期权到期时间的影响。大多时候，期权到期日越近，波动率“微笑”就越显著，到期日越长，不同价格的隐含波动率差异越小，接近于常数。⁹

三、波动率矩阵

把波动率微笑和波动率期限结构结合在一张表里，可以得到任何执行价格和任何到期时间的期权所对应的隐含波动率，就形成了波动率矩阵。如表 7.1 所示波动率矩阵的一个方向是执行价格，另一个方向是距离到期的时间，矩阵中的内容是从 BS 公式中计算得到的隐含波动率。在任意给定的时刻，该矩阵中的某些期权在市场中有交易，从而这些期权的波动率可以直接从它们的市场价格中计算出来，其余的点则可以用线性插值法确定。

当必须为某个新的期权定价时，交易人员就从矩阵中寻找适当的波动率。例如，当为一个执行价格为 1.05 的 9 个月期权定价时，交易人员将在 13.4 和 14.0 之间进行线性插值，得到适合的波动率为 13.7%，这个波动率将在 BS 公式或二叉树

⁹因此，为了消除时间因素对波动率微笑的影响，一些交易者把波动率微笑定义为 $\frac{1}{\sqrt{T-t}} \ln \frac{X}{F_0}$ 。其中 $T-t$ 为剩余到期时间， F_0 为资产相应的远期价格。由于 $F_0 = S_0 e^{(r-q)(T-t)}$ ，应用这个公式意味着用 $\ln \frac{X}{F_0}$ 来表示执行价格与资产价格之间

的关系，即期权的平价、实值或虚值状态，再除以一个 $\sqrt{T-t}$ ，从而使得资产的隐含波动率对时间的依赖程度大大降低，更好地反映执行价格对波动率的影响。

定价方法（我们将在第九章讨论这一方法）中使用。

剩余有效 期	执行价格				
	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
一个月	14.2	13.0	12.0	13.1	14.5
三个月	14.0	13.0	12.0	13.1	14.2
六个月	14.1	13.3	12.5	13.4	14.3
一年	14.7	14.0	13.5	14.0	14.8
两年	15.0	14.4	14.0	14.5	15.1
五年	14.8	14.6	14.4	14.7	15.0

表 7.1 波动率矩阵

四、波动率微笑和波动率期限结构的意义和应用

波动率微笑和波动率期限结构的存在，证明了 BS 公式关于波动率为常数的基本假设是不成立的，至少期权市场不是这样预期的。因此放松波动率为常数的假设，成为期权理论发展的一个重要方向。目前主要有两种不同的策略：

1.从期权市场出发的改良策略，即仍然以 BS 模型为基础，但同时假定期权市场已经认

识到真实的波动率函数，考虑不同期权市场和期权品种所对应的波动率矩阵，运用隐含波动率信息对 BS 公式作相应的调整应用。我们前面所介绍的从波动率矩阵中获取适合的波动率就是属于这一策略。

应用这一策略时要非常小心，因为期权市场的隐含波动率具有一定的局限性：

（1）这一隐含波动率可能是市场供求的影响结果而不完全是市场对波动率的预期，而我们难以对供求关系推动的和市场预期推动的波动率加以区分；

（2）我们无法保证市场中的所有参与者都采用同一个定价模型。如果市场使用的模型差异很大，波动率矩阵也将不同，说明市场对波动率的认识是不同的。这时我们使用 BS 公式倒推出来的隐含波动率就可能具有误导性。

（3）波动率矩阵实际上反映的是期权市场对于未来波动率的瞬时预期，和我们目前观察到的实际波动率可能很不一样，而且这一预期不一定会实现，甚至几天之内就会发生变化。

因此，在改良策略中我们使用 BS 模型具有一定的限制条件。市场交易者主要利用它来帮助我们了解与 BS 模型相对应的隐含波动率的瞬时情形，并且为流动性差的期权（比如我们后面将介绍的奇异期权）定出与交易活跃的常规期权一致的市场价格。这时我们必须在买卖奇异期权的同时用这些交易活跃的期权进行相应的套期保值，才能降低模型错误的风险。

2.创新策略。对于那些对波动率变动很敏感的期权，仅仅使用改良策略可能具有较大的风险，这时一些交易者倾向于采用新的模型来为期权定价。这些创新策略的主要思路是：改变 BS 模型波动率为常数的基本假设，一般是从标的资产市场数据出发，建立波动率的模型，使之反映真实情形，在此基础上计算期权的价值。这就是我们在下一节将阐述的内容。后面我们将会看到，这些模型的结果往往都会和波动率微笑和期限结构相呼应，这进一步向我们证实了研究隐含波动率矩阵的重要性。

第四节随机波动率

一、随机波动率模型

在现实世界中，波动率显然并非常数，而且无法直接在市场上观测到，人们甚至发现波动率是无法预测的。在很多情况下，象股价这样的因素并不能完全解释波动率的变化。因此，有必要考虑更一般的方法，即将 σ 作为随机变量，建立随机波动率模型。

到目前为止，为随机波动率建模的文献已经相当多，其一般模型为：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1$$

$$d\sigma = p(S, \sigma, t)dt + q(S, \sigma, t)dz_2$$

其中 dz_1 和 dz_2 的相关系数为 ρ 。这时对函数 $p(S, \sigma, t)$ 和 $q(S, \sigma, t)$ 的选择很重要，它不仅关系到波动率的确定，也对期权定价有重要影响。

在为期权定价过程中，随机波动率也同样可以采用 BS 方程所使用的无套利定价过程，只是这时候，在期权组合中，由于期权的价格函数由 $f(S, t)$ 变为 $f(S, \sigma, t)$ ，这时不仅需要 Δ 份的标的资产以消除 S 带来的不确定性，还需要加入 Δ_1 份的另一种期权以消除 σ 带来的不确定性，即 $\Pi = f - \Delta S - \Delta_1 f_1$ ，在此基础上再进行相应的分析，为期权定价。当然这时的模型往往非常复杂，常常无法得到解析解。因此，尽管这些复杂的模型更接近现实，但 BS 公式仍然使用广泛，尤其在它的一些假设影响不是很大的时候。下面我们介绍其中一些较为有名的波动率模型。

Hull 和 White 考虑了一般的和特殊的随机波动率模型，其中一个股票风险中性的随机波动率模型为

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sqrt{V} dz_s$$

$$dV = a(b - V)dt + \xi V^\alpha S dz_v$$

其中 a 、 b 、 ξ 和 α 是常数， dz_s 和 dz_v 都是维纳过程， V 则是股票的方差率，即波动

率的平方。显然方差率本身是一个随机过程，并以 a 的速度回归到水平 b 。

Hull 和 White 把这个模型得到的期权价格同使用 BS 公式得到的价格进行了比较，其中 BS 公式中使用的方差率是期权存续期间预期的平均方差率。他们发现：随机波动率确实会引起定价的偏差，而波动率和资产价格之间的相关性在其中相当重要。

1.当波动率是随机的，且与股票价格不相关时，也就是 dz_s 和 dz_v 不相关时，情形比较简单，欧式期权的价格是 BS 价格在期权有效期内平均方差率分布上的积分值，即欧式看涨期权的价格为¹⁰

$$\int c(\bar{v})g(\bar{v})d\bar{v}$$

这里的 \bar{v} 是方差率 v 在期权有效期内的平均值； c 是应用 \bar{v} 和 BS 公式计算出的期权价格，为 \bar{v} 的函数； g 则是在风险中性世界中 \bar{v} 的概率密度函数。Hull 和 White 发现 BS 公式倾向于高估平价或接近平价的期权价格，低估深度实值和深度虚值期权，这和上一节中波动率微笑模式一致（见图 7.1）。

2.在股票价格和波动率相关的情况下，这个随机波动率模型没有解析解，只能使用数值方法得到期权价格。当波动率和股票价格负相关时，得到的结果类似于股票期权的波动率偏斜模式（见图 7.3）；当它们之间是正相关时，结果正好相反，BS 模型倾向于低估虚值看涨期权而高估虚值看跌期权。

3.波动率随机性质的影响，也会因到期时间的不同而不同。我们在上一节曾经提到，有效期越长，随机波动率对波动率微笑的影响越不显著，因为随机变化会在长期中平均化。但是随机波动率对定价偏差绝对值的影响则正好相反，时间越短，随机波动率引起的定价偏差绝对值越小（但是对于深度虚值期权而言，这个偏差

¹⁰ 具体内容参见 J. C. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," Journal of Finance, 42 (June 1987), 281-300.

用百分比衡量时可能是很大的)。

二、GARCH 模型

另一个广泛使用的波动率模型是广义自回归条件异方差模型 (GeneralizedAutoregressiveConditionalHeteroskedasticity,GARCH)。

1.GARCH(1,1)模型简介

GARCH 模型又可以分为多种, 其中最常见的是 GARCH(1,1)模型:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha \varepsilon_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (7.11)$$

其中 γ 、 α 和 β 都为常数, 且 $\gamma + \alpha + \beta = 1$, $\omega = \gamma V$, V 为恒定的长期平均股票方差率。 $\varepsilon_n = \mu_n - \bar{\mu}$, 即 n 时刻收益率对收益率均值的离差, 可以看作是有关方差率的最新信息。

从式 (7.11) 可以看出, 该模型意味着在 n 时刻的方差率 σ_n^2 是三个因素的加权平均: 恒定的长期平均方差率 V 、前一时期的方差率 σ_{n-1}^2 和关于方差率的最新信息 ε_{n-1}^2 。由于 σ_n^2 只建立在最新一期 ε_{n-1}^2 和 σ_{n-1}^2 估计值的基础上, 因而被称为 GARCH(1,1)。更一般的 GARCH(p,q)模型则从最近 p 期的 ε^2 和最近 q 期的 σ^2 信息中估计方差率。

采用 $\sigma_n^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$ 的形式, 用最大似然估计法估计三个参数 ω 、 α 和 β , 可以进一步得到 γ 和 V 的值, 并可计算出特定时刻波动率的大小。

例 7.1 假设我们从每日交易数据中估计出 GARCH (1,1) 模型为:

$$\sigma^2 = 0.000002 + 0.13\varepsilon_{n-1}^2 + 0.86\sigma_{n-1}^2$$

这说明 $\alpha = 0.13$, $\beta = 0.86$, $\omega = 0.000002$ 。根据 $\gamma + \alpha + \beta = 1$, 我们可以算出 $\gamma = 0.01$; 进一步由于 $\omega = \gamma V$, $V = 0.0002$ 。也就是说模型中得到的长期平均日方差率为 0.0002, 那么每日波动率就为 1.4%。

如果已经估计出第 $n-1$ 天的 σ_{n-1} 为 0.016, ε_{n-1} 为 0.01, 则

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 \times 0.01^2 + 0.86 \times 0.016^2 = 0.00023516$$

因此, 第 n 天波动率的估计值就为每天 $\sqrt{0.00023516}$ 即 1.53%。

2. 不同时期的权重分布

对式 (7.11) 的右边重复 σ 的迭代过程, 可以得到

$$\sigma_n^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} \varepsilon_{n-i}^2 \quad (7.11)$$

这说明在任意给定的时刻, 方差率又可以看作是一个常数加上所有过去的 ε^2 的加权和。 $n-i$ 时刻的 ε^2 分配的权重为 $\alpha\beta^{i-1}$, 即随着时间往前推移, 分配的权重是以速率 β 指数下降的, 越早的数据权重越小。这里的 β 被称为衰减率 (DecayRate)。

比如, 如果 $\beta=0.9$, 那么 ε_{n-2}^2 的重要性就只有 ε_{n-1}^2 的 90%, 而 ε_{n-3}^2 的重要性更进一步下降到 ε_{n-1}^2 的 81%。时间距离当前越近的数据, 权重越大, 这是符合实际的。

3. 应用 GARCH(1,1) 模型预测未来的波动率

通过适当的变换, 我们可以将式 (7.12) 写作

$$\sigma_{n+k}^2 - V = \alpha(\varepsilon_{n+k-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{n+k-1}^2 - V)$$

由于 $E(\varepsilon_{n+k-1}^2) = E(\sigma_{n+k-1}^2)$, 可得未来波动率的预期值为

$$E[\sigma_{n+k}^2] = V + (\alpha + \beta)^k (\sigma_n^2 - V)$$

由于我们设定 $\alpha + \beta < 1$, 随着 k 的增加, 以上式子中的最后一项会越来越小, 这意味着方差率会呈现出向 V 的均值回归, 这和我们前面所讨论的随机波动率模型具有相似的特点, 也正是我们在波动率期限结构中曾经讨论过的性质。如果 $\alpha + \beta = 1$, 说明长期平均方差率不起作用, 未来预期波动率等于目前的波动率水平; 如果 $\alpha + \beta > 1$, V 的权重为负, 波动率是均值偏离的而非均值回归的, 无法进行最大似然估计, 这时需要转向其他的模型来解释和估计波动率。

第五节不确定的参数

考虑了红利收益率 q 的 BS 方程可以写作

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0。$$

在这个抛物形偏微分方程中，包括了两个变量 S 和 t ，三个参数 σ ， r 和 q 。BS 方程假定这些都是已知的，但现实世界并没有那么完美。即使是看起来很简单的 S 和 t ，也需要考虑诸如买卖价差、非交易日等的影响，更不用说每个期权合约各自还有其特有的参数如执行价格 X ，边界水平等条件。在这些变量和参数里面， σ ， r 和 q 的不确定性是最强的，因此，现实生活当中存在着这样的问题：当参数价值是不确定的时候，如何为期权定价？

我们可以使用的一个方法是为这些参数再确定一个模型，将其与标的资产价格结合起来使用，比如我们之前介绍的关于随机波动率的模型。但这种办法也有其缺陷：一旦我们引入新的模型，我们还需要再考虑新模型的正确性，以及更多参数的不确定性。因为实际上只有期权到期的时候，我们才能真正知道这些参数的正确值和遵循的路径，再复杂精密的预测模型也有错误的风险。

因此，Avellaneda, Levy, Paras 和 Lyons 等人¹¹提出了另一种解决方法：我们不再假设已经知道参数的精确值，而是假设我们知道这些参数位于某个特定的区间之内（我们选择的区间代表了我们对期权或期权组合的参数价值在有效期间上下限范围的预测），之后考虑最悲观的情况下我们的期权至少值多少。用这样的假设和思路，我们不会计算出期权的某一特定价值，而会发现期权的价值也将位于某个区间之内。下面，我们将介绍针对不确定的 σ ， r 和 q 为期权定价的具体方法。

¹¹ 参见 M. Avellaneda, A. Levy and A. Paras, "Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities," *Applied Mathematical Finance*, 2 (1995), 73-88; M. Avellaneda and A. Paras, "Managing the Volatility Risk of Derivative Securities: the Lagrangian Volatility Model," *Applied Mathematical Finance*, 3 (1995), 21-53; T. J. Lyons, "Uncertain Volatility and the Risk-free Synthesis of Derivatives," *Applied Mathematical Finance*, 2 (1995), 117-133.

一、 不确定的波动率

我们先假设波动率位于 $\sigma^- < \sigma < \sigma^+$ 的范围内。然后我们仍然沿用 BS 模型的无套利组合方法，构造一个价值为 $f(S,t)$ 的期权多头，并用 $-\frac{\partial f}{\partial S}$ 份标的资产对其进行保值。这样组合的价值为 $\Pi = f - \frac{\partial f}{\partial S} S$ 。我们仍然假设 $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ ，即使 σ 未知，

我们仍然可以得到组合的价值变化为 $d\Pi = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt$ 。

从这里开始，这个方法和传统的 BS 模型有了微妙的区别。由于我们只知道 σ 的范围，所以无法得到期权价值的特定值。但是我们可以计算出最糟糕的情况下的期权价值。其方法是在给定的波动率范围内取组合价值的最小值，并使之等于无风险收益。这样我们就可以计算出我们手中持有的期权至少值多少。这显然是符合投资者的心理和实际情况的。用数学公式表示为：

$$\min_{\sigma^- < \sigma < \sigma^+} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left(f - S \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt。$$

那么，在求最小值的时候要使用哪一个波动率呢？观察上式中的波动率项，它和期权的 Γ 相乘。因此， σ 的取值要取决于 Γ 的符号。当 Γ 是正的时候，我们选择下限 σ^- ，当 Γ 为负的时候，我们选择上限 σ^+ 。这是因为期权多头的 Γ 都大于零，投资者当然会选择最小的波动率得到最低的价值；而期权空头的 Γ 都小于零，投资者会选择最大的波动率，使其卖空的价值最大，意味着损失最大。总之，期权价值下限 f^- 满足

$$\frac{\partial f^-}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(\Gamma)^2 S^2 \frac{\partial^2 f^-}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f^-}{\partial S} - rf^- = 0 \quad (7.13)$$

其中， $\Gamma = \frac{\partial^2 f^-}{\partial S^2}$ 且 $\sigma(\Gamma) = \begin{cases} \sigma^+, & \text{如果 } \Gamma < 0 \\ \sigma^-, & \text{如果 } \Gamma > 0 \end{cases}$ 。

我们也可以计算出期权价值上限 f^+ ，

$$\frac{\partial f^+}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(\Gamma)^2 S^2 \frac{\partial^2 f^+}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f^+}{\partial S} - rf^+ = 0$$

其中， $\Gamma = \frac{\partial^2 f^+}{\partial S^2}$ 。但这次 $\sigma(\Gamma) = \begin{cases} \sigma^+, & \text{如果 } \Gamma > 0 \\ \sigma^-, & \text{如果 } \Gamma < 0 \end{cases}$ 。

因此我们可以计算出期权的可能价值区间，但是我们通常不会去使用价值上限，计算上限的价值在于：对于同一份合约来说，它的多头和空头价值区间在数值上是相等的，只是最好和最差情景要颠倒过来而已。因此我们只需要计算多头最大价值，就可以得到空头的价值下限。

值得注意的是，在这个模型中，我们又一次遇到了 H-W-W 交易成本方程中出现的非线性问题。多头和空头的价值不同，并且都是由于 Γ 的符号不同产生的。相应地也就出现了单个期权和期权组合的区别。由于多头和空头之间可以互相抵消，因此如果期权组合中的 Γ 的符号不同，期权组合的价值并不等同于单个期权的价值之和。只有对单个期权或是 Γ 的符号始终一致的期权组合而言，这个方程才是线性的。

二、不确定的利率

不确定利率的处理思想非常类似。假设无风险利率位于 $r^- < r < r^+$ 之间，我们的投资组合还是 $\Pi = f - \frac{\partial f}{\partial S} S$ ，同样设定组合的收益率等于无风险利率，可以得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t。$$

这时我们观察到 r 是和 Π 相乘，因此我们发现给出最低和最高期权价值的 r 要取决于组合 Π 的符号。更具体的说，最差的情况下，如果我们的组合有一个正的价值，那么利率应取最高值 r^+ ；如果有一个负的价值，利率应取最低值 r^- 。原因在于如果 $\Pi > 0$ ，意味着 $f > \frac{\partial f}{\partial S} S$ ，即我们在期权上有一个正的投资（卖空标的资产的收入不足以支付期权多头价格），利率越高越不利。这样，我们选择的利率将依赖于

Π 的符号。相应的方程为

$$\frac{\partial f^-}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f^-}{\partial S^2} + r(\Pi) \left(S \frac{\partial f^-}{\partial S} - f^- \right) = 0$$

$$\text{其中, } \Pi = f^- - S \frac{\partial f^-}{\partial S}$$

$$r(\Pi) = \begin{cases} r^+, & \text{如果 } \Pi > 0 \\ r^-, & \text{如果 } \Pi < 0 \end{cases}$$

期权价值上限的方程也可以用上述方法很容易地推导出来。

三、不确定的红利收益率

我们把红利问题限制在它独立于资产价格的情况下。我们主要介绍连续支付红利的情况下，其推导过程很类似。假设股利率位于 $q^- < q < q^+$ ，那么对于最糟糕的情况，我们只要解出

$$\frac{\partial f^-}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f^-}{\partial S^2} + r \left(S \frac{\partial f^-}{\partial S} - f^- \right) - q(\Delta) S \frac{\partial f^-}{\partial S} = 0$$

即可。

$$\text{其中, } q(\Delta) = \begin{cases} q^+, & \text{如果 } \Delta < 0 \\ q^-, & \text{如果 } \Delta > 0 \end{cases}^{12}$$

四、模型的扩展和深入理解

- 1.可以把上述结果结合起来形成一个波动率、利率和红利率都不确定的模型。
- 2.同样的思想也可以被应用到基于多个标的资产的投资工具上，这类投资工具价值依赖于标的资产之间的相关关系。相关关系是一个特别难以计算或预测的东西，此时不确定性扮演了一个重要的角色，可以应用同样的方法。
- 3.在这些不确定参数的模型中，一个主要的思路是：考虑最悲观的情况，假设最糟糕的结果，并相应地为合约定价。这么做，只要我们的参数区间不被突破，就

¹² 显然这是因为红利问题与标的资产市场中需要进行的套期保值数额 Δ 有关。

可以保证永远不会损失。

4.我们需要再次强调，在本节中得到的所有偏微分方程都是非线性的，需要对多头和空头进行区别。解析解只在特殊情况下存在，而这些情况都要求波动率、利率和股利所分别对应的变量 Γ 、 Π 和 Δ 是统一符号的。这种情况下，模型就退化成简单的 BS 公式，其参数对应相应的上下限价值。

由于模型的非线性，因此期权组合的价值未必等于单个期权价值之和，并且由此得到一个很重要的结论：一份合约的价值取决于组合中的其他合约。

5.不确定参数模型的一个重要缺点在于：如果参数或者是相关关系区间过大，往往会导致预测的价格区间过宽。这时这个模型就没有什么实际意义。但是我们前面所提到的模型非线性可以帮助我们缩小这个区间，我们可以在组合中加入相关的期权多头或空头，减少参数不确定性带来的影响，从而缩小定价范围。

第六节跳跃扩散过程

实际生活中充分的证据表明，许多金融变量，无论是股票价格、汇率还是利率，都不服从对数正态随机漫步过程，而这正是 BS 公式（也是几乎所有金融学文献）的重要假设。这一假设隐含认为资产价格 S 变化的路径是连续的，这种连续性允许我们构造一个包含资产与期权的瞬时无风险组合，从而为期权的定价提供了一个出发点。但在现实生活中，突然的跳跃（Jump）发生的次数比拥有一个合理波动率的对数正态分布所预测的要多得多，短期来看这种变化是不连续的，我们无法通过动态保值的方法规避这种跳跃带来的风险。因此，将跳跃引入到原先的扩散方程¹³中，对衍生资产理论和实践具有重要意义。

在本节中我们主要讨论由 Merton 提出的跳跃扩散模型（TheJumpDiffusionModel）。

¹³ BS 方程可以转换为工程学中的热扩散方程形式，并进一步求解，因此常被称为“扩散方程”。

所谓的跳跃扩散过程是普通的（路径连续的）扩散过程和一个在随机时刻发生跳跃的（跳跃幅度也是随机的）跳跃过程的结合，显然这种变化过程更能反映现实价格路径，对应的模型则可以认为是考虑资产价格有不连续的跳跃时对 BS 公式的推广。

一、资产价格所遵循的跳跃扩散过程

除了使用原先的连续布朗运动来反映连续扩散过程之外，我们还需要引入泊松过程来描述资产价格的跳跃：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz + (J - 1) S dq$$

其中， $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ 部分是资产价格不发生跳跃时所服从的连续扩散过程，其变量定义如前，其中的 σ 和 μ 都是不发生跳跃时的波动率和收益率。

方程的后半部分是对跳跃过程的描述。其中的 dq 为泊松过程，定义为 $dq = \begin{cases} 0, & \text{概率 } 1 - \lambda dt \\ 1, & \text{概率 } \lambda dt \end{cases}$ 。即在一个很小的时间间隔 dt 里 q 的一个跳跃的概率为 λdt 。 λ 叫做泊松过程的强度。模型中一般假设在布朗运动和泊松过程之间没有相关关系。在随机时刻，如果发生一个跳跃即 $dq = 1$ 时，那么 S 立刻达到 JS 。比如若 $J = 0.9$ ，那么资产价格会立刻下跌 10%。我们还可以进一步假设 J 本身也是一个随机变量，和布朗运动 dz 及泊松过程 dq 分别独立。另外，各次跳跃对应的幅度也是相互独立的。

运用 Ito 引理，我们可以得到价格对数遵循的跳跃扩散过程为

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz + (\ln J) dq$$

二、跳跃扩散过程的保值组合和期权定价

我们仍然可以应用 BS 方程的无风险组合思想来为包含跳跃的期权定价。这个组合仍为：

$$\Pi = f(S, t) - \Delta S$$

这样，运用 Ito 引理，包含了跳跃的组合价值变化为

$$d\Pi = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) dS + (f(JS, t) - f(S, t) - \Delta(J-1)S) dq \quad (7.14)$$

如果 t 时刻没有跳跃发生，则 $dq = 0$ ，那么我们会选择 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ 来降低风险。如果有跳跃，则 $dq = 1$ ，我们仍然可以选择 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ （这时我们实际上仍然遵从 BS 模型的策略，仅为扩散保值）。相应组合的价值变化就是

$$d\Pi = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + (f(JS, t) - f(S, t) - \Delta(J-1)S) dq$$

这时组合中包含两个部分，一是确定的部分，二是每隔一段时间常常会发生的非确定的跳跃。Merton¹⁴于 1976 年提出了一个重要的思想：如果资产价格变化过程中的跳跃成分与整个市场无关的话，就属于可分散风险，可分散风险不应该获得期望收益。换一句话说，尽管其中仍然包含风险，但 $d\Pi$ 的期望值却应该等于组合的无风险收益。用这个假定，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf + \lambda E[f(JS, t) - f(S, t)] - \lambda \frac{\partial f}{\partial S} SE[(J-1)] = 0$$

$E[\cdot]$ 表示对跳跃幅度 J 的期望，也可以写作

$$E[x] = \int xP(J)dJ$$

其中 $P[J]$ 是 J 的概率密度函数。

这就是包含了跳跃的期权定价公式。显然期权价格取决于资产价格瞬时跳跃到什么样的高度。当 $\lambda = 0$ 时，这个方程退化成 BS 公式。

这个差分微分方程一般是没有解析解的，但在一些特殊情况下如 J 服从对数正态

¹⁴ R.C.Merton, "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976), 125-44

分布时，这个方程有一个简单的解。假设 J 的标准差是 σ' ，我们令 $k = E[J-1]$ ，这时欧式看涨期权价格为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-\lambda'(T-t)} (\lambda'(T-t))^n f_{BS}(S, t; \sigma_n, r_n)$$

其中 $\lambda' = \lambda(1+k)$ ， $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n(\sigma')^2}{T-t}$ ， $r_n = r - \lambda k + \frac{n \ln(1+k)}{T-t}$ ， f_{BS} 是没有考虑跳跃时根据 BS 公式和相应给定的参数值计算的期权价值。

这个公式可以理解为多个 BS 期权价格的加权和，其中每个期权都假设在此之前已经发生了 n 次跳跃，并且它们是根据到期前发生 n 次跳跃的概率加权的。

以上就是一般的跳跃扩散方程及其简单形式的定价公式。实际上跳跃扩散方程还有另一种思路。进一步观察式 (7.14)，可以看到我们令 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ ，实际上是仅为标的资产的扩散过程保值，另一种可能性是不仅为扩散，还要同时为跳跃保值，其中一种常见的方法是选择使得整个组合价值变动的方差 $\text{var}[d\Pi]$ 最小的那个 Δ ，然后仍然令整个组合收益等于无风险利率，从而得到期权定价方程。

三、跳跃扩散模型的理解

跳跃扩散模型确实反映了 BS 模型中忽略了的真实现象，但是它们在现实中却较少使用，BS 公式仍然广泛使用，主要的三个原因是：

1. 参数预测很困难：任何定价模型的使用都需要预测参数。在 BS 的对数正态模型中，只有一个参数 σ 需要预测。但即使是最简单的跳跃扩散模型也需要预测由 λ 衡量的跳跃强度以及这个跳跃幅度的大小 J 。如果要考虑 J 的分布，会更加复杂。

2. 方程难以求解：跳跃扩散模型不再是一个扩散方程，而是一个差分方程，除了一些特殊情形外没有解析解。即使是数值方法求解也比较困难。而 BS 公式求解

是相当简单的。

3.完全保值的不可可能性：在标的资产价格有跳跃的情况下，完美无风险套期保值是不可能的。我们上面给出的两种保值方法都达不到 BS 方程的保值程度，得出的结论自然也有所缺陷，我们必须在期望的意义上进行定价。事实上，进行 Δ 保值只能规避一般情形下瞬间的波动，如果出现大幅升跌，这时进行 Δ 保值就没有意义了。这时的一种可能的解决方法是检查最严重的情形，并使期权价格反映这一可能性，这就是我们将在下一节讨论的崩盘模型。

第七节崩盘模型

Hua&Wilmott (1997) 和 Hua (1997)¹⁵提出了一个崩盘模型，考虑在标的资产价格出现极端变动的情况下，如何为期权定价。这一模型的主要思想是：假设最糟糕的情况确实发生，度量标的资产价格变化可能导致的最大损失，之后使用数值方法中的二叉树模型¹⁶，根据可能获得的最低收益来为期权定价。

一、基本的崩盘模型

崩盘模型仍然事先建立了一个保值组合：一单位价值为 f_t 的期权和 $-\Delta$ 单位价值为 S 的标的资产。我们的目的是计算出使组合风险最小的最优 Δ ，从而计算出 f_t 的值。显然，存在崩盘可能性的情况下， Δ 的取值要考虑最糟糕的收益情况，并在可能发生的最差情形中尽可能地选择最优的组合。基本分析如下：

S 在经历一个很短的时间 Δt 之后，在正常情况下，会根据二叉树模型到达 A 状态 (S_u) 和 B 状态 (S_d)，但是还有一种可能的状态 C，即发生崩盘，到达 $S(1-k)$ 。

这里 u 、 d 和 k 都是已知确定的值。(图 7.5 描述了这一情形，注意尽管有三个结

¹⁵ P. Hua, "Modelling Stock Market Crashes," Dissertation, Imperial College, London, 1997; P. Hua and P. Wilmott, "Crash Course," *Risk Magazine*, 10 (June 1997), 64-67

¹⁶ 要理解崩盘模型，需要首先学习第八章第一节二叉树模型的内容。

果，但我们使用的仍然是二叉树而非三叉树模型，状态 C 也是二叉树模型上的一个节点。) 用下标 1 表示未发生崩盘的情形，0 表示发生崩盘的情形，则相应的期权价值分别为 f_1^+ 、 f_1^- 和 f_0 。整个组合的价值变化为

$$\Delta\Pi_A = f_1^+ - \Delta Su + \Delta S - f_1 \quad (\text{扩散过程的上升情形})$$

$$\Delta\Pi_B = f_1^- - \Delta Sd + \Delta S - f_1 \quad (\text{扩散过程的下降情形})$$

$$\Delta\Pi_C = f_0 + \Delta Sk - f_1 \quad (\text{崩盘情形})$$

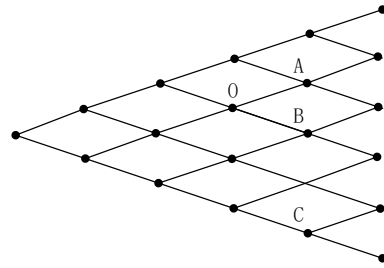


图 7.5 用树图结构表示的崩盘模型

这时有两点需要强调：第一，基本崩盘模型中只考虑发生一次崩盘的情况，这样崩盘之后期权头寸的价值 f_0 仍然是根据相应的 $S(1-k)$ 和 t 计算出来的 BS 价格。

第二，由于我们已经为期权建立了保值组合，对于整个组合来说，并非 S 变动幅度越大，组合价值越低，而是会出现一个临界点。Hua&Wilmott 发现，当 f_0 足够大到

$$f_0 \geq f_1^+ + (S - Su - Sk) \frac{f_1^+ - f_1^-}{Su - Sd} \quad (7.15)$$

时，最糟糕的情况并不是发生在出现崩盘的时候，而是出现在正常的扩散过程中，即 A、B 状态中；如果 f_0 小于上述临界值，则崩盘将导致最差的结果。

1. f_0 大于临界值的情形

在图 7.6 中，我们将三种组合价值放在一个图中，选择一个 Δ ，找到最低的组合价值，同时不断改变 Δ 值直到获得这个最低价值的最大化，结果我们将发现当

$$\Delta = \frac{f_1^+ - f_1^-}{Su - Sd} \quad (7.16)$$

时即 $\Delta\Pi_A = \Delta\Pi_B$ 时，组合的最低价值最大。这就是最优的保值比率。

选定 Δ 之后，我们让组合收益率等于无风险收益率，即 $\Delta\Pi_A = r\Pi\Delta t$ 。可以得到

$$f_1 = \frac{1}{1+r\Delta t} \left(f_1^+ + (S - Su + rS\Delta t) \frac{f_1^+ - f_1^-}{Su - Sd} \right) \quad (7.17)$$

这就是 f_0 大于临界值的情形下期权价值的计算公式。我们可以发现如果让 $\Delta t \rightarrow 0$ ， Δ 和 f_1 实际上就是 BS 模型中的对应值。这是因为最差情况的发生与崩盘无关，因此在定价时无需考虑崩盘的影响。

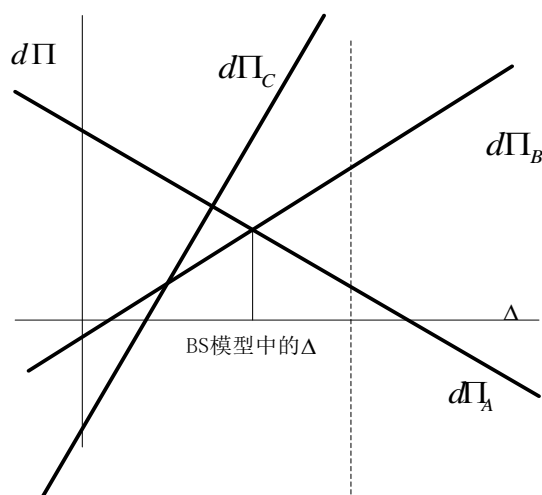


图 7.6 最差的情形发生在扩散过程中

2. f_0 小于临界值的情形

当 f_0 小于临界值，即最差的情况发生在崩盘的时候，我们必须考虑崩盘的影响。

根据图 7.7，这时我们应该选择 $\Delta\Pi_A = \Delta\Pi_C$ 的交点，即

$$\Delta = \frac{f_0 - f_1^+}{S - Su - Sk} \quad (7.18)$$

来为期权定价，这时组合风险最小。根据 $\Delta\Pi_A = r\Pi\Delta t$ 我们得到

$$f_1 = \frac{1}{1+r\Delta t} \left(f_0 + S(k+r\Delta t) \frac{f_0 - f_1^+}{S - Su - Sk} \right) \quad (7.19)$$

这就是 f_0 小于临界值的情形下期权价值的计算公式。由于考虑崩盘的影响，这时的 Δ 就不再等于 BS 模型中的保值比率，期权价值公式也不能转化为 BS 偏微分方程。

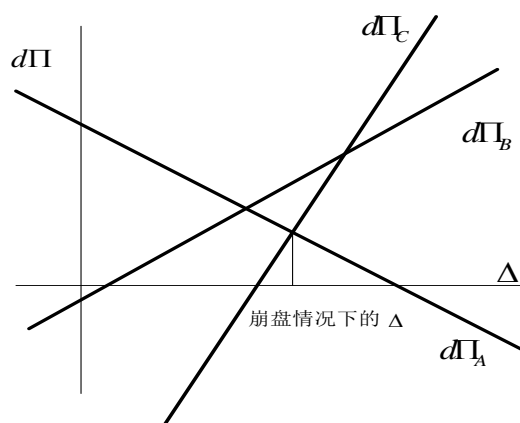


图 7.7 最差的情形发生在崩盘情况下

以上就是存在崩盘可能的情况下的期权定价公式，可以使用一般二叉树模型的倒推法计算出 f_1 的价值。

二、崩盘模型的推广

1. 从离散到连续的推广

如果令式 (7.15) 到 (7.19) 中的 $\Delta t \rightarrow 0$ ，我们可以发现在满足下面限制条件时仍然可以用 BS 公式来求取 $f_1(S, t)$ ：

$$f_1(S, t) - Sk \frac{\partial f_1}{\partial S}(S, t) \leq f_0(S(1-k), t)$$

2. 崩盘程度的扩展

基本崩盘模型中的 k 是给定的，我们可以将这个假定扩展到允许 k 位于一个区间内，即假设 $k^- \leq k \leq k^+$ ，这样期权价值就等于

$$f_1 = \min_{k^- \leq k \leq k^+} \left(\frac{1}{1+r\Delta t} \left(f_0 + S(k+r\Delta t) \frac{f_0 - f_1^+}{S - Su - Sk} \right) \right)$$

3.多次崩盘模型

可以从两个方面来考虑多次崩盘：第一是对一段时间之内的崩盘次数加以限制；第二是对崩盘之间的时间长度进行限制。

（1）限制崩盘总次数

假设允许 N 次崩盘，崩盘时间不限。崩盘大小为下跌 $k\%$ （当然这个 k 也可以很容易的扩展到一个区间）。定义 $f_i(S, t)$ ($i=0,1,\dots,N$)，这里的 f_i 是在剩余时间内，还允许 i 次崩盘的期权价格，因此 f_0 仍然是根据 BS 公式计算的价格。这样针对每次崩盘，我们都可以根据一般模型的方法计算临界值、 Δ 值和 f_i ，并根据二叉树模型倒推出最初的期权价值。

（2）限制崩盘频率

限制崩盘频率时，需要引入一个新的变量 τ ，反映上一次崩盘到现在的时间间隔。如果发生崩盘的时间还没到达，这时用 $f_i(S, t, \tau)$ 来计算可能的最低价值；如果已经允许发生崩盘，则用 $f(S, t)$ 进行计算。基本方法同限制崩盘总次数的计算方法。

三、崩盘模型的理解

第六节所讨论的跳跃扩散模型有两个缺点：无法实现完全保值；参数很难预测。而崩盘模型是对这两个方面的一个补充。崩盘模型考虑了资产价格运动的极端情形，给出了最差情形下的期权定价，从而弥补了价格出现极端运动时保值失效的缺陷。这样，除非我们非常不幸，最糟的情况确实发生了，否则我们就可以获得更多的预期收益。同时崩盘模型没有对崩盘发生的时间和规模分布作任何假设，减少了参数预测的问题，也没有使用预期的概念。因而能够更有效的考察巨幅变动发生的情景。实际上，崩盘模型和 VaR（在险价值）相当类似，它们都是对最

糟糕情况下的情景分析，我们将在第十一章讲解 VaR 的内容。

小结

1. BS 模型最基本的假设包括没有交易成本、模型的参数如波动率、利率和红利率为常数或者至少是确定的函数、标的资产的价格服从对数正态分布等。这些假设在现实中都是难以成立的。
2. 交易成本的存在，会影响我们进行套期保值的次数和期权价格，每一个投资者的不同头寸位置都将会出现一个可行价格区间。Hoggard-Whalley-Wilmott 交易成本模型发现，交易成本对期权价格的影响与 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right|$ 有关，考虑了交易成本后的期权模型是一个非线性方程，期权组合的价值不再是单个期权价值的简单加总。
3. 应用期权的市场价格和 BS 公式推算出来的隐含波动率具有以下两个方面的变动规律：“波动率微笑”和波动率期限结构。这两个规律的存在证明了波动率并非常数。隐含波动率成为市场交易者为期权定价的有力辅助工具。
4. 人们扩展出许多改进波动率假设的模型，包括随机波动率模型和 GARCH 模型。
5. 面对不确定的参数，市场交易者采取的另一种方法是将它们设定在某个预测区间之内而不是赋予它们一个确定的值，考虑在最悲观的情况下期权至少值多少。这种方法能尽量降低损失风险。
6. Merton 提出的跳跃扩散模型是对资产价格对数正态分布这一假设的改进，它将跳跃引入到原先的扩散方程中，使模型更符合现实，但是由于参数难以预测，方程一般无法获得解析解，使得它们在现实中的使用仍不够广泛。
7. 崩盘模型考虑的是在资产价格出现极端变动的情况下，可能导致的最大损失，从而为期权定价。

附录 7A

本附录中主要是欧式看涨期权的定价公式，可以利用看涨看跌期权平价关系推出相应的欧式看跌期权的价格。

一、 复合期权模型

基于无红利股票的欧式看涨期权价值为：

$$c = VM\left(a_1, b_1; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Ae^{-r\tau_2}M\left(a_2, b_2; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Xe^{-r\tau_1}N(a_2)$$

其中：

$$a_1 = \frac{\ln(V/V^*) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_1}{\sigma_V\sqrt{\tau_1}}$$

$$b_1 = \frac{\ln(V/A) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_2}{\sigma_V\sqrt{\tau_2}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma_V\sqrt{\tau_1}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma_V\sqrt{\tau_2}$$

$$\tau_1 = T - t$$

$$\tau_2 = T^* - t$$

其中 $M(a, b; \rho)$ 是第一个变量小于 a ，第二个变量小于 b ，而变量之间的相关关系为 ρ 的二元标准正态累积概率分布。当前时刻为 t 时刻，期权在 T 时刻到期，而变量 V^* 是在 T 时刻 $S = X$ 时 V 的价值。

二、 替代扩散模型

基于替代扩散模型得到的股票欧式看涨期权价值为：

$$c = aSN(d_1) - (X - bS)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln[aS/(X - bS)] + (r + \sigma_R^2)(T - t)}{\sigma_R \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_R \sqrt{T - t}$$

$$a = \alpha(1 + \beta)$$

$$b = (1 - a)e^{r(T-t)}$$

在以上公式中， α 是风险资产占总资产的初始比例， β 是初始债务与股权的比率， σ_R 是风险资产的波动率。如果存在已知红利，则这些红利按无风险利率计复利到 T 时刻的值应从 b 中扣除。

三、 绝对扩散模型

基于替代扩散模型得到的股票欧式看涨期权价值为：

$$c = (S - Xe^{-r(T-t)})N(y_1) + (S + Xe^{-r(T-t)})N(y_2) + vn[(y_1) - n(y_2)]$$

其中：

$$v = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2r(T-t)}}{2r}}$$

$$y_1 = \frac{S - Xe^{-r(T-t)}}{v}$$

$$y_2 = \frac{-S - Xe^{-r(T-t)}}{v}$$

$$n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

这个公式假设股票价格的一个吸收障碍为零。

习题

1. 布莱克-舒尔斯定价模型的主要缺陷有哪些？
2. 交易成本的存在对期权价格有什么影响？
3. 怎样理解下面这个观点：组合中一份衍生证券合约的价值往往取决于该组合中

其他合约的价值？

4. 什么是波动率微笑、波动率期限结构和波动率矩阵？它们的作用何在？
5. 当波动率是随机的且和股票价格正相关时，人们在市场上可能会观察到怎样的隐含波动率？
6. 假设一个股票价格遵循复合期权模型，隐含波动率会是怎样的形状？
7. 如果我们对随机波动率的概念进一步深入下去，使得波动率的波动率也是随机的，结果会如何？
8. 设前一天收盘时 S&P500 为 1040，指数的每天波动率为 1%，GARCH(1,1)模型中的参数为 $\alpha = 0.06$ ， $\beta = 0.92$ ， $\omega = 0.000002$ 。如果当天收盘时 S&P500 为 1060，则新的波动率估计为多少？（设 $\bar{\mu} = 0$ ）
9. 不确定参数模型的定价思想是什么？
10. 如何理解跳跃扩散模型和崩盘模型？
11. 期权交易者常常喜欢把深度虚值期权看作基于波动率的期权，为什么？

答案：

1. （1）交易成本的假设：BS 模型假定无交易成本，可以连续进行动态的套期保值，但事实上交易成本总是客观存在的。（2）波动率为常数的假设：实际上波动率本身就是一个随机变量。（3）不确定的参数：BS 模型假设波动率、利率、股利等参数都是已知的常数（或是已知的确定函数）。但事实上它们都不是一个常数，最为典型的波动率甚至也不是一个时间和标的资产价格的确定函数，并且完全无法在市场观察到，也无法预测。（4）资产价格的连续变动：在实际中，不连续是常见的，资产价格常常出现跳跃。

2. 交易成本的存在，会影响我们进行套期保值的次数和期权价格：交易成本一方

面会使得调整次数受到限制，使基于连续组合调整的 BS 模型定价成为一种近似；另一方面，交易成本也直接影响到期权价格本身，使得合理的期权价格成为一个区间而不是单个数值。同时，不同的投资者需要承担的交易成本不同，具有规模效应，即使是同一个投资者，处于合约多头和空头时，期权价值也不同。

3. 在放松布莱克—舒尔斯模型假设之后，常常出现非线性的偏微分方程，这意味着同一个组合中的期权头寸可能出现互相对冲和保值，减少了保值调整成本，从而使得整个组合的价值并不等于每个期权价值之和，因此组合中一份衍生证券合约的价值往往取决于该组合中其他合约的价值。

4. 应用期权的市场价格和 BS 公式推算出来的隐含波动率具有以下两个方面的变动规律：（1）“波动率微笑”：隐含波动率会随着期权执行价格不同而不同；（2）波动率期限结构：隐含波动率会随期权到期时间不同而变化。通过把波动率微笑和波动率期限结构放在一起，可以构造出一个波动率矩阵，它是我们考察和应用波动率变动规律的基本工具之一。波动率微笑和波动率期限结构的存在，证明了 BS 公式关于波动率为常数的基本假设是不成立的，至少期权市场不是这样预期的。实际从业人员常常从隐含波动率矩阵中获取市场对资产价格分布的信息和预期，从而为衍生证券尤其是那些交易不活跃的期权定价。

5. 当股票价格与波动率正相关时，隐含分布的左尾较小而右尾较大。当股票价格上升时，波动率上升，较高的股票价格出现的概率变大（比波动率为常数时），当股价下跌，波动率下降，较低的价格出现的概率较小。因此，隐含波动率将是股票价格的增函数。正好呈现与图 7.3 相反的形状。

6. 复合期权模型下，股票价格分布右尾较对数正态分布小而左尾较大。波动率微笑就会呈现如图 7.3 的形状。实值看涨期权和虚值看跌期权的隐含波动率较高，

而虚值看涨期权和实值看跌期权的隐含波动率较低。

7. 随机波动率的一般模型为：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_1$$

$$d\sigma = p(S, \sigma, t)dt + q(S, \sigma, t)dz_2$$

其中，我们可以再进一步为 q 建模：

$$dq = a dt + b dz_3,$$

然后可以再为 b 建模，一直下去。从理论上说，这样当然会越来越接近现实，精确度更高。随着市场竞争的加剧，只有精确度提高才能获得更高的利润。但是这也同时要求更高的计算能力，即使计算能力许可，还需要考虑成本效益问题。这需要在模型的拓展和现实应用方面作一定的权衡。

8. $\varepsilon_{n-1} = 20/1040 = 0.01923$, $\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.06 \times 0.01923^2 + 0.92 \times 0.01^2 = 0.0001342$, 因此 $\sigma_n = 0.01158$ 。

9. 不确定性参数模型的定价思想为：我们不再假设已经知道参数的精确价值，而是假设我们知道的这些参数位于某个特定的区间之内（我们选择的区间代表了我们对期权或期权组合的参数值在有效期间上下限范围的预测），之后考虑最悲观的情况下我们的期权至少值多少。这样，只要我们的参数区间不被突破，就可以保证永远不会损失。

10. 跳跃扩散模型除了使用原先的连续布朗运动来反映连续扩散过程之外，还引入了泊松过程来描述资产价格的跳跃，这时过程中包括两个部分，一是确定的部分，二是每隔一段时间常常会发生的非确定的跳跃。为了得到期权价值，Merton 提出了一个重要的思想：即如果资产价格变化过程中的跳跃成分与整个市场无关的话，就不应该获得期望收益。尽管跳跃扩散模型更接近现实，但是由于参数预测的困

难、方程难以求解和完全保值的不可能性，使得它在现实中应用不太广泛。而崩盘模型的主要思想是：假设最糟糕的情况确实发生，度量标的资产价格变化可能导致的最大损失，之后使用数值方法中的二叉树模型，根据可能获得的最低收益来为期权定价。从而弥补了价格出现极端运动时保值失效的缺陷。这样，除非我们非常不幸，最糟的情况确实发生了，否则我们就可以获得更多的收益。同时崩盘模型没有对崩盘发生的时间和规模分布作任何假设，减少了参数预测的问题，也没有使用预期的概念。因而能够更有效的考察巨幅变动发生的情景。

11. 一个深度虚值期权价值很低。波动率的降低进一步降低了它的价值。然而，这个下降程度很小，因为期权价值不可能小于零。另一方面，波动率的提高可能导致期权价值的大幅（百分比）上升。因此，这样的期权和基于波动率的期权具有一些相同的性质。