Notas a Fundamentos de [Spi92] (Parte 1)*

Cálculo Diferencial e Integral I
Actuaría 2016-I

1. Funciones

Vamos a tomar una dirección contraria a [Spi92]. El presenta una noción primitiva de función, nos muestra sus propiedades elementales, muchos ejemplos y después presenta la definición formal. Por supuesto, en las notas se asume que el lector está familiarizado con el texto; con esto en mente propondremos las dos definiciones en [Spi92] y caminaremos al empate entre los los resultados intuitvos del texto pero presentados de la manera más técnica posible. Comenzamos con la definiciones presentadas en [Spi92].

1.1. Definiciones

Definición 1.1 (versión intuitiva)**.** Una función es una regla que asigna a cada elemento de un cierto conjunto de números reales otro número real.

Definición 1.2 (versión formal)**.** Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras la colección no puede contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

El primer concepto que debemos aclarar es el de pares de números. En este punto podemos imaginar que tipo de objeto buscamos, sin embargo no podemos afirmar con claridad que son exactamente. Para buscar una definición formal buscaremos un resultado en la teoría de conjuntos.

Definición 1.3. Sea a y b números reales cualesquiera. Definimos *la pareja ordenada de a y b* como el conjunto

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Proposición 1.1. *Sean a, b, c y d números reales cualesquiera. Entonces, $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*

*Secciones 3 y 4 de [Spi92]

Demostración. Comencemos suponiendo que $(a, b) = (c, d)$, entonces

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} .$$

Debemos notar que el conjunto al lado izquierdo de la igualdad contiene a los conjuntos $\{a\}$ y $\{a, b\}$ los cuales tienen como único elemento en común al número a; de la misma forma, el conjunto a la derecha de la igualdad contiene dos conjuntos que contiene como único elemento en común al número c, una vez establecida la igualdad, el argumento anterior nos permite afirmar que $a = c$ y concluimos que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\} .$$

Para probar $b = d$, distinguiremos dos casos.

Supongamos primero que $b = a$. Si esto esto es cierto, entonces $\{a\} = \{a, b\}$ por lo que tenemos que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$$

y por tanto

$$\{\{a\}, \{a, d\}\} = \{\{a\}\} .$$

Por igualdad de conjuntos, debemos tener que $\{a\} = \{a, d\}$ y por tanto $a = d$, en otras palabras $b = a = d$ tal como deseábamos.

Supongamos ahora lo contrario, $b \neq a$, entonces b sólo pertenece a $\{a, b\}$ pero no a $\{a\}$. Debemos tener en ese caso que b pertenece a $\{a, d\}$ y como $b \neq a$ debe ser $b = d$, justo como buscábamos.

Si suponemos que $a = c$ y $b = d$ es inmediato admitir que las parejas (a, b) y (c, d) son iguales desde el punto de vista de conjuntos. $\square$

Al conjunto de las parejas de números se le conoce como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ y se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o simplemente por $\mathbb{R}^2$. Por supuesto, la proposición anterior modela de un modo particular una pareja de números y la propiedad que exhibe es precisamente la que deseamos. Estamos ahora en posición de aclarar que una pareja de números (a, b) es simplemente un elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$, en ese caso una función f será simplemente un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la propiedad propuesta en la definición 1.2. De momento una función, a secas, será únicamente un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Un argumento similar a la construcción de $\mathbb{R}^2$ (pensando en la proposición 1.1 los elementos a y c no como números sino una pareja de números), nos dejaría proveer la siguiente definición recursiva para $\mathbb{R}^n$:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n$.

Definiremos ahora dos conjuntos que son resultan muy informativos en el marco de la teoría de funciones: el dominio y el rango de una función.

Definición 1.4. Sea f una función. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales a tales que $(a, b) \in f$ para algún número real b. A este conjunto lo denotaremos por $\operatorname{dom}(f)$.

Definición 1.5. Sea f una función. El rango de f es el conjunto de todos los números reales b tales que $(a, b) \in f$ para algún número real a. A este conjunto lo denotaremos por $\operatorname{ran}(f)$.

Es interesante ahora notar que siempre a esté en el dominio de la función f, a estará acompañado de un único número b en dicha función. Es por eso, que para indicar a dicho elemento b escribiremos $f(a)$ y dicha notación no presentará ambigüedad alguna. Esta notación presenta una caracterización interesante sobre funciones, está caracterización es en realidad un resultado en el marco de la teoría de conjuntos, sin embargo aquí se usará sin más como una definición.

Definición 1.6. Sean f y g funciones. Se dice que las funciones son *iguales* (en símbolos $f = g$), si $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$ y para cada número a en el dominio de f,

$$f(a) = g(a).$$

Como la definición propone, será suficiente para definir una función proporcionar un dominio y una regla de asociación (¡tal como la definición intuitiva propone!). Es quizá también momento de introducir una notación muy común para funciones, si $f \subset \mathbb{R}^2$ es una función, escribiremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para hacer esto patente. Quizá es interesante aclarar que de momento no tendremos necesidad de usar dicha notación tan aparatosa, esto a razón de tampoco haber presentado el concepto más general de función; más adelante nos veremos obligados por la necesidad a usarla y a pesar de esto, no debería causarnos temor usarla indiscriminadamente.

Comencemos entonces proponiendo, a manera de ejemplo, una función muy sencilla: La función identidad. La función identidad es la función cuyo dominio son todos los reales y cuya regla esta dada por

$$I(x) = x.$$

Esta función presenta propiedades muy peculiares, por eso hemos tenido la osadía de asignarle un símbolo para distinguirla de las otras. Esto no es realmente común y generalmente usaremos las letras f, g y h para denotar funciones de manera genérica o cuando definamos situaciones que solo sirven de manera temporal.

Una lista mucho más elaborada de ejemplos de funciones puede encontrarse en [Spi92]. En el texto existen un número considerable de ejemplos tanto sencillos como elaborados y su lectura nos debería parecer interesante.

1.2. Operaciones

En esta sección, extenderemos las operaciones que conocemos de los números reales a funciones y agregaremos una operación que se puede realizar sobre funciones naturales. Propondremos todo como definiciones.

Definición 1.7. Sean f y g funciones. Definimos la función $f + g$, como la función con dominio

$$\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$$

y para cada a en ese dominio

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a).$$

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sea $\phi(x) = |x-3| + |x-1|$. Calcula los valores $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(-1)$ y $\phi(-2)$. Determina los valores para los cuales $\phi(t+2) = \phi(t)$.

Ejercicio 1.2. Sea $f(x) = x^2$. Determine en cada caso los conjuntos de números reales para los cuales la fórmula es válida.

1. $f(-x) = f(x)$.
2. $f(y) - f(x) = (y-x)(x-y)$.
3. $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$.
4. $f(2y) = 4f(y)$.
5. $f(t^2) = f(t)^2$.
6. $\sqrt{f(a)} = |a|$.

Ejercicio 1.3. Sea $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las siguientes fórmulas y determinar para que valores son válidas.

1. $g(-x) = g(x)$.
2. $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$.
3. $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$
4. $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$.
5. $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$.
6. $\frac{1}{2+g(x)} = \frac{2-g(x)}{x^2}$.

Ejercicio 1.4. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales cualquiera y sea

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

una función. Demuestra que f es un polinomio de grado n de forma tal que $f(a_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. (Sugerencia: Usa inducción sobre n).

Ejercicio 1.5. ¿Para que números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

Ejercicio 1.6. Sea A un conjunto de los números reales, define la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Encuentre expresiones para $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ y $\chi_{\mathbb{R}\setminus A}$.

Ejercicio 1.7. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo f es par si $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$, mientras que es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \sin(x)$.

1. ¿Cuándo es $f + g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

2. ¿Cuándo es $f \cdot g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

3. ¿Cuándo es $f \circ g$ una función par? ¿Cuándo es impar?

Ejercicio 1.8. Demuestre que, si $f \circ g = I$, entonces

1. si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$.

2. cada número b puede escribirse como $b = f(a)$ para algún número a.

Ejercicio 1.9. Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

un polinomio de grado n. Demuestra las siguientes propiedades.

1. Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, entonces $f(x) = x \cdot g(x)$ para algún polinomio g de grado $n - 1$.

2. Para real a, la función dado por $p(x) = f(x + a)$.

3. Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$ para algún número real a, entonces $f(x) = (x-a)\cdot g(x)$ para algún g de grado $n - 1$ (Sugerencia: considérese $p(x) = f(x + a)$).

2. Gráficas

Referencias

[Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Cálculo Integral y Diferencial I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.