

S2 TD2 : Dimension, familles libres, familles génératrices

Exercice 1) Ces familles sont-elles libres ?

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2) : Ces familles sont-elles génératrices de \mathbb{R}^3 ?

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3) : Donner une base de :

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - y + z = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x + 3y - 2z + 6w = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$

Exercice 4)

1) Soient $v1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille $(v1, v2, v3)$ est liée.
On note F l'espace engendré par $(v1, v2, v3)$. Donner une base de F .

2) Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - y + z = 0 \right\}$.

Montrer que G est un espace vectoriel (en une ligne si possible ;)).
Montrer que $F = G$.

Exos Bonus)

Soit F l'espace engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En donner une équation cartésienne (*i.e.* de la forme $ax + by + cz = 0$ où il faut que vous trouviez a , b et c)