

Feuille d'exercice Statistiques

Exercice 1

(Modèle de mélange.) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. dont la densité f est un mélange de deux densités gaussiennes $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(0, 4)$:

$$f(x, \theta) = \theta \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + (1 - \theta) \times \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{8}\right)$$

où $\theta \in]0, 1[$ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer. Expliciter l'estimateur de θ obtenu à l'aide de la méthode des moments.

Exercice 2

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi de Paréto, dont la densité est donnée par

$$f(x; \theta) = \theta/x^{\theta+1} (x \geq 1), x \in \mathbb{R}$$

1. On suppose d'abord que l'espace de paramètres est $]1, +\infty[$. Estimer θ par la méthode des moments.
2. On considère maintenant le cas plus général où c'est $]0, +\infty[$. Expliquer pourquoi la méthode des moments est inapplicable dans ce cas. Proposer un estimateur par la méthode des moments généralisée.
3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre θ . Montrer qu'il peut être vu comme un estimateur obtenu par la méthode des moments généralisée.

Exercice 3

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2 avec probabilités $\theta/2, \theta/2, 1 - \theta$. Dans cet exercice, on note N_0, N_1 et N_2 le nombre de 0, de 1 et de 2 dans l'échantillon,

1. Dans quel intervalle de \mathbb{R} varie θ ?
2. Proposer un estimateur $\hat{\theta}$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance
3. Calculer le risque quadratique de $\hat{\theta}$

Exercice 4

On joue avec un dé qui semble tomber trop souvent sur la face 6. Dans une expérience on a lancé 40 fois ce dé et obtenu 10 fois le 6.

1. Au seuil de signification de 0,05 peut-on conclure que le dé est pipé par excès d'apparition du 6 ?
2. Sur 40 lancers, à partir de quelle proportion de faces 6 peut-on conclure que le dé est pipé (au seuil de signification de 0,05) ?
3. Quelle est la réponse à la question 2, lorsqu'on ne sait pas a priori si le dé, que l'on soupçonne d'être pipé, tombe trop souvent ou pas assez souvent sur la face 6 ?

Exercice 5

On teste deux traitements anti-cancéreux A et B sur deux populations de patients P_A et P_B (de même taille $n_A = n_B = 50$). L'efficacité d'un traitement est évaluée par l'éventuelle diminution de la taille de la lésion tumorale, estimée par imagerie médicale, après un an de traitement. Pour la population soumise au traitement A on observe une diminution de la taille des tumeurs dans 27 cas sur 50, pour le traitement B, dans 18 cas. Peut-on conclure à une différence d'effet des deux traitements (au seuil de 5%) ? Peut-on conclure que le traitement A est plus efficace que le traitement B (avec le même seuil de signification) ?