TD n3 : Développements limités - Corrigé

Échauffement : Dériver ! :

$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = 3x - 5$	$f'(x) = 3$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	RAPPEL : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	RAPPEL : $\frac{1}{x} = x^{-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	

Exercice 1) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 [c'est-à-dire qu'il finit par quelque chose comme $\cdots + 2x^4 + o(x^4)$]

$f(x) = e^x$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	
$f(x) = \cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$	
$f(x) = \sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$	
$f(x) = \ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$	
$f(x) = (1+x)^\alpha$	$= 1 + x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\times 3}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\times 3\times 4}x^4 + o(x^4)$	
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$	RAPPEL : $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$
$f(x) = \sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$	RAPPEL : $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = (1+x)^2$	$= 1 + 2x + x^2 + o(x^4)$	

PS : Héhé, ce dernier était une blague ; si vous avez utilisé la formule de $(1+x)^\alpha$ pour ça, vous vous êtes fait avoir :p Enfin ça marche, mais on n'a pas besoin de ça pour savoir développer un carré ^^.

Exercice 2) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

- $f(x) = 10^x = e^{x\ln(10)} = 1 + x\ln(10) + \frac{(x\ln(10))^2}{2} + \frac{(x\ln(10))^3}{6} + o(x^3)$
- $f(x) = e^{\sin(x)} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{6} + o(x^3) = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
- $f(x) = e^{\cos(x)} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \overset{1}{=} e^1 \times e^{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} = e \times (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))$
- $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \times (1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

[1] Ici on a un léger problème car on connaît le DL de l'exp en 0, mais $1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ tend vers 1 et pas 0. C'est pour dégager ce 1 qu'on écrit l'exponentielle comme un produit de deux exponentielles.

Exercice 3) Quelle est la limite en 0 de :

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \sim \frac{x}{x} = 1$
- $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x^2} = \frac{-1}{2} + o(1)$
- $f(x) = \frac{e^x-1}{\ln(1+x)} = \frac{1+x+o(x)-1}{x+o(x)} \sim 1$
- $f(x) = \frac{\cos(2x)-1}{5x^2+x^3} = \frac{1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)-1}{5x^2+x^3} = \frac{-2x^2+o(x^2)}{5x^2+x^3} \sim \frac{-2}{5}$
- $f(x) = \frac{\cosh(x)-\cos(x)}{\ln(1+x)-\sin(x)} = \frac{(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(x+o(x^2))} = \frac{x^2+o(x^2)}{\frac{-x^2}{2}+o(x^2)} \sim -2$
- $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sin(x)}} = e^{\frac{2x+o(x)}{x+o(x)}} \sim e^2$

Exercice Bonus)

$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = \frac{(f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2))+(f(x)-hf'(x)+\frac{(-h)^2}{2}f''(x)+o(h^2))-2f(x)}{h^2} = \frac{h^2f''(x)+o(h^2)}{h^2} = f''(x)+o(1)$