Notas a [Hal66] (Parte 1: Axiomas básicos)

Álgebra Superior I / Actuaría 2016-I

Algunos comentarios previos

Hemos visto ya la necesidad de aclarar el concepto de conjunto para poder solidificar la matemática dentro del marco de una teoría consistente. La teoría que nos concierne y que nos ayudará a establecer éste concepto será la teoría axiomática de conjuntos.

En dicha teoría se presentarán postulados (los axiomas), que nos deben resultar razonables en el marco de nuestra intuición. Estos axiomas estarán formulados como enunciados que llamaremos *propiedades en la teoría de conjuntos*. Una propiedad en la teoría de conjuntos será cualquier propiedad formada por los predicados «$\in$» y «$=$», y cualquier número de disyunciones, conjunciones, negaciones o cuantificaciones necearias. Por ejemplo, la expresión

$$\forall x \exists y . x \in y \land x = Z$$

será una propiedad en la teoría de conjuntos al ser la cuantificación universal sobre la variable x de la cuantificación existencial sobre la variable y de la conjunción de las propiedades $x \in y$ y $x = Z$. Además de la forma muy particular que tiene una propiedad en la teoría de conjuntos, los términos variables podrán ser únicamente sustituidos por conjuntos. Haremos un par de abreviaciones cuando nos enfrentemos a cuantificadores en teoría de conjuntos. Para un conjunto A, escribiremos

$$\exists x \in A . \alpha(x)$$

en lugar de escribir $\exists x . x \in A \land \alpha(x)$. También cuando afirmemos que

$$\forall x \in A . \alpha(x)$$

esto simplemente significará $\forall x . x \in A \to \alpha(x)$.

Como una aclaración final es deseable remarcar que seguimos tomando como conceptos primitivos a conjunto pertenencia. Sin embargo, los axiomas modelarán (y ese es el objetivo de la teoría) el comportamiento adecuado de lo que llamaremos conjunto de forma tal que los problemas que presentó la teoría preaxiomática (que nosotros tuvimos a mal llamarla clásica) serán desechados. De igual forma cabe destacar que la teoría presentada aquí será la teoría

Zermelo-Fraenkel, está teoría constituye un ejemplo de teoría predicativa, i.e. que describe únicamente los objetos de interés (en este caso los conjuntos) y nada más. Así, los conjuntos a pesar de ser tomados como primitivos no son libremente interpretados sino acabarán restringidos por los postulados que la teoría presenta como axiomas.

1. Axioma de extensión

1.1. Discusión general

El axioma de extensión es simplemente el paso axiomático por el cual somos capaces de definir la igualdad entre conjuntos. Esta nos define como es que la pertenencia guarda relación con la igualdad. El axioma afirma lo siguiente:

Axioma (de extensión). Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

En este punto nos debemos preguntar si el enunciado del axioma está en verdad formulado sobre la teoría de conjuntos. La respuesta es afirmativa, este afirma de manera simbólica

$$\forall X \forall Y . X = Y \leftrightarrow (\forall x . x \in X \leftrightarrow x \in Y) .$$

Lo cual afirma de manera llana lo mismo que el axioma de extensión. Como comenta Halmos en [Hal66]:

> «Con mayor pretensión y menos claridad: un conjunto está determinado por su *extensión*».

La definición de la igualdad de conjuntos parecería trivial o incluso innecesaria, sin embargo no es un hecho obvio, de hecho es muy particular. Pensemos por un momento en otro tipo de relación que no sea el de pertenencia, por ejemplo la de ancestro. Diremos que si x y y son seres humanos, definiremos $x \epsilon y$ si x es ancestro de y. Por ancestro identificamos a los padres, los abuelos, etc. Estamos en posición de preguntarnos lo siguiente: si los humanos y y z tienen los mismos ancestros, ¿será $x = y$? Basta tomar dos hermanos para verificar que ambos tienen exactamente los mismos ancestros, sin embargo son humanos distintos, por lo que en el caso de la relación de ancestro, algo parecido al axioma de extensión desafiaría el significado mismo de la relación.

Estamos ahora en posición de proveer de nuestra primera definición, que a pesar de todo no será para nada nueva.

Definición 1.1. Si A y B son conjuntos y todo elemento de A es elemento de B, decimos que A es un *subconjunto de* B o que B *incluye a* A o que A *está contenido en* B y escribimos

$$A \subset B.$$

Esta definición presenta algunas propiedades notables que listamos a continuación:

- Para todo conjunto A, $A \subset A$ (La inclusión es reflexiva).
- Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ (La inclusión es transitiva).
- Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$ (La inclusión es anti-simétrica).

Las propiedades anteriores por supuesto requieren prueba, el lector tendrá oportunidad de proveer los anteriores resultados de contenido resolviendo los ejercicios 1.1, 1.2 y 1.3.

Habrá entonces que distinguir aquellos conjuntos tales que $A \subset B$ pero $A \neq B$; para designarlos usaremos el término *propio*. Así un subconjunto se dirá subconjunto propio de otro, si es un subconjunto y si los conjuntos en cuestión son diferentes.

Una última nota. Podemos observar que la propiedad que define que A es un subconjunto de B, se puede escribir de manera formal como

$$\forall x . x \in A \rightarrow x \in B,$$

por lo que el axioma de extensión tiene otra posible forma basada en el concepto que se introdujo para subconjuntos.

Teorema 1.1. *Sean A y B dos conjuntos. $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.*

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Demuestra que $A \subset A$.

Ejercicio 1.2. Si A, B y C son tres conjuntos, y si $A \subset B$ y $B \subset C$, demuestra que $A \subset C$.

Ejercicio 1.3. Si A y B son un par de conjuntos tal que $A \subset B$ y $B \subset A$, demuestra que $A = B$.

Ejercicio 1.4. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

2. Axioma de especificación

2.1. Discusión general

Uno de nuestros problemas durante la discusión clásica de la teoría de conjuntos fue la amplitud de los enunciados. Ahí eramos capaces de construir un conjunto bajo la premisa que la propiedad que los definía pareciera razonable, en realidad esta libertad con que hemos manejado a los enunciados acarrea el primer problema que la teoría axiomática ha de solucionar.

Para postular el axioma de especificación, hemos de antes que lo citado como propiedad en el axioma será simplemente una propiedad en la teoría de conjuntos.

Axioma (de especificación). A todo conjunto A y a toda propiedad $\alpha(x)$, corresponde un conjunto B cuyos son precisamente los elementos x de A para los cuales se cumple $\alpha(x)$.

El axioma afirma de manera simbólica que, siempre que $\alpha(x)$ sea una propiedad entonces,

$$\forall X \exists Y . \forall x . x \in X \wedge \alpha(x) \leftrightarrow x \in Y.$$

Lo que nos dice éste axioma es que dado un conjunto A y una condición α, existirá un conjunto B de forma tal que $x \in B$ si y sólo si

$$x \in A \wedge \alpha(x).$$

En otras palabras, el resultado de remover los elementos de A que no satisfacen α resulta de nueva cuenta en un conjunto. En ese sentido, el axioma no parece descabellado y hasta deseable.

Debemos notar dos cosas. Ya no podemos crear conjuntos libremente, ahora necesitamos un conjunto base, por lo que habremos paliado una de la deficiencias del teoría clásica de conjunto. La segunda es que el axioma sólo postula la existencia de un conjunto con la propiedad que define, no su unicidad. Esto en realidad no es un problema.

Teorema 2.1. *Sea A un conjunto, α una propiedad cualquiera y sea B el conjunto indicado en el axioma de especificación. Si C es un conjunto tal que $a \in C$ si y sólo si $a \in A$ y $\alpha(a)$, entonces $B = C$.*

Demostración. Basta observar la definición del conjunto B para concluir lo siguiente, $a \in C$ si y sólo si $a \in A$ y $\alpha(a)$ lo que sucede si y sólo si $a \in B$, de lo que podemos concluir que B y C son subconjuntos uno de otro y por tanto iguales. □

Del teorema anterior podemos concluir la unicidad del conjunto descrito en el axioma. Para indicar este conjunto usaremos la siguiente notación

$$\{x \in A \mid \alpha(x)\}.$$

El axioma comienza a abrir las aclaraciones necesarias en la teoría de la siguiente manera. Sea A un conjunto. Debemos admitir que el enunciado

$$x \notin x$$

es una propiedad en la teoría de conjuntos. Por el axioma de especificación, es posible considerar el conjunto

$$B = \{x \in A \mid x \notin x\}$$

y preguntar si éste será un elemento de A, i.e. $B \in A$. Supongamos entonces que $B \in A$. Entonces, debemos tener uno de dos casos, a decir $B \in B$ o que $B \notin B$. Pero si $B \in B$, entonces $B \notin B$ lo cual es evidentemente contradictorio; ahora si $B \notin B$, entonces es falso que $B \notin B$, por lo que $B \in B$, lo que es de nueva cuenta contradictorio, como las única posibilidad han derivado en contradicción, hemos de concluir que la hipótesis $B \in A$ resulta en contradicción por lo que es falsa y por tanto $B \notin A$. Esto constitute la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sea A un conjunto. Entonces existe un conjunto B tal que $B \notin A$.*

Ahora A fue como un conjunto cualquiera y a pesar de esto, hemos sido capaces de mostrar la existencia de un elemento que no pertenece a él, por lo que hemos de concluir que no existe algo a lo que todo pertenece. Esto comienza a resolver algunos problemas que presentaba la teoría clásica de conjuntos.

2.2. Discusión mínima de clases

El argumento del que nos nutre el axioma nos dota de algunos huecos en el lenguaje. Para intentar aclararlos intentaremos describir brevemente el concepto de clase (que no ha de ser confundido con el de conjunto). Decimos que $\mathcal{C}$ una clase es una colección de objetos que satisfacen un propiedad (una propiedad por supuesto de la teoría de conjuntos) a la cual denotaremos por

$$\mathcal{C} = \langle x \mid \alpha(x) \rangle$$

cuando colecciones los objetos que satisfagan α. La discusión del último párrafo de la sección anterior nos permite concluir el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *La clase universo, i.e. $\mathcal{U} = \langle x \mid x = x \rangle$, no es un conjunto.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que es un conjunto. Entonces por la proposición 2.2 deberá existir un conjunto B tal que $B \notin \mathcal{U}$, sin embargo $B = B$ por lo que deberíamos tener que $B \in \mathcal{U}$, este hecho es por supuesto una contradicción. Debemos entonces admitir que $\mathcal{U}$ no puede ser un conjunto como afirma el teorema. $\square$

Esto de manera coloquial afirma que lo conjuntos no son colecciones tan grades ni tan arbitrarias, sino bastante claras o en otras palabras especificadas. Lo que nos pone un paso más lejos de las paradojas.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Asuma que los números naturales son un conjunto. Especifica los siguientes conjuntos.

- El conjunto de los números pares.
- El conjunto de los número impares.
- El conjunto de los números primos.
- El conjunto de los cuadrados perfecto.

Ejercicio 2.2. Asuma que los números reales constitye un conjunto. Especifica los siguiente conjuntos.

- El conjunto de los número mayores a cinco.

- El conjunto de los números cuya raíz es un entero.
- El conjunto de los números que son o uno o menos uno.
- El conjunto de los números racionales.

Ejercicio 2.3. Discute si la teoría hasta ahora presentada nos presenta ejemplos de conjuntos. ¿Por qué es esto importante?

Referencias

[Hal66] Halmos, Paul Richard: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Compañia Editorial Continental, 1966.

Comentario. Las notas anteriores juegan algunas veces a ser un simple resumen de lo que otros autores han presentado, otras menos a reinterpretarlo y en una cantidad ínfima de ocasiones intentan pobremente aumentalo. El único objectivo al que sirven, es preparar el curso de Álgebra Superior I impartido en la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.