S2 TD1 : Mais c'est quoi en fait un espace vectoriel ?

Exercice 1) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 1 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \times y = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \times y = 1 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$
- Les suites qui tendent vers $+\infty$
- Les suites qui tendent vers 3
- Les suites qui tendent vers 0
- Les suites qui ont une limite finie
- Les suites telles que $u_{n+1} = 2u_n$
- Les suites telles que $u_{n+1} = 2u_n + 1$
- Les suites telles que $u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$
- Les polynômes de degré 4
- Les polynômes de degré 4 ou moins
- $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' = 0 \right\}$
- $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + x^2 f' = 0 \right\}$
- $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + x^2 f' = 1 \right\}$
- $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' \times f' = 1 \right\}$

Exercice 2)

Montrer que l'union de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel, à moins que l'un soit inclus dans l'autre.

Exercice 3) : Donner pour chacun de ces espaces vectoriels une famille de vecteurs qui l'engendre

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - y + z = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 8x - 5y + 2z = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$

/!\Exos Bonus)

- Montrer que l'intersection de deux espaces vectoriels est toujours un espace vectoriel.
- L'ensemble suivant est-il un espace vectoriel ?
  $\left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \mid f'' \times f' = 0 \right\}$