Fiche récap : Algèbre Linéaire

1 Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

1.1 Méthode générale

Il suffit de vérifier que :

1. **Il est inclus dans un espace vectoriel** connu (les nombres, les points en 2D, 3D, etc., les fonctions, les polynômes, les suites. . .)
2. **Il contient 0**
3. **Il est stable par + et** $\cdot$ (*i.e.* addition entre deux vecteurs, et multiplication par un scalaire).

1.1.1 Exemple

Montrer que $E = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ est un espace vectoriel.

1. E est inclus dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des points 2D, qui est un espace vectoriel.
2. Le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien dans E car $0 + 0 = 0$
3. Prenons u et v dans E, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre. On a donc $u_x + u_y = 0$ et $v_x + v_y = 0$, et il faut montrer qu'il en va de même pour $u + \lambda v$ (c'est-à-dire que $(u_x + \lambda v_x) + (u_y + \lambda v_y) = 0$) En changeant l'ordre des termes, on a

$$(u_x + \lambda v_x) + (u_y + \lambda v_y) = \underbrace{u_x + u_y}_{=0} + \lambda(\underbrace{v_x + v_y}_{=0}) = 0 \text{ CQFD}$$

1.2 Une méthode qui pourra vous être très souvent utile

Si un ensemble s'écrit sous le forme "équation linéaire = 0 " alors c'est un espace vectoriel.
Exemples :

- Les points $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $3x + 2y - z = 0$
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + 5u_n = 0$
- Les fonctions f telles que $f'' + 3x^2 f' - 5f = 0$

2 La dimension : à quoi ça sert ?

- Une famille trop grosse ne peut pas être libre, une famille trop petite ne peut pas être génératrice. Le nombre limite est ce qu'on appelle la dimension.
- **Pour trouver une base :** Souvent on voit tout de suite quelle est la dimension d'un espace vectoriel, et il suffit alors de trouver le bon nombre (=dimension) de vecteurs libres : ils seront forcément générateurs aussi.
- **Tester l'égalité de deux espaces :** On commence par vérifier qu'ils ont la même dimension (sinon c'est mort), puis il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre, et ils seront forcément égaux.

3 Matrices inversibles

Il y a plein de manières d'interpréter/remarquer le fait qu'une matrice est inversible ou non. En voici une liste non-exhaustive, triée par ordre d'importance :

Toutes les propositions suivantes sont équivalentes :

- La matrice M est **inversible**
- Son déterminant est **non nul**
- La famille de ses colonnes est **libre**
- La famille de ses lignes est **libre**
- Le système associé à la matrice a **une et une seule solution**
- **Sa transposée** est inversible
- Le seul vecteur $\vec{v}$ tel que $M\vec{v} = \vec{0}$ est $\vec{v} = \vec{0}$ (on dit dans le jargon que **son noyau est réduit à** $\{\vec{0}\}$)

4 Diagonaliser une matrice

Ça se passe en trois étapes :

1. Trouver les valeurs propres de la matrice
2. Trouver les vecteurs propres associés à chaque valeur propre
3. Écrire la matrice sous forme diagonale PDP^{-1}

Détaillons un peu tout ça :

1. <u>Trouver les valeurs propres λ de la matrice M :</u>

   Il faut résoudre l'équation $\det(M - \lambda I) = 0$, autrement dit calculer le déterminant de la matrice M mais où on a rajouté des "$-\lambda$" sur la diagonale, puis résoudre l'équation (polynomiale de degré 2, 3 ou plus en fonction de la taille de la matrice) $\det = 0$.

2. <u>Trouver les vecteurs propres associés à chaque valeur propre :</u>

   Pour chaque valeur propre λ qu'on vient de trouver, il faut désormais résoudre le système $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ où l'inconnue est le vecteur $\vec{v}$ (donc ses composantes x, y, z...).
   Système qu'on peut aussi écrire directement sous la forme $(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

3. <u>Écrire la matrice sous forme diagonale PDP^{-1} :</u>

   Si on a trouvé autant de vecteurs propres que la dimension de la matrice, alors c'est qu'elle est bel et bien diagonalisable et on peut l'écrire $M = PDP^{-1}$
   D est une matrice diagonale avec sur sa diagonale les valeurs propres
   P est la matrice de passage de la base de vecteurs propres vers la base canonique, autrement dit la matrice obtenue en écrivant tout simplement les vecteurs propres en colonne (attention : il faut mettre dans P les vecteurs propres dans le même ordre que celui utilisé pour les valeurs propres dans D !)

Un petit exemple :

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 6 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. On cherche ses valeurs propres en résolvant $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 8-\lambda & 6 \\ -3 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$. En développant le calcul on arrive à :

   $$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

   On trouve comme solutions $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ et encore $\boxed{2}$. C'est tout à fait possible de trouver plusieurs fois une même valeur propre : on dit qu'elle est multiple et cela veut dire qu'elle aura potentiellement plusieurs vecteurs propres associés (ou pour être plus correct, plusieurs *droites* de vecteurs propres associés).

2. On cherche les vecteurs propres associés à 5 en résolvant le système

   $$\begin{pmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 6 & 8-5 & 6 \\ -3 & -3 & -1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   On trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$ et on choisit un représentant de cette droite de vecteur : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ est un vecteur propre associé à 5 (de même que tous ses multiples).

   On recommence pour 2 :

   $$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 6 & 8-2 & 6 \\ -3 & -3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   On trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$.
   On remarque que cette fois-ci il reste deux variables, autrement dit qu'il y a deux droites de vecteurs propres, engendrées respectivement par $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

   [Cela rejoint la remarque comme quoi 2 était une racine multiple : présente deux fois comme solution de l'équation $\det = 0$, elle a *une chance* d'avoir deux droites de vecteurs propres plutôt qu'une. (Notez bien que ce n'est pas obligatoire : 2 aurait pu n'avoir qu'une seule droite de vecteurs propres, et ça aurait signifié que la matrice n'est pas diagonalisable)]

3. Puisqu'on a trouvé 3 vecteurs, M est bien diagonalisable (si on en avait moins, on aurait bien du mal à remplir P !) On peut donc écrire $M = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Notez deux choses : déjà j'ai mis 2 deux fois dans D puisque cette valeur propre a deux (droites de) vecteurs propres associés.
   Et aussi j'ai bien fait attention, puisque j'ai *choisi* de mettre 5 en premier dans D, de bien mettre son vecteur associé $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussi en premier dans P.