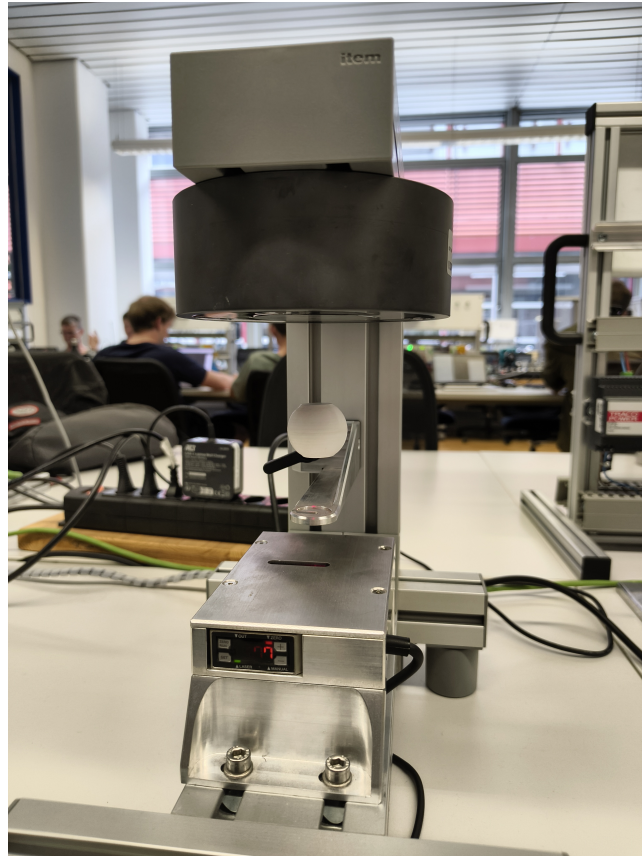


Hochschule Luzern

Technik und Architektur



RT+L

Magnetische Aufhängung

Laborbericht

Autoren:

Luzian Raphael Aufdenblatten & Julian Bischof

Luzern, 5. September 2025

1 | Problemstellung

1.1 Aufgabe 1

Blockschaltbild des geregelten Systems

Das Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 1.1 ersichtlich. Hierbei wird die Strecke wie auch das Stellglied in P zusammengefasst. S bezeichnet dabei die Totzeit und den Fehler der durch den Laserdistanzmesser in das System eingeführt wird.

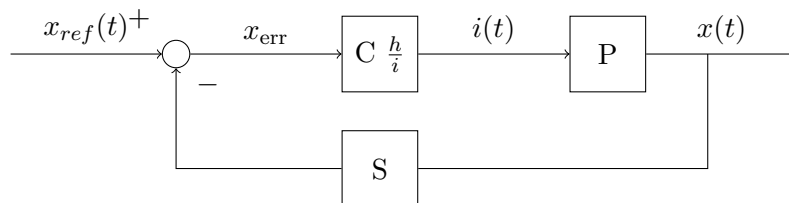


Abbildung 1.1: Geschlossener Regelkreis

1.2 Aufgabe 2

Blockschaltbild des geregelten Systems mit Vorsteuerung

Das Blockschaltbild aus Abschnitt 1.1 wird in Abbildung 1.2 um eine Vorsteuerung FF erweitert.

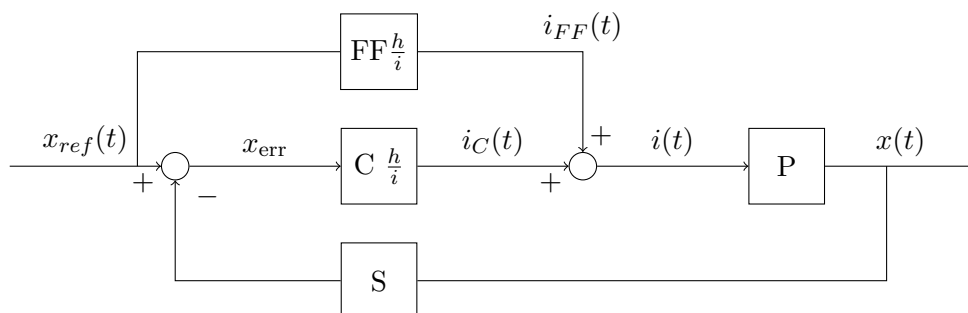


Abbildung 1.2: Geschlossener Regelkreis erweitert mit einer Vorsteuerung

2 | Modellierung

2.1 Aufgabe 3

Bewegungsdifferentialgleichung

Aus der gegebenen Bewegungsdifferentialgleichung und der, mittels eines Polynoms dritten Grades approximierten, statischen Kennlinie $i_o(x) = a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3$ ergibt sich für die Bewegungsdifferentialgleichung 2.1.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g - g \cdot \frac{i^2}{i_0^2(x)} \\ \ddot{x} &= g - g \cdot \frac{i^2}{(a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3)^2}\end{aligned}\tag{2.1}$$

2.2 Aufgabe 4

Linearisierung

Zur Linearisierung der Bewegungsdifferentialgleichung wird folgende Struktur der linearisierten Differentialgleichung eingesetzt:

$$\Delta\ddot{x} = k_x\Delta x + k_i\Delta i + k_s\Delta F_s\tag{2.2}$$

Die Faktoren k_x , k_i und k_s werden aus Gleichung 2.1 in einem Arbeitspunkt x_o und \bar{i} bestimmt. Dazu wird Gleichung 2.1 jeweils nach δx , δi und δF_s abgeleitet. Da für den Versuch die Störkraft $F_s = 0$ angenommen wird, muss k_s nicht ermittelt werden.

$$\begin{aligned}k_x &= \frac{\delta}{\delta x} \left(g - g \frac{i^2}{(a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3)^2} \right) \Big|_{x_o, \bar{i}} \\ &= \frac{\delta}{\delta x} \frac{-gi^2}{(a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3)^2} \Big|_{x_o, \bar{i}} \\ &= \frac{2g\bar{i}^2(3d_ix_o^2 + 2c_ix_o + b)}{(d_ix_o^3 + c_ix_o^2 + b_ix_o + a)^3}\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
k_i &= \frac{\delta}{\delta i} \left(g - g \frac{i^2}{(a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3)^2} \right) \Big|_{x_0, \bar{i}} \\
&= \frac{\delta}{\delta i} \frac{-g i^2}{(a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3)^2} \Big|_{x_0, \bar{i}} \\
&= \frac{-2g \bar{i}}{(a_i + b_i x_0 + c_i x_0^2 + d_i x_0^3)^2}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Werden nun Gleichung 2.3 und 2.4 in Gleichung 2.2 eingesetzt ergibt sich:

$$\Delta \ddot{x} = \frac{2g \bar{i}^2 (3d_i x_0^2 + 2c_i x_0 + b)}{(d_i x_0^3 + c_i x_0^2 + b_i x_0 + a)^3} \cdot \Delta x + \frac{-2g \bar{i}}{(a_i + b_i x_0 + c_i x_0^2 + d_i x_0^3)^2} \cdot \Delta i \tag{2.5}$$

2.3 Aufgabe 5

Übertragungsfunktion G_{Strecke}

Um die Übertragungsfunktion der Prozesstrecke G_{Strecke} zu finden, kann erneut Gleichung 2.2 bzw. Gleichung 2.5 genutzt werden.

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{x} &= k_x \Delta x + k_i \Delta i \\
&\quad \circ \\
&\quad \bullet \\
s^2 \Delta X &= k_x \Delta X + k_i \Delta I \\
G_{\text{Strecke}}(s) &= \frac{\Delta X}{\Delta I} = \frac{k_i}{s^2 - k_x} \\
G_{\text{Strecke}}(s) &= \frac{\frac{-2g \bar{i}}{(a_i + b_i x_0 + c_i x_0^2 + d_i x_0^3)^2}}{s^2 - \frac{2g \bar{i}^2 (3d_i x_0^2 + 2c_i x_0 + b)}{(d_i x_0^3 + c_i x_0^2 + b_i x_0 + a)^3}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.4 Aufgabe 6

Statische Vorsteuerung

Der Einsatz einer statischen Vorsteuerung besteht darin, dass kein Regelfehler $e(t)$ nötig ist und somit nicht auf die Rückmeldung des Sensors gewartet werden muss. Die Regelung wird schneller.

2.5 Aufgabe 7

Statische Vorsteuerung

Die statischen Vorsteuerungen V_L und V_{NL} ergeben sich aus $G_{\text{Strecke}}^{-1}(s)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} V_L &= G_{\text{Strecke}}^{-1}(s) \Big|_{s=0} = \frac{s^2 - kx}{k_i} \Big|_{s=0} \\ V_L &= \frac{-kx}{k_i} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} V_{NL} &= G_{\text{Strecke}}^{-1}(s) \Big|_{s=0} = \frac{s^2 - kx}{k_i} \Big|_{s=0} \\ V_{NL} &= |d + cx_0^1 + bx_0^2 + ax_0^3| \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.6 Aufgabe 8

Übertragungsfunktion G_{Stell}

Mit der gegebenen Differentialgleichung des Stellglieds $u = Ri + L \frac{di}{dt}$ kann die Übertragungsfunktion des Stellglieds G_{Stell} wie folgt gefunden werden:

$$\begin{aligned} u &= Ri + L \frac{di}{dt} \\ \circ \\ \bullet \\ U &= RI + sLI \\ G_{\text{Stell}}(s) &= \frac{I}{U} = \frac{1}{R + Ls} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}s} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.7 Aufgaben 9 und 10

Nachstellzeit T_i des Stellgliedreglers und Übertragungsfunktion des Stellglieds

Der Regler des Stellglieds besteht aus einem PI-Regler mit Übertragungsfunktion $C_{\text{Stell}} = K_{PS} \left(1 + \frac{1}{s+T_i}\right)$. Damit ergibt sich für das geregelte Stellglied:

$$G_{\text{StellClosed}} = \frac{L_{\text{Stell}}}{1 + L_{\text{Stell}}} = \frac{C_{\text{Stell}}G_{\text{Stell}}}{1 + C_{\text{Stell}}G_{\text{Stell}}} \quad (2.10)$$

Hierbei zeigt sich, dass mit $T_s = \frac{L}{R} = T_i$ ein PT-1 erreicht werden kann:

$$\begin{aligned} L_{\text{Stell}} &= K_{PS} \left(1 + \frac{1}{s + T_i}\right) \cdot \frac{K_S}{1 + T_S s} \\ &= K_{PS} K_S \cdot \frac{1 + T_S}{T_S (1 + T_S)} = \frac{K_{PS} K_S}{T_S} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wird nun Gleichung 2.11 in Gleichung 2.10 eingesetzt ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G_{\text{StellClosed}} = \frac{K_{PS} K_S}{T_S s + K_{PS} K_S} \quad (2.12)$$

2.8 Aufgabe 11

Übertragungsfunktion G_{Sensor}

Wir wissen, dass der sensor eine Totzeit $T_{t\text{Sensor}}$ von 2.5ms aufweist. Somit kann seine Übertragungsfunktion G_{Sensor} mittels eines PT-1 Glieds beschrieben werden:

$$G_{\text{Sensor}} = \frac{\Delta X_m}{\Delta X} = \frac{1}{1 + T_{t\text{Sensor}} s} \quad (2.13)$$

3 | Reglerentwurf und Versuchsdurchführung

Ermittlung der Kennlinie

Zur Ermittlung der Kennlinie wurde an 4 Punkten der Strom gemessen, bei welchem $F_g = F_{mag}$ galt und somit der Ball nach oben gezogen wurde.

Tabelle 3.1: Tabelle zur Ermittlung der Kennlinie

$x[m]$	$i[A]$
0.035	0.398
0.040	0.505
0.045	0.6369
0.050	0.8964

Die Polynomfaktoren werden ebenfalls aus diesen Messungen bestimmt:

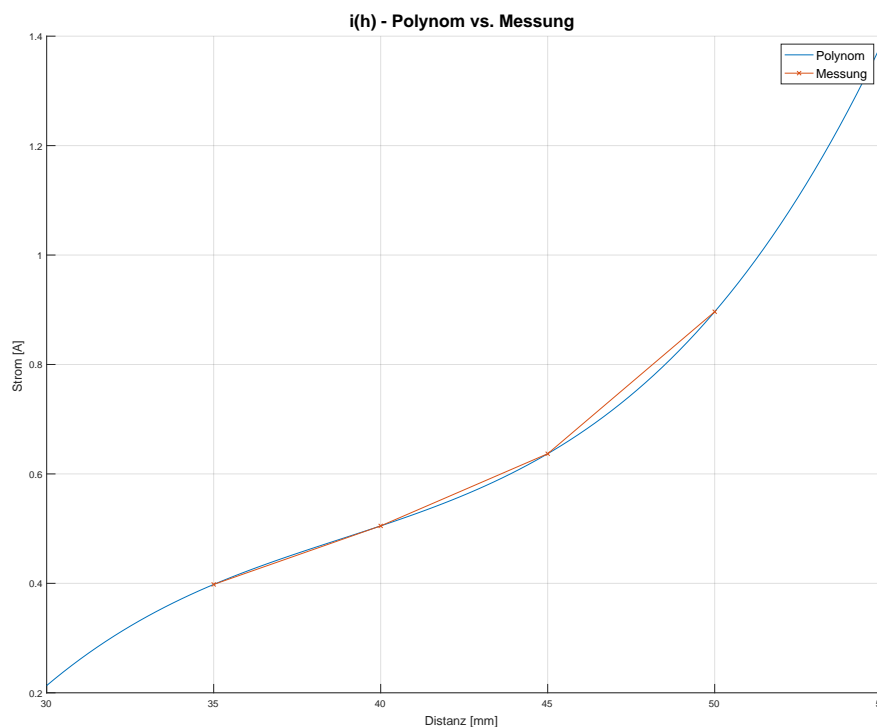


Abbildung 3.1: Gemessene Punkte überlagert mit gefundenem Polynom

3.1 Aufgabe 12

Vorzeichen der Reglerverstärkung

Das Vorzeichen von K_p ist positiv.

3.2 Aufgaben 13, 14 und 15

Wurzelortskurve des PD-Reglers

Durch Untersuchen der Wurzelortskurve (rlocus Abbildung 3.2) kann mit der Wahl von $T_d = \frac{1}{\sqrt{k_x}}$ erkannt werden, dass eine Verstärkung $K_p \geq 40$ nötig ist, um alle Pole in die negative Halbebene zu bewegen.

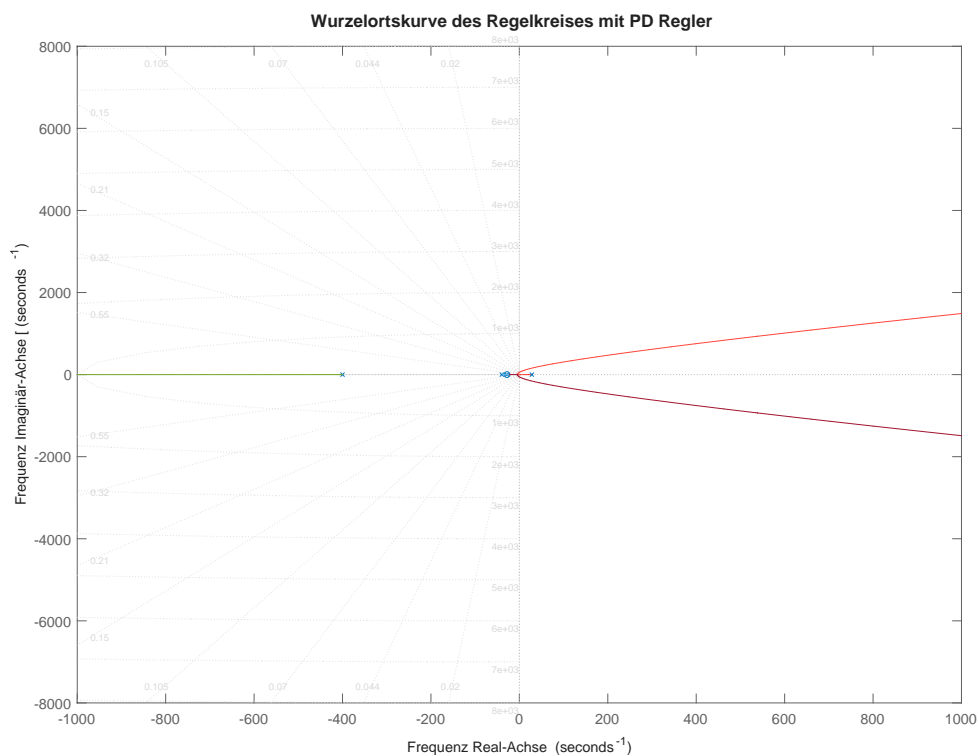


Abbildung 3.2: Wurzelortskurve des Prozesses mit PD-Regler

Somit ergibt sich ein PD Regler $C_{PD} = K_p \cdot \left(1 + T_d \frac{s}{T_d s + 1}\right)$ mit $K_p = 40$, $T_d = \frac{1}{\sqrt{k_x}}$ und $N = 100$.

Erweiterung zum PID-Regler

Mit der gegebenen Vorschrift von $T_d < 0.25T_i$ wurde zusammen mit Untersuchung der Wurzelortskurve ein Wert von $T_i = \frac{T_d}{0.25} + 0.1$ ermittelt.

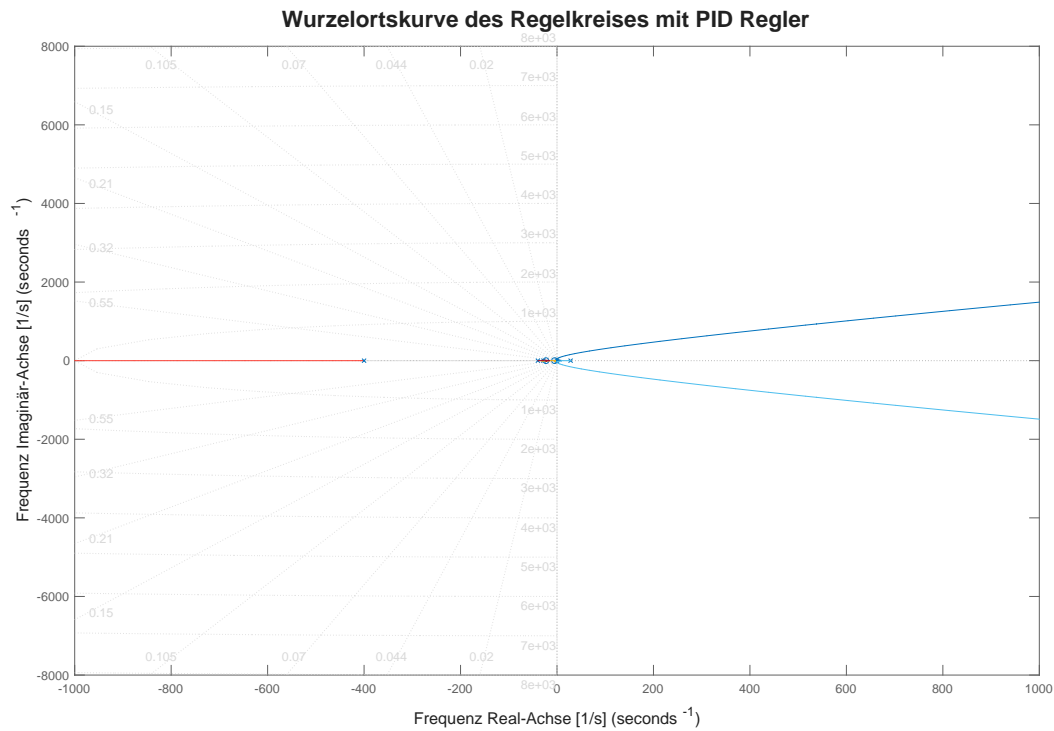


Abbildung 3.4: Wurzelortskurve des Prozesses mit PD-Regler

Somit ergibt sich ein PID Regler $C_{PD} = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{1}{s} + T_d \frac{N}{T_d} \frac{s}{s+1}\right)$ mit $K_p = 40$, $T_d = \frac{1}{\sqrt{k_x}}$ und $N = 100$.

In Abbildung 3.5 ist erkenntlich, dass alle Pole in der linken (negativen) Halbebene liegen.

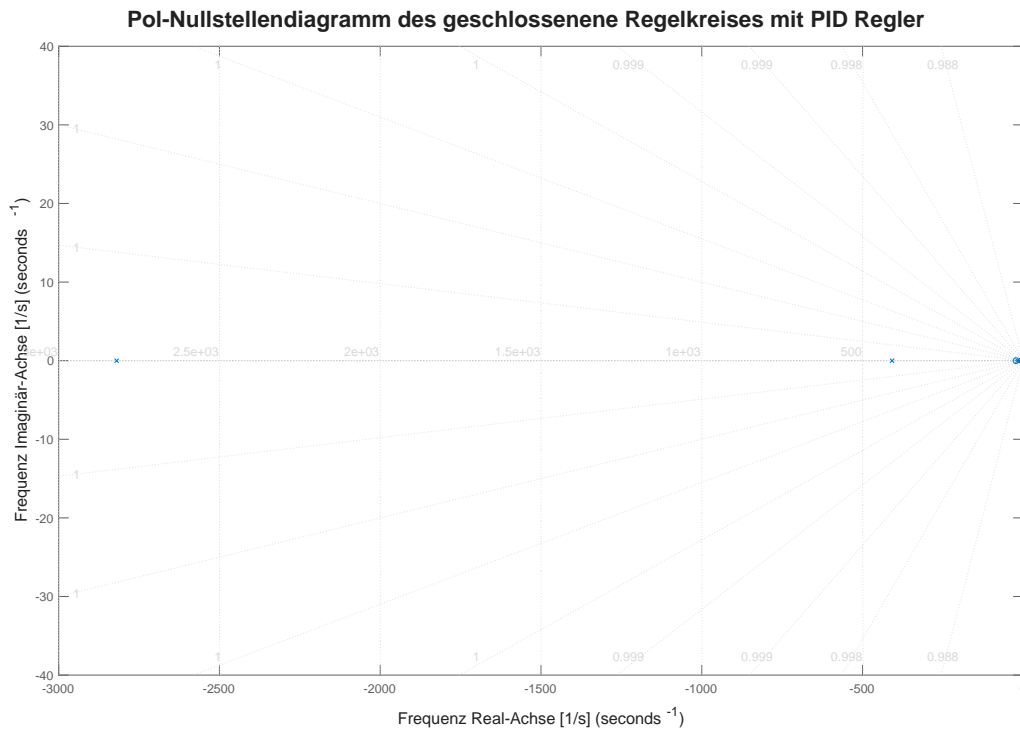


Abbildung 3.5: Pole des Prozesses mit PID-Regler

3.3 Aufgabe 16

Simulinkmodell des Aufbaus

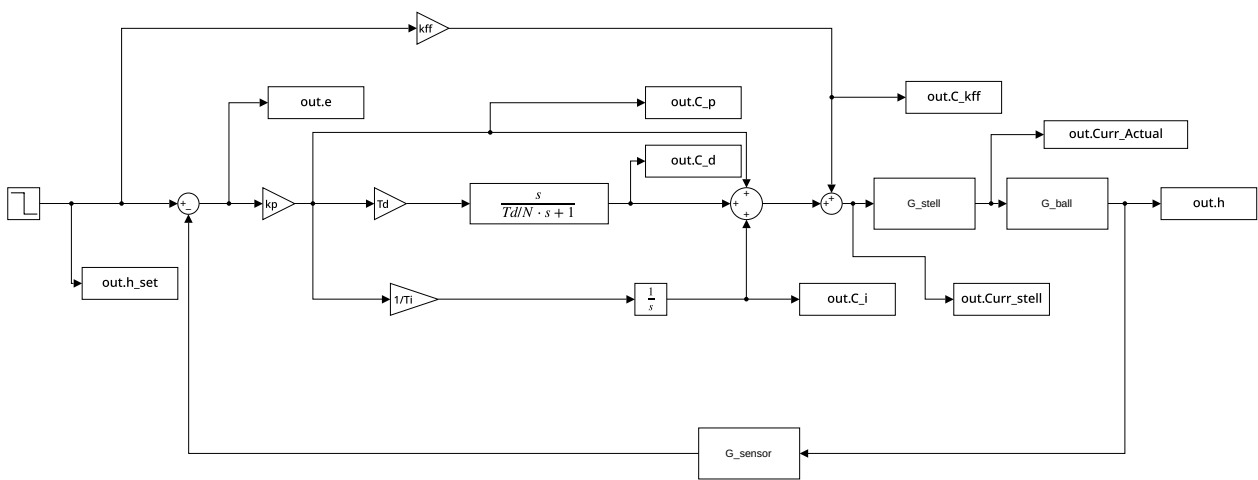


Abbildung 3.6: Simulink Modell inklusive Regler-, Stell-, Stecken- und Sensorübertragungsfunktionen

3.4 Aufgabe 17

Simulation Führungssprung

Zunächst wurde der PD-Regler mit einem Führungssprung von $x_0 = 40\text{mm}$ zu $x_1 = 35\text{mm}$ simuliert. In Abbildung 3.7 fällt dabei auf, dass der Regler zwar stabil scheint aber sich ein stationärer Fehler entsteht. Dieser Fehler ist ebenfalls weit von dem definierten Arbeitspunkt entfernt, womit der Regler möglicherweise am Versuch nicht funktionieren wird.

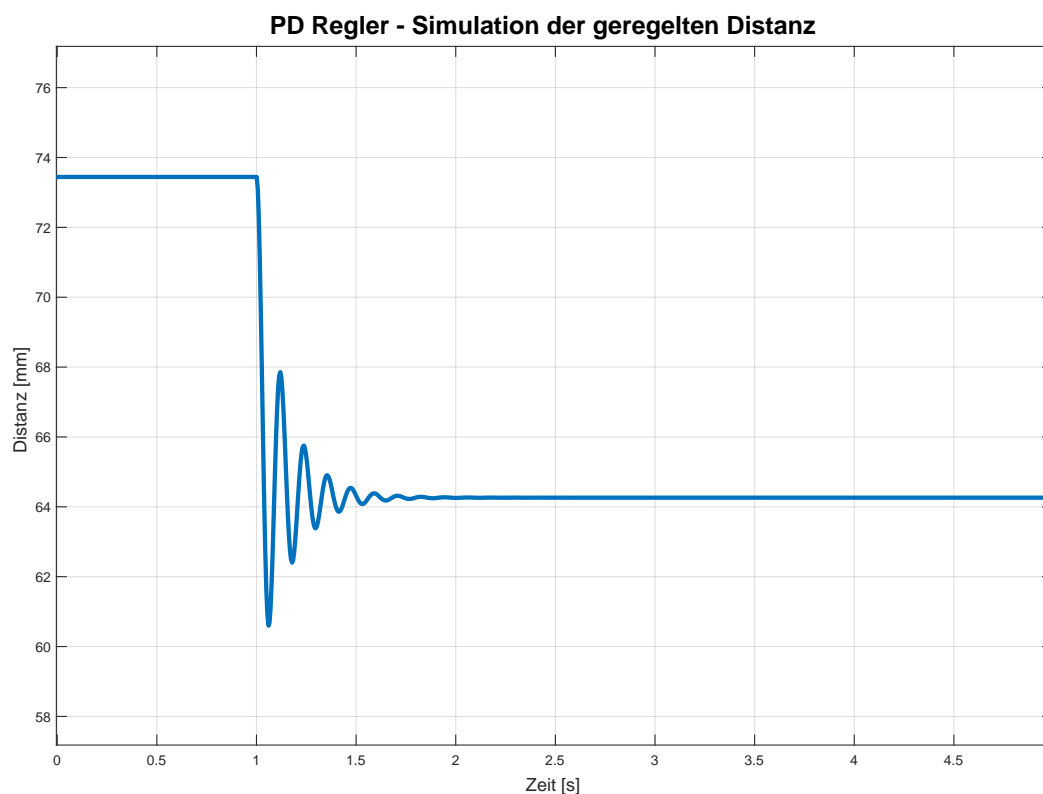


Abbildung 3.7: Simulierter Führungssprung mithilfe des PD-Reglers von $x_0 = 40\text{mm}$ zu $x_1 = 35\text{mm}$

Wird nun der PD-Regler auf einen PID-Regler erweitert, so stellt sich die gewünschten geregelten Distanzen von $x_0 = 40\text{mm}$ zu $x_1 = 35\text{mm}$ korrekt ein, wie in Abbildung 3.8

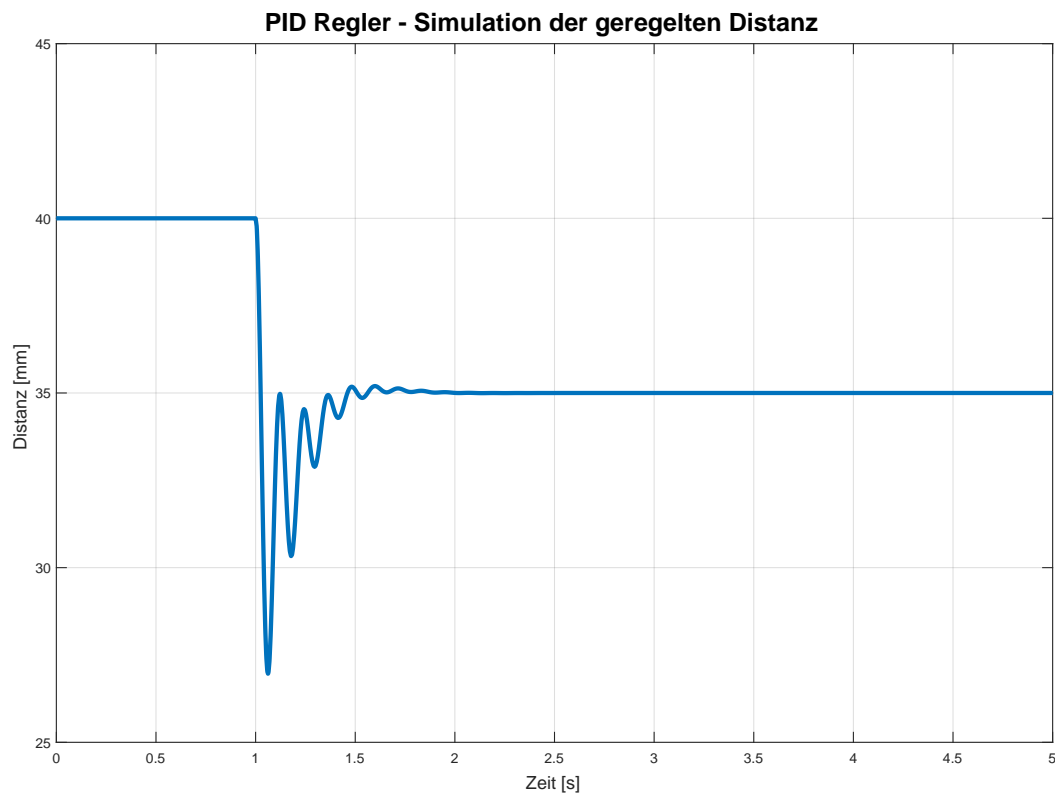


Abbildung 3.8: Simulierter Führungssprung mithilfe des PID-Reglers von $x_0 = 40\text{mm}$ zu $x_1 = 35\text{mm}$

3.5 Aufgabe 18 und 19

Verifikation am Versuch - PD

Der PD-Regler hat wie auch in der Simulation ersichtlich einen grossen stationären Fehler. Dies führt dazu, dass er bei $x_{ref} = 40\text{mm}$ eine Distanz von $x_{eff} = 60\text{mm}$ einzunehmen versucht. Dies ist zu weit entfernt, und der Laboraufbau kann nicht genug Strom liefern um den Ball auf Position zu halten. Deshalb wurde der Ball bei $x_0 = 30\text{mm}$ geregelt, um den simulierten Fehler trotzdem überprüfen zu können.

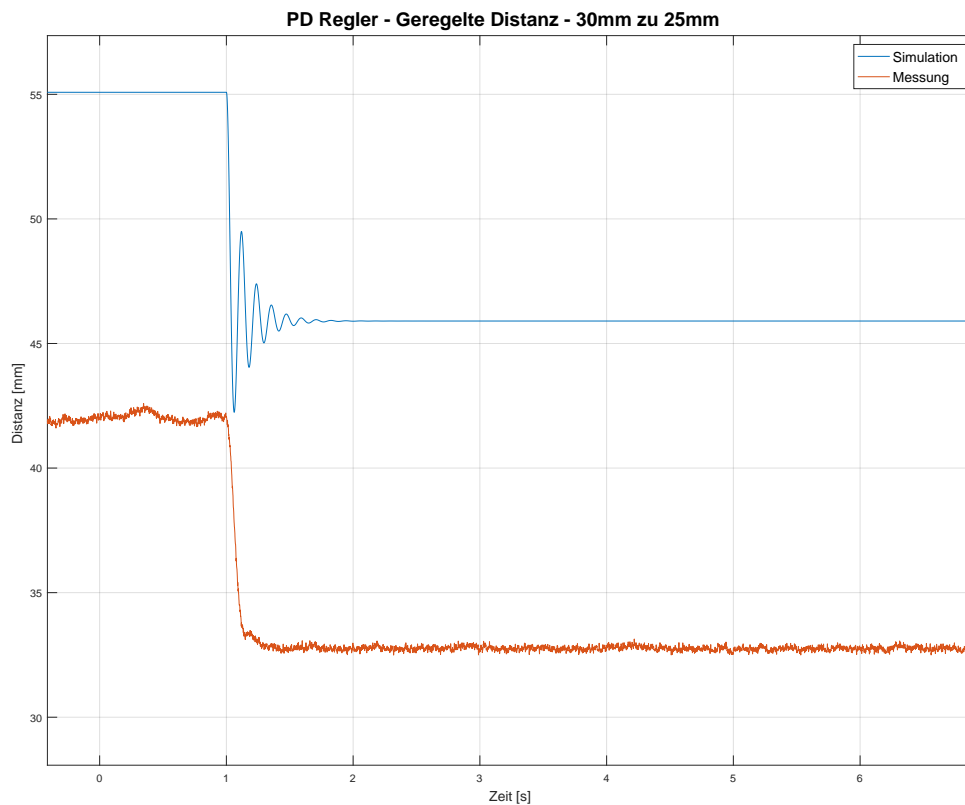


Abbildung 3.9: Simulierter und gemessener Führungssprung mithilfe des PD-Reglers von $x_0 = 30\text{mm}$ zu $x_1 = 25\text{mm}$

Hierbei wird in Abbildung 3.9 beobachtbar, dass laut Simulation der Regelfehler noch viel grösser wird, dies ist auf die weite Distanz zum Arbeitspunkt der Simulation zurückzuführen.

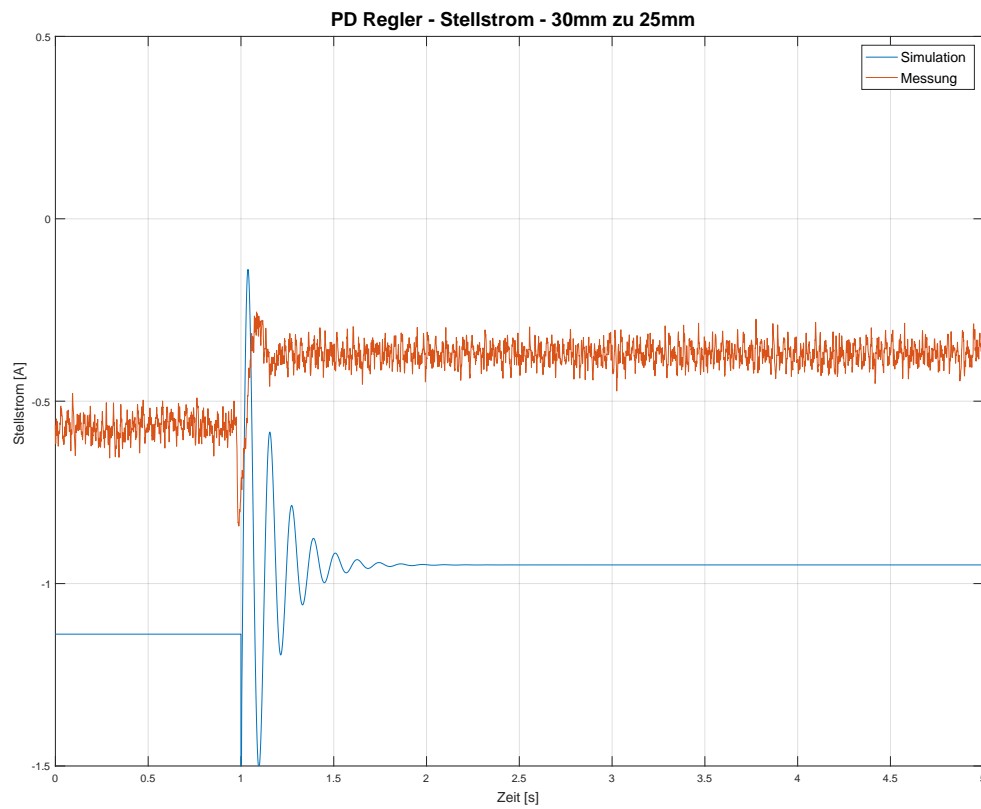


Abbildung 3.10: Simulierter und gemessener (SMA(20)) Stellstrom mithilfe des PD-Reglers von $x_0 = 30\text{mm}$ zu $x_1 = 25\text{mm}$

Verifikation am Versuch - PID

Der PID-Regler hingegen regelt auf die korrekte Soll-Distanz von $x_0 = 40\text{mm}$ zu $x_1 = 35\text{mm}$. In Abbildung 3.11 ist der Vergleich zwischen Simulation und Messung ersichtlich. Erkennbar ist eine hohe Genauigkeit der Simulation bis auf ein nicht vorhandenes Einschwingen der Realität.

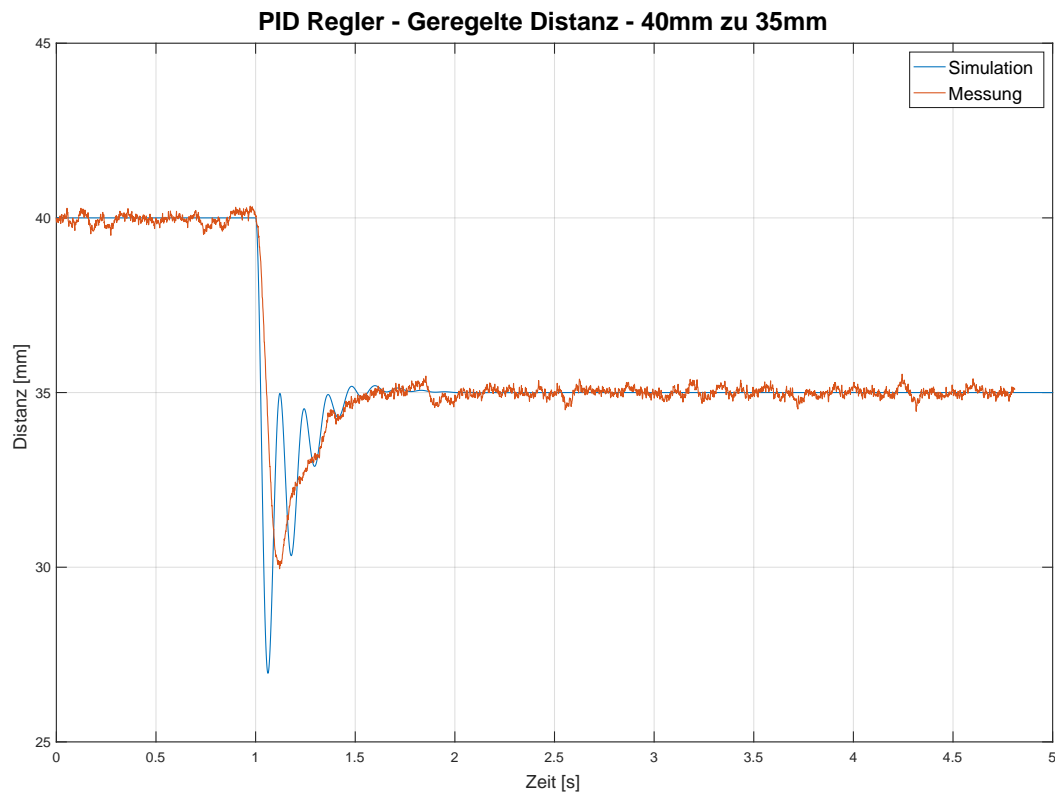


Abbildung 3.11: Simulierter und gemessener Führungssprung mithilfe des PID-Reglers von $x_0 = 40\text{mm}$ zu $x_1 = 35\text{mm}$

Auch der Stellstrom in Abbildung 3.12 ist plausibler, wenn auch immernoch etwas von der Realität entfernt.

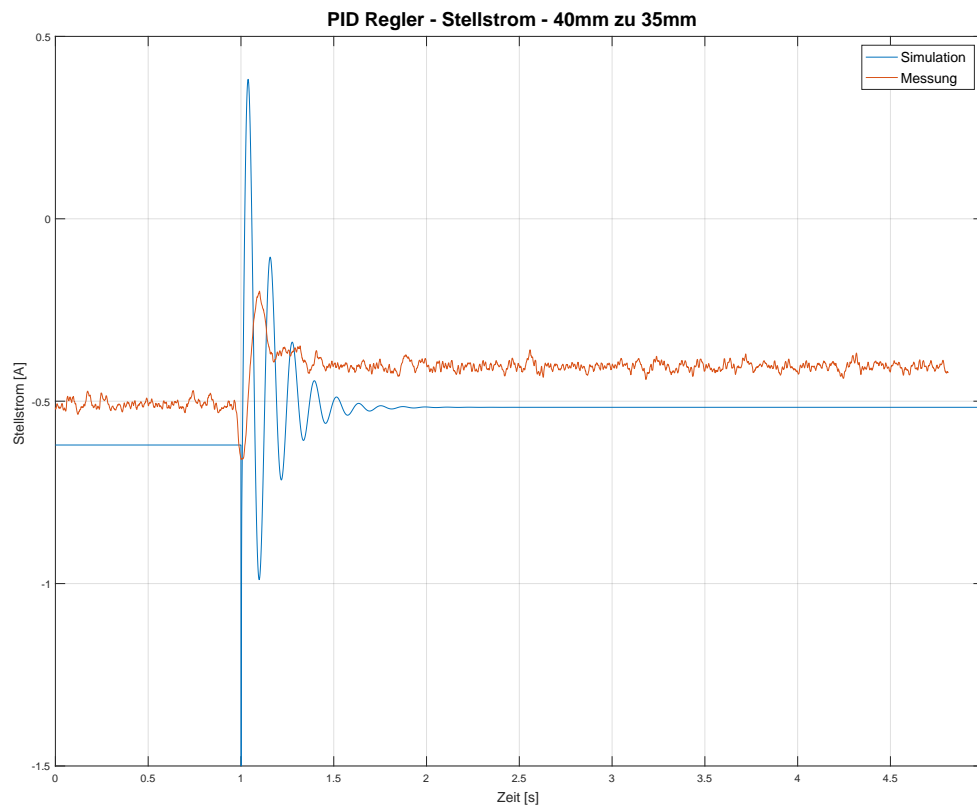


Abbildung 3.12: Simulierter und gemessener (SMA(20)) Stellstrom mithilfe des PID-Reglers von $x_0 = 30\text{mm}$ zu $x_1 = 25\text{mm}$

3.6 Aufgabe 20

Verbesserung der Regler

Mittels Untersuchung der Wurzelortskurve und den Pollagen, wurde ein *guter* PID-Regler entworfen mit den folgenden Paramerten:

Tabelle 3.2: PID Regler Werte

Parameter	Wert
k_p	46
T_i	0.3364
T_d	0.0591
N	100

Wie in Tabelle 3.4 zu erkennen ist, wurden die kritischen Pole (also jene nahe an der Imaginärachse) weiter in den Imaginärteil verschoben, auf Kosten der Pole die bereits weit entfernt waren die etwas näher rutschen.

Tabelle 3.3: PID Regler Polunterschied

Pol	Ursprünglich	Verbessert
P_1	$(-2.819)10^3$	$(-1.6911)10^3$
P_2	$(-0.4080)10^3$	$(-0.4138)10^3$
P_3	$(-0.0009 + 0.0377i)10^3$	$(-0.0070 + 0.0527i)10^3$
P_4	$(-0.0009 - 0.0377i)10^3$	$(-0.0070 - 0.0527i)10^3$
P_5	$(-0.0180)10^3$	$(-0.0065 + 0.056i)10^3$
P_6	$(-0.0121)10^3$	$(-0.0065 - 0.056i)10^3$

3.7 Aufgabe 21

Pole ausserhalb des Arbeitspunkts

Wird nun der Arbeitspunkt weit weg vom Linearisierungspunkt gewählt wandern die Pole wiederum in die rechte Halbebene, was zu einem instabilen Prozess führt.

Tabelle 3.4: Polpositionen bei verschiedenen Arbeitspunkten

$x_0 = 40\text{mm}$	$x_0 = 30\text{mm}$	$x_0 = 50\text{mm}$
$(-1.6911)10^3$	$(-1.1678)10^3$	$(-1.6918)10^3$
$(-0.4138)10^3$	$(-0.4647)10^3$	$(-0.4046)10^3$
$(-0.0070 + 0.0527i)10^3$	$(0.0160 + 0.1235i)10^3$	$(-0.0320 + 0.0215i)10^3$
$(-0.0070 - 0.0527i)10^3$	$(0.0160 - 0.1235i)10^3$	$(-0.0320 - 0.0215i)10^3$
$(-0.0065 + 0.056i)10^3$	$(-0.0057 + 0.0057i)10^3$	$(0.0269)10^3$
$(-0.0065 - 0.056i)10^3$	$(-0.0057 - 0.0057i)10^3$	$(0.0016)10^3$