De la teoría del orden a la teoría de retículas

Matemáticas Discretas
Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Elementos de teoría del orden

Hasta ahora hemos discutido la estructura de un conjunto parcialmente ordenado, presentando sus definiciones elementales, su representación por diagramas, algunas caracterizaciones importantes. Sin embargo no hemos entregado en absoluto resultados, esto se debe a que no hemos desarrollado una teoría correspondiente al orden. Precisaremos ahora de introducir más conceptos y presentar algunos resultados simples pero profundos de la teoría del orden, esto con el objetivo de transitar de la definición de orden a la de retícula de una manera muy peculiar. Desde este punto nos sumergiremos en la teoría de retículas ahora ya desde el punto de vista algebraico sin abandonar los resultados y estrategias usadas en la teoría del orden, obteniendo así con un proceso constructivo la teoría que detonará en las algebras booleanas. Mucho de lo aquí expuesto se puede encontrar en [DP02].

1.1. Construcción y deconstrucción del orden

Definición 1.1 (dualidad)**.** Sea A un conjunto parcialmente ordenado. El conjunto dual del conjunto A, en símbolos A^∂, es el conjunto parcialmente ordenado que como conjunto base tiene de nueva cuenta a A y su orden está dado de la siguiente manera: $x \leq y$ en A^∂ si y sólo si $y \leq x$ en A.

Bajo esta definición, podemos aceptar un hecho interesante de dualidad en la teoría del orden, a decir que cada enunciado Φ de conjuntos parcialmente ordenados tendrá *un enunciado dual*, Φ^∂, construido de la siguiente manera:

- Cada ocurrencia de $\leq$ en Φ será sustituida por $\geq$ en Φ^∂.
- Cada ocurrencia de $\geq$ en Φ será sustituida por $\leq$ en Φ^∂.

Principio de dualidad (para conjuntos parcialmente ordenados)**.** Si un enunciado Φ sobre conjuntos parcialmente ordenados es válido para todo conjunto parcialmente ordenado, entonces el enunciado dual de Φ es también válido para cualquier conjunto parcialmente ordenado.

Una vez que hallamos establecido algunos resultados y otras definiciones, tendremos la oportunidad de jugar con el principio de dualidad, por el momento debemos solamente aceptarlo (aunque desde el punto de vista lógico, del cual carecemos de experiencia, es un resultado inmediato).

Definición 1.2. Sea A un conjuntos parcialmente ordenado. Si un elemento $t \in A$ satisface para todo $a \in A$, $a \leq t$, entonces a t lo llamaremos *una cima* de A. De manera análoga, si un elemento $b \in A$ satisface para todo $a \in A$, $b \leq a$, entonces a b lo llamaremos *un fondo* de A.

Proposición 1.1. *Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Si A tiene una cima, entonces la cima es única.*

Demostración. Supongamos que los elementos s y t son ambos cimas de A, entonces debemos tener que $t \leq s$ pues s es una cima de A; también debemos tener que $s \leq t$ pues t es una cima de A. Por anti-simetría del orden, $s = t$. $\square$

La proposición anterior contiene algunas definiciones que no se desarrollan, sin embargo no resultará difícil desarmarla para convencernos que la proposición dual es aquella que afirma la existencia de un fondo implica su unicidad. Con esto podemos tener la certeza que los fondos y las cimas son únicas, lo que nos faculta a denotarlos de manera única. En caso de un conjunto parcialmente ordenado tenga cima, a ésta la denotaremos por $\top$, mientras que si posee fondo, a éste lo denotaremos por $\perp$.

Ejemplo. Para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subset)$, la cima será el elemento $\top = A$ mientras que el fondo será el elemento $\perp = \varnothing$.

Podemos encontrarnos con conjuntos parcialmente ordenados que no tiene un elemento que sea una cima del conjunto. Considérese a manera de ejemplo los conjuntos de las cadenas binarias o de las funciones. Esta situación puede ser remediada, añadiendo un elemento al conjunto A e imponiendo un nuevo orden a base del anterior.

Definición 1.3. Sea A un conjunto parcialmente ordenado. El conjunto parcialmente ordenado llamado *el alzamiento de A*, estará definido por la pareja $A_\perp = A \cup \{*\}$, donde $* \notin A$, y el orden parcial en $A_\perp$ definido de la siguiente manera de la siguiente manera: tendremos $x \leq y$ en $A_\perp$ si y sólo si $x = *$ o $x \leq y$ en A.

Si A es un conjunto, la relación de igualdad resulta en un orden. A esta relación se le conoce como el orden discreto. Denotemos $\bar{A}$ como el conjunto parcialmente ordenado con el orden discreto, entonces podríamos sencillamente tomar $\bar{A}_\perp$ para notar que cualquier conjunto es capaz de generar un conjunto parcialmente ordenado con fondo.

Definiremos ahora un concepto complementario al de máximo y mínimo. Sabemos al igual que las cimas y los fondos, que son únicos, sin embargo en un orden parcial podríamos encontrar elementos que son de alguna manera los "más grandes" comparativamente.

Definición 1.4. Sea A un conjunto parcialmente ordenado y sea $B \subset A$. Un elemento $b \in B$ se dice *maximal de* B si $b \leq x$ y $x \in B$ implica que $b = x$. De manera análoga, un elemento $b \in B$ se dice *minimal de* B si $b \geq x$ y $x \in B$ implica que $b = x$.

Quizá es importante mostrar la diferencia entre un elemento máximo y un maximal (lo cual por el principio de dualidad también ilustraría la diferencia entre mínimo y minimal).

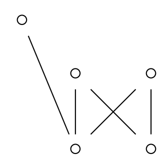

Figura 1: Un conjunto parcialmente ordenado con tres maximales.

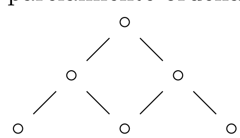

Figura 2: Un conjunto parcialmente ordenado con máximo.

1.2. Operaciones sobre conjuntos parcialmente ordenados

Al menos se pueden dos tipos diferentes de agregación entre dos conjuntos con un orden establecido. El primero resulta ser la unión disjunta y el segundo la suma directa.

Definición 1.5. Suponga que A y B son dos conjuntos parcialmente ordenados de forma que $A \cap B = \varnothing$. *La unión disjunta de* A *y* B[1] será el conjunto parcialmente ordenado $A \dot{\cup} B$ donde el orden siguiente se define como sigue: $x \leq y$ en $A \cup B$ si y sólo si x y y son elementos de A y $x \leq y$ en A o x y y son elementos de B y $x \leq y$ en B.

Un diagrama para la unión disjunta de dos conjuntos parcialmente ordenados sería simplemente poner lado a lado de manera *disjunta* los diagramas de los conjuntos involucrados. Quizá por esto sería interesante no sumarlos de manera disjunta sino crear un orden que vincule los elementos que comparten.

[1]Podemos pensar que pasaría en caso de que dos conjuntos no sean disjuntos. Ese caso no significa ningún problema, podemos tomar simplemente los conjuntos $A \times \{0\}$ y $B \times \{1\}$ notando que estos son disjuntos sin importar de que conjuntos A y B se trate, por lo que la definición no estaría restringida a un caso particular.

De hecho, se puede definir la unión disjunta (desde el punto de vista de conjuntos) de A y B simplemente como el conjunto

$$A \dot{\cup} B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}.$$

Definición 1.6. Supongamos A y B son dos conjuntos parcialmente ordenados. La suma lineal de los conjuntos, $A \oplus B$, se define tomando la siguiente relación en $A \cup B$: $x \leq y$ en $A \oplus B$ si y sólo si:

- x y y son elementos de A y $x \leq y$ en A.
- x y y son elementos de B y $x \leq y$ en B.
- x es elemento de A y y es elemento de B.

Podemos construir el diagrama de la suma de dos conjuntos parcialmente ordenados simplemente poniendo los diagramas del primero sobre el segundo (¡notemos que la suma no es conmutativa!) y uniendo cada elemento maximal del primero con cada elemento minimal del segundo.

Figura 3: Un par de conjuntos parcialmente ordenados y disjuntos.

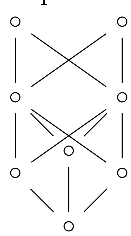

Figura 4: La suma lineal de los conjuntos A y B

El caso del alzamiento de un conjunto ¡resulta en un caso particular de la suma lineal! Para notar esto, tomemos el conjunto $\{*\}$ de forma tal que $* \notin A$. Podemos dotar a $\{*\}$ del orden discreto como hemos antes para considerarlo un conjunto parcialmente ordenado, en ese caso $A_\perp = \{*\} \oplus A$.

Estamos viendo que las operaciones de conjuntos resultan en las operaciones base para determinar nuevos conjuntos parcialmente ordenados.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados. Demuestra que $(a_1, b_1) \ll (a_2, b_2)$ si y sólo si

- $a_1 = a_2$ y $b_1 \ll b_2$ en B o
- $b_1 = b_2$ y $a_1 \ll a_2$.

2. Retículas

3. Retículas completas

4. Retículas modulares, distributivas y booleanas

Referencias

[DP02] Davey, Brian A. y Priestley, Hilary A.: *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 2002.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Matemáticas Discretas impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.