

# Groupes Fuchsien et théorème de Poincaré

Jules Givelet  
Séminaire encadré par Frank Loray

5 janvier 2025

## Résumé

Le principal objectif de ces notes de séminaire est la démonstration du théorème 3.14 dû à Poincaré sur les polygones hyperboliques fondamentaux. Ce théorème énonce en particulier que l'on peut réaliser toute surface de Riemann orientable comme quotient du plan hyperbolique par des groupes de pavage appelés *groupes Fuchsien*. Je tiens bien-sûr à remercier Frank Loray pour ses conseils mathématiques et son soutien lors de la préparation de ce séminaire.

## 1 Quelques bases de géométrie hyperbolique

### 1.1 Les différents modèles de la géométrie hyperbolique plane

**Définition 1.1.** Le *demi-plan de Poincaré* est l'ensemble  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  muni de la métrique Riemannienne

$$\omega_z(v, w) := \frac{\langle v, w \rangle}{(\text{Im } z)^2}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien sur  $T_z \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . La métrique hyperbolique  $ds$  est la norme associée à cette métrique Riemannienne :

$$ds_z(v) = \frac{|v|}{\text{Im } z}.$$

Cette nouvelle métrique sur  $\mathbb{H}$  permet de définir une nouvelle manière de mesurer les longueurs et donc les distances entre deux points.

**Définition 1.2.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  un chemin  $C^1$ . On définit alors la *longueur hyperbolique* de  $\gamma$  par la formule

$$L(\gamma) := \int_{[0,1]} \gamma^*(ds) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt$$

et on appelle *distance hyperbolique* la distance associée :

$$d(z_0, z_1) := \inf_{\gamma: z_0 \rightarrow z_1} L(\gamma).$$

La distance hyperbolique est bien une distance du fait que  $L(\gamma)$  est l'intégrale d'une fonction positive et  $L(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$  où  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  est la concaténation d'un chemin  $\gamma_1 : z_0 \rightarrow z_1$  et d'un autre  $\gamma_2 : z_1 \rightarrow z_2$ .

**Proposition 1.3.** Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , on a :

$$d(ia, ib) = \left| \ln \frac{a}{b} \right|.$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité, supposons que  $a > b$ . Soit  $\gamma$  un chemin dérivable dans  $\mathbb{H}$  tel que  $\gamma(0) = ia$  et  $\gamma(1) = ib$  et posons  $x := \operatorname{Re}(\gamma)$  et  $y := \operatorname{Im}(\gamma)$ . On a alors

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = [\ln(y(t))]_0^1 = \ln \frac{a}{b} = \left| \ln \frac{a}{b} \right|.$$

ce qui prouve que  $d(ia, ib) \geq \left| \ln \frac{a}{b} \right|$ . Pour l'inégalité inverse, considérons le chemin  $\gamma_0 : t \mapsto tia + (1-t)ib$  allant de  $ib$  à  $ia$ . On a alors

$$d(ia, ib) \leq L(\gamma_0) = \int_0^1 \frac{a-b}{t(a-b)+b} dt = [\ln(t(a-b)+b)]_0^1 = \ln \frac{a}{b} = \left| \ln \frac{a}{b} \right|.$$

□

Le calcul de distances hyperboliques peut paraître difficile à priori mais le calcul précédent est essentiellement le seul dont on aura besoin pour la suite. Néanmoins, voici une formule explicite pour la lectrice intéressée :

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

La métrique hyperbolique induit aussi une mesure sur  $\mathbb{H}$ .

**Définition 1.4.** On appelle *aire hyperbolique* la mesure  $\mu$  associée à la métrique Riemannienne  $\omega$ . De manière explicite, on a pour toute partie  $A \subset \mathbb{H}$

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{y^2} dx dy$$

dès que cette intégrale est définie.

Le calcul d'aire occupera une place importante dans le théorème de Poincaré. Le plus important de ces calculs pour nous est celui de l'aire d'un triangle hyperbolique donnée par la formule de Gauss-Bonnet cf. proposition 3.3.

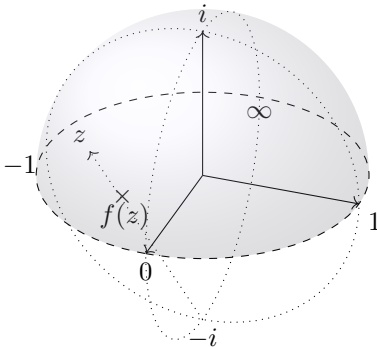
Bien que le demi-plan de Poincaré décrit entièrement la géométrie hyperbolique plane, ce n'est pas le seul cadre de travail possible. Un autre modèle est le disque de Poincaré qui a comme avantage, entre autres, d'être compact.

**Définition 1.5.** Le *disque de Poincaré* est le disque unité  $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  muni de la métrique Riemannienne

$$\omega_z(v, w) = \frac{4\langle v, w \rangle}{(1 - |z|^2)^2}.$$

La métrique hyperbolique associée est

$$ds_z(v) = \frac{2|v|}{1 - |z|^2}.$$



Le lien entre ces deux modèles est donné par la fonction  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{U}$  définie par

$$f(z) = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

On peut vérifier que les métriques Riemanniennes coïncident i.e  $f^*\omega_{\mathcal{U}} = \omega_{\mathbb{H}}$ . Ainsi, on peut redéfinir la distance hyperbolique dans  $\mathcal{U}$ . Un calcul similaire à la proposition 1.3 permet de montrer que pour tout  $z \in \mathcal{U}$ , on a  $d(0, z) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} = 2 \operatorname{arctanh} |z|$  qui est une fonction croissante en fonction du module de  $z$ . Cela prouve que les disques hyperboliques centrés en 0 sont des disques euclidiens.

## 1.2 Les isométries conformes du plan hyperbolique

Dans la section précédente, on a considéré une homographie complexe pour passer du demi-plan au disque de Poincaré. En faisant de l'analyse complexe, on observe que ce genre de transformation agit sur les « cercles projectifs » *i.e* les ensembles définis par une équation en la variable  $z$  de la forme

$$az\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{z} + b = 0$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{C}$  (c'est l'équation d'un cercle si  $a \neq 0$  et d'une droite si  $a = 0$ ). Par la suite, nous ne considérerons que ce genre de transformations.

**Définition 1.6.** On appelle *transformation de Möbius* toute fonction de la forme  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $ad - bc \geq 0$ .

L'ensemble de telles transformations est un groupe isomorphe à  $\text{PGL}_2^+(\mathbb{R}) = \text{GL}_2^+(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$  en associant, à toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de déterminant positif, la transformation  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . En divisant les coefficients  $a, b, c, d$  par la racine carrée de  $ad - bc \geq 0$ , on trouve que ce groupe est aussi isomorphe à  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.7.** Soit  $l > 0$ . Le groupe  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  agit transitivement sur l'ensemble

$$\{(w_1, w_2) \in \mathbb{H}^2 \mid d(w_1, w_2) = l\}.$$

En particulier,  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  agit isométriquement sur  $\mathbb{H}$ .

*Démonstration.* Fixons une transformation de Möbius  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . Premièrement, vérifions qu'une telle transformation stabilise  $\mathbb{H}$ . Pour cela, on observe que pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , on a

$$\text{Im } f(z) = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2} > 0$$

(le complexe  $cz + d$  est non-nul car  $z \neq -\frac{d}{c}$ ). Ensuite, pour vérifier que l'action est isométrique, il suffit de montrer que  $f^*ds = ds$ . Soit  $z \in \mathbb{H}$  et  $v \in \mathbb{C}$  un vecteur tangent à  $z$ . Comme  $f$  est holomorphe en  $z$ , sa différentielle est donnée par la multiplication par  $f'(z)$ . Or, on a  $f'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$  et donc, en tenant compte du calcul précédent, on a

$$f^*ds_z(v) = ds_{f(z)}(f'(z)v) = \frac{|f'(z)v|}{\text{Im } f(z)} = \frac{|v|}{\text{Im } z} = ds_z(v).$$

En particulier, cela prouve que  $f$  préserve les angles en exprimant la métrique Riemannienne  $\omega$  sous forme polaire et donc l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}$  est en fait conforme (l'orientation de  $\mathbb{H}$  est donnée par celle de  $\mathbb{C}$  et est conservée par  $f$  car c'est une fonction holomorphe).

On vient de prouver que  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  agit sur les couples de points à distance  $l$ . Il ne reste que la transitivité de cette action à prouver. Soit  $w_1, w_2 \in \mathbb{H}$  tels que  $d(w_1, w_2) = l$ . Montrons qu'il existe une transformation de Möbius  $g$  telle que  $g(w_1) = i$  et  $g(w_2) = e^l i$ . Si  $w_1$  et  $w_2$  sont sur une même droite verticale intersectant  $\mathbb{R}$  en  $\alpha$ , alors on pose  $g_1(z) := z - \alpha$ . Si ce n'est pas le cas, alors  $w_1$  et  $w_2$  se situent sur un unique demi-cercle  $\mathcal{C}$  dont le centre est sur l'axe  $\mathbb{R}$  et qui intersecte ce même axe en  $\{\alpha, \beta\}$ . Supposons, sans perte de généralité, que  $\alpha < \beta$ . On pose alors  $g_1(z) := \frac{z-\beta}{z-\alpha}$ . Comme les transformations de Möbius préservent les cercles projectifs ainsi que les angles (elles sont holomorphes),  $g_1$  envoie  $\mathcal{C}$  sur un demi-cercle projectif intersectant orthogonalement  $\mathbb{R}$  passant par  $g_1(\alpha) = \infty$  et  $g_1(\beta) = 0$  *i.e* vers la demi-droite  $i\mathbb{R}_+$ . Ainsi, dans tous les cas, on peut supposer que  $w_1$  et  $w_2$  sont des imaginaires purs.

En appliquant la transformation de Möbius  $z \mapsto \frac{z}{\text{Im } w_1}$ , on peut supposer que  $w_1 = i$ . Or, les imaginaires purs à distance hyperbolique  $l$  de  $i$  sont  $e^{\pm l}i$  d'après la proposition 1.3. Si  $w_2 = e^{-l}i$ , alors on applique  $z \mapsto \frac{-1}{z}$  qui l'envoie sur  $e^l i$ . Toutes les transformations utilisées étant des transformations de Möbius, on a fini.  $\square$

**Corollaire 1.8.** *Les géodésiques de  $\mathbb{H}$  sont les demi-droites verticales et les demi-cercles orthogonaux à l'axe des réels i.e les demi-cercles projectifs orthogonaux à  $\mathbb{R}$ . En particulier, pour tout couple de points distincts  $(z, w) \in \mathbb{H}^2$  il existe une unique géodésique passant par ces deux points.*

*Démonstration.* On a vu dans la preuve de la proposition 1.3 que le plus court chemin entre deux imaginaires purs était le segment euclidien qui les rejoint. Pour deux points quelconques distincts  $z, w$  à distance  $l > 0$ , on sait qu'il existe, d'après la question précédente, une transformation de Möbius envoyant ces points vers des imaginaires purs  $ia$  et  $ib$ . Ainsi, comme cette action est isométrique, le plus court chemin entre ces deux points est l'image du segment  $[ia, ib]$  par cette transformation. Or, une transformation de Möbius envoie la demi droite  $i\mathbb{R}^+$  sur un demi-cercle projectif orthogonal à l'axe des réels et donc le plus court chemin entre  $z$  et  $w$  est un arc d'un tel demi-cercle.  $\square$

On vient de prouver que les transformation de Möbius étaient des isométries conformes. Il se trouve (cf. [Kat92] Theorem 1.3.1) que ce sont en fait toutes les isométries conformes de  $\mathbb{H}$  mais nous ne le détaillerons pas.

De plus, comme les transformations de Möbius préservent la métrique Riemannienne de  $\mathbb{H}$ , elles préservent la forme volume définissant l'aire hyperbolique  $\mu$  et donc pour toute partie  $A \in \mathbb{H}$  mesurable pour  $\mu$  et pour toute transformation de Möbius  $f$ , on a  $\mu(f(A)) = A$ .

## 2 Groupes Fuchsien

### 2.1 Action proprement discontinue

Une manière de paver le plan hyperbolique est de faire agir un groupe proprement discontinu sur  $\mathbb{H}$ .

**Définition 2.1.** Soit  $G$  un groupe agissant par homéomorphisme sur un espace topologique localement compact  $X$ . On dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est proprement discontinue si pour tout compact  $K \subset X$ , l'ensemble

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini.

L'espace  $\mathbb{H}$  est localement compact car les disques hyperboliques sont en fait des disques euclidiens. En effet, d'après le paragraphe suivant la définition 1.5, les disques hyperboliques de  $\mathcal{U}$  centrés en 0 sont des disques euclidiens. Or, la transformation  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{U}$  est une homographie complexes donc l'image réciproque de ces disques euclidiens sont encore des disques euclidiens. Enfin, tout disque hyperbolique est l'image par une transformation de Möbius d'un disque hyperbolique centré en  $i$  donc d'un disque euclidien. On vient de montrer au passage que la distance euclidienne et la distance hyperbolique sont topologiquement équivalente.

**Définition 2.2.** Un *groupe Fuchsien* est un sous-groupe de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  dont l'action induite sur  $\mathbb{H}$  est proprement discontinue.

**Proposition 2.3.** Si  $G$  agit de manière proprement discontinue sur  $X$ , alors pour tout  $x \in X$ , la  $G$ -orbite de  $x$ , notée  $G \cdot x$ , est discrète et fermée.

*Démonstration.* Une partie de  $\mathbb{H}$  est discrète et fermée si et seulement si cette partie n'admet pas de points d'accumulation dans  $\mathbb{H}$  car  $\mathbb{H}$  est métrique. Ainsi, supposons qu'une suite  $(g_i(x))_i$  d'éléments de  $G \cdot x$  converge vers  $y \in \mathbb{H}$  et montrons que cette suite est stationnaire. Soit  $K$  un voisinage compact de  $y$ . Comme  $(g_i(x))_i$  tend vers  $y$ , il existe un rang  $i_0$  à partir duquel tous les  $g_i(x)$  sont dans  $K$ . On a alors pour tout  $i \geq i_0$

$$g_i(x) \in g_i g_{i_0}^{-1} K \cap K \neq \emptyset.$$

Ainsi, par propre discontinuité de l'action de  $G$ , l'ensemble  $\{g_i : i \geq i_0\}$  est fini et donc la suite  $(g_i(x))_x$  varie entre un nombre fini de valeurs à partir de  $i_0$ . Comme elle est convergente, elle est nécessairement stationnaire.  $\square$

D'habitude, on définit un groupe Fuchsien comme un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  où on munit  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  de la topologie induite par  $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$  qui est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension fini et on munit  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  de la topologie quotient. La raison est que ces deux notions sont équivalentes (cf. [Kat92] Theorem 2.2.6) mais nous ne démontrerons qu'un seul sens de cette équivalence.

**Proposition 2.4.** *Si  $G$  est un groupe Fuchsien, alors  $G$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Comme  $G$  est un groupe métrique. Il suffit de montrer que  $\mathrm{id} \in G$  n'est pas un point d'accumulation de  $G$  pour en conclure que  $G$  est discret. Supposons donc qu'une suite  $(g_n)_n \in G^{\mathbb{N}}$  converge vers  $\mathrm{id}$  et montrons qu'elle est stationnaire. Dès lors, pour tout  $x \in \mathbb{H}$ , la suite  $(g_n(x))_n$  converge vers  $x$ . Or, l'orbite de  $x$  étant discrète d'après la proposition précédente, la suite  $g_n(x)$  est stationnaire. Donc, à partir d'un certain rang  $n_0$ , on a  $g_n(x) = x$  i.e pour tout  $n \geq n_0$ , les  $g_n$  sont dans le stabilisateur de  $x$  noté  $G_x$ . Or, les stabilisateurs sont finis car l'action est proprement discontinue (considérer le compact  $K = \{x\}$ ) donc la suite  $g_n$  converge en prenant un nombre fini de valeurs à partir de  $n_0$ . On en conclut alors que  $(g_n)$  est stationnaire du fait que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  est séparé.  $\square$

**Exemples 2.5.** Un exemple important de groupe Fuchsien est le groupe modulaire  $\Gamma := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  dont le caractère discret est apparent. On peut aussi citer les sous-groupes du groupe modulaire comme les sous-groupes de congruence  $\Gamma(n) := \mathrm{Ker}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ .

Si  $G$  est un groupe Fuchsien, le quotient  $\mathbb{H}/G$  acquiert une structure naturelle d'orbifold i.e d'une surface de Riemann avec des points marqués correspondant aux points fixés par des éléments de  $G$ . Le théorème de Poincaré énonce en particulier que l'on peut construire des groupes Fuchiens de telle sorte que  $\mathbb{H}/G$  soit une surface compacte connexe du genre que l'on souhaite.

## 2.2 Classification des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

On vient de voir que l'étude des points fixes des transformations de Möbius était importante pour étudier le quotient de  $\mathbb{H}$  par un groupe Fuchsien.

**Proposition 2.6.** *Une transformation de Möbius  $f$  qui n'est pas l'identité a ou bien :*

- *un unique point fixe dans  $\mathbb{H}$  et on dit que  $f$  est elliptique ;*
- *un unique point fixe sur la ligne d'horizon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et on dit que  $f$  est parabolique ;*
- *deux points fixes sur la ligne d'horizon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  et on dit que  $f$  est hyperbolique.*

*Démonstration.* Comme les homographies agissent strictement 3-transitivement sur la sphère de Riemann,  $f$  ne peut pas avoir plus de trois points fixes. On a donc  $|\mathrm{Fix}(f)| \leq 2$  où  $\mathrm{Fix}(f)$  est l'ensemble des points fixes dans  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Or, d'après le théorème du point fixe de Brouwer, une application continue de la demi-sphère de Riemann vers elle-même admet au moins un point fixe. Ainsi,  $|\mathrm{Fix}(f)| \in \{1, 2\}$ . Si  $f$  admet un point fixe  $z$  dans  $\mathbb{H}$ , alors, comme  $f$  est une homographie à coefficients réels, on a  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \bar{z}$ . Ainsi,  $f$  admet  $\bar{z}$  comme autre point fixe. De plus, cela montre que si  $f$  admet un point fixe sur la ligne d'horizon, le potentiel second est automatiquement sur la ligne d'horizon aussi.  $\square$

Avec des calculs élémentaires, on voit que le stabilisateur de  $i$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  est  $\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$ , que les transformations de Möbius fixant uniquement  $\infty$  est l'ensemble des translations  $z \mapsto z + t$  avec  $t \neq 0$  et que l'ensemble des transformations fixant  $\infty$  et  $0$  est l'ensemble des homothéties  $z \mapsto \lambda^2 z$  avec  $\lambda \neq 0, 1$ .

Ainsi, en tenant en compte que  $\text{Fix}(hgh^{-1}) = h \text{Fix}(g)$  et du fait que l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}$  est transitive et que son action sur  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  est 2-transitive (on l'a vu dans la preuve de la proposition 1.7 où on a envoyé un couple  $(\alpha, \beta)$  sur  $(\infty, 0)$ ), on trouve qu'une transformation elliptique/parabolique/hyperbolique est conjuguée à un élément de  $\text{PSO}_2(\mathbb{R})$ /une translation/une homothétie.

On peut donc résumer les différents types de transformations de Möbius non triviales dans le tableau suivant.

Type	Elliptique	Parabolique	Hyperbolique
Points fixes dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$	1 dans $\mathbb{H}$	1 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$	2 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$
Conjugué dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $M$	$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$
Trace	$ \text{tr}(M)  < 2$	$ \text{tr}(M)  = 2$	$ \text{tr}(M)  > 2$

**Proposition 2.7.** *Les groupes Fuchsien stabilisant un même point de  $\mathbb{H}$  sont cycliques.*

*Démonstration.* D'après notre classification, un tel groupe est conjugué à un sous-groupe discret de  $\text{PSO}_2(\mathbb{R})$ , donc à un sous-groupe discret du cercle et on sait qu'un tel groupe est cyclique.  $\square$

### 3 Domaine de Dirichlet et théorème de Poincaré

#### 3.1 Domaine fondamental et calculs d'aires

**Définition 3.1.** Soit  $G$  un groupe agissant par homéomorphisme sur un espace topologique  $X$ . Une partie  $F \subset X$  est un *domaine fondamental* si  $F = \overline{F}^\circ$  et si  $\{g(F) : g \in G\}$  pave le plan i.e  $X = \bigcup_{g \in G} g(F)$  et pour tout  $g \in G \setminus \{\text{id}\}$ , on a  $F^\circ \cap g(F^\circ) = \emptyset$ .

**Proposition 3.2.** *Soit  $G$  un groupe Fuchsien. Soit  $F_1$  et  $F_2$  deux domaines fondamentaux de  $G$ . Supposons que  $\mu(F_1) < \infty$  et  $\mu(\partial F_1) = \mu(\partial F_2) = 0$ . Alors,  $\mu(F_2) = \mu(F_1)$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse on a  $\mu(F_i^\circ) = \mu(F_i)$ . On a  $F_1 \supset \bigsqcup_{g \in G} F_1 \cap g(F_2^\circ)$  et donc, comme  $\mu$  est invariante sous l'action de  $G$ , on a

$$\mu(F_1) \geq \sum_{g \in G} \mu(F_1 \cap g(F_2^\circ)) = \sum_{g \in G} \mu(g(F_1) \cap F_2^\circ) \geq \mu\left(\bigcup_{g \in G} g(F_1) \cap F_2^\circ\right) = \mu(F_2^\circ) = \mu(F_2).$$

Les ensembles  $F_1$  et  $F_2$  jouant des rôles symétriques, on a l'égalité recherchée.  $\square$

On verra à la proposition 3.7 qu'un groupe Fuchsien admet automatiquement des domaines fondamentaux. L'aire d'un tel domaine est alors un invariant numérique de ce groupe d'après la proposition précédente. Cette invariant est au cœur du théorème de Poincaré et nous devons donc apprendre à calculer l'aire de certaines figures hyperboliques.

**Proposition 3.3** (Formule de Gauss-Bonnet). *Soit  $\Delta$  un triangle hyperbolique avec des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Alors,*

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Démonstration.* Nous ne détaillerons pas cette démonstration. On peut faire le calcul explicitement ce qui est laborieux ou faire comme dans [Kat92] (Theorem 1.4.2) en considérant des triangles hyperboliques de  $\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . On pourrait en fait prendre la formule de Gauss-Bonnet comme définition de l'aire hyperbolique

des triangles (les transformations de Möbius préservent bien cette formule car préservent les angles) puis l'étendre aux polygones par triangulation (ce qui est suffisant dans le cadre de ces notes) comme dans la proposition suivante.  $\square$

**Corollaire 3.4.** *Soit  $P$  un polygone hyperbolique convexe (i.e contient la portion de géodésique entre n'importe quel couple de points du polygone) à  $n$  côtés avec des angles  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Alors,*

$$\mu(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

*Démonstration.* Comme  $P$  est convexe, on peut le trianguler en considérant n'importe quel point  $z_0$  à l'intérieur de  $P$  et dessinant les géodésiques partant de ce point et passant vers les sommets de  $P$ . On a alors décomposé  $P$  en  $n$  triangles que l'on note  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  de manière à ce que  $\Delta_i$  passe par les sommets d'angles  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$ . Notons les angles de  $\Delta_i$  par  $\beta_i, \beta'_i, \gamma_i$  de telle sorte que l'angle  $\gamma_i$  soit au sommet  $z_0$  et que  $\beta_i$  soit au sommet partagé par  $T_i$  et  $T_{i-1 \bmod n}$  (dans tout ce qui suit,  $i$  varie toujours modulo  $n$ ). On a alors, par construction,  $\beta'_{i-1} + \beta_i = \alpha_i$  et  $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 2\pi$ . Ainsi, en appliquant la formule de Gauss-Bonnet, on obtient

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n (\pi - (\gamma_i + \beta_i + \beta'_i)) = n\pi - \left( 2\pi + \sum_{i=1}^n \beta_i + \beta'_{i-1} \right) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad \square$$

Cette formule va nous être utile car les groupes Fuchsien admettent des domaines fondamentaux qui sont des polygones convexes : les domaines de Dirichlet.

**Définition 3.5.** Soit  $G$  un groupe Fuchsien et soit  $p \in \mathbb{H}$  un point qui n'est fixé par aucun élément non trivial de  $G$ . Le *domaine de Dirichlet de  $G$  centré en  $p$*  est l'ensemble

$$D_p(G) := \{z \in \mathbb{H} \mid \forall g \in G \setminus \{\text{id}\}, d(z, p) \leq d(z, g(p))\} = \bigcap_{g \in G \setminus \{\text{id}\}} \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) \leq d(z, g(p))\}.$$

**Remarque 3.6.** On peut prouver l'existence d'un point  $p$  qui n'est fixé par aucun élément de  $G$  en disant que  $G$  est dénombrable (c'est un sous-groupe discret d'un espace métrique et donc à base dénombrable d'ouverts). En effet, comme l'ensemble des points fixes dans  $\mathbb{H}$  d'un élément de  $G$  est fini, l'ensemble des points de  $\mathbb{H}$  fixés par au moins un élément de  $G$  est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Comme  $\mathbb{H}$  est indénombrable, on peut prendre  $p$  qui n'est fixé par aucun élément de  $G$ .

Comme l'orbite de  $p$  est discrète et fermée dans  $\mathbb{H}$  (cf. proposition 2.3),  $D_p(G)$  est un voisinage de  $p$ . Par construction, il est convexe et fermé.

De plus, comme dans le cas euclidien, la médiatrice entre deux points de  $\mathbb{H}$  est la géodésique passant par le milieu hyperbolique (point de la géodésique entre ces deux points à équidistance de ceux-ci) perpendiculaire au segment hyperbolique entre ces deux points. Ainsi, le domaine de Dirichlet est un polygone convexe (sa frontière est composée de médiatrices, donc de géodésiques) avec éventuellement une infinité de sommets qui peuvent s'accumuler en un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

**Proposition 3.7.** *Le domaine de Dirichlet  $D_p(G)$  est un domaine fondamental localement fini (i.e tout compact de  $\mathbb{H}$  n'intersecte qu'un nombre fini de pavés) de  $G$  qui est un polygone convexe.*

*Démonstration.* Il ne reste plus qu'à montrer que  $\{g(D_p(G)) : g \in G\}$  pave le plan hyperbolique et est localement fini. Soit  $z \in \mathbb{H}$ . Comme  $G \cdot p$  est fermée discrète, il existe  $g \in G$  réalisant l'infimum  $\inf_{h \in G} d(z, h(p)) = d(z, g(p))$  et donc  $z \in D_{g(p)}(G) = g(D_p(G))$ . Maintenant, si  $g \in G \setminus \{\text{id}\}$  et si  $z \in D_p(G)^\circ$ , alors  $d(z, p) < d(g(z), p)$  par construction du domaine de Dirichlet. Ainsi,  $g(z) \notin D_p(G)$  et donc  $g(D_p(G)^\circ) \cap D_p(G) = \emptyset$ .



Montrons maintenant que le domaine de Dirichlet est localement fini. Soit  $K \subset \mathbb{H}$  une partie compacte. En particulier elle est bornée pour la distance euclidienne (les topologies sont équivalentes) et donc bornée pour la distance hyperbolique (on peut inclure le compact dans une boule euclidienne qui s'avère être alors une boule hyperbolique). Ainsi,  $r := \sup_{w \in K} d(w, p)$  est fini. Or, si on suppose que  $g \in G$  vérifie  $K \cap g(D_p(G)) \neq \emptyset$  et qu'on note un élément de cet ensemble  $w = g(z)$  avec  $z \in D_p(G)$  et  $w \in K$ , alors on aura  $d(p, g(p)) \leq d(p, w) + d(g(z), g(p)) \leq 2d(p, w) \leq 2r$ . Ainsi, si on pose  $K'$  la boule hyperbolique fermée centrée en  $p$  et de rayon  $2r$ , alors

$$K \cap g(D_p(G)) \neq \emptyset \Rightarrow g(p) \in K' \cap g(K') \neq \emptyset.$$

Donc, comme l'action de  $G$  est proprement discontinue, seul un nombre fini de  $g \in G$  peut vérifier  $K \cap g(D_p(G)) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Remarque 3.8.** Le domaine de Dirichlet n'est pas une construction exclusive à la géométrie hyperbolique. Par exemple, dans le cadre euclidien, le pavage de Dirichlet s'appelle un diagramme de Voronoï.

### 3.2 Signature d'un groupe Fuchsien cocompact

**Définition 3.9.** On dit qu'un groupe  $G$  agissant sur un espace topologique  $X$  est cocompact si le quotient  $X/G$  est compact.

On peut démontrer ([Kat92] Corollary 4.2.3) qu'un groupe Fuchsien est cocompact si et seulement si ses domaines de Dirichlet sont compacts et dans ce cas le domaine de Dirichlet n'admet aucun sommet en l'infini. De plus, comme le domaine de Dirichlet est localement fini, il n'admet qu'un nombre fini de sommets s'il est compact et est donc un polygone convexe avec un nombre fini de côtés.

Notons  $S_0(D_p(G))$  l'ensemble des sommets de  $D_p(G)$  (les intersections de géodésiques au bord du domaine). Du fait que  $G$  agit isométriquement sur  $\mathbb{H}$ , il préserve les points extrémaux du domaine de Dirichlet et agit donc sur  $S_0(G)$ .

On appellera *sommet plat* un point de  $\partial D_p(G)$  dont le stabilisateur dans  $G$  est cyclique d'ordre 2. Un tel point ne peut être un sommet du domaine au sens classique et la rotation fixant ce point retourne le côté du domaine le contenant. L'angle en un sommet plat de  $D_p(G)$  est alors  $2\pi$  et on note  $S(D_p(G))$  l'ensemble des sommets au sens classique auquel on rajoute l'ensemble des sommets plats (les portions de géodésiques que sépare un sommet plat sont donc considérées comme deux côtés distincts). Le groupe  $G$  continue d'agir sur  $S(D_p(G))$  car  $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$ . Cette formule a aussi pour conséquence que si un sommet du domaine est fixé par une transformation elliptique, alors tous les points de sa classe dans  $S(D_p(G))/G$  est fixé par des éléments elliptiques aussi et que les stabilisateurs des ces points sont tous cycliques de même cardinal.

**Définition 3.10.** On appelle les éléments de  $S(D_p(G))/G$  des *cycles* de  $D_p(G)$ . On dit que le cycle associé à un sommet  $x \in S(D_p(G))$  est un *cycle elliptique* si  $G_x$  est non triviale i.e  $x$  est fixé par une transformation elliptique. On appelle *période* du cycle de  $x$  elliptique le cardinal de  $G_x$ .

Grâce à la discussion précédente, on observe que l'ensemble des cycles de  $D_p(G)$  est en bijection avec les classes de conjugaison des sous-groupe cycliques maximaux de  $G$ ; les cycles elliptiques correspondant alors aux classes non triviales. Ainsi, les périodes sont des invariants numériques du groupe  $G$ .

**Définition 3.11.** On appelle *signature* d'un groupe Fuchsien cocompact  $G$  le uplet d'entiers  $(g; m_1, \dots, m_r)$  où  $g$  est le genre de  $\mathbb{H}/G$  et  $m_1, \dots, m_r$  sont les périodes de  $G$ .

**Proposition 3.12.** Soit  $\{s_1, \dots, s_t\}$  un cycle de  $D_p(G)$  de période  $m$ . Notons  $\theta_i$  l'angle au sommet  $s_i$ . On a alors,  $\theta_1 + \dots + \theta_t = \frac{2\pi}{m}$ .



*Démonstration.* Écrivons  $G_{s_1} = \{\text{id}, g, \dots, g^{m-1}\}$  et considérons  $g_k \in G$  de telle sorte que  $g_k(s_k) = s_1$ . L'ensemble des transformations envoyant  $s_k$  sur  $s_1$  et alors  $G_{s_1}g_k$  qui possède  $m$  éléments. L'angle de  $g^i(D_p(G))$  en  $s_1$  est  $\theta_1$  tandis que l'angle de  $g^i g_k(D_p(G))$  est  $\theta_k$ . On a alors  $mt$  pavés autour de  $s_1$  dont la somme des angles fait  $m(\theta_1 + \dots + \theta_t)$ . Il ne reste plus qu'à prouver que tous les pavés entourant  $s_1$  sont de la forme  $g^i g_k(D_p(G))$  ou  $g^i(D_p(G))$  pour obtenir l'égalité recherchée. Mais un pavé autour de  $s_1$  est nécessairement de la forme  $h(D_p(G))$  et  $h^{-1}(s_1)$  appartient alors au cycle de  $s_1$ . Donc,  $h$  envoie un sommet  $s_k$  sur  $s_1$  (ou fixe  $s_1$ ) et est donc dans  $G_{s_1}g_k$  (ou dans  $G_{s_1}$ ).  $\square$

### 3.3 Le théorème de Poincaré

On peut maintenant calculer l'aire d'un domaine de Dirichlet d'un groupe Fuchsien cocompact. En effet, d'après la proposition précédente, la somme des angles des sommets elliptiques d'un tel groupe de signature  $(g; m_1, \dots, m_r)$  est  $2\pi(\frac{1}{m_1} + \dots + \frac{1}{m_r})$ . S'il existe  $r'$  cycles non elliptiques, alors la somme des angles du domaine de Dirichlet est (toujours grâce à la proposition précédente)

$$2\pi \left( r' + \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \right).$$

Il ne reste plus qu'à compter le nombre de côtés du domaine. Pour cela, il faut d'abord remarquer que ce nombre est forcément pair. En effet, un élément de  $G$  envoie un côté du domaine sur un côté distinct (car on a justement découpé les côtés qui étaient envoyés sur eux-même avec les sommets plats). De plus, comme l'action de  $G$  sur les pavés est libre, un côté ne peut être envoyé que sur un seul autre côté par des transformations de  $G$ . Donc, le domaine de Dirichlet admet  $2n$  côtés et induit, après identification, un polygone à  $n$  côtés dans  $\mathbb{H}/G$ . Ce nombre de cotés se calcul alors grâce à la formule d'Euler.

**Proposition 3.13** (Formule d'Euler). *Soit  $M$  une surface de Riemann de genre  $g$ . Soit  $\mathcal{G}$  un graphe planaire sur  $M$ . Si on note  $s$  le nombre de sommets,  $n$  le nombre de côtés et  $f$  le nombre de faces de  $\mathcal{G}$ , on a  $s - n + f = 2 - 2g$ .*

Le polygone à  $n$  côtés de  $\mathbb{H}/G$  est un graphe planaire à une face,  $n$  côtés et  $r + r'$  sommets. Donc, on obtient

$$n = 2g - 1 + r + r'.$$

En mettant tout ça dans la formule 3.4 (les sommets plats ne posent pas de problème car ils rajoutent 1 côté et un angles valant  $\pi$ ), on obtient finalement

$$\mu(\mathbb{H}/G) := \mu(D_p(G)) = (2g - 1 + r + r' - 1)2\pi - 2\pi \left( r' + \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \right) = 2\pi \left( 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) \right).$$

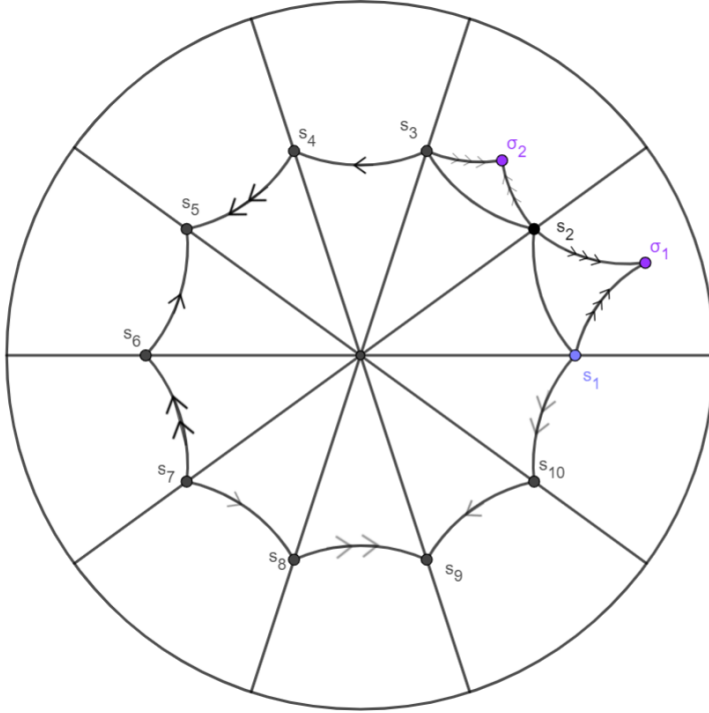
**Théorème 3.14** (Théorème de Poincaré). *Soit  $g \in \mathbb{N}$  et  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Si*

$$A(g, m_1, \dots, m_r) := 2\pi \left( 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) \right) > 0,$$

*alors il existe un groupe Fuchsien cocompact  $G$  de signature  $(g; m_1, \dots, m_r)$ .*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de construire un polygone qui serait un domaine de Dirichlet pour un groupe Fuchsien de signature  $(g; m_1, \dots, m_r)$  en montrant qu'un tel polygone pave le plan. Il est plus simple de faire cette construction dans le disque de Poincaré  $\mathcal{U}$  (on invite la lectrice à suivre la construction en regardant le dessin de la construction pour  $g = 2$  et  $r = 2$  sur la prochaine page). D'après les calculs précédents, il faut construire un polygone à  $4g + 2r + 2(r' - 1)$  côtés où  $r'$  correspondrait au nombre de cycles non elliptiques. Nous pouvons faire en sorte que  $r' = 1$  si les  $r$  cycles elliptiques sont de taille 1. Ainsi, on doit avoir  $r$  sommets  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  tels que l'angle en  $\sigma_i$  soit  $\frac{2\pi}{m_i}$  d'après 3.12. Pour cela, on part d'un polygone régulier  $P_0$  centré en 0 à  $4g + r$  côtés dont un des sommets est  $s_1 := t \in ]0, 1[$ . Puis, on construit sur les  $r$  premiers côtés de ce polygone des triangles isocèles vers l'extérieur du polygone de

telle sorte que l'angle au nouveau sommet, que l'on note  $\sigma_i$ , soit  $\frac{2\pi}{m_i}$  si on est sur le  $i$ -ème côté (si  $m_i = 2$ , on a construit un sommet plat en posant  $\sigma_i$  sur le  $i$ -ème côté). Chacun de ces triangles isocèles a ajouté 1 côté au polygone de base si bien que le polygone  $P$  obtenu en faisant l'union de  $P_0$  et de ces triangles a  $4g + 2r$  côtés.



Comme  $A(g, m_1, \dots, m_r) > 0$ , il existe  $t \in ]0, 1[$  tel que l'aire du polygone obtenu soit  $A(g, m_1, \dots, m_r)$  car cette aire tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0 et tend vers  $2\pi(2g - 1 + \sum_i(1 - \frac{1}{m_i}))$  quand  $t$  tend vers 1 (la formule 3.4 fonctionne encore avec des polygone ayant des sommets sur la ligne d'horizon, l'angle en un tel sommet est alors 0).

Regroupons les sommets  $\{s_{r+1}, \dots, s_{4g+r}\}$  en paquets de quatre sommets successifs et considérons un de ces paquets  $\{s_{r+4k+1}, \dots, s_{r+4k+4}\}$ . On note le sommet  $s_i^k := s_{r+4k+i}$  pour  $1 \leq i \leq 4$ . Notons  $[z, w]$  l'arc orienté de géodésique entre deux points de  $\mathcal{U}$ . D'après la proposition 1.7, il existe une transformation de Möbius  $a_k$  envoyant  $[s_1^k, s_2^k]$  sur  $[s_4^k, s_3^k]$  et une autre  $b_k$  envoyant  $[s_2^k, s_3^k]$  sur  $[s_1^{k+1}, s_4^k]$ .

On considère aussi, pour  $1 \leq k \leq r$ , une transformation  $c_k$  envoyant  $[s_k, \sigma_k]$  sur  $[s_{k+1}, \sigma_k]$ . Par construction, les sommets  $\sigma_i$  sont les points fixes des  $c_i$ . Ce sont des sommets elliptiques qui représentent à eux seuls leur cycle. Tandis que le sommet  $s_{r+1}$  est recolé à tous les autres sommets car pour tout  $0 \leq k \leq g - 1$ , on peut envoyer  $s_1^k$  sur  $s_1^{k+1}$  en passant par tous les  $s_i^k$  en appliquant  $b_k a_k^{-1} b_k^{-1} a_k$  et on peut passer de  $s_1$  à  $s_{r+1}$  en passant par tous les  $s_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  en appliquant  $c_r c_{r-1} \dots c_1$ .

Les angles aux cycles permettent de voir que  $P$  pave le plan. En effet, on peut montrer que la somme  $\Sigma$  des angles en les  $s_i$  est  $2\pi$  : l'angle en  $\sigma_i$  est  $\frac{2\pi}{m_i}$  et  $P$  admet  $4g + 2r$  côtés donc, par la formule 3.4, on a

$$A(g, m_1, \dots, m_r) = 2\pi \left( 2g - 1 + \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) - \frac{\Sigma}{2\pi} \right)$$

qui se simplifie en  $\Sigma = 2\pi$ . Ainsi, les régions autour de chaque sommets se recollent comme dans la preuve de la proposition 3.12 et le groupe  $G$  engendré par les  $a_k, b_k, c_i$  permet de paver le plan à partir de  $P$  (en vérité ce n'est pas très rigoureux, notre construction fonctionne pour ce qui est de paver au voisinage de notre tuile initiale  $P$ , mais rien ne dit que ces pavés se recollent bien entre eux plus loin, il faut en fait montrer qu'un espace abstrait pavé par ces tuiles est un revêtement de  $\mathbb{H}$  et en conclure par simple connexité de  $\mathbb{H}$  que cet espace abstrait est en fait homéomorphe à  $\mathbb{H}$  cf. [Mas71]).

Ainsi, l'action de  $G$  sur  $\mathbb{H}$  est proprement discontinue puisqu'un compact de  $\mathbb{H}$  ne rencontre qu'un nombre fini de tuiles. Ainsi,  $G$  est un groupe Fuchsien et ses périodes sont  $m_1, \dots, m_r$  par construction. Comme l'aire de  $P$  est  $A(g, m_1, \dots, m_r)$ , la formule de l'aire du domaine de Dirichlet trouvée précédemment nous assure que le genre de  $\mathbb{H}/G$  est  $g$  (on peut aussi le voir dans notre construction car chacun des paquets de quatre sommets correspond à un tore et on fait alors la somme connexe de  $g$  tores, les  $r$  sommets  $\sigma_i$  apparaissant alors comme des coutures sur celui-ci) ce qui conclut notre démonstration ainsi que ces notes de séminaire.  $\square$

## Bibliographie

- [Kat92] Svetlana KATOK. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [Mas71] Bernard MASKIT. « On Poincaré's theorem for fundamental polygons ». In : *Advances in Mathematics* 7.3 (1971), p. 219-230. ISSN : 0001-8708. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0001-8708\(71\)80003-8](https://doi.org/10.1016/S0001-8708(71)80003-8). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870871800038>.