Structure de groupe

1) Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, muni de la loi de composition interne notée $*$, définie par :

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a - b. \end{aligned}$$

a) La loi $*$ est-elle associative ? commutative ?

b) Vérifier qu'il existe dans $(\mathbb{Z}, *)$ un élément neutre à droit, c'est-à-dire un élément e tel que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \ a * e = a.$$

e est-il neutre dans $(\mathbb{Z}, *)$?

c) Existe-t-il, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, un symétrique à droite relativement à e,c'est-à-dire un élément a' tel que $a * a' = e$

---

a) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a*b)*c = a-b-c$, et $a*(b*c) = a-b+c$, la loi n'est pas associative. Et $2*1 = 1 \neq -1 = 1*2$ montre qu'elle n'est pas non plus commutative.

b) On vérifie que 0 est un neutre à droite pour $*$: $\forall a \in \mathbb{Z}, \ a*0 = a-0 = a$. Il n'est cependant pas un neutre pour $*$, car $0 * a = -a \neq a$.

c) $\forall a \in \mathbb{Z}, \ a * a' = e \Rightarrow a = a'$. Pour tout élément $a \in Z$, a est son propre inverse à droite.

---

2) Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels muni de la loi de composition interne notée $*$ définie par :

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto a + b + ab. \end{aligned}$$

$(\mathbb{Q}, *)$ est-il un groupe ?

La loi $*$ admet 0 comme élément neutre, en effet, $a * 0 = 0 * a = a$. Cependant, -1 n'est pas symétrisable par cette loi, car on a $a * -1 = a - 1 - a = -1$, donc $(\mathbb{Q}, *)$ n'est pas un groupe.
