Ejercicios para Matemáticas Discretas

Matemáticas Aplicadas y Computación 2016-I

1. Preliminares

1.1. Teoría de conjuntos

Ejercicio 1.1.1. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ conjuntos. Discute la validez de las siguiente afirmaciones.

- $A \subset B$
- $1 \in A$
- $1 \subset A$
- $A \neq B$
- $A \in B$
- $1 \subset B$

Ejercicio 1.1.2. Demuestra o refuta las siguiente afirmaciones:

- $\varnothing \in \varnothing$
- $\varnothing \subset \varnothing$
- $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Ejercicio 1.1.3. Describe en su totalidad el conjunto potencia del conjunto $A = 1, 2, 3$

Ejercicio 1.1.4. Demuestre que, si $X \subset \varnothing$, entonces $X = \varnothing$

Ejercicio 1.1.5. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ conjuntos. Discute la validez las siguiente afirmaciones.

- $A = B$
- $A \subset C$
- $B \subset D$
- $A \subset B$
- $A \subset D$
- $B \in D$
- $A \in C$
- $B \subset C$
- $A \in D$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra los siguientes resultados de la igualdad de conjuntos.

- $\{a, a\} = \{a\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$

Ejercicio 1.1.7. Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestra que, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \subset \bigcup \mathcal{F}$.

Ejercicio 1.1.8 (Leyes conmutativas). Para conjuntos A y B, demuestra que

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Ejercicio 1.1.9 (Leyes asociativas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ejercicio 1.1.10 (Leyes distributivas). Para conjuntos A, B y C, demuestra que

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 1.1.11. Demuestra que para cualquier conjunto A,

$$A \in \mathcal{P}(A) \qquad \text{y} \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

Ejercicio 1.1.12. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestra que

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A).$$

1.2. Relaciones

Ejercicio 1.2.1. Suponga que A es el conjunto de las personas en el mundo. Si R la relación

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ y } b \text{ están casados}\},$$

determina el dominio y rango de R

Ejercicio 1.2.2. Se realiza un experimento de la siguiente manera: Se tira un dado y se anota el resultado; después se lanza una moneda al aire y se anota el resultado. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{\circ, +\}$. Entonces, $A \times B$ será el conjunto de posibles resultados del experimento, supongase que el experimento se realiza n veces; denotando $\mathcal{E}_i \in A \times B$ como el resultado de la i-ésima realización del experimento. Definimos entonces la relación

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \exists i.(a, b) = E_i\}.$$

- Determine el dominio e imagen de R.
- ¿Cómo interpretarías la imagen de «1» (i.e. $R[\{1\}]$)?.
- ¿Cómo interpretarías la preimagen de «$\circ$» (i.e. $R^{-1}[\{\circ, +\}]$)?

Ejercicio 1.2.3. Consideremos una base de datos relacional pero interpretada en el marco de la teoría de conjuntos. Sea entonces A un conjunto de números naturales en donde cada elemento representa un cliente, sea también B un conjunto de números naturales en el cada elemento representa un producto que vende la tienda y finalmente, sea R un subconjunto de $A \times \mathcal{P}(B)$ que representa una compra realizada en la tienda. Los conjuntos A, B y R son las tablas de la base de datos, nótese sin embargo que R es en realidad una relación.

- Establezca una relación entre un cliente y un producto.
- ¿Se podrá describir un conjunto de forma tal que sus elementos sean los productos que jamás han sido adquiridos?
- ¿Qué significado se le podrá dar al dominio de R?
- Nótese que la imagen de R es un subconjunto del conjunto potencia de B, por lo que ésta es una familia de conjuntos. Qué significado podrá tener el conjunto
$$\bigcup \operatorname{im}(R).$$
- Suponga que n, m y l son elementos de A. ¿Qué conjunto describiría los productos adquiridos por cualquiera de estos tres clientes?

Ejercicio 1.2.4. Explica a que se refiere la siguiente relación

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$$

Ejercicio 1.2.5. Sean A y B conjuntos. Definimos

$$\langle a,b\rangle = \{\{a,\varnothing\},\{b,\{\varnothing\}\}\}.$$

Demuestra que $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ si y sólo si $a = b$ y $c = d$.

Ejercicio 1.2.6. Para conjuntos A, B, C y D demuestra que $A \times B \subset C \times D$ si y sólo si $A \subset C$ y $B \subset D$.

Ejercicio 1.2.7. Demuestra que

$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$

Referencias

[Fra87] Fraleigh, John B.: *Álgebra abstracta: primer curso.* Addison Wesley, 1987.

[Gri97] Grimaldi, Ralph P.: *Matemáticas discreta y combinatoria.* Addison Wesley Iberoamericana, 3ª edición, 1997.

[Gó07] Gómez Laveaga, Carmen: *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos.* Las Prensas de Ciencias, 2007.