Géométrie hyperbolique et groupes Fuchsiens

Jules Givelet

Séminaire encadré par Frank Loray

7 Janvier 2025

Groupes de pavage

Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace topologique X.

Définition

Soit D un fermé régulier de X (*i.e* $D = \overline{D^\circ}$). On dit que D est un *domaine fondamental* pour l'action de G si $\{g(D) : g \in G\}$ pave X *i.e* :

- $X = \bigcup_{g \in G} g(D)$;
- $\forall g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}, g(D)^\circ \cap D^\circ = \emptyset$.

On dit alors que G est un *groupe de pavage* de X.

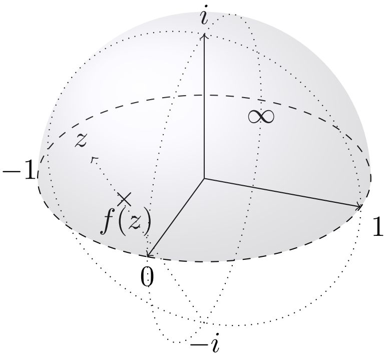
Objectif : Étudier les groupes de pavage du plan hyperbolique $\mathbb{H}$ en calculant l'aire des domaines fondamentaux.

Le plan hyperbolique

Le *demi-plan de Poincaré* est le demi-plan complexe supérieur $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ muni de la métrique Riemannienne

$$\omega_z(v, w) := \frac{v\overline{w}}{(\mathrm{Im}\, z)^2}.$$

Elle induit naturellement une distance d et une mesure μ.



Le difféomorphisme $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ fournit un autre modèle du plan hyperbolique : c'est le *disque de Poincaré*.

Les géodésiques du plan hyperbolique

Proposition

Les géodésiques de $\mathbb{H}$ sont les demi-cercles et demi-droites orthogonaux à $\mathbb{R}$.

Définition

Une *transformation de Möbius* et une homographie complexe $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$.

Le groupe des transformations de Möbius est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition

Les transformations de Möbius préservent ω et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit donc de manière isométrique et conforme sur $\mathbb{H}$. Son action sur les arcs de géodésiques orientés et de même longueur est simplement transitive.

Groupes Fuchsiens

Définition

Un *groupe Fuchsien* est un sous-groupe $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dont l'action sur $\mathbb{H}$ est proprement discontinue ($\forall K$ compact, $g(K) \cap K \neq \emptyset$ seulement pour un nombre fini de $g \in G$).

Une définition plus classique mais équivalente : un groupe Fuchsien est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Propriété

Si G est un groupe Fuchsien, alors, pour tout $z \in \mathbb{H}$, l'orbite $G \cdot z$ est fermée discrète dans $\mathbb{H}$.

Le domaine de Dirichlet

Les groupes Fuchsiens admettent des domaines fondamentaux :

- Prendre $p \in \mathbb{H}$ tel que le stabilisateur G_p soit trivial ;
- Poser $D_p(G) := \bigcap_{g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}} \{z \in \mathbb{H} \,|\, d(z,p) \leqslant d(z, g \cdot p)\}$.

Cette construction correspond au diagramme de Voronoï associé à $G \cdot p$.

Par construction, $D_p(G)$ est un polygone (sa frontière est une union d'arcs de géodésiques) convexe.

Groupes Fuchsiens cocompacts

Définition

Un groupe Fuchsien G est *cocompact* si $\mathbb{H}/G$ est compact, ou de manière équivalente, si $D_p(G)$ est compact.

Proposition

Si G est cocompact, alors $D_p(G)$ n'admet qu'un nombre fini de sommets, n'admet pas de sommet en l'infini et a un nombre pair de côtés $n = 2k$.

On suppose désormais que G agit librement sur $\mathbb{H}$ de telle sorte que $\mathbb{H}/G$ soit une surface de Riemann.
Si l'action n'est pas libre, $\mathbb{H}/G$ est une surface orbifolde et ce cas plus général est traité dans les notes.

Aire du domaine de Dirichlet

On note S l'ensemble des sommets de $D_p(G)$. Soit $s \in S$. Le *cycle de* s est l'ensemble $C(s)$ des sommets $s' \in S$ tels que $\exists g \in G, g(s') = s$. On a alors

$$S = \bigsqcup_{i=1}^{r} C(s_i)$$

où r est le nombre de cycles distincts.

Propriété

L'aire hyperbolique du domaine de Dirichlet $D_p(G)$ s'exprime en fonction du nombre de côtés n et du nombre de cycles r du domaine. On peut aussi l'exprimer en fonction du genre g de $\mathbb{H}/G$:

$$\mu(D_p(G)) = \pi(n-2) - 2\pi r = 2\pi(2g-2).$$

Aire du domaine de Dirichlet

Objectif : $\mu(D_p(G)) = \pi(n-2) - 2\pi r = 2\pi(2g-2)$.
Boîte à outils :

Formule de Gauss-Bonnet

L'aire hyperbolique d'un triangle d'angles α, β, γ est

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Formule d'Euler

Soit P un polygone sur une surface de Riemann de genre g. Si P a r sommets et k côtés, alors

$$1 - k + r = 2 - 2g.$$

Créer des surfaces en tous genres

Théorème de Poincaré

Pour tout $g \geqslant 2$, il existe un groupe Fuchsien G tel que $\mathbb{H}/G$ soit une surface de Riemann de genre g.