Ejercicios para Matemáticas Discretas

Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Preliminares

1.1. Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto $A = 1, 2, 3$

Ejercicio 1.1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.1.5. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.11. Demuestra que para cualquier conjunto A,

$$A \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{y} \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

Ejercicio 1.1.12. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

1.2. Relaciones

Ejercicio 1.2.1. Suponga que A es el conjunto de las personas en el mundo. Si R la relación

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ están casados}\},$$

determina el dominio y rango de R

Ejercicio 1.2.2. Se realiza un experimento de la siguiente manera: Se tira un dado y se anota el resultado; después se lanza una moneda al aire y se anota el resultado. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{\circ, +\}$. Entonces, $A \times B$ será el conjunto de posibles resultados del experimento, supongase que el experimento se realiza n veces; denotando $\mathcal{E}_i \in A \times B$ como el resultado de la i-ésima realización del experimento. Definimos entonces la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \exists i.(a, b) = E_i\}.$$

- Determine el dominio e imagen de R.
- ¿Cómo interpretarías la imagen de «1» (i.e. $R[\{1\}]$)?.
- ¿Cómo interpretarías la preimagen de «$\circ$» (i.e. $R^{-1}[\{\circ, +\}]$)?

Ejercicio 1.2.3. Consideremos una base de datos relacional pero interpretada en el marco de la teoría de conjuntos. Sea entonces A un conjunto de números naturales en donde cada elemento representa un cliente, sea también B un conjunto de números naturales en el cada elemento representa un producto que vende la tienda y finalmente, sea R un subconjunto de $A \times \mathcal{P}(B)$ que representa una compra realizada en la tienda. Los conjuntos A, B y R son las tablas de la base de datos, nótese sin embargo que R es en realidad una relación.

- Establezca una relación entre un cliente y un producto.
- ¿Se podrá describir un conjunto de forma tal que sus elementos sean los productos que jamás han sido adquiridos?
- ¿Qué significado se le podrá dar al dominio de R?
- Nótese que la imagen de R es un subconjunto del conjunto potencia de B, por lo que ésta es una familia de conjuntos. Qué significado podrá tener el conjunto
$$\bigcup \operatorname{im}(R).$$
- Suponga que n, m y l son elementos de A. ¿Qué conjunto describiría los productos adquiridos por cualquiera de estos tres clientes?

Ejercicio 1.2.4. Explica a que se refiere la siguiente relación

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$$

Ejercicio 1.2.5. Sean A y B conjuntos. Definimos

$$\langle a, b\rangle = \{\{a, \varnothing\}, \{b, \{\varnothing\}\}\}.$$

Demuestra que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = b$ y $c = d$.

Ejercicio 1.2.6. Para conjuntos A, B, C y D demuestra que $A \times B \subset C \times D$ si y sólo si $A \subset C$ y $B \subset D$.

Ejercicio 1.2.7. Demuestra que

$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$

2. Tres tipos de relaciones

2.1. Funciones

Ejercicio 2.1.1. Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de relaciones de A a B y sea R una relación de B a C. Probar que

$$R \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcup_{i\in I} (R \circ R_i).$$

Ejercicio 2.1.2. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva y g no lo sea.

Ejercicio 2.1.3. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea suprayectiva y f no lo sea.

Ejercicio 2.1.4 (Notación de la inversa I). Sea f una función de A a B. Al ser f una relación, hemos definido la relación inversa de f como

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in f\}.$$

Esta relación no es necesariamente una función. Si f es biyectiva, demuestre que la relación inversa es f^{-1} es una función total de B a A y que en verdad $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$. Este hecho justifica la notación f^{-1} para la función inversa de f.

Ejercicio 2.1.5 (Notación de la inversa II). Sea $f\colon A \to B$ una función invertible y sea $g\colon B \to A$ la inversa de f. Si $B' \subset B$, demuestra que

$$f^{-1}[B'] = g[B'].$$

Esto es, que la imagen inversa del conjunto B' bajo f coincide con la imagen del conjunto B' bajo la inversa de f. El hecho que estos conjuntos coincidan, nos permite escribir sin ambiguedad $f^{-1}[B']$ aun cuando f es invertible.

Ejercicio 2.1.6. Probar que si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ son funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es también biyectiva con inversa dada por

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Ejercicio 2.1.7. Sea $f\colon A \to B$. Desmuestra que

- Si $S \subset T \subset A$, entonces $f[S] \subset f[T]$.
- Si $U \subset V \subset B$, entonces $f^{-1}[U] \subset f^{-1}[V]$.

Ejercicio 2.1.8. Sea $f\colon A \to B$ una función y sean además $F, G\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ las funciones definidas por

$$F(S) = f[S]$$

y

$$G(U) = f^{-1}[U].$$

Demuestra que

- Si f es suprayectiva, entonces $F \circ G = 1_{\mathcal{P}(B)}$.
- Si f es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{\mathcal{P}(A)}$.

Ejercicio 2.1.9. Sea $f\colon A \to B$ una función, sean también S y T subconjuntos de A y, U y V subconjuntos de B. Demuestra

- $f\left[S \cup T\right] = f[S] \cup f[T]$.
- $f^{-1}\left[U \cup V\right] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
- $f\left[S \cap T\right] \subset f[S] \cap f[T]$.
- $f^{-1}\left[U \cap V\right] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

Recuerda que si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de conjuntos, la unión e intersección de estos están dados por las expresiones

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I . x \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I . x \in A_i\} .$$

Ejercicio 2.1.10. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de subconjuntos de A y $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia indicada de subconjuntos de B, demuestra que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j\in J} B_j\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_j)$$

Ejercicio 2.1.11. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de subconjuntos de A y $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia indicada de subconjuntos de B, demuestra que

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcap_{j\in J} B_j\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_j)$$

Ejercicio 2.1.12. Sea $f\colon A \to B$ y sean S y U subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar

- $f^{-1}[B\backslash U] = A\backslash f^{-1}[U]$.
- f es suprayectiva si y sólo si $B\backslash f[S] \subset f[A\backslash S]$.
- f es inyectiva si y sólo si $f[A\backslash S] \subset B\backslash f[S]$.

Ejercicio 2.1.13. Sea A un conjunto y sea a un elemento de A. Si $\kappa_a\colon A \to A$ es la función constante de a, demostrar que $\kappa_a \circ g = \kappa_a$ para cualquier función $g\colon A \to A$. Recíprocamente, si $f\colon A \to A$ es una función tal que $f \circ g = f$ para cualquier función $g\colon A \to A$, demostrar que existe un elemento $b \in A$ de forma que $f = \kappa_b$, i.e., que f es una función constante. (Sugerencia: Una función f es constante si y sólo si existe $a \in A$ de forma que para toda $b \in A$, $f(b) = a$. Usa contraposición afirmando que f no es constante y concluye $f \circ g \neq f$ para alguna función g).

Recuerda que hemos definido las proyecciones del conjunto $A \times B$ a A y B como las funciones $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$, respectivamente, dadas por $\pi_1(a, b) = a$ y $\pi_2(a, b) = b$.

Ejercicio 2.1.14. Sea $h \colon C \to A \times B$. Demuestra que para toda $c \in C$,

$$h(c) = ((\pi_1 \circ h)(c), (\pi_2 \circ h)(c))$$

Ejercicio 2.1.15. Sean A y B conjuntos y sean $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$ las proyecciones de $A \times B$ en A y B respectivamente. Demuestra que para cualquier conjunto C y para cualesquiera funciones $f \colon C \to A$ y $g \colon C \to B$ existe una única función $h \colon C \to A \times B$ de forma que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$. (Sugerencia: Para probar la unicidad usa el ejercicio anterior).

Ejercicio 2.1.16. Sean $f \colon A \to C$ y $g \colon B \to D$ funciones. Demuestra que existe una función $h \colon A \times B \to C \times D$ de forma que, si f y g son biyectivas, entonces h es biyectiva.

Ejercicio 2.1.17. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones de A a B no necesariamente totales. Si para cualesquiera i y j en I, tenemos que

$$f_i(a) = f_j(a),$$

para cualquier $a \in \mathrm{Dom}(f_i) \cap \mathrm{Dom}(f_j)$, demuestra que existe una función $f \colon A \to B$ no necesariamente total de forma que,

$$\mathrm{Dom}(f) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Dom}(f_i)$$

y, para cada i en el índice y cada $a \in \mathrm{Dom}(f_i)$,

$$f(a) = f_i(a).$$

Ejercicio 2.1.18. Sea R una relación en A. Demuestra que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $R \subset S$, entonces $R \cup R^{-1} \subset S$.

Ejercicio 2.1.19. Sea R una relación en A. Demuestra que $R \cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $S \subset R$, entonces $S \subset R \cap R^{-1}$.

Ejercicio 2.1.20. Sea R una relación reflexiva y transitiva en un conjunto A. Probar que $R \circ R = R$.

Ejercicio 2.1.21. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en A. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es una relación de equivalencia si y sólo si $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

Ejercicio 2.1.22. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en un conjunto A tal que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es la intersección del conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A que contienen R_1 y R_2, i.e.

$$R_2 \circ R_1 = \bigcap \{X \in \mathfrak{R}_A \mid R_1 \subset X \wedge R_2 \subset X\}.$$

Recuerda que para una relación de equivalencia en un conjunto A, hemos definido el conjunto cociente de A respecto de R como

$$A/R = \{[a] \in \mathcal{P}(A) \mid a \in A\}$$

y la función canónica $\pi\colon A \to A/R$ como

$$\pi(a) = [a].$$

Ejercicio 2.1.23. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $S \subset R$ tal que la imagen de la proyección π_1 en S es A. Demostrar que $R \circ S = R$ y que si T es una relación cualquiera en A, entonces $(R \cap T) \circ S = R \cap (T \circ S)$.

Ejercicio 2.1.24. Sea $f\colon A \to B$ una función y sea

$$R_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Demuestra que R_f es una relación de equivalencia y que si

$$F = \{(a, f(a)) \mid a \in A\},$$

entonces $R_f = F^{-1} \circ F$. A la relación R_f se le conoce como la *relación de equivalencia asociada a f*.

Ejercicio 2.1.25. Sea R una relación de equivalencia en A y sea $\pi\colon A \to A/R$ la función canónica de A a A/R. Probar que R es la relación de equivalencia asociada a π.

Ejercicio 2.1.26. Sean $f\colon A \to B$ una función, R una relación de equivalencia en A y S una relación de equivalencia en B, sean también $\pi_R\colon A \to A/R$ y $\pi_S\colon B \to B/S$ las funciones canónicas de A a A/R y B a B/S respectivamente. Demostrar que existe una función $h\colon A/R \to B/S$ tal que $h \circ \pi_R = \pi_S \circ f$ si sólo si para todo $(a, a') \in R$ tenemos que $(f(a), f(a')) \in S$.

2.2. Relaciones de orden

Ejercicio 2.2.1. Sea A un conjunto y sea $<$ una relación en A de forma que

- para cada $a \in A$, $a < a$ es falso y
- si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demuestra que si definimos la relación $\leq$ en A como $x \leq y$ si y sólo si $x < y$ o $x = y$, entonces $\leq$ es un orden parcial[1]

Ejercicio 2.2.2. Sea $P = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$. Dibuja el diagrama de$P$ ordenado con las siguientes reglas. $v < a$, $v < b$, $v < c$, $v < d$, $v < e$, $v < f$, $v < u$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $a < u$, $b < c$, $b < d$, $b < e$, $b < f$, $b < u$, $c < d$, $c < e$, $c < f$, $c < u$, $d < e$, $d < f$, $d < u$, $e < u$ y $f < u$.

[1] Una relación binaria $<$ con esas propiedades se le conoce como orden parcial estricto.

Ejercicio 2.2.3. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que la pareja

$$(\mathcal{P}(A), \subset)$$

es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejercicio 2.2.4. Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{u \colon \mathbb{N} \to \Sigma \mid u \text{ es total}\}.$$

Definiremos ahora un orden en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $u \leq v$ si y sólo si $u = v$ o u es finita de forma que para $0 \leq n < l(u)$,

$$u(n) = v(n).$$

1. Demuestra que $\leq$ es un orden parcial en Σ^*.

2. Demuestra que si $\mathbf{O}(n) = 0$ para todo n, entonces $\mathbf{O} \leq u$ si $u \in \Sigma^*$.

3. Sea $u \in \Sigma^*$, determine que elementos $v \in \Sigma^*$ satisfacen $u \lll v$.

4. Demuestra que para una cadena binaria no finita u, no existe elemento v tal que $u \lll v$.

Ejercicio 2.2.5. Tomemos el conjunto de todas las funciones de A a B por

$$B^A = \{f \mid f \colon A \to B\}.$$

Definiremos un orden en B^A como sigue: diremos que $f \leq g$ para elementos de B^A, siempre que $\operatorname{dom}(f) \subset \operatorname{dom}(g)$ y para cada elemento $x \in \operatorname{dom}(f)$

$$f(a) = g(a).$$

1. Demuestra que $(B^A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

2. Demuestra que $\varnothing \leq f$ para cada $f \in B^A$.

3. Encuentra un cadena en B^A.

Ejercicio 2.2.6. Para el orden que conocemos para $\mathbb{N}$, demuestra que $m \lll n$ si y sólo si $n = m + 1$.

Ejercicio 2.2.7. Para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subset)$, demuestra que $S \lll T$ si y sólo si existe $b \in A \backslash S$ tal que $T = S \cup \{b\}$.

3. De la teoría del orden a la teoría de retículas

3.1. Elementos de la teoría del orden

Ejercicio 3.1.1. Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados. Demuestra que $(a_1, b_1) \lll (a_2, b_2)$ si y sólo si

- $a_1 = a_2$ y $b_1 \lll b_2$ en B o
- $b_1 = b_2$ y $a_1 \lll a_2$.

Referencias

[Fra87] Fraleigh, John B.: *Álgebra abstracta: primer curso.* Addison Wesley, 1987.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria.* Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos.* Las Prensas de Ciencias, 2007.