Ejercicios para Calculo Diferencial e Integral I

Actuaría 2016-I
FES Acatlán

1. Prólogo de [Spi92]

1.1. Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$.
- $1 \in A$.
- $1 \subset A$.
- $A \neq B$.
- $A \in B$.
- $1 \subset B$.

Ejercicio 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Ejercicio 1.1.3 (de [Apo84]). Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$.
- $A \subset C$.
- $B \subset D$.
- $A \subset B$.
- $A \subset D$.
- $B \in D$.
- $A \in C$.
- $B \subset C$.
- $A \in D$.

Ejercicio 1.1.4. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$.
- $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.

Ejercicio 1.1.5. Demuestra que, si $X \subset \varnothing$ entonces $X = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.6. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.7 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.8 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.9 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.10. Demuestra que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.11. Demuestra que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.12. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.13. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

Ejercicio 1.1.14. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea A un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

Ejercicio 1.1.15. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

Ejercicio 1.1.16. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Ejercicio 1.1.17. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

Ejercicio 1.1.18. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

1.2. Propiedades fundamentales de los números

Ejercicio 1.2.1. ¿Qué número es el inverso aditivo del cero?

Ejercicio 1.2.2. ¿Qué número es el inverso multiplicativo del uno?

Ejercicio 1.2.3. Demuestra lo siguiente:

1. Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, $x = 1$.
2. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
3. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
4. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$.
5. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ejercicio 1.2.4. ¿Dónde esta el fallo en el siguiente argumento? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y) \\ x + y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.5. Demuestra lo siguiente:

1. Si $b, c \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

2. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

3. Si $a, b \neq 0$, entonces
$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

4. Si $b \neq 0$, entonces
$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

5. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

6. Si $b, c, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejercicio 1.2.6. Demuestra que los inversos aditivos y multiplicativos son únicos.

Ejercicio 1.2.7. Sean a y b un par de números. Demuestra que se cumple uno y sólo uno de los siguientes enunciados:

- $a = b$.
- $a > b$.
- $a < b$.

Ejercicio 1.2.8. Demuestra lo siguiente:

1. Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
2. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.
3. Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$.
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
5. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
6. Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
7. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
8. Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.
9. Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
10. Si $a, b \geq 0$, entonces $a^2 < b^2$ implica que $a < b$.

Ejercicio 1.2.9. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Ejercicio 1.2.10. Demuestra lo siguiente:

1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Si $x \neq 0$, entonces
$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$
3. Si $y \neq 0$, entonces
$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|.$$
4. $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

Ejercicio 1.2.11. Demuestra que

$$\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}$$

y

$$\text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

Intenta ahora deducir una fórmula para el mínimo y el máximo de tres números.

1.3. Distintas clases de números

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal.* Editorial Reverté, 1984.

[KKCS89] Kudriávtsev, L. D., Kutásov, A. D., Chejlov, V. I. y Shabunin, M. I.: *Problemas de análisis matemático.* Editorial Mir, Moscú, 1989.

[Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.