Intermezzo:
Algunas pruebas por inducción

Cálculo Diferencial e Integral I
Actuaría 2016-I

En música, un *intermezzo* es una composición que sucede entre obras más grandes. En una opera en particular, funciona a menudo como un descanso cómico y muchas veces constituye una obra tan importante como la principal. Veamos estas notas precisamente como eso: una pieza teórica aislada de la continuidad del curso pero importante por si misma y que no interfiere con la teoría que presentaremos durante el curso, pero que a menudo es interesante conocer. Sin más, comenzamos con nuestro primer *intermezzo*.

1. Tres desigualdades notables

1.1. Desigualdad entre medias

Lema 1.1. *Sean $x_1, \cdots, x_n$ números reales tales que*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n.$$

Demostración. Procedemos por inducción, el caso en que $n = 1$ es sencillo pues de la definición recursiva del producto tenemos que

$$1 = \prod_{i=1}^{1} x_i = x_1,$$

por lo que obtendremos que

$$\sum_{i=1}^{1} x_1 = x_1 = 1,$$

como se esperaba.

Supongamos ahora que para cualesquiera números $y_1, \ldots, y_k$

$$\prod_{i=1}^{k} y_i = 1,$$

implica

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \geq k.$$

Tomemos entonces por hecho que

$$\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1,$$

podemos tener dos casos, el primero es que todos los números x_i involucrados en el producto sean la unidad, esto implicaría

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = k + 1,$$

lo que es precisamente el resultado; el segundo es que al menos uno sea distinto de la unidad, pero si sólo uno fuera la unidad el producto no podría ser uno así que al menos existirían dos de ellos distintos con la peculiaridad que uno será mayor que la unidad y el otro menor que ésta. Supongamos que estos números son $x_k > 1$ y $x_{k+1} < 1$. Tomemos entonces los siguientes k números

$$x_1, \ldots, x_{k-1}, (x_k x_{k+1}),$$

notando que el producto de estos números es simplemente la unidad. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k x_{k+1} \geq k.$$

Sumemos ahora $x_k + x_{k+1}$ a esta desigualdad junto al inverso aditivo de $x_k x_{k+1}$, con lo que obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} x_i &\geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \\
&= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 \\
&= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) \\
&= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \\
&\geq k + 1.
\end{aligned}$$

Lo cual es es resultado para $n = k+1$. Por inducción el resultado que buscábamos es válido. $\square$

Teorema 1.2. *Sean $x_1, \dots, x_n$ números reales positivos. Entonces*

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Demostración. Debemos hacer una observación muy simple acerca de los números que tenemos con nosotros. A saber, que (¡demuéstralo!)

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = 1.$$

Entonces, por el lema 1.1, debemos tener que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \geq n,$$

pero

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

por lo que conjugando esto con la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$$

de lo que sigue que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

□

Definición 1.1. A la expresión

$$M_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

se le denomina *media aritmética*, mientras que la expresión

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

recibe el nombre de *media geométrica.*

Bajo la definición anterior el teorema anterior simplemente afirma que

$$M_n \geq G_n,$$

lo que es una expresión muy interesante cuando en la realización de algunas estimaciones.

1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema 1.3 (Desigualdad del triangulo). *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números cualesquiera. Entonces,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado es elemental. Supongamos entonces el resultado para $n = k$, i.e.,

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i|.$$

Entonces, por la desigualdad del triangulo (Prólogo sección 2 de [**?**]),

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| + |x_{k+1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |x_i| + |x_{k+1}| \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} |x_i|.
\end{aligned}$$

Por lo que el resultado es válido para $n = k + 1$. Por inducción, el resultado que buscamos sigue.

□

Teorema 1.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números cualesquiera. Entonces*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Demostración. Procederemos por inducción. El caso para $n = 1$ debe ser inmediato pues

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{1} x_i y_i\right)^2 &= x_1^2 y_1^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{1} y_i^2\right).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora el caso para $n = k$

$$\left(\sum_{i=0}^{k} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} y_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + x_{k+1}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 + y_{k+1}^2} \\
&\geq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2} + |x_{k+1}y_{k+1}| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right| + |x_{k+1}y_{k+1}| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i\right|.
\end{aligned}$$

De la anterior desigualdad sigue el resultado para $n = k + 1$. Por inducción se prueba el resultado. □

1.3. Desigualdad de Bernoulli

Teorema 1.5. *Sea $h > -1$. Entonces, para todo número natural n se tiene*

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado sigue de inmediato. Supongamos que es válido para $n = k$, i.e.,

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh.$$

Entonces, como $1 + h > 0$

$$\begin{aligned}
(1 + h)^{k+1} &= (1 + h)^k(1 + h) \\
&\geq (1 + kh)(1 + h) \\
&= 1 + (k + 1)h + kh^2;
\end{aligned}$$

pero $kh^2 \geq 0$, por lo que $1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h$. Uniendo ambas desigualdades

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)h.$$

Por lo que el resultado es cierto para $n = k + 1$. Por inducción el resultado sigue. □

2. Coeficientes binomiales

2.1. Primeros pasos

Definición 2.1. Sean n y k números enteros no negativos. Si definimos $0! = 1$, podemos presentar el coeficiente binomial por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

El coeficiente binomial presenta algunas propiedades notables

Lema 2.1. *Para n y k números enteros no negativos,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Lema 2.2 (Triángulo de Pascal)**.** *Para n y k números enteros no negativos,*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Demostración. Basta observar la sucesión de igualdades,

$$\begin{aligned}
(n+1)\binom{n}{k-1} + (n+1)\binom{n}{k} &= (n+1)\binom{n+1}{k-1} + (n+1)\binom{n}{n-k} \\
&= k\binom{n+1}{k} + (n-k+1)\binom{n+1}{n-k+1} \\
&= k\binom{n+1}{k} + (n-k+1)\binom{n+1}{k} \\
&= (n+1)\binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Como $n+1 > 0$, podemos usar su inverso multiplicativo para concluir el resultado deseado. □

2.2. Resultado principal

Teorema 2.3 (Teorema del binomio)**.** *Sean a y b números reales y sea n cualquier natural. Entonces,*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} a^{1-i} b^i = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b.$$

Supongamos entonces que el resultado es válido para $n = k$. Veamos primero que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + b^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{(i+1)-1} a^{n-i} b^{i+1} + b^{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^{i} + b^{k+1}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} a^{n-i} b^{i} \right) (a+b) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} a^{n+1-i} b^{i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} a^{n-i} b^{i+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{k} a^{n+1-i} b^{i} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^{i} + b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) a^{n+1-i} b^{i} + b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^{i} + b^{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^{i}.
\end{aligned}$$

Que es simplemente el resultado para $n = k+1$. Por inducción sigue el resultado deseado. $\square$

Corolario 1.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Corolario 2. *Para* $n > 0$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} = 0$$

3. Conjuntos inductivos

3.1. Primeros pasos

Definición 3.1. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice *inductivo* si

- $1 \in A$.
- $k \in A$ implica que $k + 1 \in A$.

No estamos en blanco en cuanto conjuntos inductivos, de hecho conocemos uno muy común, los reales. Es sencillo de probar sabemos que 1 es un número real. Supongamos entonces que k es un número real, como 1 es también real, la suma resulta también en un real y por tanto $k + 1$ es un número real. El conjunto $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo.

Definición 3.2. Un número real n se dice número natural si se encuentra en todo conjunto inductivo. En otras palabras si $\mathcal{F}$ es la familia de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces un número real n es un número natural si $n \in bigcap\mathcal{F}$.

3.2. Resultado principal

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Entonces,*

- $1 \in \bigcap \mathcal{F}$.
- *Si $k \in \bigcap \mathcal{F}$, entonces $k + 1 \bigcap \mathcal{F}$*

Demostración. Por definición de conjunto inductivo, 1 pertenece a cualquiera de ellos. Supongamos ahora que $k \in \bigcap \mathcal{F}$, por lo que para cada A inductivo $k \in A$, al ser A inductivo debemos tener que $k + 1 \in A$ para cada A inductivo, por tanto $k \in \bigcap \mathcal{F}$, como se quería probar. □

Tenemos entonces una forma de decidir que conjunto es el conjunto de los números naturales: El inductivo más pequeño.

Definición 3.3. Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{F}.$$

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Editorial Reverté, 1984.

[KKCS89] Kudriávtsev, L. D., Kutásov, A. D., Chejlov, V. I. y Shabunin, M. I.: *Problemas de análisis matemático.* Editorial Mir, Moscú, 1989.

[Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.