S2 TD4 : Déterminant et inversion de matrices

Exercice 1) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 10^{68} \\ 0 & 1 & -\pi & 11.3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2) : Inverser les matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exo Bonus 1)

Inverser les matrices suivantes (en regardant la transformation géométrique !)

- $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exo Bonus 2)

Demander à Jules la super méthode pour inverser des matrices, et bien s'accrocher à son siège.

1 Réponses

Exercice 1) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
- $\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7$
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- $\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 14$
- $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 10^{68} \\ 0 & 1 & -\pi & 11.3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$ (Rappel : le déterminant d'une matrice triangulaire est simplement le produit des éléments sur la diagonale)

Exercice 2) : Inverser les matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Exo Bonus 1)

Inverser les matrices suivantes (en regardant la transformation géométrique !)

- $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'un angle θ donc son inverse est la rotation de $-\theta$: $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la rotation de 90 degrés. Son inverse est la rotation de -90 degrés : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la symétrie par rapport à l'axe $x = y$. Son inverse est donc elle-même !