

# Ejercicios para Calculo Diferencial e Integral I

Actuaría 2016-I  
FES Acatlán

# 1. Prólogo de [Spi92]

## 1.1. Teoría de conjuntos

*Ejercicio 1.1.1.* Sean  $A = \{1\}$  y  $B = \{1, 2\}$  conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- |                   |               |                   |
|-------------------|---------------|-------------------|
| ■ $A \subset B$ . | ■ $1 \in A$ . | ■ $1 \subset A$ . |
| ■ $A \neq B$ .    | ■ $A \in B$ . | ■ $1 \subset B$ . |

*Ejercicio 1.1.2.* Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- |                                 |  |  |
|---------------------------------|--|--|
| ■ $\emptyset \in \emptyset$     | ■ $\emptyset \subset \emptyset$                        | ■ $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |
| ■ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | ■ $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |  |

*Ejercicio 1.1.3* (de [Apo84]). Sean  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1\}, \{2\}\}$ ,  $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$  y  $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| ■ $A = B$ .       | ■ $A \subset C$ . | ■ $B \subset D$ . |
| ■ $A \subset B$ . | ■ $A \subset D$ . | ■ $B \in D$ .     |
| ■ $A \in C$ .     | ■ $B \subset C$ . | ■ $A \in D$ .     |

*Ejercicio 1.1.4.* Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos.

- |                        |                           |   |
|------------------------|---------------------------|---|
| ■ $\{a, a\} = \{a\}$ . | ■ $\{a, b\} = \{b, a\}$ . | ■ $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$ . |
|------------------------|---------------------------|---|

*Ejercicio 1.1.5.* Demuestra que, si  $X \subset \emptyset$  entonces  $X = \emptyset$ .

*Ejercicio 1.1.6.* Sea  $A$  un conjunto y sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos. Demuestra que, si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A \subset \bigcup \mathcal{F}$ .

*Ejercicio 1.1.7* (Leyes conmutativas). Para conjuntos  $A$  y  $B$ , demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

*Ejercicio 1.1.8* (Leyes asociativas). Para conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

*Ejercicio 1.1.9* (Leyes distributivas). Para conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\blacksquare A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

*Ejercicio 1.1.10.* Demuestra que  $A \setminus B$  es un subconjunto de  $A \cup B$ .

*Ejercicio 1.1.11.* Demuestra que  $A$  y  $B$  son ambos subconjuntos de  $A \cup B$ .

*Ejercicio 1.1.12.* Demostrar que

$$\begin{array}{lll} \blacksquare \emptyset \cup A = A. & \blacksquare A \cup B = \emptyset \text{ implica} & \blacksquare A = A \cap A. \\ & \text{que } A = \emptyset \ B = \emptyset. & \\ \blacksquare A = A \cup A. & \blacksquare \emptyset \cap A = \emptyset. & \blacksquare (A \setminus B) \cap B = \emptyset. \end{array}$$

*Ejercicio 1.1.13.* Demuestra que  $A \setminus B = \emptyset$  si y sólo si  $A \subset B$ .

*Ejercicio 1.1.14.* Demuestra que  $A \setminus B = A$  si y sólo si  $A \cap B = \emptyset$ .

Sea  $A$  un subconjunto de un conjunto universo  $\mathcal{U}$ . Se define el complemento de  $A$  como el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A.$$

*Ejercicio 1.1.15.* Determinar los conjuntos  $\emptyset^c$  y  $\mathcal{U}^c$ .

*Ejercicio 1.1.16.* Demuestra que  $(A^c)^c = A$ .

*Ejercicio 1.1.17.* Demuestra que  $A \setminus B = A \cap B^c$

*Ejercicio 1.1.18.* Demuestra que  $A \subset B$  implica  $B^c \subset A^c$ .

## 1.2. Propiedades fundamentales de los números

*Ejercicio 1.2.1.* ¿Qué número es el inverso aditivo del cero?

*Ejercicio 1.2.2.* ¿Qué número es el inverso multiplicativo del uno?

*Ejercicio 1.2.3.* Demuestra lo siguiente:

1. Si  $ax = a$  para algún número  $a \neq 0$ ,  $x = 1$ .
2.  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ .
3.  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ .
4.  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$ .
5.  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ .

*Ejercicio 1.2.4.* ¿Dónde está el fallo en el siguiente argumento? Sea  $x = y$ . Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y) \\ x + y &= y \\ 2y &= y \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

*Ejercicio 1.2.5.* Demuestra lo siguiente:

1. Si  $b, c \neq 0$ , entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

2. Si  $b, d \neq 0$ , entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

3. Si  $a, b \neq 0$ , entonces

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

4. Si  $b \neq 0$ , entonces

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

5. Si  $b, d \neq 0$ , entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

6. Si  $b, c, d \neq 0$ , entonces

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

*Ejercicio 1.2.6.* Sean  $a$  y  $b$  un par de números. Demuestra que se cumple uno y sólo uno de los siguientes enunciados:

- $a = b$ .
- $a > b$ .
- $a < b$ .

*Ejercicio 1.2.7.* Demuestra lo siguiente:

1. Si  $x^2 = y^2$ , entonces  $x = y$  o  $x = -y$ .
2. Si  $a < b$ , entonces  $-b < -a$ .
3. Si  $a < b$  y  $c > d$ , entonces  $a - c < b - d$ .
4. Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ .
5. Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$ .
6. Si  $a > 1$ , entonces  $a^2 > a$ .
7. Si  $0 < a < 1$ , entonces  $a^2 < a$ .
8. Si  $0 \leq a < b$  y  $0 \leq c < d$ , entonces  $ac < bd$ .
9. Si  $0 \leq a < b$ , entonces  $a^2 < b^2$ .

10. Si  $a, b \geq 0$ , entonces  $a^2 < b^2$  implica que  $a < b$ .

*Ejercicio 1.2.8.* Demostrar que si  $0 < a < b$ , entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

*Ejercicio 1.2.9.* Demuestra lo siguiente:

1.  $|xy| = |x| \cdot |y|$ .

2. Si  $x \neq 0$ , entonces

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}.$$

3. Si  $y \neq 0$ , entonces

$$\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|.$$

4.  $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ .

*Ejercicio 1.2.10.* Demuestra que

$$\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}$$

y

$$\text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

Intenta ahora deducir una fórmula para el mínimo y el máximo de tres números.

### 1.3. Distintas clases de números

## Referencias

- [Apo84] Apostol, Tom M.: *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Editorial Reverté, 1984.
- [KKCS89] Kudriáv'tsev, L. D., Kutásov, A. D., Chejlov, V. I. y Shabunin, M. I.: *Problemas de análisis matemático*. Editorial Mir, Moscú, 1989.
- [Spi92] Spivak, Michael: *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, 2ª edición, 1992.