

Notas a [Hal66]

(Parte 1: Axiomas básicos)

Álgebra Superior I / Actuaría 2016-I

Algunos comentarios previos

Hemos visto ya la necesidad de aclarar el concepto de conjunto para poder solidificar la matemática dentro del marco de una teoría consistente. La teoría que nos concierne y que nos ayudará a establecer éste concepto será la teoría axiomática de conjuntos.

En dicha teoría se presentarán postulados (los axiomas), que nos deben resultar razonables en el marco de nuestra intuición. Estos axiomas estarán formulados como enunciados que llamaremos *propiedades en la teoría de conjuntos*. Una propiedad en la teoría de conjuntos será cualquier propiedad formada por los predicados « \in » y « $=$ », y cualquier número de disyunciones, conjunciones, negaciones o cuantificaciones necesarias. Por ejemplo, la expresión

$$\forall x \exists y. x \in y \wedge x = Z$$

será una propiedad en la teoría de conjuntos al ser la cuantificación universal sobre la variable x de la cuantificación existencial sobre la variable y de la conjunción de las propiedades $x \in y$ y $x = Z$. Además de la forma muy particular que tiene una propiedad en la teoría de conjuntos, los términos variables podrán ser únicamente sustituidos por conjuntos. Haremos un par de abreviaciones cuando nos enfrentemos a cuantificadores en teoría de conjuntos. Para un conjunto A , escribiremos

$$\exists x \in A. \alpha(x)$$

en lugar de escribir $\exists x. x \in A \wedge \alpha(x)$. También cuando afirmemos que

$$\forall x \in A. \alpha(x)$$

esto simplemente significará $\forall x. x \in A \rightarrow \alpha(x)$.

Como una aclaración final es deseable remarcar que seguimos tomando como conceptos primitivos a conjunto pertenencia. Sin embargo, los axiomas modelarán (y ese es el objetivo de la teoría) el comportamiento adecuado de lo que llamaremos conjunto de forma tal que los problemas que presentó la teoría preaxiomática (que nosotros tuvimos a mal llamarla clásica) serán desechados. De igual forma cabe destacar que la teoría presentada aquí será la teoría

Zermelo-Fraenkel, está teoría constituye un ejemplo de teoría predicativa, i.e. que describe únicamente los objetos de interés (en este caso los conjuntos) y nada más. Así, los conjuntos a pesar de ser tomados como primitivos no son libremente interpretados sino acabarán restringidos por los postulados que la teoría presenta como axiomas.

1. Axioma de extensión

1.1. Discusión general

El axioma de extensión es simplemente el paso axiomático por el cual somos capaces de definir la igualdad entre conjuntos. Esta nos define como es que la pertenencia guarda relación con la igualdad. El axioma afirma lo siguiente:

Axioma (de extensión). Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

En este punto nos debemos preguntar si el enunciado del axioma está en verdad formulado sobre la teoría de conjuntos. La respuesta es afirmativa, este afirma de manera simbólica

$$\forall X \forall Y. X = Y \leftrightarrow (\forall x. x \in X \leftrightarrow x \in Y).$$

Lo cual afirma de manera llana lo mismo que el axioma de extensión. Como comenta Halmos en [Hal66]:

«Con mayor pretensión y menos claridad: un conjunto está determinado por su *extensión*».

La definición de la igualdad de conjuntos parecería trivial o incluso innecesaria, sin embargo no es un hecho obvio, de hecho es muy particular. Pensemos por un momento en otro tipo de relación que no sea el de pertenencia, por ejemplo la de ancestro. Diremos que si x y y son seres humanos, definiremos $x \in y$ si x es ancestro de y . Por ancestro identificamos a los padres, los abuelos, etc. Estamos en posición de preguntarnos lo siguiente: si los humanos y y z tienen los mismos ancestros, ¿será $x = y$? Basta tomar dos hermanos para verificar que ambos tienen exactamente los mismos ancestros, sin embargo son humanos distintos, por lo que en el caso de la relación de ancestro, algo parecido al axioma de extensión desafiaría el significado mismo de la relación.

Estamos ahora en posición de proveer de nuestra primera definición, que a pesar de todo no será para nada nueva.

Definición 1.1. Si A y B son conjuntos y todo elemento de A es elemento de B , decimos que A es un *subconjunto de B* o que B *incluye a A* o que A *está contenido en B* y escribimos

$$A \subset B.$$

Esta definición presenta algunas propiedades notables que listamos a continuación:

- Para todo conjunto A , $A \subset A$ (La inclusión es reflexiva).
- Si A , B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ (La inclusión es transitiva).
- Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$ (La inclusión es anti-simétrica).

Las propiedades anteriores por supuesto requieren prueba, el lector tendrá oportunidad de proveer los anteriores resultados de contenido resolviendo los ejercicios 1.1, 1.2 y 1.3.

Habrà entonces que distinguir aquellos conjuntos tales que $A \subset B$ pero $A \neq B$; para designarlos usaremos el término *propio*. Así un subconjunto se dirà subconjunto propio de otro, si es un subconjunto y si los conjuntos en cuestión son diferentes.

Una última nota. Podemos observar que la propiedad que define que A es un subconjunto de B , se puede escribir de manera formal como

$$\forall x. x \in A \rightarrow x \in B,$$

por lo que el axioma de extensión tiene otra posible forma basada en el concepto que se introdujo para subconjuntos.

Teorema 1.1. Sean A y B dos conjuntos. $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Demuestra que $A \subset A$.

Ejercicio 1.2. Si A , B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, demuestra que $A \subset C$.

Ejercicio 1.3. Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 1.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

2. Axioma de especificación

2.1. Discusión general

Uno de nuestros problemas durante la discusión clásica de la teoría de conjuntos fue la amplitud de los enunciados. Ahí eramos capaces de construir un conjunto bajo la premisa que la propiedad que los definía pareciera razonable, en realidad esta libertad con que hemos manejado a los enunciados acarrea el primer problema que la teoría axiomática ha de solucionar.

Para postular el axioma de especificación, hemos de antes que lo citado como propiedad en el axioma será simplemente una propiedad en la teoría de conjuntos.

Axioma (de especificación). A todo conjunto A y a toda propiedad $\alpha(x)$, corresponde un conjunto B cuyos son precisamente los elementos x de A para los cuales se cumple $\alpha(x)$.

El axioma afirma de manera simbólica que, siempre que $\alpha(x)$ sea una propiedad entonces,

$$\forall X \exists Y. \forall x. x \in X \wedge \alpha(x) \leftrightarrow x \in Y.$$

Lo que nos dice éste axioma es que dado un conjunto A y una condición α , existirá un conjunto B de forma tal que $x \in B$ si y sólo si

$$x \in A \wedge \alpha(x).$$

En otras palabras, el resultado de remover los elementos de A que no satisfacen α resulta de nueva cuenta en un conjunto. En ese sentido, el axioma no parece descabellado y hasta deseable.

Debemos notar dos cosas. Ya no podemos crear conjuntos libremente, ahora necesitamos un conjunto base, por lo que habremos paliado una de la deficiencias del teoría clásica de conjunto. La segunda es que el axioma sólo postula la existencia de un conjunto con la propiedad que define, no su unicidad. Esto en realidad no es un problema.

Teorema 2.1. Sea A un conjunto, α una propiedad cualquiera y sea B el conjunto indicado en el axioma de especificación. Si C es un conjunto tal que $a \in C$ si y sólo si $a \in A$ y $\alpha(a)$, entonces $B = C$.

Demostración. Basta observar la definición del conjunto B para concluir lo siguiente, $a \in C$ si y sólo si $a \in A$ y $\alpha(a)$ lo que sucede si y sólo si $a \in B$, de lo que podemos concluir que B y C son subconjuntos uno de otro y por tanto iguales. \square

Del teorema anterior podemos concluir la unicidad del conjunto descrito en el axioma. Para indicar este conjunto usaremos la siguiente notación

$$\{x \in A \mid \alpha(x)\}.$$

El axioma comienza a abrir las aclaraciones necesarias en la teoría de la siguiente manera. Sea A un conjunto. Debemos admitir que el enunciado

$$x \notin x$$

es una propiedad en la teoría de conjuntos. Por el axioma de especificación, es posible considerar el conjunto

$$B = \{x \in A \mid x \notin x\}$$

y preguntar si éste será un elemento de A , i.e. $B \in A$. Supongamos entonces que $B \in A$. Entonces, debemos tener uno de dos casos, a decir $B \in B$ o que $B \notin B$. Pero si $B \in B$, entonces $B \notin B$ lo cual es evidentemente contradictorio; ahora

si $B \notin B$, entonces es falso que $B \notin B$, por lo que $B \in B$, lo que es de nueva cuenta contradictorio, como las únicas posibilidades han derivado en contradicción, hemos de concluir que la hipótesis $B \in A$ resulta en contradicción por lo que es falsa y por tanto $B \notin A$. Esto constituye la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sea A un conjunto. Entonces existe un conjunto B tal que $B \notin A$.*

Ahora A fue como un conjunto cualquiera y a pesar de esto, hemos sido capaces de mostrar la existencia de un elemento que no pertenece a él, por lo que hemos de concluir que no existe algo a lo que todo pertenece. Esto comienza a resolver algunos problemas que presentaba la teoría clásica de conjuntos.

2.2. Discusión mínima de clases

El argumento del que nos nutre el axioma nos dota de algunos huecos en el lenguaje. Para intentar aclararlos intentaremos describir brevemente el concepto de clase (que no ha de ser confundido con el de conjunto). Decimos que \mathcal{C} una clase es una colección de objetos que satisfacen una propiedad (una propiedad por supuesto de la teoría de conjuntos) a la cual denotaremos por

$$\mathcal{C} = \langle x \mid \alpha(x) \rangle$$

cuando colecciones los objetos que satisfagan α . La discusión del último párrafo de la sección anterior nos permite concluir el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *La clase universo, i.e. $\mathcal{U} = \langle x \mid x = x \rangle$, no es un conjunto.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que es un conjunto. Entonces por la proposición 2.2 deberá existir un conjunto B tal que $B \notin \mathcal{U}$, sin embargo $B = B$ por lo que deberíamos tener que $B \in \mathcal{U}$, este hecho es por supuesto una contradicción. Debemos entonces admitir que \mathcal{U} no puede ser un conjunto como afirma el teorema. \square

Esto de manera coloquial afirma que los conjuntos no son colecciones tan grades ni tan arbitrarias, sino bastante claras o en otras palabras especificadas. Lo que nos pone un paso más lejos de las paradojas.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Asuma que los números naturales son un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los número impares.
- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de los cuadrados perfecto.

- El conjunto de los múltiplos de tres.

Ejercicio 2.2. Asuma que los números reales constituyen un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números mayores a cinco.
- El conjunto de los números cuya raíz es un entero.
- El conjunto de los números que son o uno o menos uno.
- El conjunto de los números racionales.

Ejercicio 2.3. Discute si la teoría hasta ahora presentada nos presenta ejemplos de conjuntos. ¿Por qué es esto importante?

3. Parejas no ordenadas

3.1. Discusión general

Comenzaremos afirmando un axioma que debe resultar inmediato sin embargo no existe postulado previo que justifique su veracidad.

Axioma (de existencia). Existe al menos un conjunto.

Podríamos preguntarnos entonces cómo formular este axioma de manera que sea una propiedad en la teoría de conjuntos. En realidad es muy sencillo, basta dar certeza a la propiedad

$$\exists X. X = X$$

La propiedad que califica el cuantificador existencial es una propiedad trivial que nada afecta en realidad al conjunto que cuantifica. De ahí que esa propuesta sea la propiedad que afirma el axioma.

Aunque parezca un postulado inocente, tiene una implicación interesante. Como los conjuntos existen (el axioma garantiza al menos uno), la hipótesis «sea A un conjunto» ya no es descabellada. Supongamos entonces un conjunto A . Por el axioma de especificación, podemos tomar todos los elementos x de A que satisfagan $x \neq x$, en otras palabras el conjunto

$$\{x \in A \mid x \neq x\}.$$

El conjunto anterior por supuesto coincide con nuestra idea de un conjunto sin elementos que anteriormente denominamos vacío. Sin embargo, este conjunto ahora existe no por un capricho nuestro, sino como consecuencia de los axiomas hasta ahora postulados.

El conjunto que se postula como sin elementos tiene la peculiaridad que está especificado de un conjunto A , esto podría llevarnos a pensar en la existencia de diferentes conjuntos sin elementos dependiendo del conjunto que se especifique. Vamos a discutir la razón detrás de la existencia incondicional del conjunto vacío.

Definición 3.1. Diremos que un conjunto A es un conjunto sin elementos, siempre que para todo a , entonces $a \notin A$.

Existe una propiedad intrínseca en la definición de un conjunto sin elementos.

Lema 3.1. Sean A y B conjuntos. Si A es un conjunto sin elementos, entonces $A \subset B$.

Demostración. Basta demostrar que la implicación, si $a \in A$ entonces $a \in B$ es cierta para cualquier a . Sin embargo lo es: al ser el enunciado $a \in A$ falso para cualquier a , la implicación deberá ser cierta (revisa la tabla de verdad de la implicación). Por tanto $A \subset B$ como deseábamos. \square

Teorema 3.2. Existe un conjunto sin elementos. Este conjunto es además el único sin elementos.

Demostración. Por el axioma de existencia, obtenemos un conjunto A . Ahora, por el axioma de especificación obtenemos el conjunto

$$B = \{x \in A \mid x \neq x\}.$$

Afirmamos que B no tiene elementos. En efecto, si $a \in B$, entonces $a \neq a$ lo cual es una contradicción, por tanto debemos concluir que B es un conjunto sin elementos.

Si C fuera un conjunto sin elementos, entonces por el lema anterior $C \subset B$; ahora, hemos mostrado que B es también un conjunto sin elementos por lo que el lema puede ser aplicado nuevamente para obtener $B \subset C$, por tanto $C = B$. De lo que podemos concluir que existe un único conjunto con la propiedad que no tenga elementos. \square

Con el teorema anterior podemos simplemente definir lo que antes fue inmediato, el conjunto vacío es aquel conjunto sin elementos y será denotado por

$$\emptyset.$$

A pesar de lo técnico del resultado anterior, nuestra teoría dice muy poco de como construir conjuntos nuevos. El siguiente axioma nos comienza a delinear con algo más de claridad otra forma de crear nuevos conjuntos de otros dados.

Axioma (de apareamiento). Para dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto al cual pertenecen ambos.

De manera simbólica, para notar que el axioma es de igual forma un enunciado en la teoría de conjuntos, lo anterior se escribe

$$\forall x \forall y \exists Z. x \in Z \wedge y \in Z.$$

Debemos ser cuidadosos con este axioma; no se afirma que existe un conjunto que *únicamente* contiene a los conjuntos, simplemente afirma que los contiene y quizá otros más.

Teorema 3.3. Sean a y b conjuntos. Entonces existe uno y sólo un conjunto que contiene exclusivamente a a y b como elementos.

Demostración. Sea A el conjunto indicado por el axioma de apareamiento de forma que $a \in A$ y $b \in A$. Usando el axioma de especificación, delinea el siguiente conjunto:

$$B = \{x \in A \mid x = a \vee x = b\}.$$

Este conjunto contiene evidentemente sólo a y b como elementos. Debe resultar inmediato que cualquier otro conjunto que contenga sólo a los elementos a y b será igual a B por el axioma de extensión. \square

El conjunto que contiene sólo a y b , se le llama *la pareja formada por a y b* al cual denotaremos por

$$\{a, b\}.$$

Como caso especial, tendríamos la pareja $\{a, a\}$ a la cual denotaremos simplemente como $\{a\}$. A este conjunto se le denomina *el conjunto unitario de a* .

Ejercicios

Ejercicio 3.1. ¿Son distintos los conjuntos $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$?

Ejercicio 3.2. Aparte de los conjuntos citados en el ejercicios anterior. ¿Qué otros conjuntos serán derivados de la existencia del conjunto vacío?

Ejercicio 3.3. Demuestre que, si $X \subset \emptyset$, entonces $X = \emptyset$.

4. Uniones e Intersecciones

4.1. Discusión general

Como en la teoría clásica, deseamos obtener un conjunto que nos permita reunir los elementos de otros dos dados. Dados dos conjuntos A y B , el axioma del apareamiento nos permite conjugar estos como elementos de un tercer conjunto, a decir $\{A, B\}$. Ahora, para unir dichos conjuntos sería necesario tomar sus elementos y coleccionarlos; no tenemos garantía por el momento que aquella colección sea un conjunto. Esta es la razón de ser del siguiente axioma.

Axioma. (de la unión) Sea \mathcal{F} un conjunto. Entonces existe un conjunto U tal que siempre que $A \in \mathcal{F}$ y $a \in A$, entonces $a \in U$.

De manera simbólica, lo anterior afirma que

$$\forall \mathcal{F} \exists U \forall X \forall x. X \in \mathcal{F} \wedge x \in X \rightarrow x \in U.$$

Habría que tener cuidado, el anterior axioma no afirma la existencia de la unión sino de un conjunto probablemente más amplio. Sin embargo para un

conjunto \mathcal{F} cualquier, tenemos ya a la mano el axioma de especificación que podemos usar junto al predicado

$$\exists X \in \mathcal{F}. x \in X$$

para formar el conjunto

$$S = \{x \in U \mid \exists X \in \mathcal{F}. x \in X\}.$$

El conjunto anterior es precisamente el conjunto que buscamos. De nueva cuenta, debe ser inmediato que el axioma de extensión hace al conjunto anterior único. Estamos entonces ahora facultados en afirmar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea \mathcal{F} un conjunto. Entonces existe un único conjunto S tal que $a \in S$ si y sólo si existe un elemento $A \in \mathcal{F}$ tal que $a \in A$.*

Definición 4.1. Al conjunto S del teorema anterior se llama la unión de \mathcal{F} y se le denota por

$$\bigcup \mathcal{F}.$$

Algunas consecuencias de la anterior definición son

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

y

$$\bigcup \{A\} = A.$$

Volvamos ahora al caso que comenzó la discusión. Para resolver la unión de dos conjuntos basta seguir una definición (que es más un asunto de notación):

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}.$$

Por lo que la unión de dos elementos queda definida de manera única.

Debemos discutir ahora la intersección de un par de conjuntos de A y B . Para esto usaremos simplemente el axioma de especificación sobre A ; para ser más claros especificamos el conjunto

$$\{x \in A \mid x \in B\},$$

recordando que un elemento pertenecerá a dicho conjunto si y sólo si pertenece a A y satisface la propiedad dada, que en este caso es que el elemento pertenezca a B . Podemos entonces simplemente definir

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\},$$

notando que también podríamos usar otra definición que resulta simétrica

$$A \cap B = \{x \in B \mid x \in A\}.$$

Existe un fenómeno que sucede a menudo en matemáticas, que dos conjuntos no tengan elementos en común.

Definición 4.2. Sean A y B conjuntos. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces llamaremos a los conjuntos A y B *disjuntos*.

Podemos extender la anterior definición a una familia de conjuntos sin mucho trámite.

Definición 4.3. Sea \mathcal{F} un conjunto. Entonces \mathcal{F} se dirá *una familia disjunta por pares* si para cada par de conjuntos A y B en \mathcal{F} tales que $A \neq B$, tenemos que A y B son disjuntos.

Basta entonces construir una operación general para la intersección de conjuntos. Para esto dependeremos que el conjunto \mathcal{F} sea distinto del vacío, así la intersección de \mathcal{F} deberá quedar definida por el conjunto S tal que un conjunto $a \in S$ si y sólo si para todo A en \mathcal{F} , $a \in A$. Este conjunto por supuesto debe existir siempre que \mathcal{F} sea distinto del vacío a razón de tomar el conjunto $A \in \mathcal{F}$ (lo cual es posible al ser $\mathcal{F} \neq \emptyset$) y usar el axioma de comprensión para formar el conjunto

$$S = \{x \in A \mid \forall X \in \mathcal{F}. x \in X\}.$$

Como es común, debemos convencernos con el axioma de extensión que este conjunto es en verdad el único con esta propiedad. Enunciamos entonces el teorema correspondiente.

Teorema 4.2. Sea $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Entonces existe un único conjunto S tal que $a \in S$ si y sólo si para todo $A \in \mathcal{F}$ tenemos que $a \in A$.

Al conjunto S del teorema anterior lo denotaremos por

$$\bigcap \mathcal{F}$$

4.2. Intersecciones vacías

Habrà que tener cuidado al realizar la intersección de conjunto vacíos. Supongamos para esto el conjunto $\mathcal{F} = \emptyset$. Entonces, $a \in \bigcap \mathcal{F}$ si y sólo si para todo $A \in \mathcal{F}$, tenemos que $a \in A$. Para esto debemos notar que lo anterior se escribe de manera muy clara de la siguiente forma

$$\forall X. X \in \mathcal{F} \rightarrow a \in X;$$

con esta expresión podemos ver que el antecedente de la implicación será siempre falso a ser la colección original vacía, por tanto la implicación que define a la intersección sera siempre cierta sin importar de quien se trate el elemento a . En otras palabras deberemos tener que la intersección de un conjunto vacío es la clase de todos los conjuntos, que hemos visto, no es un conjunto. Para evitar que las intersecciones resulten en clases propias, debemos garantizar que el conjunto involucrado en ella sea distinto del vacío.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Demuestra que

- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cup A = A$.
- $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

Ejercicio 4.2. Demuestra que

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

Ejercicio 4.3. Demuestra que

- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap A = A$.
- $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Ejercicio 4.4. Demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejercicio 4.5. Demuestra que una condición suficiente y necesaria para que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

es que $C \subset A$. Observe que la condición no tiene nada que ver con B .

Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañía Editorial Continental, 1966.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objetivo al que sirven, es preparar el curso de Álgebra Superior I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.

El contenido original que aparezca en estas notas (si es que lo hay), se distribuye bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). ©Eduardo Antonio Gomezcaña Alanis.