

# Ejercicios de Clase

## 1. Teoría clásica de conjuntos

### 1.1. Tratamiento clásico

*Ejercicio 1.1.1.* Sean  $A = \{1\}$  y  $B = \{1, 2\}$  conjuntos. Discute la validez de las siguientes afirmaciones.

- |                 |             |                 |
|-----------------|-------------|-----------------|
| ■ $A \subset B$ | ■ $1 \in A$ | ■ $1 \subset A$ |
| ■ $A \neq B$    | ■ $A \in B$ | ■ $1 \subset B$ |

*Ejercicio 1.1.2.* Demuestra o refuta las siguientes afirmaciones:

- |                                 |  |  |
|---------------------------------|--|--|
| ■ $\emptyset \in \emptyset$     | ■ $\emptyset \subset \emptyset$                        | ■ $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |
| ■ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | ■ $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | ■ $\emptyset \neq \{\emptyset\}$                   |

*Ejercicio 1.1.3.* Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

*Ejercicio 1.1.4.* Demuestre que, si  $X \subset \emptyset$ , entonces  $X = \emptyset$

*Ejercicio 1.1.5.* Sean los conjuntos  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1\}, \{2\}\}$ ,  $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$  y  $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ . Discute la validez de las siguientes afirmaciones.

- |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ■ $A = B$       | ■ $A \subset C$ | ■ $B \subset D$ |
| ■ $A \subset B$ | ■ $A \subset D$ | ■ $B \in D$     |
| ■ $A \in C$     | ■ $B \subset C$ | ■ $A \in D$     |

*Ejercicio 1.1.6.* Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- |                      |                         |   |
|----------------------|-------------------------|---|
| ■ $\{a, a\} = \{a\}$ | ■ $\{a, b\} = \{b, a\}$ | ■ $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$ |
|----------------------|-------------------------|---|

*Ejercicio 1.1.7.* Sea  $A$  un conjunto y sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos. Demuestra que, si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A \subset \bigcup \mathcal{F}$ .

*Ejercicio 1.1.8* (Leyes conmutativas). Para conjuntos  $A$  y  $B$ , demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

*Ejercicio 1.1.9* (Leyes asociativas). Para conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

*Ejercicio 1.1.10* (Leyes distributivas). Para conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*Ejercicio 1.1.11*. Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

*Ejercicio 1.1.12*. Demostrar que  $A \setminus B$  es un subconjunto de  $A \cup B$ .

*Ejercicio 1.1.13*. Demuestra que  $A$  y  $B$  son ambos subconjuntos de  $A \cup B$ .

*Ejercicio 1.1.14*. Demostrar que

- $\emptyset \cup A = A.$
- $A \cup B = \emptyset$  implica que  $A = \emptyset$   $B = \emptyset.$
- $A = A \cap A.$
- $\emptyset \cap A = \emptyset.$
- $A = A \cup A.$
- $(A \setminus B) \cap B = \emptyset.$

*Ejercicio 1.1.15*. Demuestra que  $A \setminus B = \emptyset$  si y sólo si  $A \subset B$ .

*Ejercicio 1.1.16*. Demuestra que  $A \setminus B = A$  si y sólo si  $A \cap B = \emptyset$ .

Sea  $A$  un subconjunto de un conjunto universo  $\mathcal{U}$ . Se define el complemento de  $A$  como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A.$$

*Ejercicio 1.1.17*. Determinar los conjuntos  $\emptyset^c$  y  $\mathcal{U}^c$ .

*Ejercicio 1.1.18*. Demuestra que  $(A^c)^c = A$ .

*Ejercicio 1.1.19*. Demuestra que  $A \setminus B = A \cap B^c$

*Ejercicio 1.1.20*. Demuestra que  $A \subset B$  implica  $B^c \subset A^c$ .

## 1.2. Paradojas y Conjuntos

*Ejercicio 1.2.1.* He aquí dos afirmaciones. Una de ellas es falsa. ¿Cuál?

*Ejercicio 1.2.2.* Se considera que un ser es omnipotente cuando nada escapa de sus posibilidades. ¿Puede un ser omnipotente crear una piedra que él mismo no pueda levantar?

*Ejercicio 1.2.3.* Diremos que una palabra es *autológica* si se describe a sí misma. Por ejemplo «corto» y «esdrújula» son autológicas, ya que la palabra «corto» es relativamente corta y la palabra «esdrújula» es esdrújula. Las palabras que no son autológicas se denominan heterológicas. «Largo» es una palabra heterológica, al igual que «monosilábico». ¿Es heterológica la palabra «heterológico»?

*Ejercicio 1.2.4.* En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Sin embargo, As-Samet era el único barbero de su pueblo. ¿Quién afeitaba a As-Samet?

*Ejercicio 1.2.5.* Antiguamente, cuando algún prisionero era sentenciado a muerte y ejecutado, se le permitía pronunciar sus últimas palabras en público. Existía sin embargo una prisión en que y ejecución procedía de un modo singular. Si las últimas palabras de un prisionero eran verdad, se le colgaba en la horca; si por el contrario, el prisionero decía una mentira se le decapitaba.

Cierto día, un sentenciado a muerte pronunció como últimas palabras lo siguiente: «Me cortarán la cabeza». ¿Cómo fue ejecutado el prisionero?

## 2. Notas de [Hal66]

### 2.1. Axioma de extensión

*Ejercicio 2.1.1.* Demuestra que  $A \subset A$ .

*Ejercicio 2.1.2.* Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres conjuntos, y si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , demuestra que  $A \subset C$ .

*Ejercicio 2.1.3.* Si  $A$  y  $B$  son un par de conjuntos tal que  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , demuestra que  $A = B$ .

*Ejercicio 2.1.4.* Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Demuestra que  $A = B$  si y sólo si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

### 2.2. Axioma de especificación

*Ejercicio 2.2.1.* Asuma que los números naturales son un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los número impares.

- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de los cuadrados perfecto.
- El conjunto de los múltiplos de tres.

*Ejercicio 2.2.2.* Asuma que los números reales constitye un conjunto. Especifica los siguiente conjuntos.

- El conjunto de los número mayores a cinco.
- El conjunto de los números cuya raíz es un entero.
- El conjunto de los números que son o uno o menos uno.
- El conjunto de los números racionales.

*Ejercicio 2.2.3.* Discute si la teoría hasta ahora presentada nos presenta ejemplos de conjuntos. ¿Por qué es esto importante?

### 2.3. Parejas ordenadas

*Ejercicio 2.3.1.* ¿Son distintos los conjuntos  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$ ,  $\{\{\emptyset\}\}$ ,  $\dots$ ?

*Ejercicio 2.3.2.* Aparte de los conjuntos citados en el ejercicios anterior. ¿Qué otros conjuntos serán derivados de la existencia del conjunto vacío?

*Ejercicio 2.3.3.* Demuestre que, si  $X \subset \emptyset$ , entonces  $X = \emptyset$ .

## Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañía Editorial Continental, 1966.