

# Fiche récap : Algèbre Linéaire

## 1 Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

### 1.1 Méthode générale

Il suffit de vérifier que :

1. **Il est inclus dans un espace vectoriel** connu (les nombres, les points en 2D, 3D, etc., les fonctions, les polynômes, les suites. . .)
2. **Il contient 0**
3. **Il est stable par  $+$  et  $\cdot$**  (*i.e.* addition entre deux vecteurs, et multiplication par un scalaire).

### 1.2 Une méthode qui pourra vous être très souvent utile

Si un ensemble s'écrit sous la forme "équation linéaire = 0" alors c'est un espace vectoriel.

Exemples :

- Les points  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $3x + 2y - z = 0$
- Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + 5u_n = 0$
- Les fonctions  $f$  telles que  $f'' + 3x^2 f' - 5f = 0$

## 2 La dimension : à quoi ça sert ?

- Une famille trop grosse ne peut pas être libre, une famille trop petite ne peut pas être génératrice. Le nombre limite est ce qu'on appelle la dimension.
- **Pour trouver une base :** Souvent on voit tout de suite quelle est la dimension d'un espace vectoriel, et il suffit alors de trouver le bon nombre (=dimension) de vecteurs libres : ils seront forcément générateurs aussi.
- **Tester l'égalité de deux espaces :** On commence par vérifier qu'ils ont la même dimension (sinon c'est mort), puis il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre, et ils seront forcément égaux.

### 3 Matrices inversibles

Il y a plein de manières d'interpréter/remarquer le fait qu'une matrice est inversible ou non. En voici une liste non-exhaustive, triée par ordre d'importance :

*Toutes les propositions suivantes sont équivalentes :*

- La matrice  $M$  est **inversible**
- Son déterminant est **non nul**
- La famille de ses colonnes est **libre**
- La famille de ses lignes est **libre**
- Le système associé à la matrice a **une et une seule solution**
- **Sa transposée** est inversible
- Le seul vecteur  $\vec{v}$  tel que  $M\vec{v} = \vec{0}$  est  $\vec{v} = \vec{0}$  (on dit dans le jargon que **son noyau est réduit à  $\{\vec{0}\}$** )

### 4 Diagonaliser une matrice

**Ça se passe en trois étapes :**

1. Trouver les valeurs propres de la matrice
2. Trouver les vecteurs propres associés à chaque valeur propre
3. Écrire la matrice sous forme diagonale  $PDP^{-1}$

**Détaillons un peu tout ça :**

1. Trouver les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $M$  :

Il faut résoudre l'équation  $\det(M - \lambda I) = 0$ , autrement dit calculer le déterminant de la matrice  $M$  mais où on a rajouté des " $-\lambda$ " sur la diagonale, puis résoudre l'équation (polynomiale de degré 2, 3 ou plus en fonction de la taille de la matrice)  $\det = 0$ .

2. Trouver les vecteurs propres associés à chaque valeur propre :

Pour chaque valeur propre  $\lambda$  qu'on vient de trouver, il faut désormais résoudre le système  $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$  où l'inconnue est le vecteur  $\vec{v}$  (donc ses composantes  $x, y, z, \dots$ ).  
Système qu'on peut aussi écrire directement sous la forme  $(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

3. Écrire la matrice sous forme diagonale  $PDP^{-1}$  :

Si on a trouvé autant de vecteurs propres que la dimension de la matrice, alors c'est qu'elle est bel et bien diagonalisable et on peut l'écrire  $M = PDP^{-1}$

$D$  est une matrice diagonale avec sur sa diagonale les valeurs propres

$P$  est la matrice de passage de la base de vecteurs propres vers la base canonique, autrement dit la matrice obtenue en écrivant tout simplement les vecteurs propres en colonne (attention : il faut mettre dans  $P$  les vecteurs propres dans le même ordre que celui utilisé pour les valeurs propres dans  $D$  !)

**Un petit exemple :**

Diagonaliser la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 6 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. On cherche ses valeurs propres en résolvant  $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 8-\lambda & 6 \\ -3 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ . En développant le calcul on arrive à :

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

On trouve comme solutions  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{5}$  et encore  $\boxed{2}$ . C'est tout à fait possible de trouver plusieurs fois une même valeur propre : on dit qu'elle est multiple et cela veut dire qu'elle aura potentiellement plusieurs vecteurs propres associés (ou pour être plus correct, plusieurs *droites* de vecteurs propres associés).

2. On cherche les vecteurs propres associés à 5 en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 6 & 8-5 & 6 \\ -3 & -3 & -1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$  et on choisit un représentant de cette droite de vecteur :

$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$  est un vecteur propre associé à 5 (de même que tous ses multiples).

On recommence pour 2 :

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 6 & 8-2 & 6 \\ -3 & -3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ .

On remarque que cette fois-ci il reste deux variables, autrement dit qu'il y a deux droites

de vecteurs propres, engendrées respectivement par  $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$  et  $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ .

[Cela rejoint la remarque comme quoi 2 était une racine multiple : présente deux fois comme solution de l'équation  $\det = 0$ , elle a *une chance* d'avoir deux droites de vecteurs propres plutôt qu'une. (Notez bien que ce n'est pas obligatoire : 2 aurait pu n'avoir qu'une seule droite de vecteurs propres, et ça aurait signifié que la matrice n'est pas diagonalisable)]

3. Puisqu'on a trouvé 3 vecteurs,  $M$  est bien diagonalisable (si on en avait moins, on aurait bien du mal à remplir  $P$  !) On peut donc écrire  $M = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notez deux choses : déjà j'ai mis 2 deux fois dans  $D$  puisque cette valeur propre a deux (droites de) vecteurs propres associés.

Et aussi j'ai bien fait attention, puisque j'ai *choisi* de mettre 5 en premier dans  $D$ , de bien mettre son vecteur associé  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  aussi en premier dans  $P$ .