Ejercicios de Clase

1. Teoría clásica de conjuntos

1.1. Tratamiento clásico

Ejercicio 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Ejercicio 1.1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.1.5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.11. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

Ejercicio 1.1.12. Demostrar que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.13. Demuestra que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

Ejercicio 1.1.14. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 1.1.15. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

Ejercicio 1.1.16. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea A un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

Ejercicio 1.1.17. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

Ejercicio 1.1.18. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Ejercicio 1.1.19. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

Ejercicio 1.1.20. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

1.2. Paradojas y Conjuntos

Ejercicio 1.2.1. He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

Ejercicio 1.2.2. Se considera que un ser es omnipotente cuando nada escapa de sus posibilidades. ¿Puede un ser omnipotente crear una piedra que él mismo no pueda levantar?

Ejercicio 1.2.3. Diremos que una palabra es *autológica* si se describe a sí misma. Por ejemplo «corto» y «esdrújula» son autológicas, ya que la palabra «corto» es relativamente corta y la palabra «esdrújula» es esdrújula. Las palabras que no son autológicas se denominan heterológicas. «Largo» es una palabra heterológica, al igual que «monosilábico». ¿Es heterológica la palabra «heterológico»?

Ejercicio 1.2.4. En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Sin embargo, As-Samet era el único barbero de su pueblo. ¿Quién afeitaba a As-Samet?

Ejercicio 1.2.5. Antiguamente, cuando algún prisionera era sentenciado a muerte y ejecutado, se le permitía pronunciar sus últimas palabras en público. Existía sin embargo una prisión en que y ejecución procedía de un modo singular. Si las últimas palabras de un prisionero eran verdad, se le colgaba en la horca; si por el contrario, el prisionero decía una mentira se le decapitaba.

Cierto día, un sentenciado a muerte pronunció como últimas palabras lo siguiente: «Me cortarán la cabeza». ¿Cómo fue ejecutado el prisionero?

2. Notas de [Hal66] (Parte 1)

2.1. Axioma de extensión

Ejercicio 2.1.1. Demuestra que $A \subset A$.

Ejercicio 2.1.2. Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, demuestra que $A \subset C$.

Ejercicio 2.1.3. Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 2.1.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

2.2. Axioma de especificación

Ejercicio 2.2.1. Asuma que los números naturales son un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los número impares.

- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de los cuadrados perfecto.
- El conjunto de los múltiplos de tres.

Ejercicio 2.2.2. Asuma que los números reales constitye un conjunto. Especifica los siguiente conjuntos.

- El conjunto de los número mayores a cinco.
- El conjunto de los números cuya raíz es un entero.
- El conjunto de los números que son o uno o menos uno.
- El conjunto de los números racionales.

Ejercicio 2.2.3. Discute si la teoría hasta ahora presentada nos presenta ejemplos de conjuntos. ¿Por qué es esto importante?

2.3. Parejas no ordenadas

Ejercicio 2.3.1. ¿Son distintos los conjuntos $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$?

Ejercicio 2.3.2. Aparte de los conjuntos citados en el ejercicios anterior. ¿Qué otros conjuntos serán derivados de la existencia del conjunto vacío?

Ejercicio 2.3.3. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$.

2.4. Uniones e intersecciones

Ejercicio 2.4.1. Demuestra que

- $A \cup \varnothing = A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cup A = A$.

Ejercicio 2.4.2. Demuestra que

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

Ejercicio 2.4.3. Demuestra que

- $A \cap \varnothing = \varnothing$.
- $A \cap B = B \cup A$.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap A = A$.

Ejercicio 2.4.4. Demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejercicio 2.4.5. Demuestra que una condición suficiente y necesaria para que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

es que $C \subset A$. Observe que la condición no tiene nada que ver con B.

Ejercicio 2.4.6. $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Ejercicio 2.4.7. $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

2.5. Complementos y potencias

Recuerda que en esta sección hemos asumido que los conjuntos A y B son subconjuntos de un conjunto E que sólo se da en contexto.

Ejercicio 2.5.1. Demuestra que

1. $(A^c)^c = A$.
2. $(\varnothing)^c = E$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.
4. $A \cup A^c = E$.

Ejercicio 2.5.2. Demuestra que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Ejercicio 2.5.3. Demuestra que

1. $P \subset Q$ si y sólo si $P^c \cup Q = E$.
2. $P \subset Q$ si y sólo si $(P \cap Q)^c \subset P^c$.
3. $P \subset Q$ si y sólo si $P \cap Q^c = \varnothing$.

Ejercicio 2.5.4. Demuestra que

- $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B^c = \varnothing$.
- $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B^c = E$.

Ejercicio 2.5.5. Demuestra que $A \subset B$ si y sólo si $B^c \subset A^c$.

Ejercicio 2.5.6. $A \subset B$ si y sólo si $A^c \cup B^c = A^c$.

Ejercicio 2.5.7. $A \subset B$ si y sólo si $A^c \cap B^c = B^c$.

(Es de notar que los dos anteriores resultados son duales a los ejercicios 2.4.6 y 2.4.7)

Ejercicio 2.5.8. Demuestra que $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$

Ejercicio 2.5.9. Demuestra que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

Ejercicio 2.5.10. Da un ejemplo de conjuntos A y B tales que

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Ejercicio 2.5.11. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subsconjuntos de E. Demuestra que

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(C)} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)$$

y

$$\bigcup_{X \in \mathcal{P}(C)} \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right).$$

Ejercicio 2.5.12. Demuestra que

$$\left(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X^c$$

y

$$\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X^c.$$

Ejercicio 2.5.13. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$.

Ejercicio 2.5.14. Demuestra que $A \subset B$ si y sólo si $A \backslash B = \varnothing$.

Ejercicio 2.5.15. Demuestra que

1. $A + \varnothing$.
2. $A + B = B + A$.
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
4. $A \backslash B \subset A + C$.

Ejercicio 2.5.16. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A + B = \varnothing$

Ejercicio 2.5.17. Demuestra que $A + C = B + C$ implica que $A = B$.

2.6. Parejas ordenadas

Ejercicio 2.6.1. Sean A, B, X y Y conjuntos. Entonces

1. $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times Y)$.
2. $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cup (B \times Y)$.
3. $(A \backslash B) \times X = (A \times X) \backslash (B \times X)$.

Ejercicio 2.6.2. Demuestra que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

y

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Ejercicio 2.6.3. Demuestra que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$ si y sólo si $A \times B = \varnothing$.

Ejercicio 2.6.4. Demuestra que, si $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces $A \times B \subset X \times Y$. Recíprocamente demuestra que siempre que $A \times B \neq \varnothing$ entonces $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Ejercicio 2.6.5. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto no vacío. Demuestra que

1. $B \times \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}}\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} (B \times A)$.
2. $B \times \left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}}\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} (B \times A)$.

Ejercicio 2.6.6. Sean A y B conjuntos tales que $A \neq B$. Suponga que Z es un conjunto tal que $A \times Z = B \times Z$, demuestra que $Z = \varnothing$.

Ejercicio 2.6.7. Sean A y B conjuntos. Definimos $\langle a, b \rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$ para elementos $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que $\langle a, b \rangle$ es un conjunto, y $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Lo anterior constituye una definición alternativa para una pareja ordenada.

Ejercicio 2.6.8. Demuestra que para $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$,

$$\left(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X^c$$

y

$$\left(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\right)^c = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X^c$$

Ejercicio 2.6.9. Sea A un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(A)$ se dice una *dirección en* A si satisface

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Para conjuntos B y C tal que $B, C \in \mathcal{F}$, existe un conjunto $D \in \mathcal{F}$ tal que $D \subset B \cap C$

Demuestra que el conjunto $N_a = \{Y \in \mathcal{P}(A) | a \in Y\}$ es una dirección en A.

Ejercicio 2.6.10. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ direcciones en A_1 y A_2 respectivamente. Si

$$\mathcal{F} = \{X \times Y | X \in \mathcal{F}_1 \wedge Y \in \mathcal{F}_2\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es una dirección en $A_1 \times A_2$.

Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos.* Compañia Editorial Continental, 1966.

[Sig76] Sigler, L. E.: *Exercises in set theory.* Springer-Verlag, 1976.