

Groupe de travail : Lecture de l'article de Joan Millès
« André-Quillen cohomology of algebras over an operad »
Exposé n°2 : Différentielles de Kähler

Jules Givelet

13 octobre 2025

1 Différentielles de Kähler d'une algèbre commutative (unitaire)

Dans cette section, A désigne une \mathbb{K} -algèbre commutative unitaire *i.e.* une $uCom$ -algèbre, et M désigne un A -module.

Définition 1.1. Une *dérivation* de A à valeur dans M est une application \mathbb{K} -linéaire $d : A \rightarrow M$ telle que $d(ab) = b \cdot d(a) + a \cdot d(b)$. On note $\text{Der}(A, M)$ l'ensemble des dérivations de A dans M .

Remarque 1.2. Le module $\text{Der}(A) := \text{Der}(A, A)$ est la brique de base en géométrie algébrique du faisceau $\text{Der}(\mathcal{O}_X)$ des dérivations sur un schéma X . Ce faisceau joue alors le rôle du fibré tangent. Ce faisceau tangent est un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang d pour une variété algébrique de dimension d . Or, l'ensemble des \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 forment un groupe sous le produit tensoriel (l'inverse est donné par le dual) appelé le groupe de Picard de X . Si X est une courbe, alors son faisceau des dérivations est localement libre de rang 1 et c'est un problème récurrent de trouver la place du module tangent dans le groupe de Picard.

Par exemple, le groupe de Picard de la droite projective \mathbb{P}^1 est libre de rang 1, engendré par $\mathcal{O}(1)$ le faisceau tordant de Serre, et on a $\text{Der}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1)$ (car la dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$).

Proposition 1.3. Si $d : A \rightarrow M$ est une dérivation, on a $d(1) = 0$ et

$$d(a_1 \cdots a_n) = \sum_{i=1}^n (a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n) \cdot d(a_i).$$

Démonstration. En prenant $a = b = 1$, on a $d(1) = 2d(1)$ et donc $d(1) = 0$. Ensuite, par récurrence, en prenant $a = a_1 \cdots a_{n-1}$ et $b = a_n$, on obtient

$$d(a_1 \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_{n-1}) \cdot d(a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n) \cdot d(a_i).$$



L'ensemble $\text{Der}(A, M)$ est un sous A -module de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, M)$ et le but des différentielles de Kähler est de représenter le foncteur $\text{Der}(A, -)$.

Définition 1.4. Un A -module Ω muni d'une dérivation $d_\Omega : A \rightarrow \Omega$ est un *module des différentielles de Kähler de A* s'il vérifie la propriété universelle suivante : Pour toute dérivation $d : A \rightarrow M$, il existe un unique morphisme de A -modules $f_d : \Omega \rightarrow M$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\forall d} & M \\ d_\Omega \downarrow & \nearrow \exists! f_d & \\ \Omega & & \end{array}$$

D'après l'abstract non-sense habituel (le lemme de Yoneda), un tel A -module est unique à isomorphisme près et on note alors $\Omega(A)$ l'unique module des différentielles de Kähler de A . La propriété universelle précédente se traduit alors en un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega(A), M) \simeq \mathrm{Der}(A, M).$$

Proposition 1.5. Le module des différentielles de Kähler $\Omega(A)$ existe.

Démonstration. On considère le A -module libre engendré par l'espace vectoriel A :

$$A \otimes A$$


On note $d : A \rightarrow A \otimes A$ l'application envoyant a sur $1 \otimes a$ (c'est la counité de l'adjonction : $\mathrm{Vect} \rightleftharpoons \mathrm{Mod}(A)$) de telle sorte que

$$a \otimes b = a \cdot d(b) \in A \otimes A.$$

On considère alors le quotient

$$\frac{A \otimes A}{d(ab) - (a \cdot d(b) + b \cdot d(a)) : a, b \in A} = \frac{A \otimes A}{(1 \otimes ab - (a \otimes b + b \otimes a)) : a, b \in A} =: \Omega(A)$$

On note encore $d : A \rightarrow \Omega(A)$ le morphisme envoyant a sur $[1 \otimes a]$. Par construction, $d : A \rightarrow \Omega(A)$ est une dérivation.

Toute application linéaire $\delta : A \rightarrow M$ induit alors un morphisme de A -modules $A \otimes A \rightarrow M$ (explicitement, il envoie $a \otimes b$ sur $a \cdot \delta(b)$) et le fait que ce morphisme passe au quotient en $f_\delta : \Omega(A) \rightarrow M$ est équivalent au fait que δ soit une dérivation. L'égalité $f \circ d = \delta$ est alors équivalente au fait que f provient du morphisme $A \otimes A \rightarrow M$ induit par δ . 

Aparté sur le mot « différentielle » Il faut visualiser les éléments de $\Omega(A)$ comme des formes différentielles de degré 1 si bien que certains désigneront ce module par $\Omega^1(A)$ ou $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1$. En effet, le module $\Omega^n(A) := \bigwedge^n \Omega^1(A)$ est alors engendré par des éléments de la forme $da_1 \wedge \dots \wedge da_n$ et la dérivation $d : A \rightarrow \Omega^1(A)$ induit une dérivation $\Omega^n(A) \rightarrow \Omega^{n+1}(A)$ telle que $d^2 = 0$. La cohomologie de $(\Omega^\bullet(A), d)$ est alors appelé *cohomologie algébrique de De Rham de A*. Elle se définit de manière plus générale pour tout schéma X au dessus de \mathbb{K} (et même pour tout morphisme de schémas $X \rightarrow Y$). Grothendieck a alors montré que l'on retrouve la cohomologie de De Rham habituelle lorsque l'on remplace une variété algébrique complexe lisse X par son *analytifié* X^{an} qui n'est autre que $X(\mathbb{C})$ munie d'une structure naturelle de variété analytique complexe

$$H_{dR}^\bullet(X/\mathbb{C}) \simeq H_{dR}^\bullet(X^{an}).$$

Exemple 1.6. On a $\Omega(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] dx_i$ car une dérivation δ sur $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est entièrement déterminée par ses valeurs en les x_i :

$$\delta(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) = \sum_{k=1}^n i_k (x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k-1} \dots x_n^{i_n}) \cdot \delta(x_k).$$

La dérivée partielle habituelle $\partial/\partial x_i : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ correspond alors à la forme $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ -linéaire dx_i^* .

Exercice 1.7. Montrer que si $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$, alors $\Omega(A)$ s'identifie au conoyau de la transposée de la Jacobienne de $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$:

$$\Omega(A) \simeq \text{coKer} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} : A^m \rightarrow A^n \right).$$

En dualisant ce résultat, montrer que $\text{Der}(A, A) =: \text{Der}(A)$ s'identifie au noyau de la Jacobienne de f

$$\text{Der}(A) \simeq \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} : A^n \rightarrow A^m \right)$$

et le redémontrer directement à la main.

On peut se demander comment se comporte le foncteur Ω vis à vis de l'extension des scalaires. Si $\pi : B \rightarrow A$ est un morphisme d'algèbres, alors on a un morphisme naturel

$$\begin{aligned} A \otimes_B \Omega(B) &\xrightarrow{d\pi} \Omega(A \otimes_B B) = \Omega(A) \\ a \otimes db &\longmapsto ad(\pi(b)) \end{aligned}$$

On observe que si $\pi : B \rightarrow A$ est surjectif, alors ce morphisme est surjectif aussi. De plus, le noyau de π fournit alors une description du noyau de ce morphisme.

Théorème 1.8 (Suite conormale). Si $\pi : B \rightarrow A$ est un morphisme d'algèbres surjectif de noyau I , alors I/I^2 a une structure naturelle de A -module et on a une suite exacte de A -modules

$$I/I^2 \xrightarrow{D} A \otimes_B \Omega(B) \xrightarrow{d\pi} \Omega(A) \longrightarrow 0.$$

De plus, si $\pi : B \rightarrow A$ admet une section $s : A \rightarrow B$, alors cette suite est scindée à gauche (et donc à droite) *i.e.*

$$A \otimes_B \Omega(B) \simeq I/I^2 \oplus \Omega(A).$$

Démonstration. La structure de A -module de I/I^2 provient du fait que l'on ait $A = B/I$ et donc un A -module n'est qu'un B -module M tel que l'action des éléments de I soit nulle. Ici, I est un sous B -module de B , donc I/I^2 est un B -module et l'action de I est nulle par construction.

Le morphisme $D : I/I^2 \rightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ est le morphisme induit par

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow A \otimes_B \Omega(B) \\ b &\longmapsto 1 \otimes db \end{aligned}$$

qui est nul sur I^2 car pour tout $b, b' \in I = \text{Ker}(\pi)$,

$$1 \otimes d(bb') = 1 \otimes bdb' + 1 \otimes b'db = \pi(b) \otimes db' + \pi(b') \otimes db = 0.$$

Ce même calcul montre que c'est une application A -linéaire en remplaçant $b \in I$ par un élément quelconque de B :

$$1 \otimes d(a \cdot b') = 1 \otimes bb' = a \otimes db$$

où $\pi(b) = a$.

Montrons que $d\pi$ induit un isomorphisme $\text{coKer}(D) \rightarrow \Omega(A)$. La composition $d\pi \circ D$ est nulle car pour tout $b \in I = \text{Ker}(\pi)$, $d(\pi(b)) = 0 \in \Omega(A)$. Le morphisme $d\pi$ induit donc un morphisme $d\pi : \text{coKer}(D) \rightarrow \Omega(A)$. Pour l'inverse, on considère le morphisme

$$\Omega(A) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$$

induit par la dérivation

$$\delta : B \xrightarrow{d} \Omega(B) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B) \longrightarrow \text{coKer}(D)$$

qui passe au quotient par I en une dérivation $\delta : A \rightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ puisque pour $b \in I$, on a

$$\delta(b) = [1 \otimes db] = [D([b])] = 0.$$

Ce sont bien des isomorphismes réciproques :

$$\begin{aligned} [a \otimes db] &\xrightarrow{d\pi} ad(\pi(b)) \xrightarrow{f_\delta} [a \otimes db] \\ ada' &\xrightarrow{f_\delta} [a \otimes db'] \xrightarrow{d\pi} ad(\pi(b')) = ada' \end{aligned}$$

où b' est un antécédent de a' par π .

Maintenant, si π admet une section s , alors D admet une rétraction $\rho : A \otimes_B \Omega(B) \rightarrow I/I^2$. Pour cela, on considère la dérivation

$$\begin{aligned} \varepsilon : B &\longrightarrow I/I^2 \\ b &\longmapsto [b - s\pi(b)] \end{aligned}$$

qui en est bien une car $\varepsilon(bb') = b\varepsilon(b') + b'\varepsilon(b) - \underbrace{\varepsilon(b)\varepsilon(b')}_{\in I^2}$. Elle induit un morphisme $\Omega(B) \rightarrow I/I^2$ et par extension des scalaires un morphisme

$$\begin{aligned} \rho : A \otimes_B \Omega(B) &\longrightarrow I/I^2 \\ a \otimes db &\longmapsto [s(a) \cdot (b - s\pi(b))] \end{aligned}$$

C'est bien une rétraction de $D : \rho D([b]) = b - \underbrace{s\pi(b)}_{b \in I}$.



Remarque 1.9. La dérivation $B \xrightarrow{d} \Omega(B) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ utilisée pour construire l'isomorphisme $\Omega(A) \simeq \text{coKer}(D)$ permet aussi de construire la section $\sigma : \Omega(A) \rightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ de $d\pi$ lorsque π admet une section s en considérant la dérivation

$$A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{d} \Omega(B) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B).$$

Le module $A \otimes_B \Omega(B)$ associée à la donnée (B, π) d'une algèbre au-dessus de A est centrale dans la définition de la cohomologie d'André-Quillen puisqu'elle s'obtient en « dérivant » le foncteur $A \otimes_B \Omega(-)$. En fait, ce module vient palier le fait que la représentation du foncteur $\text{Der}(A, -)$ par $\Omega(A)$ n'est pas fonctorielle car $\text{Der}(A, M)$ n'est pas fonctoriel en A si l'on fait parcourir A la catégorie des algèbres commutatives unitaires. La solution est de plutôt parcourir la catégorie des algèbres au-dessus de A .

Pour rappel, un *truc au dessus d'un truc* X d'une catégorie \mathcal{C} est la donnée d'un morphisme $Y \rightarrow X$, un morphisme de trucs au-dessus de X est un triangle commutatif et la catégorie des trucs au-dessus de X est notée $\mathcal{C}_{/X}$.

Définition 1.10. Soit (B, π) une algèbre au-dessus de A . Une *dérivation au-dessus de A* sur B à valeurs dans un A -module M est une application \mathbb{K} -linéaire $d : B \rightarrow M$ telle que

$$d(b_1 b_2) = \pi(b_1) \cdot d(b_2) + \pi(b_2) \cdot d(b_1).$$

On note $\text{Der}^A(B, M)$ le module des dérivations au-dessus de A de B dans M .

Autrement dit, on a $\text{Der}^A(B, M) = \text{Der}(B, M^\pi)$ où M^π est la restriction des scalaires de M le long de π . On a alors

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(A \otimes_B \Omega(B), M) &\simeq \text{Hom}_B(\Omega(B), M^\pi) \\ &\simeq \text{Der}(B, M^\pi) \\ &= \text{Der}^A(B, M).\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Der}^A(B, M)$ est une construction bi-fonctorielle :

$$\text{Der}^A : (\text{Alg}(u\text{Com})/A)^{\text{op}} \times \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Vect}$$

représentable à gauche par $A \otimes_- \Omega(-)$. Il est aussi représentable à droite grâce à l'extension triviale de A par un A -module M .

Définition 1.11. L'extension triviale de A par M , notée $A \ltimes M$ est l'espace vectoriel $A \oplus M$ munie de la multiplication


$$(a, x)(a', x') = (aa', a \cdot x' + a' \cdot x)$$

qui forme alors une algèbre commutative unitaire d'unité $(1, 0)$.

L'extension triviale de A par M est automatiquement munie d'une structure d'algèbre au-dessus de A grâce à la projection de la première coordonnée $A \ltimes M \rightarrow A$ qui a l'avantage d'admettre une section $\eta : A \rightarrow A \ltimes M$ $a \mapsto (a, 0)$.

Proposition 1.12. On a un isomorphisme naturel pour tout $(B, \pi) \in \text{Alg}(u\text{Com})/A$:

$$\text{Der}^A(B, M) \simeq \text{Hom}_{\text{Alg}(u\text{Com})/A}(B, A \ltimes M).$$

Démonstration. Dans un sens, si $d : B \rightarrow M$ est une dérivation au-dessus de A , alors (π, d) est un morphisme d'algèbres au-dessus de A et dans l'autre, la seconde composante d'un morphisme $B \rightarrow A \ltimes M$ est une dérivation au-dessus de A . 

Lorsque l'on rajoute des structures différentielles graduées, l'adjonction


$$A \otimes_- \Omega(-) : \text{Alg}(u\text{Com})/A \rightleftarrows \text{Mod}(A) : A \ltimes -$$

est ce qu'on appelle une *adjonction de Quillen* (cf. prochain exposé!) et c'est cela qui assure le fait que l'on puisse dériver le foncteur $A \otimes_- \Omega(-)$ sereinement.

Une construction de $\Omega(A)$ comme module conormal Une construction classique de $\Omega(A)$ (les géomètres algébriques l'adorent!) provient de l'identification suivante :

Proposition 1.13. Posons $I := \text{Ker}(\mu : A \otimes A \rightarrow A)$ le noyau de la multiplication. On a un isomorphisme

$$\Omega(A) \simeq I/I^2.$$

Démonstration. Dans un sens, on considère le morphisme induit par la dérivation $A \rightarrow I/I^2$ envoyant a sur $[1 \otimes a - a \otimes 1]$ et dans l'autre le morphisme envoyant $[\tau] = [\tau_{(1)} \otimes \tau_{(2)}]$ (notation d'Einstein) sur $\tau_{(1)} d\tau_{(2)}$. 

Exercice 1.14. Rédiger les détails de la démonstration précédente.

Les détails ont été laissés en exercices car tout est en fait contenu dans une suite conormale scindée. En effet, on applique ici la proposition 1.8 avec les paramètres suivant :

$$\begin{aligned}B &:= A \otimes A \\ \pi &:= \mu \\ s : A &\longrightarrow A \otimes A \\ a &\longmapsto a \otimes 1 \\ \mathbb{K} &:= A\end{aligned}$$

Avant de crier à la sorcellerie en se qui concerne le dernier point, rendez-vous compte que, d'une part, on a jamais utilisé le fait que \mathbb{K} était un corps et qu'on aurait pu partir de n'importe quelle algèbre commutative unitaire à la place; et d'autre part, B est un A -module grâce à s . Ceci étant dit, on écrira ici $\Omega(B/A)$ pour désigner son module des différentielles de Kähler A -linéaire (et donc $\Omega(B) = \Omega(B/\mathbb{K})$).

Maintenant que l'on a calmé nos ardeurs, la suite conormale scindée associée dans ce cadre est

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A \otimes_B \Omega_A(B) \longrightarrow \Omega(A/A) \longrightarrow 0$$

Or, $\Omega(A/A) = 0$ ($d(1) = 0$ et d est A -linéaire) et on a la proposition suivante.

Lemme 1.15. Soit A et C deux algèbres commutatives unitaires. L'algèbre $A \otimes C$ est alors une A -algèbre et on a

$$\Omega(A \otimes C/A) \simeq A \otimes \Omega(C).$$

Démonstration. Dans un sens, on considère le morphisme f induit par la dérivation A -linéaire $A \otimes C \rightarrow A \otimes \Omega(C)$ obtenu par extension des scalaires de la dérivation universelle de C . Dans l'autre, on considère l'extension des scalaires g du morphisme induit par la dérivation

$$C \longrightarrow A \otimes C \xrightarrow{d} \Omega(A \otimes C/A).$$

On a alors

$$\begin{aligned} fg(a \otimes cdc') &= f((a \otimes c)d(1 \otimes c')) = a \otimes cdc' \\ gf((a \otimes c)d(a' \otimes c')) &= g(aa' \otimes cdc') = (aa' \otimes c)d(1 \otimes c) = (a \otimes c)d(a' \otimes c') \end{aligned}$$



Ainsi, en appliquant cela à $C := A$, on a

$$\begin{aligned} A \otimes_{A \otimes A} \Omega(A \otimes A/A) &= A \otimes_{A \otimes A} (A \otimes \Omega(A)) \\ &= A \otimes_{A \otimes A} (A \otimes A \otimes_A \Omega(A)) \\ &= (A \otimes_{A \otimes A} (A \otimes A)) \otimes_A \Omega(A) \\ &= A \otimes_A \Omega(A) \\ &= \Omega(A) \end{aligned}$$

Voici en deux diagrammes les liens explicites entre la suite conormale scindée et les morphismes exhibés dans la preuve de la proposition 1.13 :

$$\begin{array}{ccc} [b] \xrightarrow{\quad} 1 \otimes db & & [(a \otimes 1)(b - b_{(1)}b_{(2)} \otimes 1)] \xleftarrow{\quad} a \otimes db \\ \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \sim & & \uparrow \sim \\ I/I^2 \xrightarrow{D} A \otimes_B \Omega_A(B) & & I/I^2 \xleftarrow{\rho} A \otimes_B \Omega_A(B) \\ \searrow \quad \quad \quad \downarrow \sim & & \searrow \quad \quad \quad \uparrow \sim \\ & \Omega(A) & \Omega(A) \\ & \downarrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \downarrow da \\ & b_{(1)}db_{(2)} & [1 \otimes a - a \otimes 1] \end{array}$$

2 Différentielles de Kähler d'une \mathcal{P} -algèbre

Dorénavant, A est une algèbre sur une opérade \mathcal{P} et M est un A -module au sens vu à l'exposé précédent.

Définition 2.1. Une *dérivation* de A dans M est une application \mathbb{K} -linéaire $d : A \rightarrow M$ telle que pour tout $\mu \in \mathcal{P}$:

$$d(\mu_A(a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n \mu_M^i(a_1, \dots, d(a_i), \dots, a_n).$$

Si (B, π) est une \mathcal{P} -algèbre au-dessus de A , une dérivation au-dessus de A de B dans M est une dérivation

de B dans M^π i.e. pour tout $\mu \in \mathcal{P}$:

$$d(\mu_B(b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n \mu_M^i(\pi(b_1), \dots, d(b_i), \dots, \pi(b_n)).$$

Lorsque l'opérade est présentée par générateurs et relations, il suffit de vérifier la compatibilité entre la dérivation et les opérations génératrices pour qu'il y ait compatibilité avec toutes les opérations de l'opérade comme on l'a vérifié explicitement dans la proposition 1.3.

Définition 2.2. Le module des différentielles de Kähler d'une \mathcal{P} -algèbre A est un A -module $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ munie d'une dérivation $d : A \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A)$ induisant un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M) \xrightarrow[\sim]{d^*} \mathrm{Der}(A, M).$$

Proposition 2.3. Le module des différentielles de Kähler existe pour toute \mathcal{P} -algèbre A .

Démonstration. Comme précédemment, comme on souhaite construire le « A -module muni d'une dérivation » libre, on considère le A -module libre engendré par A

$$A \otimes^{\mathcal{P}} A = U_{\mathcal{P}}(A) \otimes A.$$

Puis, on note $d : A \rightarrow U_{\mathcal{P}}A \otimes A$ la counité (qui envoie a sur $1 \otimes a$) et on considère le quotient $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ de $U_{\mathcal{P}}(A) \otimes A$ par les relations de la forme

$$d(\mu_A(a_1, \dots, a_n)) - \sum_{i=1}^n \mu_{U_{\mathcal{P}}(A) \otimes A}^i(a_1, \dots, d(a_i), \dots, a_n).$$

de telle sorte qu'un morphisme partant de $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ correspond à une dérivation et réciproquement. ✿

Exemples 2.4.

- Si $A = \mathcal{P}(V)$ est libre, alors $\Omega_{\mathcal{P}}(A) = \mathcal{P}(V, V)$ muni de sa structure de A -module naturelle. En effet, $\mathcal{P}(V)$ admet une dérivation dans $\mathcal{P}(V, V)$

$$\begin{aligned} d : \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n} &\longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \left(\bigoplus_{i=1}^n V^{\otimes(i-1)} \otimes dV \otimes V^{\otimes(n-i)} \right) \\ (\mu; v_1, \dots, v_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n (\mu; v_1, \dots, dv_i, \dots, v_n) \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(V, V)$ muni de cette dérivation vérifie la propriété universelle attendue.

- Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}ss$, alors $\Omega_{\mathcal{P}}(A) = A_+ \otimes A$ qui est un A -bimodule avec les actions

$$\begin{aligned} a \cdot (\alpha \otimes \beta) &:= a\alpha \cdot \beta \\ (\alpha \otimes \beta) \cdot b &:= \alpha \otimes \beta b - \alpha\beta \otimes b. \end{aligned}$$

La dérivation universelle $d : A \rightarrow A_+ \otimes A$ est alors le morphisme envoyant a sur $1 \otimes a$.

- Si $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$, alors $\Omega_{\mathcal{P}}(\mathfrak{g}) = \overline{U}\mathfrak{g}$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre enveloppante sur lequel $U\mathfrak{g}$ agit à gauche par multiplication. La dérivation universelle $d : \mathfrak{g} \rightarrow \overline{U}\mathfrak{g}$ est alors le morphisme envoyant g sur g .

Si $\pi : B \rightarrow A$ est une \mathcal{P} -algèbre au-dessus de A , on a encore un morphisme naturel

$$d\pi : A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A)$$

envoyant $\mu^i(a_1, \dots, db, \dots, a_n)$ sur $\mu^i(a_1, \dots, d\pi(b), \dots, a_n)$. Si $\pi : B \rightarrow A$ est surjectif, alors $d\pi$ l'est aussi et comme précédemment, on peut décrire le noyau grâce à la suite conormale.

Théorème 2.5 (Suite conormale opéradique). Soit $\pi : B \rightarrow A$ un morphisme surjectif de \mathcal{P} -algèbres. Notons $I := \text{Ker}(\pi)$. On a une suite exacte de A -module

$$I/I^2 \longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow 0$$

où I^2 est l'idéal des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\mu_B(b_1, \dots, b_n)$ avec $b_i, b_j \in I$ pour $i \neq j$. De plus, si $\pi : B \rightarrow A$ admet une section $s : A \rightarrow B$, alors cette suite est scindée.

Démonstration. Tout fonctionne de la même manière que précédemment. La seule difficulté sera de généraliser la formule « $\varepsilon(bb') = b\varepsilon(b') + b'\varepsilon(b) - \varepsilon(b)\varepsilon(b')$ ».

Structure de A -module sur I/I^2 : Comme π est surjectif, on a $A = B/I$ et l'action des éléments de I sur I/I^2 est nulle par construction.

Construction de $D : I/I^2 \rightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$: On considère le morphisme

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \\ b &\longmapsto \text{id}^1(db) \end{aligned}$$

qui est nul sur I^2 car on a pour tout $b_1, \dots, b_n \in B$ avec $b_i, b_j \in I$ pour $i < j$:

$$\begin{aligned} \text{id}^1(d(\mu_B(b_1, \dots, b_n))) &= \sum_{k=1}^n \text{id}^1(\mu^k(b_1, \dots, db_k, \dots, b_n)) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu^k(\pi(b_1), \dots, db_k, \dots, \pi(b_n)) \\ &= \sum_{k < j} \mu^k(\pi(b_1), \dots, db_k, \dots, \cancel{\pi(b_j)}^0, \dots, \pi(b_n)) \\ &\quad + \sum_{k \geq j} \mu^k(\pi(b_1), \dots, \cancel{\pi(b_i)}^0, \dots, db_k, \dots, \pi(b_n)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et les deux premières étapes de ce calcul permet de voir que le morphisme induit $D : I/I^2 \rightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$ est A -linéaire.

Le morphisme $d\pi$ induit un isomorphisme $\text{coKer}(D) \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A)$: On a bien $d\pi \circ D = 0$ car $d\pi(\text{id}^1(db)) = d\pi(b) = 0$ si $b \in I$ et donc $d\pi$ induit un morphisme $\text{coKer}(D) \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A)$. Pour construire son inverse, on considère la morphisme

$$\Omega_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$$

induit par la dérivation

$$\delta : B \xrightarrow{d} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \longrightarrow \text{coKer}(D)$$

qui passe au quotient par I en une dérivation $\delta : A \rightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$ puisque pour tout $b \in I$, on a

$$\delta(b) = [\text{id}^1(db)] = [D([b])] = 0.$$

Si π admet une section s , alors D admet une rétraction ρ : On considère la dérivation

$$\begin{aligned} \varepsilon : B &\longrightarrow I/I^2 \\ b &\longmapsto [b - s\pi(b)]. \end{aligned}$$

C'est une dérivation car on a

$$\varepsilon(\mu_B(b_1, \dots, b_n)) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}} (-1)^{|\text{Supp}(\alpha)|+1} \mu_B(\varepsilon^{\alpha_1}(b_1), \dots, \varepsilon^{\alpha_n}(b_n)) \quad (1)$$

où $\varepsilon^0 = \text{id}_B$, $\varepsilon^1 = \varepsilon$ et $\text{Supp}(\alpha)$ est le support de α i.e. l'ensemble des indices i pour lesquels $\alpha_i \neq 0$. En effet, les termes survivant modulo I^2 sont alors ceux correspondant aux suites α de support réduit à un indice ce qui correspond au fait que ε est une dérivation. Le morphisme associé $\rho : A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$ est alors une rétraction de D .

Pour établir (1), on rassemble les termes du membre de droite qui sont de supports de même cardinal $j \in \{1, \dots, n\}$ et on développe par multilinéarité de μ_B pour obtenir

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \left(\sum_{l=0}^j (-1)^l \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq j} \mu_B(b_1, \dots, s\pi(b_{i_{k_1}}), \dots, s\pi(b_{i_{k_l}}), \dots, b_n) \right)$$

L'indice l correspond alors au nombre de b_i sur lesquels agissent $s\pi$ dans un terme. La somme des termes pour lesquels $l = 0$ est

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \mu_B(b_1, \dots, b_n) = \mu_B(b_1, \dots, b_n).$$

La somme des termes pour lesquels l est un entier strictement positif inférieur à n fixé est

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \sum_{j=l}^n (-1)^{j+1-l} \binom{n-l}{j-l} \mu_B(b_1, \dots, s\pi(b_{i_1}), \dots, s\pi(b_{i_l}), \dots, b_n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } l < n \\ -\mu_B(s\pi(b_1), \dots, s\pi(b_n)) & \text{si } l = n. \end{cases} \end{aligned}$$

et la somme finale est donc égale à $\mu_B(b_1, \dots, b_n) - s\pi(\mu_B(b_1, \dots, b_n)) = \varepsilon(\mu_B(b_1, \dots, b_n))$. ✿

Le foncteur $\text{Der}^A : (\text{Alg}(\mathcal{P})/A)^{\text{op}} \times \text{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \rightarrow \text{Vect}$ est aussi représentable à droite par l'extension triviale $A \ltimes M$ où M est un A -module. C'est la \mathcal{P} -algèbre dont la composition est donnée par

$$\mu_{A \ltimes M}((a_1, x_1), \dots, (a_n, x_n)) = \left(\mu_A(a_1, \dots, a_n), \sum_{i=1}^n \mu_M^i(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) \right)$$

et on observe qu'une dérivation $d : B \rightarrow M$ au-dessus de A correspond à la seconde composante d'un morphisme $B \rightarrow A \ltimes M$ de \mathcal{P} -algèbres au-dessus de A .

L'adjonction

$$A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(-) : \text{Alg}(\mathcal{P})/A \rightleftharpoons \text{Mod}_{\mathcal{P}}(A) : A \ltimes -$$

est encore une adjonction de Quillen (dans le cadre différentiel gradué) et c'est cela qui donne naissance à la cohomologie opéradique d'André-Quillen.

Motivation de la cohomologie d'André-Quillen par la suite de Jacobi-Zariski La suite conormale (opéradique) est en fait le début du calcul d'une suite exacte longue dans le cas où on se donne un morphisme surjectif d'algèbres $\pi : B \twoheadrightarrow A$.

On est passé vite sur la fonctorialité de $\text{Der}(-, M)$ mais c'est en fait cela qui motive initialement l'établissement de la cohomologie d'André-Quillen donc reprenons les choses. Comme vu à maintes reprises au long de nos démonstrations, la pré-composition d'une dérivation par un morphisme d'algèbres $\pi : B \rightarrow A$ est une dérivation et on obtient un morphisme

$$\pi^* : \text{Der}(A, M) \rightarrow \text{Der}(B, M^\pi)$$

Le noyau de ce morphisme correspond aux dérivation $d : A \rightarrow M$ qui s'annulent sur $\pi(B)$. Cela implique en particulier que ce sont des applications B -linéaires :

$$\begin{aligned} d(\mu_{A^\pi}^i(b_1, \dots, a, \dots, b_n)) &= d(\mu_A(\pi(b_1), \dots, a, \dots, \pi(b_n))) \\ &= \mu_M^i(\pi(b_1), \dots, da, \dots, \pi(b_n)) \\ &= \mu_{M^\pi}^i(b_1, \dots, da, \dots, b_n) \end{aligned}$$

On note alors $\text{Der}_B(A, M)$ le sous-module de ces dérivations de telle sorte que l'on ait une suite exacte appelée *suite de Jacobi-Zariski* :

$$0 \longrightarrow \text{Der}_B(A, M) \longrightarrow \text{Der}(A, M) \xrightarrow{\pi^*} \text{Der}(B, M^\pi)$$

(remarquez comme le premier terme est nul si π est surjectif). Le but de la cohomologie d'André-Quillen est de compléter cette suite avec des groupes de cohomologie. En pratique, on part de la suite de Jacobi-Zariski antédurale

$$A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \xrightarrow{d\pi} \Omega_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow \Omega(A/B) \longrightarrow 0$$

où $\Omega_{\mathcal{P}}(A/B)$ est le quotient de $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ par les relations de la forme $d\pi(b) = 0$ que l'on complète à gauche grâce à un complexe de la forme $A \otimes_{B_\bullet}^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B_\bullet)$ où B_\bullet est une résolution de A (c'est ici qu'on a besoin de catégories de modèles), puis on applique le foncteur $\text{Hom}_A(-, M)$ et on prends la cohomologie du résultat pour définir la cohomologie d'André-Quillen qui devrait alors donner lieu à la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \text{Der}_B(A, M) \longrightarrow \text{Der}(A, M) \xrightarrow{\pi^*} \text{Der}(B, M^\pi) \longrightarrow H^1(A/B, M) \longrightarrow H^1(A, M) \longrightarrow H^1(B, M) \longrightarrow \dots$$

Bibliographie

- [And74] Michel ANDRÉ. *Homologie des algebres commutatives*. T. 206. Springer, 1974.
- [Bec67] Jonathan Mock BECK. « Triples, algebras and cohomology ». Thèse de doct. Columbia University, 1967. URL : <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/2/tr2.pdf>.
- [Eis95] David EISENBUD. *Commutative algebra : with a view toward algebraic geometry*. T. 150. Springer Science & Business Media, 1995.
- [Fre09] Benoit FRESSE. *Modules over operads and functors*. T. 1967. Springer Science & Business Media, 2009.
- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE. *Algebraic operads*. T. 346. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Mil11] Joan MILLÈS. « André-Quillen cohomology of algebras over an operad ». In : *Advances in Mathematics* 226.6 (2011), p. 5120-5164. ISSN : 0001-8708. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811000065>.
- [Qui70] Daniel QUILLEN. « On the (co-) homology of commutative rings ». In : *Proc. Symp. Pure Math.* T. 17. 2. 1970, p. 65-87.