Ejercicios de Clase

1. Lógica

Ejercicio 1 (Implicación como término compuesto). Es en realidad posible definir a la implicación como un término de enlace a traves de la disyunción y la negación. Para verificar esto, justifique la validez de los siguientes argumentos con tablas de verdad.

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

$$(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

Ejercicio 2 (Leyes de De Morgan). Las leyes de De Morgan constituyen otro ejemplo de regla de inferencia válida. Éstas pueden presentarse en dos enunciados:

> «La negación de la conjunción es la disyunción de las negaciones».
>
> «La negación de la disyunción es la conjunción de las negaciones».

Lo anterior implica que los siguiente argumentos son válidos para cualesquiera proposiciones **A**, **B** y **C**

$$(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \vdash \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$$

$$(\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\left(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}\right)$$

$$(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$$

$$(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \vdash \neg\left(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\right).$$

Usando tablas de verdad, justifica las leyes de De Morgan. Cuando usemos uno de los argumentos anteriores abreviaremos el hecho por `LDM`.

Ejercicio 3 (Leyes distributivas). Las leyes distribitivas constituyen otra regla de inferencia válida. Estas afirman que la conjunción distribuye sobre la disyunción y viceversa. Esto quiere decir que obtendremos para cualesquiera proposiciones **A**, **B** y **C** como válidos los siguientes argumentos

$$(\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \vdash (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$$

$$((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})) \vdash \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$$

$$((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})) \vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})\,.$$

Con tablas de verdad, justifica las leyes distributivas. Cuando usemos uno de los argumentos anteriores, lo abreviaremos como `LD`.

Ejercicio 4 (Ley de la adición). La ley de la adición es otra regla de inferencia válida. Esta afirma que de una proposición podemos deducir lógicamente su disyunción con cualquier otra proposición. En otras palabras, ésta afirma que el siguiente argumento es válido para cualesquiera proposiciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}.$$

Justifica a través de tablas de verdad este hecho. Utilizaremos la abreviatura `LAI` para referirnos a ella.

Ejercicio 5. El *modus tollendo ponens*, del latín «el método que afirma negando», es una regla de inferencia que nos permite operar sobre una disyunción en las premisas. Ésta afirma que dadas proposiciones $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, el argumento $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \neg\mathbf{B}) \vdash \mathbf{A}$ será válido. Provee una prueba de este hecho, i.e., escribe un esquema demostrativo que muestre su validez. Utilizaremos la abreviatura `TP` para referirnos a esta regla.

Ejercicio 6 (Regla de la contraposición). La regla de contraposición nos deja ver como el Modus Ponendo Pones y Modus Tollendo Tollens guardan una enorme relación. Esta afirma, que de una implicación podemos concluir otra implicación donde su antecedente sea el negado de su consecuente y su consecuente el negado de su antecedente. Esto implicaría que el siguiente argumento es válido

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}.$$

Prueba este hecho con un esquema demostrativo. De la misma forma el siguiente argumento es también válido y la forma contraria del anterior,

$$(\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A}) \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Prueba lo anterior de igual forma con un esquema demostrativo Para abreviar la regla de la contraposición abreviamos `RC`.

Ejercicio 7. Existe otra forma de presentar la regla de la conjunción disyuntiva usando dos conclusiones. Esta afirma que dadas proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, si los argumentos

$$(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{B}) \vdash \mathbf{D}$$

son válidos, entonces será válido también el argumento

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{D}.$$

Prueba el hecho anterior usando un esquema demostrativo. A esta regla se le llamará de igual forma regla de la conjunción disyuntiva.

Ejercicio 8. El *silogismo hipotético* es una regla de inferencia más que conecta dos proposiciones condicionales en una sola. Ésta afirma que dadas proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, es válido el argumento $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{B} \to \mathbf{C}) \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{C}$. Provee una prueba de este hecho, i.e., un esquema demostrativo. Abreviaremos el silogismo hipotético como `SH`.

Ejercicio 9 (Regla de la equivalencia conjuntiva). Durante las notas, presentamos la regla de la equivalencia conjuntiva, con ella somos capaces de presentar a las premisas de un argumento como una conjunción. Lo contrario también es cierto, esto es, una conjunción se puede descomponer como las premisas de un argumento. Exhiba una prueba de este hecho, en otra palabras escriba un esquema demostrativo para

$$\frac{(\mathbf{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{B}}{(\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n) \vdash \mathbf{B}}$$

Ejercicio 10. El *silogismo disyuntivo* es una regla de inferencia más que conecta la conjunción con condicionales. Ésta afirma que dadas proposiciones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, podemos dar por válido el argumento $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{A} \to \mathbf{C}, \mathbf{B} \to \mathbf{D}) \vdash \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$. Escribe una prueba de este hecho, i.e., un esquema demostrativo. Abreviaremos el silogismo disyuntivo como `SD`.

Ejercicio 11 (Regla de las premisas). Durante las notas, se introdujo la regla de las premisas y con ella era posible derivar una implicación al introducir una premisa al argumento. Lo contrario también es cierto: de una implicación es posible establecer un argumento que en sus premisas contenga el antecedente de la proposicion condicional y como conclusión su consecuente. A esto de igual forma lo llamaremos la regla de las premisas. Exhiba un esquema demostrativo para

$$\frac{(\mathbf{A}) \vdash \mathbf{B} \to \mathbf{C}}{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vdash \mathbf{C}}$$

Ejercicio 12. A través de un esquema demostrativo, exhibe una demostración de la validez de los argumentos

$$((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \to \mathbf{C})$$

y

$$((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \vee (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C}.$$

Ejercicio 13. Exhibe un esquema demostrativo que concluya $\mathrm{M}(c, a) \to \mathrm{P}(e, c)$ de las premisas

$$\forall x \forall y. \neg \mathrm{M}(x, y) \vee \mathrm{S}(y, x)$$

$$\forall u \forall z. \mathrm{S}(z, c) \to \mathrm{B}(z) \to \mathrm{P}(u, c)$$

$$\mathrm{B}(a).$$

Recuerda primero plantear el argumento que quieres mostrar como válido.

Ejercicio 14. Exhibe un esquema demostrativo que concluya $3 + 2 = 5$ usando las premisas

$$\forall x \forall y \forall z . x - y = z \leftrightarrow y + z = x$$

$$5 - 3 = 1 + 1$$

$$1 + 1 = 2.$$

Recuerda plantear el argumento que quieres mostrar como válido.

Ejercicio 15. A continuación se presenta un argumento válido:

> «Samuel Clemens era capitán de barco fluvial. Ningún capitan de barco fluvial ignora ninguna señal de peligro. Mark Twain escribió sobre las cosas que no ignoraba. Mark Twain era Samuel Clemens. Por tanto, si las luces en los puentes son señales de peligro, entonces Mark Twain escribió sobre ellas».

1. Identifique las proposiciones del argumento.
2. Simbolice esas proposiciones y use predicados si es necesario.
3. Usando las simbolizaciones anteriores, escriba formalmente el argumento.
4. Use un esquema demostrativo para mostrar la validez del argumento.

Ejercicio 16. A continuación se presenta un argumento válido:

> «Cada chico es más joven que su padre. Carlos es un chico que no es más joven que Francisco. Todo el que esté casado con Virginia es el padre de Carlos. Por tanto Francisco no está casado con Virginia».

1. Identifique las proposiciones del argumento.
2. Simbolice esas proposiciones y use predicados si es necesario.
3. Usando las simbolizaciones anteriores, escriba formalmente el argumento.
4. Use un esquema demostrativo para mostrar la validez del argumento.

Ejercicio 17 (Incompatibilidad entre Moral y Determinismo). Se dice que la responsabilidad moral y el determinismo son incompatibles. Para ello se usa el siguiente argumento:

> «Si el determinismo es cierto, entonces una persona no pudo hacer algo distinto de algo que ha realizado. Pero, si la persona no puede realizar algo distinto, esa persona no puede ser moralmente responsable por realizarlo. En conclusión, si el determinismo es cierto, una persona no puede ser moralmente responsable de sus acciones».

1. Identifique las proposiciones del argumento.
2. Simbolice esas proposiciones y use predicados si es necesario.

3. Usando las simbolizaciones anteriores, escriba formalmente el argumento.

4. Use un esquema demostrativo para mostrar la validez del argumento.

5. ¿Te convence el argumento de la incompatibilidad?

Ejercicio 18 (Diseño Inteligente). Los físicos han notado que existen algunas constantes universales que están ajustadas en determinados valores sin los cuales la vida no sería posible. Roger White, filósofo del MIT, argumenta que este hecho es evidencia que Dios existe. White afirma:

> «Si un hecho observable requiere explicación y se propone una hipótesis que provee una explicación satisfactoria a este hecho que es la mejor que se tiene, debe ser el caso que el hecho observable es evidencia de la hipótesis. Que el univero albergue vida es un hecho observable que requiere explicación. La hipótesis que Dios ajusto las constantes universales para permitir la vida es una explicación satisfactoria para el hecho que el universo albergue vida. No existe otra explicación comparablemente satisfactoria para que el universo albergue vida. Por tanto, que el universo albergue vida es evidencia que Dios ajusto las constantes universales».

1. Identifique las proposiciones del argumento.

2. Simbolice esas proposiciones y use predicados si es necesario.

3. Usando las simbolizaciones anteriores, escriba formalmente el argumento.

4. Use un esquema demostrativo para mostrar al argumento anterior como válido.

5. ¿Te convence White que existe un ser llamado Dios ajustando las constantes universales?

Ejercicio 19 (Animalismo). Eric Olson, profesor de filosofía de la Universidad de Sheffield, propone definir nuestra identidad aceptando que somos animales con la capacidad de pensar. Para lograrlo, propone el siguiente argumento:

> «Debes admitir primero que existe un organismo humano sentado en la silla que ocupas. En esos términos, debes también admitir que el organismo humano sentado en la silla que ocupas está pensado. Ahora, tú estás sentado en la silla que ocupas, y hay cuando más un organismo sentado en la silla que ocupas pensando. En conclusión, tú eres un organismo humano».

1. Identifique las proposiciones del argumento.

2. Simbolice esas proposiciones y use predicados si es necesario.

3. Usando las simbolizaciones anteriores, escriba formalmente el argumento.

4. Use un esquema demostrativo para mostrar al argumento anterior como válido.

5. ¿Te convence Olson que somos animales?

2. Conjuntos

Ejercicio 20. Para conjuntos A, B y C, demuestra que

1. $A \cap B = B \cap A$

2. $A \cup B = B \cup A$

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 21. Demuestra que, para conjuntos a, b, c y d,

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Ejercicio 22. Demuestra que, para conjuntos A y S, se tiene

$$A \in S \to A \subset \bigcup S.$$

Ejercicio 23. Desmuestra para cualesquiera conjuntos A, B y C, si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Ejercicio 24. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

1. $\emptyset \in \emptyset$

2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

3. $\emptyset \subset \emptyset$

4. $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

5. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Ejercicio 25. Demostrar que $A \subset B$ y $B \subset A$ si y sólo si $A = B$, para cualesquiera conjuntos A y B.

Ejercicio 26. Si $A \subset B$, demuestra que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Ejercicio 27. Para conjuntos cualesquiera A, B y C, demuestra que

$$A \subset C \wedge B \subset C \leftrightarrow A \cup B \subset C.$$

Ejercicio 28. Para conjuntos A, B, C y D, tenemos que, si $A \subset C$ y $B \subset D$ entonces $A \cup B \subset C \cup D$ y $A \cap B \subset C \cap D$. Demuestra estos hechos.

Ejercicio 29. Para conjuntos A y B demuestra que

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Ejercicio 30. Demuestra que $A - B = \emptyset$ si y sólo si $A \subset B$

Ejercicio 31. Demuestra que $A - B = A$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$

Ejercicio 32. Sean A y B conjuntos. Definimos $\langle a, b \rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$ para elementos $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que $\langle a, b \rangle$ es un conjunto, y $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Lo anterior constituye una definición alternativa para una pareja ordenada.

Ejercicio 33. Sea A un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(A)$ se dice una *dirección en* A si satisface

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$

2. Para conjuntos B y C tal que $B, C \in \mathcal{F}$, existe un conjunto $D \in \mathcal{F}$ tal que $D \subset B \cap C$

Demuestra que el conjunto $N_a = \{Y \in \mathcal{P}(A) | a \in Y\}$ es una dirección en A.

Ejercicio 34. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ direcciones en A_1 y A_2 respectivamente. Si

$$\mathcal{F} = \{X \times Y | X \in \mathcal{F}_1 \wedge Y \in \mathcal{F}_2\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es una dirección en $A_1 \times A_2$.

Ejercicio 35. Demuestra para cualesquiera conjuntos A, B y C, las siguientes afirmaciones:

1. $A \triangle \emptyset = A$

2. $A \triangle A = \emptyset$

3. $A \triangle B = B \triangle A$

4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

6. $A \triangle B = A \triangle C \to B = C$

Ejercicio 36. Demuestra que

$$A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$$

$$A - B = A \triangle (A \cap B)$$

3. Funciones y Relaciones

Ejercicio 37. Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de relaciones de A a B y sea R una relación de B a C. Probar que

$$R \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i \right) = \bigcup_{i\in I} (R \circ R_i).$$

Ejercicio 38. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva y g no lo sea.

Ejercicio 39. Encuentra un ejemplo de funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ tales que $g \circ f$ sea suprayectiva y f no lo sea.

Ejercicio 40 (Notación de la inversa I). Sea f una función de A a B. Al ser f una relación, hemos definido la relación inversa de f como

$$f^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in f\}.$$

Esta relación no es necesariamente una función. Si f es biyectiva, demuestre que la relación inversa es f^{-1} es una función total de B a A y que en verdad $f^{-1} \circ f = 1_A$ y $f \circ f^{-1} = 1_B$. Este hecho justifica la notación f^{-1} para la función inversa de f.

Ejercicio 41 (Notación de la inversa II). Sea $f\colon A \to B$ una función invertible y sea $g\colon B \to A$ la inversa de f. Si $B' \subset B$, demuestra que

$$f^{-1}[B'] = g[B'].$$

Esto es, que la imagen inversa del conjunto B' bajo f coincide con la imagen del conjunto B' bajo la inversa de f. El hecho que estos conjuntos coincidan, nos permite escribir sin ambiguedad $f^{-1}[B']$ aun cuando f es invertible.

Ejercicio 42. Probar que si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ son funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es también biyectiva con inversa dada por

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Ejercicio 43. Sea $f\colon A \to B$. Desmuestra que

- Si $S \subset T \subset A$, entonces $f[S] \subset f[T]$.
- Si $U \subset V \subset B$, entonces $f^{-1}[U] \subset f^{-1}[V]$.

Ejercicio 44. Sea $f\colon A \to B$ una función y sean además $F, G\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ las funciones definidas por

$$F(S) = f[S]$$

y

$$G(U) = f^{-1}[U].$$

Demuestra que

- Si f es suprayectiva, entonces $F \circ G = 1_{\mathcal{P}(B)}$.
- Si f es inyectiva, entonces $G \circ F = 1_{\mathcal{P}(A)}$.

Ejercicio 45. Sea $f\colon A \to B$ una función, sean también S y T subconjuntos de A y, U y V subconjuntos de B. Demuestra

- $f\left[S \cup T\right] = f[S] \cup f[T]$.
- $f^{-1}\left[U \cup V\right] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$.
- $f\left[S \cap T\right] \subset f[S] \cap f[T]$.
- $f^{-1}\left[U \cap V\right] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$

Recuerda que si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indicada de conjuntos, la unión e intersección de estos están dados por las expresiones

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I.x \in A_i\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I.x \in A_i\}.$$

Ejercicio 46. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\left\{A_i\right\}_{i\in I}$ es una familia indicada de subconjuntos de A y $\left\{B_j\right\}_{j\in J}$ es una familia indicada de subconjuntos de B, demuestra que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j\in J} B_j\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_j)$$

Ejercicio 47. Sea $f\colon A \to B$ una función. Si $\left\{A_i\right\}_{i\in I}$ es una familia indicada de subconjuntos de A y $\left\{B_j\right\}_{j\in J}$ es una familia indicada de subconjuntos de B, demuestra que

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

y

$$f^{-1}\left[\bigcap_{j\in J} B_j\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_j)$$

Ejercicio 48. Sea $f\colon A \to B$ y sean S y U subconjuntos de A y B respectivamente. Demostrar

- $f^{-1}\left[B \backslash U\right] = A \backslash f^{-1}[U]$.

- f es suprayectiva si y sólo si $B \backslash f[S] \subset f[A \backslash S]$.
- f es inyectiva si y sólo si $f[A \backslash S] \subset B \backslash f[S]$.

Ejercicio 49. Sea A un conjunto y sea a un elemento de A. Si $\kappa_a \colon A \to A$ es la función constante de a, demostrar que $\kappa_a \circ g = \kappa_a$ para cualquier función $g \colon A \to A$. Recíprocamente, si $f \colon A \to A$ es una función tal que $f \circ g = f$ para cualquier función $g \colon A \to A$, demostrar que existe un elemento $b \in A$ de forma que $f = \kappa_b$, i.e., que f es una función constante. (Sugerencia: Una función f es constante si y sólo si existe $a \in A$ de forma que para toda $b \in A$, $f(b) = a$. Usa contraposición afirmando que f no es constante y concluye $f \circ g \neq f$ para alguna función g).

Recuerda que hemos definido las proyecciones del conjunto $A \times B$ a A y B como las funciones $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$, respectivamente, dadas por $\pi_1(a, b) = a$ y $\pi_2(a, b) = b$.

Ejercicio 50. Sea $h \colon C \to A \times B$. Demuestra que para toda $c \in C$,

$$h(c) = ((\pi_1 \circ h)(c), (\pi_2 \circ h)(c))$$

Ejercicio 51. Sean A y B conjuntos y sean $\pi_1 \colon A \times B \to A$ y $\pi_2 \colon A \times B \to B$ las proyecciones de $A \times B$ en A y B respectivamente. Demuestra que para cualquier conjunto C y para cualesquiera funciones $f \colon C \to A$ y $g \colon C \to B$ existe una única función $h \colon C \to A \times B$ de forma que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$. (Sugerencia: Para probar la unicidad usa el ejercicio anterior).

Ejercicio 52. Sean $f \colon A \to C$ y $g \colon B \to D$ funciones. Demuestra que existe una función $h \colon A \times B \to C \times D$ de forma que, si f y g son biyectivas, entonces h es biyectiva.

Ejercicio 53. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones de A a B no necesariamente totales. Si para cualesquiera i y j en I, tenemos que

$$f_i(a) = f_j(a),$$

para cualquier $a \in \mathrm{Dom}(f_i) \cap \mathrm{Dom}(f_j)$, demuestra que existe una función $f \colon A \to B$ no necesariamente total de forma que,

$$\mathrm{Dom}(f) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Dom}(f_i)$$

y, para cada i en el índice y cada $a \in \mathrm{Dom}(f_i)$,

$$f(a) = f_i(a).$$

Ejercicio 54. Sea R una relación en A. Demuestra que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $R \subset S$, entonces $R \cup R^{-1} \subset S$.

Ejercicio 55. Sea R una relación en A. Demuestra que $R \cap R^{-1}$ es la relación simétrica más grande contenida en R, i.e., si S es una relación simétrica tal que $S \subset R$, entonces $S \subset R \cap R^{-1}$.

Ejercicio 56. Sea R una relación reflexiva y transitiva en un conjunto A. Probar que $R \circ R = R$.

Ejercicio 57. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en A. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es una relación de equivalencia si y sólo si $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

Ejercicio 58. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en un conjunto A tal que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$. Demuestra que $R_2 \circ R_1$ es la intersección del conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A que contienen R_1 y R_2, i.e.

$$R_2 \circ R_1 = \bigcap \{X \in \mathfrak{R}_A \mid R_1 \subset X \wedge R_2 \subset X\} .$$

Recuerda que para una relación de equivalencia en un conjunto A, hemos definido el conjunto cociente de A respecto de R como

$$A/R = \{[a] \in \mathcal{P}(A) \mid a \in A\}$$

y la función canónica $\pi \colon A \to A/R$ como

$$\pi(a) = [a].$$

Ejercicio 59. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Sea $S \subset R$ tal que la imagen de la proyección π_1 en S es A. Demostrar que $R \circ S = R$ y que si T es una relación cualquiera en A, entonces $(R \cap T) \circ S = R \cap (T \circ S)$.

Ejercicio 60. Sea $f \colon A \to B$ una función y sea

$$R_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\} .$$

Demuestra que R_f es una relación de equivalencia y que si

$$F = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} ,$$

entonces $R_f = F^{-1} \circ F$. A la relación R_f se le conoce como la *relación de equivalencia asociada a* f.

Ejercicio 61. Sea R una relación de equivalencia en A y sea $\pi \colon A \to A/R$ la función canónica de A a A/R. Probar que R es la relación de equivalencia asociada a π.

Ejercicio 62. Sean $f \colon A \to B$ una función, R una relación de equivalencia en A y S una relación de equivalencia en B, sean también $\pi_R \colon A \to A/R$ y $\pi_S \colon B \to B/S$ las funciones canónicas de A a A/R y B a B/S respectivamente. Demostrar que existe una función $h \colon A/R \to B/S$ tal que $h \circ \pi_R = \pi_S \circ f$ si sólo si para todo $(a, a') \in R$ tenemos que $(f(a), f(a')) \in S$.

4. Números Naturales

Ejercicio 63. Para un sistema de Peano $(N, s, 0)$ demuestre que la relación $<$, definida por $n < m$ si y sólo si existe $r \in N \setminus \{0\}$ tal que $m = n + r$, es un orden parcial.

Ejercicio 64. Sea $(N, s, 0)$ un sistema de Peano y sea $<$ el orden parcial estricto definido para dicho sistema. Demuestra que el orden parcial asociado $\leq$ está definido por: $n \leq m$ si y sólo si existe $r \in N$ tal que $m = n + r$.

Ejercicio 65. Sea $(N, s, 0)$ un sistema de Peano. Demuestra que para toda n, $n < s(n)$ y que $0 \leq n$.

Ejercicio 66. Sea $(N, s, 0)$ un sistema de Peano. Demuestra que para cualesquiera n y m en N,

- Si $n < m$, entonces $n + 1 \leq m$.
- Si $n \leq m$, entonces $n < m + 1$.

Ejercicio 67. Sea $(N, s, 0)$ un sistema de Peano. Si

$$T = \{m \in N \mid \forall n \in N.\ n \neq m \rightarrow (n < m \vee m < n)\},$$

demuestra que $T = N$ y usa esto para concluir que el orden en N es total. (Sugerencia: Usa la propiedad inductiva de un sistema de Peano).

Ejercicio 68. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $m \leq n \leq n + 1$, entonces $n = m$ o $n = m + 1$.