Preliminares para Matemáticas Discretas

Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Conjuntos

Uno de los pilares en los que descansa la matemática moderna es la teoría de conjuntos. Pero no sólo es ésta un tema fundamental, en el estudio de todas las ramas de la matemática podemos encontrar un uso frecuente e inequívoco de ésta; fue incluso capaz de unificar ideas aparentemente inconexas y contribuido a reducir conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos. Nosotros no realizaremos un estudio minucioso de dicha teoría, intentaremos simplemente aclarar los conceptos básicos con el objecto de avanzar en la teoría matemática que nos atañe.

Consideraremos de entrada los términos «conjunto», «elemento» y la relación de «pertenencia» como conceptos primitivos, i.e., tomaremos estos conceptos de forma tal que correspondan al uso ordinario que les damos. Por ejemplo, por conjunto entenderemos una colección de elementos distinguidos de alguna forma.

Por lo general, denotaremos a los conjuntos con letras mayúsculas mientras que a los elementos con letras minúsculas. Si un objeto a pertenece a un conjunto A, escribiremos $a \in A$; si el objeto a, por el contrario, no pertenece a A, escribiremos $a \notin A$.

Para especificar los elementos de un conjunto, usaremos la escritura entre llaves; por ejemplo, si A es el conjunto que consta exactamente de los elementos a, b y c, escribiremos

$$A = \{a, b, c\}.$$

Bajo este argumento, se pueden pensar conjuntos en los que sus elementos son conjuntos; por ejemplo, $\{A\}$ sería el conjunto cuyo único elemento es el conjunto A. Es importante notar la diferencia conceptual que existe entre A y $\{A\}$; el primero es un conjunto que contiene elementos, el segundo es un conjunto que tiene un único elemento: el conjunto A.

Existe también otra posibilidad al describir conjuntos de esta forma: un conjunto sin elementos, éste es llamado *conjunto vacío* o *nulo* y lo denotaremos por el símbolo $\varnothing$. Hay quien imagina a los conjuntos como alguna clase de contenedores, como una bolsa o una caja, en ese sentido el conjunto vacío sería una bolsa o caja vacía.

1.2. Subconjuntos

Cuando pensamos en una colección de objetos o elementos, dentro de ella podemos pensar en colección más pequeñas. Un subconjunto captura esta idea de forma precisa.

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos. B se dice *subconjunto de* A, si cada elemento de B es también un elemento de A. Este hecho se denota por $B \subset A$.

Con base en esta definición, podemos afirmar que $B \subset A$ si y sólo si, $x \in B$ implica que $x \in A$. De la afirmación anterior, debemos notar que, al ser el vacío el conjunto sin elementos, el conjunto $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto.

Debemos notar también que la relación de subconjunto $B \subset A$ no excluye la posibilidad que $A \subset B$. En realidad, se pueden tener esas dos relaciones al mismo tiempo y si ese fuera el caso, los conjuntos A y B tendrían exactamente los mismos elementos, de hecho, este resultado se puede usar para definir la igualdad de conjuntos.

Definición 1.2. Sean A y B conjuntos. Decimos que A y B son iguales, y escribimos $A = B$, si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Como para cada conjunto, el vacío y el conjunto mismo son subconjuntos por definición, es deseable distinguir aquellos subconjuntos de un conjunto que no son triviales.

Definición 1.3. Sean A y B conjuntos. B se dice *subconjunto propio de A, si $B \neq \varnothing$, $B \neq A$ y $B \subset A$.*

1.3. Universos y Propiedades

En cualquier aplicación que tengamos de la teoría de conjuntos, siempre existirá un conjunto fijo, ya sea explícita o implícitamente, que recibe el nombre de *conjunto universo* al cual escribiremos usando la letra en cursiva $\mathcal{U}$. Todos los conjuntos que usemos dentro de nuestra desarrollos teóricos serán siempre subconjuntos del conjunto $\mathcal{U}$.

Como indicamos, del conjunto universo deseamos especificar subconjuntos y la manera en que lo realizaremos es indicando alguna propiedad que describa a ese subconjunto. Para indicar de manera abstracta una propiedad usaremos letras Griegas. Por ejemplo, sea α una propiedad, indicaremos que *un elemento x satisface la propiedad α* escribiendo $\alpha(x)$. Por supuesto, el elemento x que se indica, hace referencia a un elemento del conjunto universo y las propiedades deben describir elementos del conjunto universo dado. Lo anterior hace posible introducir una notación relativamente cómoda que permita describir un conjunto A (subconjunto del conjunto universo) como

$$A = \{x \mid \alpha(x)\} ;$$

lo anterior se debe leer: «A es el conjunto de todos los elementos en el universo $\mathcal{U}$ que satisfacen la propiedad α». Es importante notar que el conjunto universo queda especificado en contexto y no aparece de manera explícita en la notación que hemos introducido.

Esta notación nos permite describir al conjunto vacío en términos de una propiedad, a decir

$$x \neq x.$$

Es de notar que esta propiedad es cierta para cualquier elemento, sin importar realmente en universo que tomemos, así, podemos simplemente definir

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

Esta idea no entra en conflicto con pensar al conjunto vacío como una colección sin elementos, al contrario, especifica en que universo y como es que existe el conjunto vacío.

1.4. Operaciones con conjuntos

Podemos crear nuevos conjuntos a partir de otros conjuntos dados usando determinadas operaciones lógicas, en esta sección presentaremos sólo tres de estas operaciones reconociendo que se pueden definir muchas más. Estas son la unión, intersección y diferencia de conjuntos.

Comenzaremos con la unión de los conjuntos A y B. Primero propondremos la propiedad:

$$x \in A \text{ o } x \in B;$$

debemos aclarar que en matemáticas a la disyunción, se le da un significado inclusivo, esto quiere decir que la interpretaremos como «lo uno, lo otro o los dos». El enunciado anterior entonces se leerá como: «x está en A, x está en B o x está en A y B». Una vez aclarado esto, definimos entonces la unión de A y B.

Definición 1.4. Sean A y B conjuntos. La *unión de A con B* es el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

La expresión $A \cup B$, se lee «A unión B» y este conjunto contiene a todos los elementos que pertenezcan al menos a uno de los conjuntos A y B.

Con la unión formamos un conjunto, de manera coloquial, «más grande» de los conjuntos de donde hemos partido partido, podemos pensar en hacer algo similar para tener uno más «pequeño» usando la contrapartida lógica de la disyunción: la conjunción. De esta forma proponemos para dos conjuntos A y B, y la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \in B;$$

ésta se satisface únicamente cuando x está al mismo tiempo tanto en$A$ como en B, lo que nos lleva a poder definir la intersección de A y B.

Definición 1.5. Sean A y B conjuntos. La *intersección de A y B* es el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

La expresión $A \cap B$ se lee «A intersección B» y este conjunto contiene a todos los elementos que están al mismo tiempo, tanto en A como B. Podría ser el caso, por supuesto, que los conjuntos en cuestión no tengan elementos en común. En ese caso tenemos $A \cap B = \varnothing$ y diremos que los conjuntos son *disjuntos*.

Otra operación consiste en excluir elementos de un conjunto dado. Para clarificar esto, consideremos los conjuntos A y B; y analicemos la propiedad

$$x \in A \text{ y } x \notin B.$$

Esta propiedad será cierta para un elemento x dado, cuando ese x esté en A pero no sea un miembro de B. Esto quiere decir que excluiremos a todos los elementos de A que estén B, esto es precisamente lo que se intenta realizar en la diferencia de conjuntos

Definición 1.6. Sean A y B conjuntos. La *diferencia de A con B* es el conjunto

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La expresión $A \backslash B$ se lee «A menos B» y simplemente es el conjunto A donde los elementos que tiene en común con B han sido removidos.

1.5. Operaciones con familias de conjuntos

Como se mencionó al principio de la sección, un conjunto puede tener como elementos a otros conjuntos. Una *familia de conjuntos* será entonces este caso particular, i.e., un conjunto $\mathcal{F}$ tal que todos sus elementos sean conjuntos.

Por ejemplo, si A es un conjunto, podemos considerar la familia con un único elemento

$$\{A\}.$$

Es importante notar que conceptualmente son distintos el conjunto A y el conjunto que contiene como único elemento a dicho conjunto, este es A. Es más, para cualquier conjunto A, es cierto que $A \in \{A\}$; en otras palabras, A es un elemento (el único) que pertenece al conjunto $\{A\}$.

De manera similar a como hemos definido la unión y la intersección entre conjuntos, podemos definir la unión e intersección de una familia de conjuntos. Esto, aunque parecería abstracto en principio, es una generalización relativamente sencilla de lo anterior. Pensemos por ejemplo en la familia de conjuntos con dos elementos, i.e.,

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos reunir los elementos de los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos entonces simplemente tomar

$$\bigcup \mathcal{F} = A \cup B;$$

esto querría decir que a es un elemento de $\bigcup \mathcal{F}$, si a pertenece al menos a uno de los conjuntos A, B. Expresarlo de esta manera, nos ayuda a tener una idea más general de como tratar con una familia de conjuntos. Consideremos ahora una familia $\mathcal{F}$ arbitraria, con ella podemos formar la siguiente propiedad

$$\text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X.$$

Si un elemento satisface esta propiedad, dicho elemento debe pertenecer por lo menos a uno de los conjuntos que constituyen la familia $\mathcal{F}$, entonces podemos definir lo siguiente.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *unión de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in X\}.$$

La expresión $\bigcup \mathcal{F}$ se lee «la unión de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión anterior, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen por lo menos a uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

De manera muy similar podemos proceder para definir la intersección de una familia de conjuntos. Consideremos de nueva la familia

$$\mathcal{F} = \{A, B\}.$$

Si quisiéramos encontrar los elementos que comparten todos los conjuntos que componen $\mathcal{F}$, podríamos simplemente tomar

$$\bigcap \mathcal{F} = A \cap B;$$

podemos expresar esto de una manera ligeramente distinta, lo anterior querría decir que un elemento pertenece a $\bigcap \mathcal{F}$, si es miembro de los conjuntos A, B. De nueva cuenta esto nos presenta una forma cómoda de presentar la idea de intersección, para esto tomamos una familia $\mathcal{F}$ arbitraria de conjuntos y presentamos la propiedad

$$x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}.$$

Los elementos que satisfacen esta propiedad son aquellos que comparten los conjuntos en la familia $\mathcal{F}$, esto es una sugerencia para proponer la siguiente definición.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Definimos la *intersección de los elementos de* $\mathcal{F}$, como el conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}\}.$$

La expresión $\bigcap \mathcal{F}$ se lee «la intersección de $\mathcal{F}$» y, repitiendo la discusión que se presentó, los elementos de este conjunto son aquellos que pertenecen a todos y cada uno de los miembros que conforman $\mathcal{F}$.

1.6. Conjunto Potencia

Consideremos ahora un conjunto A. Como hemos definido, un conjunto B es un subconjunto de A cuando todos los elementos de B son al mismo tiempo elementos de A. Debemos notar que esta definición compara dos conjuntos con la siguiente propiedad:

$$\text{Para todo } x, \text{ si } x \in B \text{ entonces } x \in A.$$

Recordemos que hemos acordado escribir lo anterior simplemente como

$$B \subset A,$$

así, hemos asignado al símbolo $\subset$ un significado muy particular. De esta forma, podemos formar una familia importante de conjuntos, a decir la colección de conjuntos que son subconjuntos de A.

Definición 1.9. Sea A un conjunto. Entenderemos por *el conjunto potencia de* A como el conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Recordemos que, $\varnothing \subset A$ y $A \subset A$, para cualquier conjunto A. Esto implica por definición que

$$\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(A),$$

por lo que el conjunto potencia de cualquier conjunto debe ser no vacío, ¡incluso el conjunto potencia del vacío debe ser no vacío! Específicamente,

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

A partir de resolver el ejercicio 1.4, seremos capaces de observar este hecho simplemente siguiendo las definiciones que se han proporcionado.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto $A = 1, 2, 3$

Ejercicio 1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.5. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

Ejercicio 1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.11. Demuestra que para cualquier conjunto A,

$$A \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{y} \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

Ejercicio 1.12. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

Referencias

[1] Gómez, C.: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Las Prensas de Ciencias, 2007.

[2] Jonhsonbaugh, Richard: *Matemáticas discretas*. Prentice Hall, 1999.

Comentario. Las notas anteriores no tienen un objetivo editorial, ni siquiera ser un substituto de la literatura en uso. Intentan pobremente resumir lo que se ha presentando en el curso de Matemáticas Discretas impartido en la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la FES Acatlán. Su versión es, en consecuencia, susceptible a errores gramaticales, imprecisiones técnicas y cambios constantes.