Tres tipos de relaciones

Matemáticas Discretas
Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Funciones

Definición 1.1. Sea f una relación de A a B. Decimos que f es una *función* si para todo a en A y, b y b' en B, f satisface: $b = b'$ siempre que $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$. Adicionalmente, llamaremos a una función *total* si se cumple que $\mathrm{Dom}(f) = A$, en caso contrario la función se dirá *parcial*.

Ejemplo. Sea A un conjunto. Podemos considerar una función de $\varnothing$ a A. Por definición está debe ser un subconjunto de $\emptyset \times A$. Al ser este último conjunto el conjunto vacío, el único subconjunto posible es $f = \emptyset$. Así, existe sólo una función de $\emptyset$ a A, la *función vacía*.

Ejemplo. Sea A un conjunto. La relación identidad, 1_A es una función total de A a A. Esta función tiene un rol importante en la teoría de funciones a satsifacer, para una función $f\colon A \to B$, las igualdades $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$.

Ejemplo. Sean A y B conjuntos. Las relaciones

$$\pi_1 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times A \mid x = z\}$$

y

$$\pi_2 = \{((x, y), z) \in (A \times B) \times B \mid y = z\},$$

constituyen ejemplos de funciones. A éstas se les conoce como las *proyecciones del producto cartesiano* $A \times B$.

Teorema 1.1. *Sea f una función de A a B y sea g una función de B a C. La composición de f con g es una función de A a C.*

Demostración. La composición de funciones está definida al ser f y g relaciones. Consideremos la realción $g \circ f$, y supongamos que $(a, c) \in g \circ f$ y $(a, c') \in g \circ f$. En ese caso, existen elementos b y b' del conjunto B de forma que $(a, b) \in f$, $(b, c) \in g$, $(a, b') \in f$ y $(b', c') \in g$. Como asumimos que f era una función, entonces tenemos que $b = b'$ y en ese caso, tenemos que $(b, c) \in g$ y $(b, c') \in g$. Como g es una función por hipótesis, debemos tener que $c = c'$. Por tanto, $g \circ f$ es una función. $\square$

Corolario 1. *Se tiene que* $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) \cap f^{-1}(\mathrm{Dom}(g))$

Demostración. Supogamos que $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, por definición debe existir un elemento $c \in C$, de forma que $(a, c) \in g \circ f$. Por la definición de composición esto sucede cuando existe un elemento $b \in B$ de forma que $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$. Que ese elemento b exista, significa que $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Por otro lado, al tener $(b, c) \in g$, tenemos que $b \in \mathrm{Dom}(g)$ y como $(a, b) \in f$, también $a \in f^{-1}(\mathrm{Dom}(g))$. De lo anterior concluimos que $\mathrm{Dom}(g \circ f) \subset \mathrm{Dom}(f) \cap f^{-1}(\mathrm{Dom}(g))$.

La otra contención se puede probar de manera análoga. □

La definición de función, nos permite tomar de manera unívoca al elemento b de una pareja $(a, b) \in f$; así, este es el único elemento que acompaña al elemento a y podemos distinguirlo, escribiremos $b = f(a)$. Así, $f(a)$ será el único elemento tal que $(a, f(a) \in f)$.

Corolario 2. *Para todo* $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$*, se cumple que*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Demostración. Por definición, para un elemento $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, tenemos que $(g \circ f)(a)$ es el único elemento tal que $(a, (g \circ f)(a)) \in g \circ f$; como f es una función, esto implica que $(a, f(a)) \in f$ mientras que $(f(a), (g \circ f)(a)) \in g$. Como además $(f(a), g(f(a))) \in g$ y al ser g una función, debemos tener $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. □

Debemos notar de este último corolario, que cada lado de la fórmula es conceptualmente distinto, nuestras definiciones bastan para asegurar si igualdad.

Teorema 1.2. *Sean f y g funciones de A a B. Entonces, $f = g$ si y sólo si* $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ *y para cualquier* $a \in \mathrm{Dom}(f)$*,* $f(a) = g(a)$*.*

Demostración. Supongamos primero $f = g$. En ese caso, si $a \in \mathrm{Dom}(f)$ entonces por definición existe $b = fa(a)$ tal que $(a, b) \in f$, por la igualdad de f g debemos tener $f \subset g$ y por tanto $(a, b) \in g$. Podemos concluir de lo anterior dos cosas, la primera que $a \in \mathrm{Dom}(f)$ al existir b, y la segunda que $b = g(a)$ o en otras palabras que $f(a) = g(a)$. Esto prueba la necesidad.

Supongamos ahora que $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ y además que si $a \in \mathrm{Dom}(f)$ entonces $f(a) = g(a)$. Tomamos $(a.b) \in f$, al ser f una función debe ser el caso $b = f(a)$, y bajo nuestra suposición, esto significa que $b = g(a)$ al ser a un elemento del dominio de f. Pero por definición $(a, g(a)) \in g$ al ser los dominios de f y g iguales, de lo que obtenemos $(a, b) \in g$, por lo que $f \subset g$. De manera análoga podemos probar que $g \subset f$. Con esto se prueba la suficiencia. □

Introducimos ahora una notación nueva para funciones: para indicar que f es una función de A a B, escribimos

$$f \colon A \to B.$$

Definición 1.2. Sea $f \colon A \to B$. Diremos que

- f es *inyectiva* si, para tod o a y a' en $\mathrm{Dom}(f)$, si $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$.

- f es *suprayectiva* siempre que $\mathrm{Im}(f) = B$.
- f es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Es de remarcar que una función es inyectiva si expresamos la definición contrapositivamente, i.e. siempre que a y a' pertenezcan a $\mathrm{Dom}(f)$ y se cumpla que $a \neq a'$, debemos tener $f(a) \neq f(a')$. También, la definición de función suprayectiva nos permite afirmar que para cada $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ de forma que $b = f(a)$, esto sigue simplemente de la definición que hemos dado para la imagen de f y afirmar que no existen elementos de B fuera de ella.

Convención. El desarrollo de una teoría de funciones que incluya tanto a las funciones totales como a las parciales no tiene un impacto real en los resultados que presentaremos. Es por eso que cuando hagamos referencia a una función, esto significará que dicha función es total a menos que se indique lo contrario. Esto no debería causar problema alguno, lo resultados que presentaremos tienen una versión cuando las funciones involucradas no son necesariamente totales. Por ejemplo, si la función $f\colon A \to B$ no es necesariamente total, bastaría considerar su restricción al dominio de f; la función que resulta de este proceso es por supuesto una función total.

Teorema 1.3. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones.*

1. *Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
2. *Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.*
3. *Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$.*

Demostración. Para probar la primer parte del teorema supondremos f y g inyectivas. Ahora, si a y a' son elementos de A de tales que $(g\circ f)(a) = (g\circ f)(a')$, por el corolario 2, tenemos que $g(f(a)) = g(f(a'))$. Pero al ser g inyectiva, entonces $f(a) = f(a')$; y de la misma forma al ser f inyectiva, tenemos $a = a'$. Lo anterior prueba que $(g \circ f)$ es también inyectiva como se deseaba.

Para la segunda parte, supondremos f y g suprayectivas. Deseamos mostrar que para $c \in C$ hay un elemento $a \in A$ de forma que $c = (g \circ f)(a)$. En efecto, como g es suprayectiva, existe un elemento b dentro del conjunto B, de forma que $c = g(b)$. También, al ser f suprayectiva, existe un elemento a dentro del conjunto A, de forma que $b = f(a)$. Entonces,

$$\begin{aligned} c &= g(b) \\ &= g(f(a)) \\ &= (g \circ f)(a), \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $g \circ f$ es suprayectiva como se deseaba.

La tercera parte sigue es un resultado inmediato de las anteriores. Esto termina la prueba. $\square$

Teorema 1.4. *Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones.*

1. *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*

2. *Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.*

3. *Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es suprayectiva.*

Demostración. Para probar la primera parte supondremos que $g \circ f$ es inyectiva. Supongamos entonces que a y a' son elementos de A de forma que $f(a) = f(a')$. En ese caso, debemos tener que $g(f(a)) = g(f(a'))$ por el corolario 2, esto significa que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ y por tanto $a = a'$ al tener la composición de f con g como una función inyectiva. Lo anterior prueba que f es inyectiva.

Para probar la segunda parte del teorema, supondremos que $g \circ f$ es suprayectiva y tomemos c como un elemento del conjunto C. Bajo nuestra hipótesis, existe un elemento a en el conjunto A tal que $c = (g \circ f)(a)$, en ese caso, podemos tomar $b = f(a)$ como un elemento del conjunto B y bajo lo anterior afirmar que $c = g(b)$. Por tanto g es suprayectiva como se deseaba.

La última parte del teorema, es consecuencia directa de las otras dos. Con esto termina la prueba. $\square$

2. Relaciones de equivalencia

Definición 2.1. Sea R una relación de A a A. La relación se dice de *equivalencia* de A si satisface para todo a, b y c en A,

- $(a.a) \in R$ (Reflexiva).
- Si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$ (Simétrica).
- Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$ (Transitiva).

Proposición 2.1. *Si R es una relación de equivalencia de A a A, entonces* $\mathrm{Dom}(R) = A$ *y* $\mathrm{Im}(R) = A$

Demostración. El hecho de que para cualquer a en el conjunto A, implique que $(a, a) \in R$, implica la conjunción en la proposición. $\square$

Si R es una clase de equivalencia de A a A. Escribiremos

$$a \sim_R b,$$

en lugar de $(a, b) \in R$. Lo anterior se lee «a es equivalente a b». Si en contexto la relación está implícita, escribiremos simplemente

$$a \sim b.$$

Definición 2.2. Sea R una relación de equivalencia de A en A y sea a un elemento de A. La *clase de equivalencia de a respecto de R*, es el subconjunto de A definido por

$$[a]_R = \{x \in A \mid x \sim_R a\}.$$

Sin importar que relación de equivalencia tengamos, el conjunto $[a]$ es no vacío al tener por definición $a \sim a$ para cada elemento de A.

Teorema 2.2. *Para una relación de equivalencia R, son equivalentes*

1. $[a]_R = [b]_R$
2. $a \sim_R b$
3. $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Demostración. Supongamos que $[a]_R = [b]_R$. Entonces, como $a \in [a]_R = [b]_R$, debemos tener que $a \sim_R b$.

Si ahora suponemos que $a \sim_R b$, entonces $a \in [a]_R$ y al mismo tiempo $a \in [b]_R$, o en otras palabras, $a \in [a]_R \cap [b]_R$, por lo que este último es no vacío.

Finalmente, si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, por el axioma de elección es posible tomar un elemento $s \in [a]_R \cap [b]_R$. Esto significa que $s \sim_R a$ y $s \sim_R b$, y, por simetría y transitividad, tenemos que $a \sim_R b$. Tomemos ahora $c \in [a]_R$, entonces $c \sim_R a$, por transitividad, esto implica que $c \sim_R b$, y en consecuencia $c \in [b]_R$. Lo anterior prueba que $[a]_R \subset [b]_R$. De manera análoga se prueba que $[b]_R \subset [a]_R$, por lo que $[a]_R = [b]_R$, haciendo los tres enunciados equivalentes. $\square$

Corolario 3. *Una de dos, o $[a]_R = [b]_R$ o $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.*

Cuando el significado de R esté implícito y podamos escribir $a \sim b$, podremos también escribir $[a]$ en lugar de $[a]_R$.

Definición 2.3. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una *partición de A* si

- $A \neq \emptyset$ para cada A en $\mathcal{F}$.
- $A \cap B = \emptyset$ para cada $A \neq B$ en $\mathcal{F}$.
- $\bigcup \mathcal{F} = A$.

Lema 2.3. *Sea R una relación de equivalencia. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{F}_R = \{[a] \mid a \in A\}$$

es una partición.

Demostración. Para cada a en A, el conjunto $[a]$ es no vacío. Además, por el teorema 2.2, si $[a] \neq [b]$, tendremos que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Finalmente como $\{a\} \subset [a]$, y $\bigcup_{a \in A} \{a\} = A$, debemos tener que

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

Esto prueba que $\mathcal{F}_R$ es una partición. $\square$

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{F}$ una partición de A. Entonces, la relación $R_{\mathcal{F}}$, definida por $(a,b) \in R_{\mathcal{F}}$ si y sólo si existe un elemento $P \in \mathcal{F}$ tal que $a \in P$ y $b \in P$, es una relación de equivalencia.*

Demostración. Como $\bigcup \mathcal{F} = A$, la relación $R_{\mathcal{F}}$ es reflexiva y simétrica. Basta entonces probar que es transitiva. Supongamos para esto que $a \sim b$ y que $b \sim c$ bajo $R_{\mathcal{F}}$. En ese caso existen conjuntos P y P' de forma que a y b pertenecen a P, mientras que b y c pertenecen a P'. En ese caso b debe pertenecer a la intersección de P con P'. Por definición de partición, esto sólo es posible si $P = P'$, si ese es el caso, a y c son elementos de P. En otras palabras $a \sim c$. De aquí que la relación $R_{\mathcal{F}}$ sea transitiva. □

Los dos lemas anteriores nos permiten construir una partición de una relación de equivalencia y viceversa. Esto es una asignación entre estos dos conceptos. Si podemos caracterizar a los conceptos por conjuntos, podremos usar estos lemas para construir una función. En efecto, para que una relación R en A sea de equivalencia, debe satisfacer que

$$\mathrm{E}_1(A,R)\colon \forall x \in A.(x,x) \in R,$$

$$\mathrm{E}_2(A,R)\colon \forall x,y \in A.(x,y) \in R \to (y,x) \in R$$

y

$$\mathrm{E}_3(A,R)\colon \forall x,y,z \in A.(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \to (x,z) \in R.$$

Las fórmulas E_1, E_2 y E_3 pertenecen a la teoria de conjuntos por lo que de igual forma

$$\mathrm{Equiv}(A,R)\colon \mathrm{E}_1(A,R) \wedge \mathrm{E}_2(A,R) \wedge \mathrm{E}_3(A,R).$$

Ahora, por el axioma de comprensión,

$$\mathfrak{R}_A = \{R \in \mathcal{P}(A \times A) \mid \mathrm{Equiv}(A,R)\}$$

es ciertamente un conjunto, el conjunto de las relaciones de equivalencia de A.

Ahora codificaremos como conjunto a las particiones. Para esto emplearemos las fórmulas

$$\mathrm{P}_1(\mathcal{F})\colon \forall X \in \mathcal{F}.X \neq \emptyset,$$

$$\mathrm{P}_2(\mathcal{F})\colon \forall X,Y \in \mathcal{F}.X \neq Y \to X \cap Y = \emptyset$$

y

$$\mathrm{P}_3(A,\mathcal{F})\colon \forall x \in A \exists X \in \mathcal{F}.x \in X,$$

para construir la fórmula

$$\mathrm{Part}(A,\mathcal{F})\colon \mathrm{P}_1(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{P}_2(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{P}_3(A,\mathcal{F}).$$

Debe ser evidente que si $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, entonces $\mathcal{F}$ es una partición si y sólo si es cierto $\mathrm{Part}(A,\mathcal{F})$. En ese caso, por el axioma de comprensión

$$\mathfrak{P}_A = \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid \mathrm{Part}(A,\mathcal{F})\},$$

es un conjunto, el conjunto de las particiones de A.

Teorema 2.5. *Sea A un conjunto. Entonces, existe una biyección de $\mathfrak{R}_A$ a $\mathfrak{P}_A$.*

Demostración. Definimos primero a $\phi\colon \mathfrak{R}_A \to \mathfrak{P}_A$ como la función

$$\phi(R) = \mathcal{F}_R,$$

mientras que $\psi\colon \mathfrak{P}_A \to \mathfrak{R}_A$ será la función

$$\psi(\mathcal{F}) = R_{\mathcal{F}}.$$

Estas expresiones son en verdad funciones entre los conjuntos a partir de los resultados de los lemas 2.3 y 2.4. Mostrearemos que ϕ es invertible con ψ como su inversa.

Probaremos primero que, dada una pariticion $\mathcal{F}$ de A,

$$(\psi \circ \phi)(\mathcal{F}) = \mathcal{F},$$

o en otras palabras,

$$\psi(R_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}.$$

Para esto tomamos primero $P \in \psi(R_{\mathcal{F}})$, en ese caso, debe existir $a \in A$ de forma que $P = [a]_{R_{\mathcal{F}}}$. Como $\bigcup \mathcal{F} = A$, debe existir un elemento $Q \in \mathcal{F}$ de forma que $a \in Q$. Afirmamos que $P = Q$. En efecto, $b \in [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $b \sim_{R_{\mathcal{F}}} a$ lo que sucede si y sólo si existe un elemento $Q' \in \mathcal{F}$ de forma que a y b pertenezcan a Q', pero en ese caso $a \in Q$ y $a \in Q'$ por lo que la intersección es no vacía, debido a la definición de partición, debemos tener que $Q' = Q$. De lo anterior podemos concluir que $b \in [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $b \in Q$ como afirmamos con anterioridad. Como $P = Q$ y $Q \in \mathcal{F}$, podemos simplemente afirmar que $P \in \mathcal{F}$ y así $\psi(R_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$. Supongamos ahora que $P \in \mathcal{F}$. P debe ser no vacío por la definición de partición, tomamos entonces $a \in P$. En ese caso, debemos tener $P = [a]_{R_{\mathcal{F}}}$ de manera análoga en la prueba de la anterior contención, como $[a]_{R_{\mathcal{F}}} \in \psi(R_{\mathcal{F}})$, se tiene que $P \in \psi(R_{\mathcal{F}})$ y en consecuencia $\psi(R_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$. Estas dos contenciones implican la igualdad de los conjuntos dados.

Probaremos ahora que dada una relación de equivalencia R en A, tenemos que

$$(\phi \circ \psi)(R) = R$$

o en otras palabras

$$\phi\left(\mathcal{F}_R\right) = R.$$

Supongamos primero que $(a, b) \in \phi(\mathcal{F}_R)$. En ese caso debe existir un conjunto $P \in \mathcal{F}_R$ de forma que $a \in P$ y $b \in P$. Por definición $P = [c]_R$ para algún $c \in A$, de lo anterior debemos entonces tener que $a \sim_R c$ y $b \sim_R c$, por transitividad y simetría, $a \sim_R b$, lo anterior significa simplemente que $(a, b) \in R$ y en consecuencia $\phi(\mathcal{F}_R) \subset R$. Supongamos ahora que $(a, b) \in R$. De lo anterior podemos afirmar que $a \in [b]_R$ y $b \in [b]_R$. Como por definición $[b]_R \in \mathcal{F}_R$, entonces existe $P = [b]_R$ de forma que $a \in P$ y $b \in P$. En ese caso debemos tener $(a, b) \in \phi(\mathcal{F}_R)$. Por tanto $\phi(\mathcal{F}_R) \subset R$. De las contenciones es posible concluir con la igualdad.

Como ψ es la inversa de ϕ, entonces ϕ es invertible y por tanto una biyección entre $\mathfrak{R}_A$ y $\mathfrak{P}_A$. $\square$

Para finalizar esta sección, introducimos algunos conceptos adicionales acerca de las relaciones de equivalencia. Dada una relación de equivalencia R de A, al conjunto $\{[a] \mid a \in A\}$, lo llamaremos el *conjunto cociente de A respecto de R* al cual denotaremos por A/R. Existe además una funcíon $\pi\colon A \to A/R$ definida por $\pi(a) = [a]$, llamada la función canónica de A en su conjunto cociente A/R. Esta función es suprayectica y además satisface $\pi(a) = \pi(b)$ si y sólo si $a \sim b$.

3. Relaciones de orden

Definición 3.1 (Orden parcial estricto)**.** Sea P una relación de A en A. Llamaremos a P un *orden parcial estricto en A* si satisface

- $(a, a) \notin P$ para toda $a \in A$. (Irreflexiva).
- Si $(a, b) \in P$ y $(b, c) \in P$, entonces $(a, c) \in P$. (Transitiva).

ebemos notar que la anterior definición interpreta un orden en el sentido estricto, i.e., que excluye la igualdad de la definición. Esto es sencillo de observar al usar la notación que introducimos pues $(a, a) \notin P$ para todo $a \in A$. Además una vez que si $(a, b) \in P$ en un order parcial, debemos tener $(b, a) \in P$, en otro caso sería posible concluir $(a, a) \in P$, a través de la transitividad del orden, entrando en contradicción con la definición. De lo anterior es posible concluir que sólo una de las posibilidades $(a, b) \in P$ o $a = b$ puede cumplirse. Es posible, sin embargo, definir un order parcial de forma que la definición no excluya la igualdad.

Definición 3.2 (Orden parcial)**.** Sea R una relación de A en A. Llamaremos a I un *orden parcial en A* si satisface

- Para cada $a \in A$ se cumple $(a, a) \in I$. (Reflexiva)
- Si $(a, b) \in I$ y $(b, a) \in I$, entonces $a = b$. (Antisimétrica).
- Si $(a, b) \in I$ y $(b, c) \in I$ entonces $(a, c) \in I$. (Transitiva).

Parecería contradictorio introducir dos definiciones que a primera vista parecen ajenas una de la otra y que definan ambas un orden parcial. Sin embargo, existe una razón que permite desgranar ambas y establecer una biyección entre ellas. Para sostener nuestra afirmación, debemos establecer con claridad esa razón.

Lema 3.1. *Sea P un orden parcial estricto en A. Entonces, la relación R_P en A, definida por $(a, b) \in R_P$ si y sólo si $(a, b) \in P$ o $a = b$, es un orden parcial en A.*

Demostración. Para cada a en el cojunto A, es siempre cierto que $a = a$, por lo que $(a, a) \in R_P$, de lo que podemos concluir que R_P es una relación reflexiva.

Supongamos que $(a, b) \in R_P$ y que $(b, a) \in R_P$, por definición $(a, b) \in P$ o $a = b$ y $(b, a) \in P$ o $a = b$. En otras palabras debemos tener $(a, b) \in P$ y

$(b, a) \in P$ o simplemente $a = b$; por definición de orden estricto la primera de estas posibilidades deriva en contradicción por lo que debemos tener $a = b$. De lo anterior concluimos que la relación es antisimétrica.

Ahora, si $(a, b) \in R_P$ y $(b, c) \in R_P$, tenemos que $(a, b) \in P$ o $a = b$ y también $(b, c) \in P$ o $b = c$; si $a = b$ y $b = c$ tenemos $a = c$ y para cualquiera de las otras posibilidades tenemos que $(a, c) \in P$. Esto quiere decir que $(a, c) \in P$ o $a = c$ y por tanto $(a, c) \in R_P$, de lo que deriva que la relación es transitiva. Esto es lo que se quería demostrar. $\square$

Lema 3.2. *Sea I un orden parcial en A. Entonces, la relación R_I en A, definida por $(a, b) \in R_I$ si y sólo si $(a, b) \in I$ y $a \neq b$, es un orden parcial estricto en A.*

Demostración. Para cada a en A se tiene que $a = a$, de lo que se deriva que es falso que $a \neq a$ y en consecuencia debemos tener que $(a, a) \notin R_I$. Concluimos entonces que la relación es irreflexiva.

Supongamos ahora que $(a, b) \in R_I$ y que $(b, c) \in R_I$. Tenemos por definición que $(a, b) \in I$ y que $a \neq b$ y también, $(b, c) \in I$ y $b \neq c$; como I es transitiva, lo anterior implica que $(a, c) \in I$. Además, si $a = c$, debemos tener que $(b, a) \in I$ y por transitividad de I, $a = b$ lo que es imposible, por tanto $a \neq c$ y en ese caso$(a, c) \in I$ y $a \neq c$ por lo que $(a, c) \in R_I$ haciendo a la relación R_I transitiva como se buscaba. $\square$

De la misma forma en que las relaciones de equivalencia y las particiones se podian codificar a través fórmulas en el lenguaje de conjuntos, podemos hacer lo mismo para ordenes. Supongamos que $R \in \mathcal{P}(A \times A)$. Tomamos entonces $\mathrm{OrdE}(A, R)$ como una fórmula tal que R es un orden parcial estricto en A si y sólo si $\mathrm{OrdE}(A, R)$. También sea $\mathrm{OrdI}(A, R)$ de forma que R es un orden parcial si y sólo si $\mathrm{OrdI}(A, R)$. Estas fórmulas garantizan por el axioma de comprensión que las expresiones

$$\mathfrak{O}\mathfrak{E}_A = \{X \in \mathcal{P}(A \times A) \mid \mathrm{OrdE}(A, X)\}$$

y

$$\mathfrak{O}\mathfrak{I}_A = \{X \in \mathcal{P}(A \times A) \mid \mathrm{OrdI}(A, X)\},$$

son en verdad conjutos. El conjunto de los ordenes parciales estrictos en A y el conjunto de los ordenes parciales en A. Nuestro objectivo es probar que existe una biyección entre ellos. Una vez establecida dicha función, distinguir si un orden parcial tiene o no igualdad resultará irrelevante.

Teorema 3.3. *Existe una biyección entre $\mathfrak{O}\mathfrak{E}_A$ y $\mathfrak{O}\mathfrak{I}_A$.*

Demostración. Tomemos las funciones $\phi\colon \mathfrak{O}\mathfrak{E}_A \to \mathfrak{O}\mathfrak{I}_A$ y $\psi\colon \mathfrak{O}\mathfrak{I}_A \to \mathfrak{O}\mathfrak{E}_A$ como las funciones dadas por

$$\phi(P) = R_P$$

y

$$\psi(I) = R_I.$$

Afirmamos que ψ es la inversa de ϕ.

Comenzaremos probando que $\phi(R_I) = I$. Supongamos $(a, b) \in \phi(R_I)$, esto quiere decir que $(a, b) \in R_I$ o $a = b$, pero si $(a, b) \in R_I$, esto significa que $(a, b) \in I$ y $a \neq b$. Conectando lógicamente, lo anterior tenemos que $(a, b) \in \phi(R_I)$ si y sólo si $(a, b) \in I$ o $a = b$ y, por la definición de orden parcial con igualdad, esto sucede si y sólo si $(a, b) \in I$. Derivado de esta doble implicación concluímos que $\phi(R_I) = I$.

Ahora probaremos que $\psi(R_P) = P$. Supongamos que $(a, b) \in \psi(R_P)$, por definición $(a, b) \in R_P$ y $a \neq b$, sin embargo, si $(a, b) \in R_P$, debemos tener $(a, b) \in P$ o $a = b$. Conectando lógicamente, de lo anterior obtenemos que $(a, b) \in \psi(R_P)$ si y sólo si $(a, b) \in P$ y $a \neq b$ y por la definición de orden parcial, lo anterior sucede si y sólo si $(a, b) \in P$. De ésta doble implicación podemos simplemente concluir que $\phi(R_P) = P$.

Como $\phi(R_I) = I$, tenemos que $\phi \circ \psi = 1_{\mathfrak{O}\mathfrak{I}_A}$, mientras que de $\psi(R_P) = P$, tenemos que $\psi \circ \phi = 1_{\mathfrak{O}\mathfrak{E}_A}$, obteniendo así que ϕ es la biyección que buscabamos.

$\square$

Estamos en la posición de introducir una notación especial para un orden parcial. A un orden parcial estricto en A lo denotaremos por $<$. Cuando $(a, b) \in <$ escribiremos en su lugar $a < b$ y diremos que *a es menor que b*, y si $(a, b) \notin <$ simplemente escribiremos $a \nless b$. También, a un orden parcial en A lo denotaremos por $\leq$. Cuando $(a, b) \in \leq$ escribiremos en su lugar $a \leq b$ y diremos que *a es menor o igual que b*, y si $(a, b) \notin \leq$ simplemente escribiremos $a \nleq b$.

La anterior notación está influenciada directamente por el resultado anterior. Por un lado, si tenemos $<$ como un orden parcial estricto, el lema 3.1 le da completo significado a $\leq$ al tomar esta relación como el orden parcial asignado a $<$. Si por otro lado, tenemos un orden parcial $\leq$, el lema 3.2 le da significado a $<$ al tomar esta relación como el orden parcial estricto asignado a $\leq$. Además que estas asignaciones resulten en biyección nos permiten utilizar estos símbolos en el sentido habitual.

Para la pareja entre un conjunto A y orden parcial estricto $<$, $(A, <)$, lo llamaremos un conjunto parcialmente ordenado. De igual forma llamaremos a la pareja entre un conjunto A y un orden parcial $\leq$, $(A, \leq)$. La distinción entre los símbolos $<$ y $\leq$ es lo que determinará si la relación que acompaña a A es un order parcial estricto o no estricto.

Como un ejemplo de orden, tomemos A como un conjunto cualquiera, y definamos la relación de $\mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{P}(A)$, como $S \leq T$ si y sólo si $S \subset T$. Entonces, $(\mathcal{P}(A), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Los resultados que se han probado para teoría de conjuntos hacen la prueba de este hecho inmediata. El lector debe convencerse de este hecho.

Definición 3.3. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea a un elemento de A. Decimos que:

- a es un *máximo en A*, si para todo elemento b en A, tenemos $b \leq a$.
- a es un *mínimo en A*, si para todo elemento b en A, tenemos $a \leq b$.

- a es un *maximal en* A, si no existe un elemento b en A, tal que $a \leq b$.
- a es un *minimal en* A, si no existe un elemento b en A, tal que $b \leq a$.

Proposición 3.4. *En un conjunto parcialmente ordenado, si un máximo o un mínimo existen, entonces son únicos.*

Demostración. Supongamos que a y b son mínimos en A. Por definición a es menor o igual que cualquier otro elemento en A, en particular lo es de b, en ese caso$a \leq b$. De la misma forma debemos tener que $b \leq a$. Por antisimetría de $\leq$, tenemos que $a = b$. Por lo que si A tiene un mínimo, éste es único.

De manera análoga, podemos probar que si A tiene un máximo, éste es también único. □

Definición 3.4. Sea $(A, <)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, cualesquiera dos elementos a y b se dicen *comparables* si es cierto que $a < b$ o $b < a$ o $a = b$.

Definición 3.5. Un orden parcial en un conjunto A, se dice *total* o *lineal*, si para cualesquiera elementos a y b de A, a y b son comparables. Un conjunto parcialmente ordenado cuyo orden es total se dice *conjunto totalmente ordenado*.

Definición 3.6. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subset A$. Un elemento a de A se dice una *cota superior de B en A* , si para cada b en el conjunto B se tiene $b \leq a$. Recíprocamente, un elemento de a se dice una *cota inferior de B en A*, si para cada b en B, se tiene que $a \leq b$.

Definición 3.7. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subset A$. Entonces, si el conjunto de cotas superiores de B en A tiene un mínimo, a éste mínimo lo llaremos *supremo de B en A*. Recíprocamente, si el conjunto de cotas inferiores de B en A tiene un máximo, a éste lo llamaremos *supremo de B en A*.

Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \leq)$ definido con anterioridad. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$, entonces el subconjunto de A

$$\bigcup \mathcal{F}$$

es un supremo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(A)$; mientras que el subconjunto de A

$$\bigcap \mathcal{F}$$

es un ínfimo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(A)$.

Definición 3.8. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. A un subconjunto B de A se le denomina una *cadena en* $(A, \leq)$, si $(B, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Definición 3.9. Sea $(A, <)$ un conjunto parcialmente ordenado. El orden $<$ se dice que es un *buen orden* si cada subconjunto no vacío de A tiene mínimo, en este caso decimos que $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado.

Proposición 3.5. *Todo buen orden es un orden total.*

Demostración. Sea $(A, <)$ un conjunto bien ordenado. Deseamos concluir que dos elementos cualquiera a y b en A sean comparables. Para esto consideremos el subconjunto de A $\{a, b\}$; al estar el conjunto bien ordenado, dicho conjunto debe tener un mínimo, sea c el mínimo. Esto quiere decir por definición que $c \in \{a, b\}$, en otras palabras, o $c = a$ o $c = b$, si $c = a$, entonces $c \leq b$, mientras que si $c = b$ entonces $b \leq a$. Por lo que a y b resultan comprables como se deseaba. $\square$

Referencias

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria.* Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos.* Las Prensas de Ciencias, 2007.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Matemáticas Discretas impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.