

Estudio de percolación 2D

Murillo barra Espitia Jaime, Rodríguez P. Nicolás, Torres Julián

11 de junio de 2025

1. Resumen

Se simuló el llenado aleatorio de una malla bidimensional de tamaño $L \times L$ para estudiar la percolación de sitio. Para generar la malla se utilizó un vector de vectores, y sus elementos se ocuparon con una distribución aleatoria uniforme con rango entre 0.0 y 1.0. Un sitio de la matriz se ocupa si su número aleatorio correspondiente es menor o igual a la probabilidad de llenado p . Ya con sitios ocupados y vacíos, se procede a verificar si se forman clusters entre los sitios ocupados (teniendo en cuenta solo vecinos inmediatos), y a cada uno se le asigna una etiqueta o identificador. Si una etiqueta aparece en la primera y en la última fila y/o en la primera y en la última columna, significa que el cluster identificado con dicha etiqueta es percolante. El tamaño de cada cluster se calcula contando cuántos elementos existen por cada etiqueta. Finalmente, se reporta el tamaño promedio del cluster percolante más grande $s(p, L)$ y la probabilidad $P(p, L)$ de que exista un cluster percolante para distintos valores de p y L .

2. Introducción

La teoría de percolación es una rama fundamental de la física estadística que estudia el comportamiento de sistemas aleatorios conectados, con aplicaciones que van desde la propagación de fluidos en medios porosos hasta la transmisión de enfermedades en redes complejas [1]. El concepto central de percolación se basa en determinar si existe un camino conectado que atraviese completamente un sistema aleatorio, fenómeno conocido como transición de percolación.

En sistemas bidimensionales, la percolación consiste en ocupar aleatoriamente los lugares de una red regular con probabilidad p , donde cada sitio puede estar ocupado (1) o (0). Los sitios ocupados que son vecinos inmediatos (conectados en cruz) forman clusters conectados. El sistema presenta percolación cuando existe al menos un cluster que conecta bordes opuestos de la red, ya sea horizontal o verticalmente.

Uno de los aspectos más importantes de la percolación es la existencia de un umbral crítico p_c , donde ocurre una transición de fase. Para $p < p_c$, típicamente solo existen clusters finitos, mientras que para $p > p_c$ aparece un cluster infinito que abarca todo el sistema. En redes cuadradas bidimensionales, el valor crítico teórico es $p_c = 0,5927\dots$

El estudio computacional de la percolación requiere algoritmos eficientes para identificar y caracterizar clusters conectados. El algoritmo de Hoshen-Kopelman [2] es particularmente útil para este propósito, ya que permite identificar clusters en una sola pasada sobre la red utilizando técnicas de Union-Find optimizadas.

3. El problema

El objetivo principal de este informe es explorar cómo varía la probabilidad de que exista un cluster percolante, $P(p, L)$, y el tamaño promedio del mayor cluster percolante, $g(p, L)$, en función de la probabilidad de llenado p y del tamaño del sistema L . Se espera observar que existe una probabilidad crítica p_c , a partir de la cual, en promedio, comienza a exis-

tir percolación en el sistema. Además, se analizará cómo el tamaño del sistema afecta la aparición de percolación y el tamaño de los clusters.

4. El código

Estas son las funciones principales usadas para el estudio:

fill_matrix(L, p, gen) : Llena la matriz con una distribución uniforme de números entre 0.0 y 1.0. Luego, convierte dichos números en 1 si son menores o iguales a p . Si no, los convierte en 0.

Hoshen_Kopelman(*matrix*, L) : Recorre la matriz verificando si los sitios ocupados tienen vecinos, de ser así los agrupa y les asigna una etiqueta única.

check_if_percolant(*matrix*, L) : Verifica si hay etiquetas que aparezcan tanto en la primera fila como en la última, o en la primera columna como en la última. De ser así, arroja un 1 indicando que hay percolación y la etiqueta del cluster.

count(*matrix*, L, idx) : Cuenta el número de elementos de la matriz que poseen la o las etiquetas mostradas por *check_if_percolant*(*matrix*, L).

En el cálculo de las estadísticas se emplearon las funciones de *statistic.cpp*. Las funciones *print_matrix*(*matrix*, L) y *print_sizes*(*matrix*, L) fueron usadas en etapas tempranas del código para verificar su funcionamiento. La primera imprime las coordenadas de de cada sitio junto con su etiqueta, y la segunda imprime los tamaños de los clusters percolantes.

5. Pruebas

Como primer acercamiento al problema, se usó las función *print_matrix*(*matrix*, L) para visualizar los espacios ocupados en la matriz. La figura 1 muestra en amarillo los sitios ocupados con una probabilidad $p = 0,5$ de una matriz de tamaño 64×64 , mientras que la figura 2 muestra otra prueba con los sitios

ocupados agrupados en clusters de diferentes colores. En este caso específico, no hay percolación.

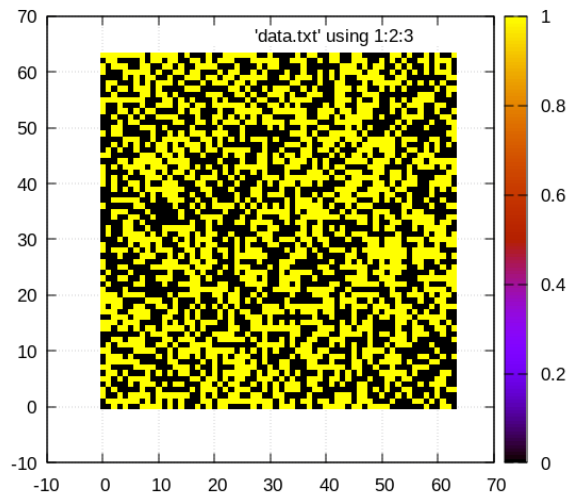


Figura 1: Matriz 64×64 con $p = 0,5$.

6. Resultados

Probabilidad Crítica

- Para $L \rightarrow \infty$, existe una probabilidad crítica p_c donde $P(p_c, \infty) = 0,5$.
- Para sistemas finitos, la transición es suave y se desplaza ligeramente.
- El punto crítico teórico para percolación de sitios 2D es $p_c \approx 0,5927$.

Efectos de Tamaño Finito

- Sistemas más pequeños muestran transiciones más suaves.
- La probabilidad crítica aparente se desplaza con el tamaño del sistema.
- La variabilidad estadística es mayor en sistemas pequeños.

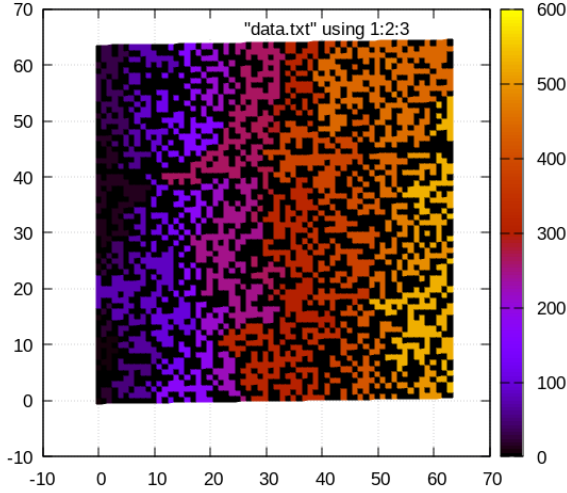


Figura 2: Matriz 64×64 con $p = 0,5$ con los sitios ocupados agrupados en clusters.

7. Conclusión

A través de simulaciones computacionales, se logró observar el fenómeno de percolación en redes bidimensionales, caracterizado por la aparición de un cluster conectado a partir de un umbral crítico de ocupación p_c . La probabilidad de percolación y el tamaño promedio del cluster percolante muestran un comportamiento típico de transición de fase, dependiente del tamaño del sistema. Estos resultados coinciden con lo esperado teóricamente y validan la implementación computacional realizada.

Referencias

- [1] Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). *Introduction to percolation theory*. CRC press.
- [2] Hoshen, J., & Kopelman, R. (1976). Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, 14(8), 3438.