Estudio de percolación 2D

Murillo Barra Espitia Jaime, Rodríguez P. Nicolás, Torres Julián

11 de junio de 2025

1. Resumen

Se simuló el llenado aleatorio de una malla bidimensional de tamaño $L \times L$ para estudiar la percolación de sitio. Para generar la malla se utilizó un vector de vectores, y sus elementos se ocuparon con una distribución aleatoria uniforme con rango entre 0.0 y 1.0. Un sitio de la matriz se ocupa si su número aleatorio correspondiente es menor o igual a la probabilidad de llenado p. Ya con sitios ocupados y vacíos, se procede a verificar si se forman clusters entre los sitios ocupados (teniendo en cuenta solo vecinos inmediatos), y a cada uno se le asigna una etiqueta o identificador. Si una etiqueta aparece en la primera y en la última fila y/o en la primera y en la última columna, significa que el cluster identificado con dicha etiqueta es percolante. El tamaño de cada cluster se calcula contando cuántos elementos existen por cada etiqueta. Finalmente, se reporta el tamaño promedio del cluster percolante más grande $s(p, L)$ y la probabilidad $P(p, L)$ de que exista un cluster percolante para distintos valores de p y L.

2. Introducción

La teoría de percolación es una rama fundamental de la física estadística que estudia el comportamiento de sistemas aleatorios conectados, con aplicaciones que van desde la propagación de fluidos en medios porosos hasta la transmisión de enfermedades en redes complejas [?, ?]. El concepto central de percolación se basa en determinar si existe un camino conectado que atraviese completamente un sistema aleatorio, fenómeno conocido como transición de percolación.

En sistemas bidimensionales, la percolación de sitio consiste en ocupar aleatoriamente los sitios de una red regular con probabilidad p, donde cada sitio puede estar ocupado (1) o vacío (0). Los sitios ocupados que son vecinos inmediatos forman clusters conectados. El sistema presenta percolación cuando existe al menos un cluster que conecta bordes opuestos de la red, ya sea horizontal o verticalmente [?].

Uno de los aspectos más importantes de la percolación es la existencia de un umbral crítico p_c, donde ocurre una transición de fase. Para $p < p_c$, típicamente solo existen clusters finitos, mientras que para $p > p_c$ aparece un cluster infinito que abarca todo el sistema. En redes cuadradas bidimensionales, el valor crítico teórico es $p_c = 0{,}5927...$ [?].

El estudio computacional de la percolación requiere algoritmos eficientes para identificar y caracterizar clusters conectados. El algoritmo de Hoshen-Kopelman [?] es particularmente útil para este propósito, ya que permite identificar clusters en una sola pasada sobre la red utilizando técnicas de Union-Find optimizadas.

En este trabajo, implementamos una simulación computacional de percolación de sitio en redes cuadradas bidimensionales de diferentes tamaños ($L \times L$), utilizando el algoritmo de Hoshen-Kopelman para identificar clusters conectados. Nuestro objetivo es calcular la probabilidad de percolación $P(p, L)$ y caracterizar estadísticamente el tamaño de los clusters percolantes para diferentes valores de la probabilidad de ocupación p y tamaños de sistema L.

3. El problema

La percolación de sitio en una red cuadrada bidimensional puede modelarse como un proceso estocástico donde cada sitio (i, j) de una matriz $L \times L$ se ocupa independientemente con probabilidad p. El estado del sistema se describe mediante una función binaria $n_{i,j} \in \{0, 1\}$ donde 1 representa un sitio ocupado y 0 un sitio vacío.

Dos sitios ocupados pertenecen al mismo cluster si están conectados mediante un camino de sitios ocupados vecinos inmediatos (conectividad de von Neumann). Un cluster es percolante si conecta al menos dos bordes opuestos del sistema: bordes superior e inferior (percolación vertical) o bordes izquierdo y derecho (percolación horizontal).

Las cantidades de interés son:

- $P(p, L)$: Probabilidad de que el sistema tenga al menos un cluster percolante
- $s(p, L)$: Tamaño promedio del cluster percolante más grande
- $\sigma(p, L)$: Desviación estándar del tamaño de clusters percolantes

4. Metodología Computacional

Las funciones principales implementadas para el estudio son:

fill_matrix(L, p, gen): Llena la matriz con una distribución uniforme de números entre 0.0 y 1.0. Convierte dichos números en 1 si son menores o iguales a p, y en 0 en caso contrario.

Hoshen_Kopelman(matrix, L): Implementa el algoritmo de Hoshen-Kopelman para identificar clusters. Recorre la matriz verificando si los sitios ocupados tienen vecinos ocupados previamente visitados, agrupándolos y asignándoles una etiqueta única mediante técnicas de Union-Find.

check_if_percolant(matrix, L): Verifica si existen etiquetas que aparezcan tanto en la primera fila como en la última, o en la primera columna como en la última. Retorna 1 indicando percolación y la etiqueta del cluster percolante.

count(matrix, L, idx): Cuenta el número de elementos de la matriz que poseen las etiquetas identificadas como percolantes por la función anterior.

Para el análisis estadístico se emplearon las funciones implementadas en `statistic.cpp`. Las funciones `print_matrix(matrix, L)` y `print_sizes(matrix, L)` fueron utilizadas en etapas de desarrollo para verificar el correcto funcionamiento del código.

5. Pruebas y Validación

Como primer acercamiento al problema, se utilizó la función `print_matrix(matrix, L)` para visualizar los sitios ocupados en la matriz. La Figura **??** muestra en amarillo los sitios ocupados con probabilidad $p = 0,5$ en una matriz de tamaño 64×64, mientras que la Figura **??** muestra los sitios ocupados agrupados en clusters de diferentes colores. En este caso específico, no hay percolación.

`data/64_0.5.png`

Figura 1: Matriz 64×64 con $p = 0,5$.

`data/merged_64_0.5.png`

Figura 2: Matriz 64×64 con $p = 0,5$ con sitios ocupados agrupados en clusters.

6. Resultados

Los resultados del estudio sistemático para diferentes tamaños de sistema $L \in \{32, 64, 128, 256, 512\}$ y valores de probabilidad $p \in [0,0, 1,0]$ muestran el comportamiento esperado de la transición de percolación. Se observa que la probabilidad de percolación $P(p, L)$ presenta una transición suave alrededor del valor crítico teórico $p_c \approx 0{,}593$ para la red cuadrada bidimensional.

El análisis estadístico revela que el tamaño promedio de los clusters percolantes exhibe un comportamiento de ley de potencias cerca del punto crítico, consistente con la teoría de percolación. Los efectos de tamaño finito son evidentes en sistemas pequeños, donde la transición aparece más suavizada comparada con el límite termodinámico.

Referencias

[1] Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). *Introduction to percolation theory*. CRC Press.

[2] Sahimi, M. (1994). *Applications of percolation theory*. CRC Press.

[3] Grimmett, G. (1999). *Percolation* (Vol. 321). Springer Science & Business Media.

[4] Ziff, R. M. (2006). Generalized cell-doubling estimates for the percolation threshold. *Physical Review E*, 73(1), 016134.

[5] Hoshen, J., & Kopelman, R. (1976). Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, 14(8), 3438.