Notas al Prólogo de [Spi92]

Actuaría 2016-I

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Conceptos básicos

Uno de los pilares en los que descansa la matemática moderna es la teoría de conjuntos. Pero no sólo es ésta un tema fundamental, en el estudio de todas las ramas de la matemática podemos encontrar un uso frecuente e inequívoco de ésta; fue incluso capaz de unificar ideas aparentemente inconexas y ha contribuido a reducir conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos. Nosotros no realizaremos un estudio minucioso de dicha teoría, intentaremos simplemente aclarar los conceptos básicos con el objecto de avanzar en la teoría matemática que nos atañe.

Consideraremos de entrada los términos «conjunto», «elemento» y la relación de «pertenencia» como conceptos primitivos, i.e., tomaremos estos conceptos de forma tal que correspondan al uso ordinario que les damos. Por ejemplo, por conjunto entenderemos una colección de elementos distinguidos de alguna forma.

Por lo general, denotaremos a los conjuntos con letras mayúsculas mientras que a los elementos con letras minúsculas. Si un objeto a pertenece a un conjunto A, escribiremos $a \in A$; si el objeto a, por el contrario, no pertenece a A, escribiremos $a \notin A$.

Para especificar los elementos de un conjunto, usaremos la notación de llaves; por ejemplo, si A es el conjunto que consta exactamente de los elementos a, b y c, escribiremos

$$A = \{a, b, c\}.$$

Bajo este argumento, se pueden pensar conjuntos en los que sus elementos son de nueva cuenta conjuntos; por ejemplo, $\{A\}$ sería el conjunto cuyo único elemento es el conjunto A. Es importante notar la diferencia conceptual que existe entre A y $\{A\}$; el primero es un conjunto que contiene elementos, el segundo es un conjunto que tiene un único elemento: el conjunto A.

Existe también otra posibilidad al describir conjuntos de esta forma: un conjunto sin elementos, éste es llamado *conjunto vacío* o *nulo* y lo denotaremos por el símbolo $\varnothing$. Hay quien imagina a los conjuntos como alguna clase de contenedores, como una bolsa o una caja, en ese sentido el conjunto vacío sería una bolsa o caja vacía.

1.2. Subconjuntos

Cuando pensamos en una colección de objetos o elementos, dentro de ella podemos pensar en colecciones más pequeñas. Un subconjunto captura esta idea de forma precisa.

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos. B se dice *subconjunto de* A, si cada elemento de B es también un elemento de A. Este hecho se denota por $B \subset A$.

Con base en esta definición, podemos afirmar que $B \subset A$ si y sólo si, $x \in B$ implica que $x \in A$. De la afirmación anterior, debemos notar que, al ser el vacío el conjunto sin elementos, el conjunto $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto.

Así como el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, cualquier conjunto es un subconjunto de si mismo; esto hace deseable distinguir aquellos subconjuntos de un conjunto que no son triviales.

Definición 1.2. Sean A y B conjuntos. B se dice *subconjunto propio de A, si $B \neq \varnothing$, $B \neq A$ y $B \subset A$.*

Debemos notar también que la relación de subconjunto $B \subset A$ no excluye la posibilidad que $A \subset B$. En realidad, se pueden tener esas dos relaciones al mismo tiempo y si ese fuera el caso, los conjuntos A y B tendrían exactamente los mismos elementos, de hecho, este resultado se puede usar para definir la igualdad entre conjuntos.

Definición 1.3. Sean A y B conjuntos. Decimos que A y B son iguales, y escribimos $A = B$, si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

1.3. Universos y Propiedades

En cualquier aplicación que tengamos de la teoría de conjuntos, siempre existirá un conjunto fijo, ya sea explícita o implícitamente, que recibe el nombre de *conjunto universo*; a este conjunto lo denotaremos usando la letra en cursiva $\mathcal{U}$. Todos los conjuntos que usemos dentro de nuestros desarrollos teóricos serán siempre subconjuntos de algún conjunto $\mathcal{U}$.

Como indicamos, del conjunto universo deseamos especificar subconjuntos y la manera en que lo realizaremos es indicando alguna propiedad que describa a ese subconjunto. Para indicar de manera abstracta una propiedad usaremos letras Griegas. Por ejemplo, sea α una propiedad, indicaremos que *un elemento x satisface la propiedad α* escribiendo $\alpha(x)$. Por supuesto, el elemento x que se indica, hace referencia a un elemento del conjunto universo y las propiedades deben describir elementos del conjunto universo dado. Lo anterior hace posible introducir una notación relativamente cómoda que permitirá describir un conjunto A (subconjunto del conjunto universo) escribiendo

$$A = \{x \mid \alpha(x)\}\,;$$

lo anterior se debe leer: «A es el conjunto de todos los elementos en el universo $\mathcal{U}$ que satisfacen la propiedad α». Es importante notar que el conjunto universo queda especificado en contexto y no aparece de manera explícita en la notación que hemos introducido.

Esta notación nos permite describir al conjunto vacío en términos de una propiedad, a decir

$$x \neq x.$$

Es de notar que esta propiedad no es cierta para cualquier elemento, sin importar realmente el universo que tomemos, de forma que, podemos simplemente definir

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

Esta idea no entra en conflicto con pensar al conjunto vacío como una colección sin elementos, al contrario, especifica en que universo y como es que existe el conjunto vacío.

1.4. Operaciones con conjuntos

Podemos crear nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos dados usando determinadas operaciones lógicas, en esta sección presentaremos sólo tres de estas operaciones reconociendo que se pueden definir muchas más.

Comenzaremos con la unión de los conjuntos A y B. Primero propondremos la propiedad:

$$x \in A \text{ o } x \in B;$$

debemos aclarar que en matemáticas a la disyunción, se le da un significado inclusivo, esto quiere decir que la interpretaremos como «lo uno, lo otro o los dos». El enunciado anterior entonces se leerá como: «x está en A, x está en B o x está en A y B». Una vez aclarado esto, definimos entonces la unión de A y B.

Definición 1.4. Sean A y B conjuntos. La *unión de A con B* es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

La expresión $A \cup B$, se lee «A unión B» y este conjunto contiene a todos los elementos que pertenezcan al menos a uno de los conjuntos A y B.

Con la unión formamos un conjunto, de manera coloquial, «más grande» de los conjuntos donde hemos partido, podemos pensar en hacer algo similar para tener uno más «pequeño» usando la contrapartida lógica de la disyunción: la conjunción. De esta forma proponemos para dos conjuntos A y B, y la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \in B;$$

ésta se satisface únicamente cuando x está al mismo tiempo tanto en A como en B, lo que nos lleva a poder definir la intersección de A y B.

Definición 1.5. Sean A y B conjuntos. La *intersección de A y B* es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La expresión $A \cap B$ se lee «A intersección B» y este conjunto contiene a todos los elementos que están tanto en A como en B. Podría ser el caso, por supuesto, que los conjuntos en cuestión no tengan elementos en común. En ese caso tendremos $A \cap B = \varnothing$ y diremos que los conjuntos son *disjuntos*.

Otra operación consiste en excluir elementos de un conjunto dado. Para clarificar esto, consideremos los conjuntos A y B; y analicemos la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Esta propiedad será cierta para un elemento x dado, cuando ese x esté en A pero no sea un miembro de B. Esto quiere decir que excluiremos a todos los elementos de A que estén B, esto es precisamente lo que se intenta realizar en la diferencia de conjuntos

Definición 1.6. Sean A y B conjuntos. La *diferencia de A con B* es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La expresión $A \backslash B$ se lee «A menos B» y simplemente es el conjunto A donde los elementos que tiene en común con B han sido removidos.

1.5. Operaciones con familias de conjuntos

Como se mencionó al principio de la sección, un conjunto puede tener como elementos a otros conjuntos. Una *familia de conjuntos* será entonces este caso particular, i.e., un conjunto $\mathcal{F}$ tal que todos sus elementos sean conjuntos.

Por ejemplo, si A es un conjunto, podemos considerar la familia con un único elemento

$$\{A\}.$$

Es más, para cualquier conjunto A, es cierto que $A \in \{A\}$; en otras palabras, A es un elemento (el único) que pertenece al conjunto $\{A\}$.

De manera similar a como hemos definido la unión y la intersección entre conjuntos, podemos definir la unión e intersección de una familia de conjuntos. Esto, aunque parecería abstracto en principio, es una generalización relativamente sencilla de lo anterior. Pensemos por ejemplo en la familia de conjuntos con dos elementos, i.e.,

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos reunir los elementos de los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos entonces simplemente tomar

$$\bigcup \mathcal{F} = A \cup B;$$

esto querría decir que a es un elemento de $\bigcup \mathcal{F}$, si a pertenece al menos a uno de los conjuntos A, B. Expresarlo de esta manera, nos ayuda a tener una idea más general de como tratar con una familia de conjuntos. Consideremos ahora una familia $\mathcal{F}$ arbitraria, con ella podemos formar la siguiente propiedad

$$\text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X.$$

Si un elemento satisface esta propiedad, dicho elemento debe pertenecer por lo menos a uno de los conjuntos que constituyen la familia $\mathcal{F}$, entonces podemos definir lo siguiente.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *unión de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X\}.$$

La expresión $\bigcup \mathcal{F}$ se lee «la unión de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión anterior, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen por lo menos a uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

De manera muy similar podemos proceder para definir la intersección de una familia de conjuntos. Consideremos de nuevo a la familia

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos encontrar los elementos que comparten todos los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos simplemente tomar

$$\bigcap \mathcal{F} = A \cap B;$$

podemos expresar esto de una manera ligeramente distinta, lo anterior querría decir que un elemento pertenece a $\bigcap \mathcal{F}$, si es miembro de los conjuntos A, B. De nueva cuenta esto nos presenta una forma cómoda de generalizar la idea de intersección entre conjuntos; para esto tomamos una familia $\mathcal{F}$ arbitraria de conjuntos y presentamos la propiedad

$$x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}.$$

Los elementos que satisfacen esta propiedad son aquellos que comparten los conjuntos en la familia $\mathcal{F}$, esto es una sugerencia para proponer la siguiente definición.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *intersección de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}\}.$$

La expresión $\bigcap \mathcal{F}$ se lee «la intersección de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión que se presentó, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen a todos y cada uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$.
- $1 \in A$.
- $1 \subset A$.
- $A \neq B$.
- $A \in B$.
- $1 \subset B$.

Ejercicio 1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Ejercicio 1.3 (de [Apo84]). Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$.
- $A \subset C$.
- $B \subset D$.
- $A \subset B$.
- $A \subset D$.
- $B \in D$.
- $A \in C$.
- $B \subset C$.
- $A \in D$.

Ejercicio 1.4. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$.
- $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.

Ejercicio 1.5. Demuestra que, si $X \subset \varnothing$ entonces $X = \varnothing$.

Ejercicio 1.6. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.7 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.8 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.9 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.10. Demuestra que $A \backslash B$ es un subconjunto de $A \cup B$.

Ejercicio 1.11. Demuestra que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$.

Ejercicio 1.12. Demostrar que

- $\varnothing \cup A = A$.
- $A \cup B = \varnothing$ implica que $A = \varnothing$ $B = \varnothing$.
- $A = A \cap A$.
- $A = A \cup A$.
- $\varnothing \cap A = \varnothing$.
- $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 1.13. Demuestra que $A \backslash B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

Ejercicio 1.14. Demuestra que $A \backslash B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Sea A un subconjunto de un conjunto universo $\mathcal{U}$. Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A.$$

Ejercicio 1.15. Determinar los conjuntos $\varnothing^c$ y $\mathcal{U}^c$.

Ejercicio 1.16. Demuestra que $(A^c)^c = A$.

Ejercicio 1.17. Demuestra que $A \backslash B = A \cap B^c$

Ejercicio 1.18. Demuestra que $A \subset B$ implica $B^c \subset A^c$.

2. Propiedades Fundamentales de los Números

2.1. Introducción

Resulta paradójico que una las herramientas conceptuales que ha permitido al hombre comunicarse con un alto grado de precisión, requiera precisarse. No es para menos, el concepto de número, por primitivo y natural que pueda parecernos, puede resultar elusivo de definir y, a pesar de esto, no deja de ser prioritario establecer sin ambigüedades este fundamental concepto.

Existen varias formas de presentar los números, por ejemplo pueden ser construidos a través de la teoría axiomática de conjuntos; sin embargo, por simplicidad y al ser éste un curso de carácter introductorio, propondremos un bloque de propiedades o axiomas que consigan describir lo que por costumbre llamamos número[1].

Lo primero que debemos admitir, por trivial que pueda parecernos, es que los números existen. Además su existencia viene vinculada a dos operaciones con las que estamos familiarizados: la suma y la multiplicación. Junto a la suma y multiplicación, sobre los números podemos realizar un proceso de «ordenación», i.e., la posibilidad de comparar un par de números. Exploraremos estas propiedades de los números primero.

[1]Cabe una aclaración acerca de la bibliografía en uso. En [Apo84] se puede encontrar un desarrollo profundamente técnico, donde, de manera llana y lisa, se presenta una lista de axiomas y sus implicaciones lógicas. En contraste, [Spi92] es un texto mucho más constructivo y exploratorio, éste comienza con una discusión de la razón de ser del número e intenta describir las propiedades que comúnmente asociamos a la idea de número; así es como el autor nos convence que los axiomas propuestos no son para nada descabellados.

2.2. Propiedades de cuerpo

Se llaman propiedades de cuerpo a aquellas que describen la naturaleza de las operaciones de suma y multiplicación. No deberíamos tener problemas al aceptarlas como propiedades inherentes a los números.

Propiedad 1 (Ley asociativa para la suma)**.** Para cualesquiera números a, b y c, tenemos que

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Propiedad 2 (Existencia del neutro aditivo)**.** Existe un número, 0, de forma que para todo número a:

$$a + 0 = a.$$

Propiedad 3 (Existencia de inversos aditivos)**.** Para cualquier número a, existe un número, $-a$, de forma que

$$a + (-a) = 0.$$

De alguna manera, la notación anterior sugiere que la operación a la que designamos resta, es simplemente una operación derivada de la suma. Así, usaremos

$$a - b$$

como una abreviación de

$$a + (-b).$$

Propiedad 4 (Ley conmutativa para la suma)**.** Para cualesquiera números a y b, se tiene

$$a + b = b + a.$$

De estas cuatro propiedades, podemos comenzar a derivar algunos resultados interesantes. Por ejemplo, que el cero debe ser el único número que satisface la condición propuesta en la propiedad 3. En efecto, supongamos que x es un número que satisface

$$a + x = a,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{(Prop. 3)}\\
&= (-a) + a && \text{(Prop. 4)}\\
&= (-a) + (a + x) && \text{(Hipótesis)}\\
&= ((-a) + a) + x && \text{(Prop. 1)}\\
&= (a + (-a)) + x && \text{(Prop. 4)}\\
&= 0 + x && \text{(Prop. 3)}\\
&= x + 0 && \text{(Prop. 4)}\\
&= x && \text{(Prop. 2)}
\end{aligned}$$

Lo que indica que, al asumir que el elemento x satisface la hipótesis planteada, debemos tener que $x = 0$. Esto nos da mucha más información que la planteada por la propiedad 3, el número 0 no sólo existe, sino es el único con dicha propiedad. Este hecho, como debemos notar, se dedujo de las propiedades de manera lógica, a este proceso deductivo de un resultado, es a lo que llamaremos «demostración». Es de igual forma demostrable que los inversos aditivos son también únicos Es de igual forma demostrable que los inversos aditivos son también únicos.

El procedimiento que realizamos anteriormente puede ser generalizado de manera muy sencilla para concluir el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Dados número a y b, el número $x = a - b$ es el único que satisface la igualdad*

$$b + x = a.$$

Demostración. Comprobemos primero que satisface la igualdad; en efecto

$$\begin{aligned}
b + x &= b + (a - b) && \text{(Definición)}\\
&= b + ((-b) + a) && \text{(Prop. 4)}\\
&= (b + (-b)) + a && \text{(Prop. 1)}\\
&= 0 + a && \text{(Prop. 3)}\\
&= a + 0 && \text{(Prop. 4)}\\
&= a && \text{(Prop. 2)}
\end{aligned}$$

Ahora, si algún número y satisface también la igualdad

$$b + y = a,$$

debemos entonces tener que

$$\begin{aligned}
y &= 0 + y && \text{(Prop. 2)}\\
&= (b + (-b)) + y && \text{(Prop. 3)}\\
&= ((-b) + b) + y && \text{(Prop. 4)}\\
&= (-b) + (b + y) && \text{(Prop. 1)}\\
&= (-b) + a && \text{(Hipótesis sobre } y\text{)}\\
&= (-b) + (b + x) && \text{(Hipótesis sobre } x\text{)}\\
&= ((-b) + b) + x && \text{(Prop. 1)}\\
&= (b + (-b)) + x && \text{(Prop. 4)}\\
&= 0 + x && \text{(Prop. 3)}\\
&= x + 0 && \text{(Prop. 4)}\\
&= x && \text{(Prop. 2)}
\end{aligned}$$

Por lo que nos vemos obligados a concluir que cualquier número que satisfaga dicha igualdad será irremediablemente x de nueva cuenta. De esto se sigue el resultado. $\square$

Propiedad 5 (Ley asociativa para la multiplicación)**.** Para cualesquiera números a, b y c, tenemos que

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Propiedad 6 (Existencia del neutro multiplicativo)**.** Existe un número, $1 \neq 0$, de forma que para todo número a:

$$a \cdot 1 = a.$$

Propiedad 7 (Existencia de inversos multiplicativos)**.** Para cualquier número $a \neq 0$, existe un número, a^{-1}, de forma que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Propiedad 8 (Ley conmutativa para la mutiplicación)**.** Para cualesquiera números a y b, se tiene

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Proposición 2.2 (Simplificación para la multiplicación)**.** *Sean a, b y c números cualesquiera. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.*

Demostración. Por hipótesis, a es un número distinto de cero, entonces posee un inverso multiplicativo que denotamos por a^{-1}. Ahora

$$\begin{aligned}
b &= b \cdot 1 && \text{(Prop. 6)} \\
&= b \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{(Prop. 7)} \\
&= (b \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{(Prop. 5)} \\
&= (a \cdot b) \cdot a^{-1} && \text{(Prop. 8)} \\
&= (a \cdot c) \cdot a^{-1} && \text{(Hipótesis)} \\
&= (c \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{(Prop. 8)} \\
&= c \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{(Prop. 5))} \\
&= c \cdot 1 && \text{(Prop. 7)} \\
&= c && \text{(Prop. 6)}
\end{aligned}$$

□

Propiedad 9 (Ley distributiva)**.** Para números cualesquiera a, b y c

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

La ley distributiva conecta las dos operaciones que hemos definido en los números. Uno de sus primeras consecuencias es la peculiar conexión del neutro aditivo bajo la multiplicación.

Proposición 2.3. *Sea a un número cualquiera. Entonces,*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Demostración. Comenzamos notando que la igualdad siguiente se satisface por las propiedades que hemos enunciado,

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0+0) && \text{(Prop. 9)} \\ &= a \cdot 0 && \text{(Prop. 2)} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{(Prop. 2)} \\ &= a \cdot 0 + (a \cdot 0 - a \cdot 0) && \text{(Prop. 3)} \\ &= (a \cdot 0 + a \cdot 0) - a \cdot 0 && \text{(Prop. 1)} \\ &= a \cdot 0 - a \cdot 0 && \text{(Igualdad)} \\ &= 0 && \text{(Prop. 3)} \end{aligned}$$

de lo que obtenemos que efectivamente $a \cdot 0 = 0$, como deseábamos. □

Es quizá importante notar que esta operación presenta una peculiaridad: el inverso multiplicativo existe para cualquier número excepto el cero. Esta exclusión tiene por supuesto una razón de ser, si el cero poseyera un inverso multiplicativo, podríamos contar con la existencia de un número, 0^{-1}, de forma que $0 \cdot 0^{-1} = 1$; pero al ser 0^{-1} un número, deberíamos de igual forma tener $0 \cdot 0^{-1} = 0$ (pues $0 \cdot b = 0$ para cualquier número), con lo que $0 = 1$, contradiciendo la propiedad 6. Nos vemos entonces obligados a aceptar que, a consecuencia de nuestras definiciones, el número cero no puede poseer inverso multiplicativo, sin embargo por la propiedad 7, este es el único número que no lo presenta.

Una vez aclarado esto podemos definir simplemente la división como una operación asociada a la multiplicación. Expresaremos a/b como una abreviación de $a \cdot b^{-1}$. Lo anterior tiene una implicación interesante que probablemente nos resultará familiar: la división por cero carece de sentido.

Terminaremos esta sección con una regla que nos parecerá inmediata, sin embargo por el objetivo que nos hemos planteado, deberá resultar una deducción de las propiedades y resultados que hemos expuesto hasta ahora.

Lema 2.4. *Para cualesquiera números a y b,*

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

Demostración. Para demostrar esto, basta mostrar que $a \cdot (-b)$ es el inverso aditivo de $a \cdot b$. Para esto afirmamos que $a \cdot b + [a \cdot (-b)] = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot (-b) &= a \cdot (b - b) && \text{(Prop. 9)} \\ &= a \cdot 0 && \text{(Prop. 3)} \\ &= 0 && (2.3) \end{aligned}$$

La segunda igualdad se puede verificar de manera análoga (¡inténtalo!), de lo que sigue el resultado que buscábamos. □

Proposición 2.5. *Para cualesquiera números a y b,*

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Demostración. Verificamos primero una igualdad,

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b && (2.2)\\
&= (-a) \cdot (b - b) && \text{(Prop. 9)}\\
&= (-a) \cdot 0 && \text{(Prop. 3)}\\
&= 0 && (2.3)
\end{aligned}$$

Basta ahora sumar $a \cdot b$ a ambos lados de la igualdad para verificar el resultado que buscamos. □

Hasta ahora, hemos presentado algunas manipulaciones algebraicas bien conocidas y hemos presentado el razonamiento que nos lleva a deducirlas con bastante detalle. En la práctica esto es demasiado engorroso y hasta ocioso de realizar, por lo que de ahora en adelante se dejará de lado. Resulta, sin embargo, un excelente ejercicio, comprobar las reglas que conocemos por experiencia, por lo que algunos otros casos aparecerán como ejercicios y lo ideal es que esos ejercicios sean resueltos tal y como las demostraciones se han presentado hasta ahora, esto con el único objeto de que el lector se convenza de todos estos detalles.

Es interesante que los resultados expuestos no se aceptan de «buena fe», sino a través de una meticulosa inspección de las verdades con las que contamos; esta tarea, el método deductivo, es una de las piedras angulares de la matemática moderna.

2.3. Propiedades de orden

Parte de nuestra concepción de número es la capacidad que tenemos para ordenarlos. Pensemos por ejemplo en una regla en donde se indican los centímetros; en ella se muestran los números en una disposición por todos conocida: 1, 2, 3,... etc. con lo cual podemos identificar una progresión. Sin embargo podemos ir más allá. Si ubicáramos en esta regla un par de puntos distintos, seríamos capaces de distinguir «cual es más grande».

Esta noción de *dimensión*que observamos en la regla está plenamente ligada al concepto de orden en un número. Las propiedades de orden intentar presentar esta idea sin ambigüedades dentro del concepto que estamos formando de número.

Admitimos primero que dentro de los números existe un conjunto distinguido P de *números positivos*, este conjunto exhibe las tres propiedades siguientes.

Propiedad 10 (Ley de tricotomía)**.** Para todo número a se cumple una y sólo una de las tres afirmaciones siguientes:

- $a = 0$.

- $a \in P$.
- $-a \in P$.

Propiedad 11 (Cerradura aditiva)**.** Si los números a y b ambos pertenecen a P, entonces $a + b$ pertenece también a P.

Propiedad 12 (Cerradura multiplicativa)**.** Si los número a y b ambos pertenecen a P, entonces $a + b$ pertenece también a P.

Las propiedades que hemos dado a P derivan en la noción de orden a la que estamos acostumbrados bajo las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} a > b \qquad & \text{si } a - b \in P. \\ a \geq b \qquad & \text{si } a > b \text{ o } a = b. \end{aligned}$$

Los símbolos $<$ y $\leq$ se definen por analogía.

En particular (y esta es la razón de proponer las propiedades del conjunto P) debemos notar que $a > 0$ si y sólo si $a \in P$.

La ley de tricotomía se puede expresar de una manera más orientada a presentar de forma que los símbolos de orden queden explícitos:

Proposición 2.6. *Sean a y b un par de números. Entonces, se cumple uno y sólo uno de los siguientes enunciados:*

- $a = b$.
- $a > b$.
- $a < b$.

Proposición 2.7. *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*

Demostración. Por definición, $a < b$ implica que $b - a \in P$. Pero

$$(b + c) - (a + c) = b - a;$$

de lo que podemos concluir que $a + c < b + c$ como deseábamos. □

Proposición 2.8. *Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

Demostración. Por la definición de orden, debemos tener que $b - a \in P$ y que $c - b \in P$; por la clausura aditiva, la suma de estos dos números debe pertenecer de igual forma a P. En ese caso,

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in P,$$

por lo que $a < c$. □

Proposición 2.9. *Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.*

Demostración. Por hipótesis, $0 - a \in P$, sin embargo $0 - a = -a$, por lo que $-a$ es un número positivo. De igual forma podemos concluir que $-b$ es un número positivo.

Ahora, por la clausura multiplicativa y por la proposición 2.2,

$$ab = (-a)(-b) \in P,$$

por lo que $ab > 0$ como buscábamos. $\square$

Corolario 1. *Para cualquier número $a \neq 0$, $a^2 > 0$.*

Demostración. Debemos tener dos casos: O $a > 0$ o $a < 0$. Si $a > 0$, la cerradura multiplicativa implica que $a^2 > 0$. Por otro lado, si $a < 0$, la proposición anterior implica que $a^2 > 0$. Así $a^2 > 0$, sin importar si a es positivo o negativo. $\square$

Corolario 2. $1 > 0$.

Demostración. La prueba consiste en una sencilla observación de la propiedad 6, en el caso en que $a = 1$. Tenemos $1 \cdot 1 = 1$ o en otras palabras $1^2 = 1$. Como hemos propuesto que $1 \neq 0$, entonces por la proposición anterior $1 = 1^2 > 0$ como buscábamos. $\square$

Definición 2.1. Sea a un número cualquiera. Entonces definimos el *valor absoluto de a*, como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Debemos notar que el valor absoluto de un número cualquiera es siempre positivo a menos que el número sea cero. Esto es algo notable y nos da espacio para deducir resultados interesantes. Uno de ellos, es conocido como la *desigualdad del triangulo.*

Teorema 2.10 (Desigualdad del triangulo)**.** *Para números a y b, se satisface*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Distinguiremos los cuatro casos posibles,

$$a \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \tag{1}$$
$$a \leq 0 \text{ y } b \leq 0 \tag{2}$$
$$a \leq 0 \text{ y } b \geq 0 \tag{3}$$
$$a \geq 0 \text{ y } b \leq 0. \tag{4}$$

En el caso (1), el resultado se sigue inmediatamente pues $a + b \leq 0$ (¿Por qué?). Así

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|.$$

El caso (2) es igual de inmediato, pues $-a-b \leq 0$. Así,

$$|a+b| = -a-b = |a|+|b|.$$

Para el caso (3) debemos observar primero que, al ser $a \leq 0$, entonces se cumple que

$$a \leq -a,$$

al ser a negativo o cero y en consecuencia $-a$ positivo o cero. Además, usando un argumento similar podemos concluir también que

$$-b \leq b.$$

Ahora analizaremos dos subcasos. El primero cuando $a+b \geq 0$; si esto se cumpliera, entonces

$$\begin{aligned} |a+b| &= a+b \\ &\leq -a+b \\ &= |a|+|b|. \end{aligned}$$

El segundo se presenta cuando $a+b<0$; si es esto se cumpliera, entonces

$$\begin{aligned} |a+b| &= -a-b \\ &\leq -a+b \\ &= |a|+|b|. \end{aligned}$$

De esto último podemos concluir que en cualquiera de los subcasos

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

El caso (4) es en realidad el caso (3) con los roles de a y b invertidos, por lo que el argumento que proporcionamos para (3) funcionará de igual forma para (4). Con esto el resultado sigue. $\square$

Podemos en realidad obtener otra demostración de la desigualdad del triangulo de manera que no tengamos que depender examinar todos los casos. Sin embargo, dicha demostración requiere de un tema que todavía no estamos en posición de tratar con el suficiente detalle: la raíces cuadradas.

Definición 2.2. Sea a un número cualquiera. Un número $x \geq 0$ se dirá una *raíz cuadrada de a* si

$$x^2 = a.$$

Lo primero que debemos notar es que los números negativos no poseen raíz cuadrada al ser imposible que el cuadrado de un número resulte en un número menor que cero. Existe un importante resultado que rebasará nuestra capacidad deductiva por el momento: para todo número $a \geq 0$, existe una única raíz cuadrada, la cual se denota por

$$\sqrt{a}.$$

La prueba de este hecho se pospondrá hasta hasta que la última propiedad, la que distingue con mucha más precisión nuestro concepto de número, quede finalmente aclarada. Mientras tanto, no estamos impendidos en realizar una simple observación que se deduce de la definición, esta es

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Finalmente con este comentario, estamos en posición de presentar una demostración alternativa de la desigualdad del triangulo.

Demostración de 2.10 por raíces cuadradas. Basta observar la siguiente lista de igualdades y desigualdades,

$$\begin{aligned}
(|a+b|)^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \\
&= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2,
\end{aligned}$$

de lo que puede concluirse la desigualdad. □

Ejercicios

Ejercicio 2.1. ¿Qué número es el inverso aditivo del cero?

Ejercicio 2.2. ¿Qué número es el inverso multiplicativo del uno?

Ejercicio 2.3. Demuestra lo siguiente:

1. Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, $x = 1$.
2. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
3. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.
4. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 - xy + y^2)$.
5. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ejercicio 2.4. ¿Dónde esta el fallo en el siguiente argumento? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned}
x^2 &= xy \\
x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\
(x+y)(x-y) &= y(x-y) \\
x + y &= y \\
2y &= y \\
2 &= 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.5. Demuestra lo siguiente:

1. Si $b, c \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$
2. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
3. Si $a, b \neq 0$, entonces
$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$
4. Si $b \neq 0$, entonces
$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$
5. Si $b, d \neq 0$, entonces
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$
6. Si $b, c, d \neq 0$, entonces
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejercicio 2.6. Demuestra que los inversos aditivos y multiplicativos son únicos.

Ejercicio 2.7. Sean a y b un par de números. Demuestra que se cumple uno y sólo uno de los siguientes enunciados:

- $a = b$.
- $a > b$.
- $a < b$.

Ejercicio 2.8. Demuestra lo siguiente:

1. Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
2. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.
3. Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$.
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
5. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
6. Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
7. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
8. Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.
9. Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
10. Si $a, b \geq 0$, entonces $a^2 < b^2$ implica que $a < b$.

Ejercicio 2.9. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Ejercicio 2.10. Demuestra lo siguiente:

1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Si $x \neq 0$, entonces
$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$
3. Si $y \neq 0$, entonces
$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|.$$
4. $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

Ejercicio 2.11. Demuestra que

$$\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}$$

y

$$\text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

Intenta ahora deducir una fórmula para el mínimo y el máximo de tres números.

3. Distintas Clases de Números

3.1. Números Naturales

Referencias

[Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.

[Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.