Ejercicios de Clase

1. Teoría clásica de conjuntos

1.1. Tratamiento clásico

Ejercicio 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Ejercicio 1.1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.1.5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.11. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

Ejercicio 1.1.12. Demostrar que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.13. Demuestra que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.14. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.15. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

Ejercicio 1.1.16. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea A un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

Ejercicio 1.1.17. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

Ejercicio 1.1.18. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Ejercicio 1.1.19. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

Ejercicio 1.1.20. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

1.2. Paradojas y Conjuntos

Ejercicio 1.2.1. He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

Ejercicio 1.2.2. Se considera que un ser es omnipotente cuando nada escapa de sus posibilidades. ¿Puede un ser omnipotente crear una piedra que él mismo no pueda levantar?

Ejercicio 1.2.3. Diremos que una palabra es *autológica* si se describe a sí misma. Por ejemplo «corto» y «esdrújula» son autológicas, ya que la palabra «corto» es relativamente corta y la palabra «esdrújula» es esdrújula. Las palabras que no son autológicas se denominan heterológicas. «Largo» es una palabra heterológica, al igual que «monosilábico». ¿Es heterológica la palabra «heterológico»?

Ejercicio 1.2.4. En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Sin embargo, As-Samet era el único barbero de su pueblo. ¿Quién afeitaba a As-Samet?

Ejercicio 1.2.5. Antiguamente, cuando algún prisionera era sentenciado a muerte y ejecutado, se le permitía pronunciar sus últimas palabras en público. Existía sin embargo una prisión en que y ejecución procedía de un modo singular. Si las últimas palabras de un prisionero eran verdad, se le colgaba en la horca; si por el contrario, el prisionero decía una mentira se le decapitaba.

Cierto día, un sentenciado a muerte pronunció como últimas palabras lo siguiente: «Me cortarán la cabeza». ¿Cómo fue ejecutado el prisionero?

2. Notas a las secciones 1 y 2 de [Hal66]

2.1. Axioma de extensión

Ejercicio 2.1.1. Demuestra que $A \subset A$.

Ejercicio 2.1.2. Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, demuestra que $A \subset C$.

Ejercicio 2.1.3. Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 2.1.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Compañia Editorial Continental, 1966.