Résolution standard de $\mathbb{Z}$ sur un groupe

Jules Givelet

22 novembre 2025

Ce document a pour but de présenter dans le détail une étape fondamentale à l'introduction de l'homologie et la cohomologie de groupes. Il est conseillé que la lectrice ait déjà été en contact avec l'algèbre homologique simplement pour que l'auteur.ice n'ait pas à redéfinir les notions de complexe de chaînes, de résolution ou d'homotopie de chaînes. Cependant, toute l'algèbre homologique dont on aura besoin sera rappelée au fur et à mesure de manière un peu informelle.

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe quelconque. On écrit sa loi multiplicativement puisqu'il n'est pas forcément abélien et on note e son élément neutre.

1 $\mathbb{Z}G$-modules

On sait déjà effectuer des résolutions libres de groupes grâce aux présentation. Prenez votre groupe G favori (par exemple C_n le groupe cyclique d'ordre n) et votre présentation favorite de celui-ci (par exemple $C_n = \langle a \,|\, a^n = 1\rangle$). Bravo, vous venez de construire un morphisme d'un groupe libre $F_n \to G$ et vous avez même identifié le noyau de ce morphisme comme l'image d'un morphisme partant d'un autre groupe libre $F_m \to F_n$. Vous avez donc une suite exacte $F_m \to F_n \to G \to 1$ et on peut encore continuer en trouvant des générateurs de $\mathrm{Ker}(F_m \to F_n)$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir une suite exacte (éventuellement infinie) de groupes libres. Par exemple, on a la résolution libre :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow C_n \longrightarrow 1$$

Cependant, en homologie, on préfère l'algèbre linéaire à la théorie des groupes (les homotopistes en sueur) donc on se donne pour objectif d'associer naturellement à chaque groupe G un anneau sur lequel on peut définir des modules et y faire toute l'algèbre linéaire que l'on souhaite.

Définition 1.1. *L'anneau de G* est le groupe abélien libre sur G :

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g\in G} \mathbb{Z}g$$

que l'on munit d'une opération bilinéaire grâce à la loi de G que l'on étend linéairement :

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} \mu_g g\right) = \sum_{g\in G} \left(\sum_{h_1 h_2 = g} \lambda_{h_1}\mu_{h_2}\right) g.$$

Exemples 1.2.

1) Si C_n est engendré par a, on a un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}C_n \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^n - 1)$ en identifiant la classe de X à a.
2) Pour le groupe monogène infini C_∞, on a $\mathbb{Z}C_\infty \simeq \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent.
3) De manière générale, pour un groupe libre engendré par n éléments, on a $\mathbb{Z}F_n \simeq \mathbb{Z}\langle X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}\rangle$, l'anneau des polynômes de Laurent en n variables non commutantes.

Proposition 1.3. *On a une bijection naturelle pour tout anneau A*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathbb{Z}G, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, A^\times).$$

Démonstration. On part de l'adjonction habituelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}G, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(G, A).$$

Les morphismes d'anneaux induisent alors bien un morphisme de groupes $G \to A^\times$ car $G < (\mathbb{Z}G)^\times$ et un tel morphisme de groupes définit un morphisme d'anneaux puisque G engendre $\mathbb{Z}G$. ✿

Cette adjonction permet d'une part de caractériser l'anneau d'un groupe avec une propriété universelle et d'autre part de comprendre ce que sont les $\mathbb{Z}G$-modules. De manière général, un R-module est la donnée d'un groupe abélien A muni d'un morphisme d'anneaux $R \to \mathrm{End}(A)$. Or, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathbb{Z}G, \mathrm{End}(A)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, \mathrm{Aut}(A))$$

donc un $\mathbb{Z}G$-module n'est qu'un gros mot pour parler simplement d'un groupe abélien A sur lequel G agit par automorphismes.

Exemple 1.4. Si on se donne une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \tag{1}$$

avec A un groupe abélien, alors on a $i(A) = \mathrm{Ker}(\pi) \lhd E$ donc on peut faire agir E sur $i(A)$ par conjugaison et donc sur A en posant $x \cdot a := i^{-1}(xi(a)x^{-1})$ pour tout $(x, a) \in E \times A$. Cette action correspond à un morphisme $E \to \mathrm{Aut}(A)$ qui passe au quotient par $i(A)$ en un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(A)$ puisque si $x = i(a')$, alors $x \cdot a = a' + a - a' = a$ et donc l'action est triviale sur $i(A)$. Cela définit donc une action par automorphisme de G sur A et A est un $\mathbb{Z}G$-module.

Tout $\mathbb{Z}G$-module se réalise de cette manière puisque si l'on se donne un morphisme $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(A)$, on peut construire un groupe E qui s'insère dans une suite exacte comme (1) et retrouver φ comme décrit précédemment. Ce groupe se note $A \rtimes_\varphi G$, c'est le produit semi-direct de A par G (ou plutôt de G par A pour les fans d'extensions de groupes). L'ensemble sous-jacent à ce groupe est $A \times G$, la loi du groupe est donnée par

$$(a_1, g_1) \cdot (a_2, g_2) = (a_1 + \varphi(g_1)(a_2), g_1 g_2)$$

et les morphismes i et π sont les applications $(a \mapsto (a, e))$ et $((a, g) \mapsto g)$.

En générale, il n'y a pas unicité d'un tel groupe E qu'on appelle alors *extension de G par A d'action φ*. La cohomologie de groupes sert justement à classifier ces extensions de groupes à équivalences d'extensions près.

Exemple 1.5. Une autre manière naturelle d'obtenir des $\mathbb{Z}G$-modules est de partir d'une action de groupe de G sur un ensemble X. On peut construire le groupe abélien libre $\mathbb{Z}X$ sur lequel G agit alors par automorphisme (G permute les vecteurs de le base canonique). Les orbites pour cette action fournit alors une décomposition de $\mathbb{Z}X$ en sous-groupes abéliens stables sous l'action de G :

$$\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}\left(\bigsqcup_{\Omega \in X/G} \Omega\right) = \bigoplus_{\Omega \in X/G} \mathbb{Z}\Omega.$$

De plus, on a la fameuse relation orbite-stabilisateur pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned} f_x : \ G/G_x &\longrightarrow \Omega_x \\ [g] &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

qui est mieux qu'une bijection : c'est une équivalence d'actions de groupe car pour tout $g' \in G$, on a $f_x(g' \cdot [g]) = f_x([g'g]) = g'g \cdot x = g' \cdot (g \cdot x) = g' \cdot f_x([g])$. Donc, f_x induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}G$-modules

$\mathbb{Z}(G/G_x) \simeq \mathbb{Z}\Omega_x$. Ainsi, en se fixant $(x_i)_{i\in I}$ un système de représentants des orbites pour l'action de G, on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}G$-modules

$$\boxed{\mathbb{Z}X \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\left(G/G_{x_i}\right).}$$

En particulier, si G agit librement sur X, alors $G/G_{x_i} = G$ pour tout $i \in I$ et donc $\mathbb{Z}X$ est un $\mathbb{Z}G$-module libre avec $(x_i)_{i\in I}$ pour base.
Remarque 1.6. L'auteur.ice ne sait pas à ce jour ce qu'il en est de la réciproque : que peut-on dire de l'action de G sur X s'il s'avère que $\mathbb{Z}X$ est un $\mathbb{Z}G$-module libre ?

Aparté catégorie Comme on l'a dit après la proposition 1.3, les $\mathbb{Z}G$-modules sont la superposition d'un groupe abélien et d'un ensemble sur lequel G agit. Cela se formalise dans le langage des catégories et permet au passage d'avoir un autre point de vue sur la construction précédente où l'on a enrichie la structure d'un ensemble sur lequel G agit en $\mathbb{Z}G$-module.

De manière générale, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on note G-$\mathcal{C}$ la catégorie des G-objets de $\mathcal{C}$. Un G-objet de $\mathcal{C}$ est la donnée d'un objet X de $\mathcal{C}$ est d'un morphisme de groupes $\rho_X : G \to \mathrm{Aut}(X)$. Un morphisme de G-objets de (X, ρ_X) vers (Y, ρ_Y) est un morphisme $f : X \to Y$ qui est G-équivariant :

$$f \circ \rho_X = \rho_Y \circ f \tag{2}$$

La catégorie G-**Ens** des G-ensemble est la catégorie des actions de G sur un ensemble. On a alors un foncteur d'oubli

$$G\text{-}\mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$$

qui admet un adjoint à gauche qui à un ensemble X associe l'ensemble $GX := G \times X$ où G agit par multiplication à gauche sur la première coordonnée (remarquez comme $\{e\} \times X$ fournit alors un système de représentant des orbites *i.e* $GX/G \simeq X$ et que le fait que G agissent librement sur un ensemble Y est équivalent au fait qu'en tant que G-ensembles, on a $Y \simeq G\,(Y/G)$).

En plus d'abstraire la notion d'action de groupe, on peut abstraire la notion de groupe abélien dans une catégorie $\mathcal{C}$ qui admet les produits finis et donc un objet terminal $*$. On note $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$ la catégorie des groupes abéliens de $\mathcal{C}$. Un groupe abélien de $\mathcal{C}$ est la donnée d'un objet A de $\mathcal{C}$ et de morphismes $\alpha_A : A \times A \to A$ (addition), $0_A : * \to A$ (élément neutre) et $\mathrm{op}_A : A \to A$ (opposé) tels que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{tikzcd}
 & A \times A \times A \arrow[dl, "\alpha_A \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \times \alpha_A"] & \\
A \times A \arrow[dr, "\alpha_A"'] & & A \times A \arrow[dl, "\alpha_A"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

associativité

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[rr, "(p_2, p_1)"] \arrow[dr, "\alpha_A"'] & & A \times A \arrow[dl, "\alpha_A"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

commutativité

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "(0_A \circ *_A, \mathrm{id}_A)"'] & & A \\
 & A \times A \arrow[ur, "\alpha_A"'] &
\end{tikzcd}$$

élément neutre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_A, \mathrm{op}_A)"'] & & A \\
 & A \times A \arrow[ur, "\alpha_A"'] &
\end{tikzcd}$$

opposé

avec $p_i : A \times A \to A$ la projection de la i-ème coordonnée et $*_A : A \to *$ l'unique morphisme possible. Un morphisme de groupes abéliens de $\mathcal{C}$ est un morphisme $f : A \to B$ vérifiant :

$$f \circ \alpha_A = \alpha_B \circ (f \times f) \tag{3}$$

La catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Ens})$ est la catégorie des groupes abéliens. On a un foncteur d'oubli

$$\mathbf{Ab}(\mathbf{Ens}) \to \mathbf{Ens}$$

qui admet aussi un adjoint à gauche qui à un ensemble X associe le groupe abélien libre $\mathbb{Z}X$ admettant X comme base.

La catégorie $\mathbb{Z}G$-**Mod** des $\mathbb{Z}G$-modules est alors équivalente aux deux catégories G-**Ab**(**Ens**) et **Ab**(G-**Ens**). On peut se demander alors si les adjonctions dont on a parlées passent aux G-objets et aux groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}G\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[dl, shift right] \arrow[dr, shift left] & \\
G\text{-}\mathbf{Ens} \arrow[ur, dotted, shift right] \arrow[ur, phantom, "\perp"] \arrow[dr, shift left] & & \mathbf{Ab}(\mathbf{Ens}) \arrow[ul, dotted, shift left] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \arrow[dl, shift right] \\
& \mathbf{Ens} \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \arrow[ur, shift right] \arrow[ur, phantom, "\perp"] &
\end{tikzcd}$$

La formule 2 est bien conservée par les adjonctions si bien qu'on a la proposition suivante.

Proposition 1.7. *Tout foncteur $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se restreint en un foncteur G-$R : G$-$\mathcal{C} \to G$-$\mathcal{D}$ et si R admet un adjoint à gauche L, alors G-R admet G-L comme adjoint à gauche.*

Pour les groupes abéliens, la situation est moins bonne puisqu'en observant la définition d'un groupe abélien et la condition 3, on voit bien qu'il faut au moins que les foncteurs en question conservent les produits finis.

Proposition 1.8. *Soit $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Si R préserve les produits finis* i.e*, les applications naturelles*

$$(Rp_1, Rp_2) : R(A \times A) \to RA \times RA$$
$$*_{R*} : R* \to *$$

sont des isomorphismes, alors R induit un foncteur $\mathbf{Ab}(R) : \mathbf{Ab}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ab}(\mathcal{D})$ et si L est un adjoint à gauche de R qui préserve les produits finis, alors $\mathbf{Ab}(L)$ est un adjoint à gauche de $\mathbf{Ab}(R)$.

Remarque 1.9. Le fait que R admette un adjoint à gauche implique que R préserve les produits finis puisque R préserve toutes les limites dans ce cas.

Ainsi, on a bien un foncteur G-**Ens** $\to \mathbb{Z}G$-**Mod** adjoint à gauche au foncteur d'oubli qui envoie un ensemble X sur lequel G agit vers le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}X$ muni de l'action de G décrite dans l'exemple 1.5. Pour le passage aux groupes abéliens, le foncteur **Ens** $\to G$-**Ens** ne conserve pas les produits finis ($G(X \times Y) \not\simeq GX \times GY$). Malgré tout, le foncteur d'oubli $\mathbb{Z}G$-**Mod** $\to$ **Ab**(**Ens**) admet bien un adjoint à gauche en associant à un groupe abélien A, le $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ par extension des scalaires. On peut alors établir que si A est libre, alors $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ est un $\mathbb{Z}G$-module libre :

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}X \simeq \mathbb{Z}(G \times X) = \mathbb{Z}(GX) \simeq (\mathbb{Z}G)X.$$

Ici, on a montré que l'implication (établie à la fin de 1.5) (X est G-libre $\Rightarrow \mathbb{Z}X$ est $\mathbb{Z}G$-libre) induisait l'implication (A est $\mathbb{Z}$-libre $\Rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ est $\mathbb{Z}G$-libre) mais on aurait pu faire l'inverse car ces deux implications proviennent de la même propriété abstraite : la composabilité de l'adjonction.

Proposition 1.10. *Soit $(L \vdash R) : \mathcal{C} \longleftrightarrow \mathcal{D}$ et $(L' \vdash R') : \mathcal{D} \longleftrightarrow \mathcal{E}$ deux adjonctions. Alors, $(L' \circ L \vdash R \circ R') : \mathcal{C} \longleftrightarrow \mathcal{E}$ est une adjonction.*

2 Complexe simplicial d'un groupe

Notre objectif maintenant est de construire une résolution libre de $\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}G$-module trivial *i.e* une suite exacte de $\mathbb{Z}G$-modules du type :

$$\cdots \to (\mathbb{Z}G)X_2 \to (\mathbb{Z}G)X_1 \to (\mathbb{Z}G)X_0 \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{4}$$

Définition 2.1. Le *complexe simplicial de* G est le complexe de chaînes de $\mathbb{Z}G$-modules $C(G)$ défini par :

- $C_n(G) := \mathbb{Z}(G^{n+1})$ pour $n \geqslant 0$ et $C_n(G) := 0$ pour $n < 0$.
- Pour $n \geqslant 0$, l'action de G sur $C_n(G)$ est induite (*cf.* exemple 1.5) par l'action diagonale de G sur G^{n+1} : $g \cdot (g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n)$.
- L'opérateur de bord $\partial_n : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ pour $n \geqslant 1$ est défini sur la $\mathbb{Z}$-base par

$$\partial_n(g_0, \ldots, g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_n).$$

Les applications ∂_n ne sont que $\mathbb{Z}$-linéaires a priori mais elles sont en fait bien compatibles avec la structure de $\mathbb{Z}G$-module :

Proposition 2.2. *$C(G)$ est bien un complexe de chaînes de $\mathbb{Z}G$-modules :*

(i) L'application $\partial_n : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ est $\mathbb{Z}G$-linéaire pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Démonstration. Si $n \leqslant 0$, on a $C_{n-1}(G) = 0$ donc $\partial_n = 0$ et (i) et (ii) est triviale. Supposons donc maintenant $n \geqslant 1$.

Preuve de (i) : Soit $g, g_0, \ldots, g_n \in G$. On a :

$$\begin{aligned}
\partial_n(g \cdot (g_0, \ldots, g_n)) &= \partial_n(gg_0, \ldots, gg_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (gg_0, \ldots, \widehat{gg_i}, \ldots, gg_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g \cdot (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_n) \\
&= g \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_n) \right) \\
&= g \cdot \partial_n(g_0, \ldots, g_n).
\end{aligned}$$

La $\mathbb{Z}$-linéarité de ∂_n et le fait que G^{n+1} est une $\mathbb{Z}$-base de $C_n(G)$ permettent alors de conclure que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}G$ et pour tout $x \in C_n(G)$, on a $\partial_n(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \partial_n(x)$.

Preuve de (ii) : Le calcul peut faire peur mais c'est classique : on est en train de réinventer l'homologie simpliciale (*cf.* paragraphe suivant). Soit $g_0, \cdots, g_{n+1} \in G$. On a :

$$\begin{aligned}
\partial_n \left(\partial_{n+1}(g_0, \ldots, g_{n+1}) \right) &= \partial_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{n+1}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{n+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant i-1} (-1)^j(g_0,\dots,\widehat{g_j},\dots,\widehat{g_i},\dots,g_{n+1}) \\ \displaystyle + \sum_{i\leqslant j\leqslant n} (-1)^j(g_0,\dots,\widehat{g_i},\dots,\widehat{g_{j+1}},\dots,g_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{0\leqslant j< i} (-1)^j(g_0,\dots,\widehat{g_j},\dots,\widehat{g_i},\dots,g_{n+1}) \\ \displaystyle + \sum_{i< j\leqslant n+1} (-1)^{j-1}(g_0,\dots,\widehat{g_i},\dots,\widehat{g_j},\dots,g_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{matrix} \displaystyle\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n+1} (-1)^{i+j}(g_0,\dots,\widehat{g_j},\dots,\widehat{g_i},\dots,g_{n+1}) \\ \displaystyle - \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n+1} (-1)^{j+i}(g_0,\dots,\widehat{g_i},\dots,\widehat{g_j},\dots,g_{n+1}) \end{matrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

✿

Aparté simplicialité Le fait que $C(G)$ soit un complexe de chaînes de $\mathbb{Z}$-modules n'a rien de sorcier puisqu'on a tout fait pour en vérité. La suite d'ensembles $\left(G^{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ forme en fait un *ensemble semi-simplicial* que l'on note G^*. En effet, pour toute fonction strictement croissante entre deux ensembles finies non vides $f : \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,m\}$, on peut définir l'application

$$
\begin{aligned}
G^f : \quad G^{m+1} &\longrightarrow G^{n+1} \\
(g_0,\dots,g_m) &\longmapsto (g_{f(0)},\dots,g_{f(n)}).
\end{aligned}
$$

Ces applications vérifient la propriété fondamentale : $G^{f_1} \circ G^{f_2} = G^{f_2\circ f_1}$ pour toutes fonctions strictement croissantes $f_1 : \{0,\dots,n_1\} \to \{0,\dots,n_2\}$ et $f_2 : \{0,\dots,n_2\} \to \{0,\dots,n_3\}$. Le complexe de chaîne $C(G)$ correspond alors au complexe simplicial associé à G^* avec

$$\partial_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} (-1)^i G^{\delta_n^i}$$

où la fonction $\delta_n^i : \{0,\dots,n-1\} \to \{0,\dots,n\}$ est l'injection croissante qui oublie le i-ème terme (on appelle cette dernière application la i-ème face du n-simplexe pour de très bonnes raisons géométriques et l'autrice renvoie à n'importe quel cours sur l'homologie singulière pour en savoir plus).

Ce qui est formidable par contre c'est qu'on peut enrichir la structure de ce complexe de chaînes en faisant agir G sur les $\mathbb{Z}$-modules considérés et le fait que cette chaîne peut s'augmenter en une longue suite exacte. En effet, pour l'instant on a seulement construit un complexe de la forme

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G^3 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \longrightarrow 0$$

ce qui n'est en vérité pas bien loin de notre objectif (4).

3 Complexe augmenté et résolution simpliciale de $\mathbb{Z}$

On va démontré un peu plus tard (proposition 3.4) que notre complexe $C(G)$ est en fait une longue suite exacte sauf en $C_0(G) = \mathbb{Z}G$.

Proposition 3.1. *Soit $x = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in \mathbb{Z}G$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in \mathrm{Im}(\partial_1)$.

(ii) $\sum_{g\in G} \lambda_g = 0$.

Démonstration. Preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$: Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \displaystyle\sum_{g\in G} \lambda_g g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} \lambda_g \end{array}$$

Cette application est $\mathbb{Z}$-linéaire (c'est l'unique application $\mathbb{Z}$-linéaire qui envoie les éléments de G sur 1). De plus, pour tout $(g_0, g_1) \in G^2$, on a $\varepsilon(\partial_1(g_0, g_1)) = \varepsilon(g_1 - g_0) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, comme G^2 engendre $\mathbb{Z}G^2$, on a pour tout $y \in \mathbb{Z}G^2$: $\varepsilon(\partial_1(y)) = 0$, d'où la première implication.

Preuve de $(ii) \Rightarrow (i)$: On a

$$x = \sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda_g (g - e) + \underbrace{\left(\sum_{g\in G} \lambda_g\right)}_{=0} e = \sum_{g\in G} \lambda_g \partial_1(e, g) = \partial_1\left(\sum_{g\in G} \lambda_g (e, g)\right).$$

✿

On appelle l'application ε *l'augmentation* de $C(G)$. En effet, cette application est aussi $\mathbb{Z}G$-linéaire car pour tout $g, g_0 \in G$, on a $\varepsilon(gg_0) = 1 = \varepsilon(g_0)$ (pour rappel, on fait agir G sur $\mathbb{Z}$ trivialement) et on a démontré qu'on a une suite exacte

$$C_1(G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(la surjectivité de ε est évidente). Ainsi, on peut considérer le complexe de chaîne augmenté $\left(\widetilde{C}(G), \widetilde{\partial}\right)$ où

$$\begin{cases} \forall n \neq -1,\ \widetilde{C}_n(G) := C_n(G) \\ \widetilde{C}_{-1}(G) := \mathbb{Z} \\ \forall n \geqslant 1,\ \widetilde{\partial}_n := \partial_n \\ \widetilde{\partial}_0 := \varepsilon \end{cases}$$

On a donc un complexe de $\mathbb{Z}G$-modules de la forme

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G^3 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

qu'on a montré être exacte en $\mathbb{Z}$ et en $\mathbb{Z}G$. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est en fait exacte partout *i.e* $\left(\widetilde{C}(G), \widetilde{\partial}\right)$ est *acyclique.*

Pour démontrer que le complexe $\widetilde{C}(G)$ est acyclique, on va s'appuyer sur la proposition suivante bien connue des homologistes.

Proposition 3.2. *Soit (C, ∂) un complexe de R-modules. Si (C, ∂) est contractile, alors (C, ∂) est acyclique.*

Démonstration. A priori, cette démonstration ne s'adresse qu'à des non-homologistes et on va donc expliquer les termes de cette proposition et la démontrer de la manière la plus élémentaire possible. Ici on a affaire à une longue suite d'applications R-linéaires

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ *i.e* $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}\,(\partial_n)$. Le complexe (C, ∂) est donc acyclique si et seulement si on a l'inclusion réciproque pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

De l'autre côté de la proposition, dire que (C, ∂) est *contractile* revient à dire qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une application R-linéaire $h_n : C_n \to C_{n+1}$ qui vérifie

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{id}_{C_n} \tag{6}$$

:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[dl] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, equal] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On a alors bien acyclicité puisque si $x \in \mathrm{Ker}(\partial_n)$, alors

$$\begin{aligned} x &= \partial_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(\underbrace{\partial_n(x)}_{=0})) \\ &= \partial_{n+1}(h_n(x)) \\ &\in \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \end{aligned}$$

✿

Remarque 3.3. Une telle famille d'application $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée *homotopie* entre id_C et 0 et on invite vivement la lectrice la plus algébriste à lire un cours de topologie algébrique pour en comprendre la nature géométrique. Une homotopie entre deux morphismes $f, g : C \to D$ de complexes de chaînes (*i.e* $f \circ \partial_C = \partial_C \circ f$ et même chose pour g) est la donnée de morphismes $h_n : C_n \to D_{n+1}$ vérifiant l'identité (6) en remplaçant id_{C_n} par $f_n - g_n$.

Proposition 3.4. *Le complexe* $\left(\widetilde{C}(G), \widetilde{\partial}\right)$ *est contractile sur* $\mathbb{Z}$ *donc acyclique et mérite alors bien son titre de* résolution simpliciale *de* $\mathbb{Z}$*.*

Démonstration. La construction de l'homotopie n'est pas si artificielle si on a en tête la deuxième partie de la preuve de la proposition 3.1. Si $n < -1$ on ne peut que poser $h_n = 0 : \widetilde{C}_n(G) \to \widetilde{C}_{n+1}(G)$ et les relations recherchées $\widetilde{\partial}_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \widetilde{\partial}_n = \mathrm{id}_{C_n}$ sont trivialement vérifiées. Pour $n = -1$, on pose

$$\begin{aligned} h_{-1} :\ \mathbb{Z} &\longrightarrow C_0(G) \\ 1 &\longmapsto e \end{aligned}$$

et si $n \geqslant 0$, on pose

$$\begin{aligned} h_n :\quad C_n(G) &\longrightarrow C_{n+1}(G) \\ (g_0, \dots, g_n) &\longmapsto (e, g_0, \dots, g_n) \end{aligned}$$

On a alors $\widetilde{\partial}_0(h_{-1}(1)) = \widetilde{\partial}_0(e) = 1$ et

$$\widetilde{\partial}_1(h_0(g_0)) + h_{-1}\left(\widetilde{\partial}_0(g_0)\right) = \widetilde{\partial}_1(e, g_0) + h_{-1}(1) = g_0 - e + e = g_0.$$

Enfin, pour $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} &\widetilde{\partial}_{n+1}(h_n(g_0, \dots, g_n)) + h_{n-1}\left(\widetilde{\partial}_n(g_0, \dots, g_n)\right) \\ &= \widetilde{\partial}_{n+1}(e, g_0, \dots, g_n) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n)\right) \\ &= (g_0, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} (e, g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (e, g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \\ &= (g_0, \dots, g_n). \end{aligned}$$

✿

Remarque 3.5. Attention, l'homotopie $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que l'on a définie ici n'est jamais $\mathbb{Z}G$-linéaire si G n'est pas trivial et le complexe augmenté est contractile en tant que complexe de $\mathbb{Z}$-modules. L'acyclicité, elle, est indépendante de l'anneau sur lequel on se place.

Aparté simplicialité L'ajout de $\mathbb{Z}$ et ε dans le complexe simpliciale $C(G)$ est en fait très naturelle puisqu'il ne s'agit que de l'extension de l'ensemble semi-simplicial G^* à l'ensemble vide en un *ensemble semi-simplicial augmenté*. En effet, on a $G^0 = \{\emptyset\}$ et si on considère l'application (strictement croissante) vide $\emptyset_n : \emptyset \to \{0,\ldots,n\}$ (avec $n \geqslant -1$), on pose $G^{\emptyset_n} : G^{n+1} \to G^0$ l'unique application possible (constante égale au vide). On a alors $\mathbb{Z}G^0 = \mathbb{Z}$ et $\widetilde{\partial_0} = G^{\delta_0}$ où $\delta_0 := \emptyset_0$ est l'unique face du 0-simplexe.

Au final, la suite exacte (5) est bien une résolution de $\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}G$-module. Or, ce que l'on voulait à la base (4), c'était une résolution en $\mathbb{Z}G$-modules libres ! On a donc encore besoin d'étudier la structure du $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}G^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Résolution en barres et résolution normalisée

L'idée pour démontrer que le complexe simplicial $C(G)$ est formé de $\mathbb{Z}G$-modules libres est d'établir l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}G^{n+1} \simeq (\mathbb{Z}G)G^n$$

c'est-à-dire que l'on peut trouver une $\mathbb{Z}G$-base de $\mathbb{Z}G^{n+1}$ indexée par G^n.

Proposition 4.1. *La famille* $([h_1|\cdots|h_n])_{(h_1,\ldots,h_n)\in G^n}$ *où*

$$[h_1|\cdots|h_n] := (e, h_1, h_1h_2, \ldots, h_1\cdots h_n) = (h_1\cdots h_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$$

est une $\mathbb{Z}G$*-base de* $\mathbb{Z}G^{n+1}$.

Démonstration. Cette famille est libre : Supposons que l'on ait une relation du type

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{g\in G}\lambda_{g,i}g\right)\cdot[h_{1,i}|\cdots|h_{n,i}] = 0.$$

Quitte à regrouper des terme ensemble, on peut supposer qu'on a $[h_{1,i}|\cdots|h_{n,i}] \neq [h_{1,j}|\cdots|h_{n,j}]$ pour tout $i \neq j$ et donc $g\cdot[h_{1,i}|\cdots|h_{n,i}] \neq g\cdot[h_{1,j}|\cdots|h_{n,j}]$ pour tout $g \in G$. De plus, le premier terme de $g\cdot[h_1|\cdots|h_n]$ est g donc si $g \neq g'$, on a

$$g\cdot[h_{1,i}|\cdots|h_{n,i}] \neq g'\cdot[h_{1,j}|\cdots|h_{n,j}] \tag{$\bigstar$}$$

pour tout $i, j \in [\![1,k]\!]$.

Ainsi, la famille $(g\cdot[h_{1,i}|\cdots|h_{n,i}])_{(g,i)\in G\times[\![1,k]\!]}$ est une famille d'élément distincts de la $\mathbb{Z}$-base canonique de $\mathbb{Z}G^{n+1}$. Donc, la relation

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{g\in G}\lambda_{g,i}\,(g\cdot[h_{1,i}|\cdots|h_{n,i}]) = 0$$

implique que pour tout $g \in G$ et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a $\lambda_{g,i} = 0$.

Cette famille est génératrice : Soit $g_0, \ldots, g_n \in G^{n+1}$. On a

$$(g_0,\ldots,g_n) = g_0\cdot(e, g_0^{-1}g_1, \ldots, g_0^{-1}g_n).$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$g_0^{-1}g_i = g_0^{-1}g_1g_1^{-1}\cdots g_{i-1}g_{i-1}^{-1}g_i = h_1\cdots h_i$$

avec $h_k := g_{k-1}^{-1}g_k$. Donc, on a

$$(g_0,\ldots,g_n) = g_0\cdot(h_1\cdots h_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = g_0\cdot[h_1|\cdots|h_n]. \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

Ainsi, la famille $([h_1|\cdots|h_n])_{(h_1,\dots,h_n)\in G^n}$ engendre les éléments de la $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}G^{n+1}$ donc engendre $\mathbb{Z}G^{n+1}$ tout entier.

✿

Remarque 4.2. Les plus attentives d'entre vous auront remarqué que cette preuve était déjà sous nos yeux dans l'exemple 1.5. En effet, on a déjà la décomposition suivante de $\mathbb{Z}G^{n+1}$ en somme directe de sous-$\mathbb{Z}G$-modules :

$$\mathbb{Z}G^{n+1} = \bigoplus_{\Omega\in G^{n+1}/G} \mathbb{Z}\Omega.$$

Il n'y avait plus qu'à :

1) remarquer que comme l'action diagonale de G sur G^{n+1} est libre (c'était le cas $i=j$ de (★)) on a $\mathbb{Z}\Omega \simeq \mathbb{Z}G$;
2) montrer que $G^{n+1}/G \simeq G^n$ (on a construit explicitement une bijection $G^n \to G^{n+1}/G$ qui à $(h_1,\dots,h_n)$ associe $\Omega_{[h_1|\cdots|h_n]}$, on a montré qu'elle était injective dans le cas $i\neq j$ de (★) et on a montré qu'elle était surjective en (★★)) ;
3) écrire la démonstration en une ligne de hiéroglyphes :

$$\mathbb{Z}G^{n+1} = \bigoplus_{\Omega\in \underbrace{G^{n+1}/G}_{\simeq G^n}} \mathbb{Z}\underbrace{\Omega}_{\simeq G} \simeq (\mathbb{Z}G)G^n.$$

La seule chose nouvelle ici est en fait le choix particulier du système de représentants des orbites $([h_1|\cdots|h_n])_{(h_1,\dots,h_n)} \in G^n$ qui peut paraître un peu compliqué. En fait, les représentant choisis sont ceux dont le premier terme est e et on les a mis sous une certaine forme : la représentation en barres. On a vu que l'élément $(g_0,\dots,g_n)$ se représente alors par $g_0\cdot[g_0^{-1}g_1|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n]$ et l'élément $g\cdot[h_1|\cdots|h_n]$ représente $(g, gh_1,\dots,gh_1\cdots h_n)$.

En cohomologie de groupes, ce sont les éléments mis sous représentation en barres qui nous intéressent vraiment car l'opérateur de bord que l'on considère apparaît naturellement sous sa version en barres en topologie algébrique avec la cohomologie singulière (dont la cohomologie de groupes en est la fille).

Proposition 4.3. *On a pour tout $n\geqslant 1$ et pour tout $(h_1,\dots,h_n)\in G^n$:*

$$\begin{aligned}\partial_n[h_1|\cdots|h_n] =& h_1\cdot[h_2|\cdots|h_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[h_1|\cdots|h_{i-1}|h_ih_{i+1}|h_{i+2}|\cdots|h_n]\\ &+(-1)^n[h_1|\cdots|h_{n-1}]\end{aligned}$$

et

$$\varepsilon[\ ] = 1$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\partial_n[h_1|\cdots|h_n] &= \partial_n(e, h_1, h_1h_2,\dots,h_1\cdots h_n)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(e,\dots,\widehat{h_1\cdots h_i},\dots,h_1\cdots h_n).\end{aligned}$$

Pour $i=0$, on a $(\widehat{e}, h_1, h_1h_2,\dots,h_1\cdots h_n) = h_1\cdot(e, h_2, h_2h_3\dots,h_2\cdots h_n) = h_1\cdot[h_2|\cdots|h_n]$. Pour $0<i<n$, on a, en notant $H_k = h_1\cdots h_k$

$$\begin{aligned}&(H_0,\dots,\widehat{H_i},\dots,H_n)\\ =&(H_0,\dots,H_{i-1},H_{i+1},\dots,H_n)\\ =&H_0\cdot[H_0^{-1}H_1|\cdots|H_{i-2}^{-1}H_{i-1}|H_{i-1}^{-1}H_{i+1}|H_{i+1}^{-1}H_{i+2}|\cdots|H_{n-1}^{-1}H_n]\\ =&[h_1|\cdots h_{i-1}|h_ih_{i+1}|h_{i+2}|\cdots|h_n].\end{aligned}$$

Enfin, pour $i=n$, on a $(e, h_1, h_1h_2,\dots,\widehat{h_1\cdots h_n}) = (e, h_1, h_1h_2,\dots,h_1\cdots h_{n-1}) = [h_1|\cdots|h_{n-1}]$.

Pour l'augmentation, on a $\varepsilon[\,] = \varepsilon(e) = 1$. ✿

Remarque 4.4. Pour l'homotopie $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ introduite dans la proposition 3.4, on a pour la notation en barres $h_n(g\cdot[g_1|\cdots|g_n]) = [g|g_1|\cdots|g_n]$ si $n \geqslant 0$ et $h_{-1}(1) = [\,]$ et on voit encore mieux que ces applications ne sont pas $\mathbb{Z}G$-linéaires dès que G n'est pas trivial : $g\cdot[e|g_1\cdots|g_n] \neq [g|g_1|\cdots|g_n]$ et $g\cdot[\,] \neq [\,]$ si $g \neq e$.

Définition 4.5. Un élément $\gamma \in C_n(G)$ est *dégénéré* s'il est la somme d'éléments de la forme $(g_0,\ldots,g_i,g_i,\ldots,g_{n-1})$ ou de manière équivalente s'il est une combinaison $\mathbb{Z}G$-linéaire d'éléments de la forme $[g_1|\cdots|g_i|e|g_{i+1}|\cdots|g_{n-1}]$. On note $D_n(G)$ le sous-$\mathbb{Z}G$-module de $C_n(G)$ constitué des éléments dégénérés.

Exemple 4.6. Regardons ce qu'il se passe en petits degrés :

$n = 0$: On a $D_0(G) = 0$ car un élément de $\mathbb{Z}G$ n'a qu'une coordonnée qui ne laisse pas de place à de la répétition dans la forme simpliciale (ou de manière équivalente, n'a aucune coordonnée pour laisser la place à un élément neutre dans la forme en barre). Ainsi, $C_0(G)/D_0(G) = C_0(G) = \mathbb{Z}G$.

$n = 1$: On a $D_1(G) = \mathbb{Z}\Delta_G \subset \mathbb{Z}G^2$ où $\Delta_G := \{(g,g) : g \in G\} \subset G^2$ est la diagonale de G. C'est un $\mathbb{Z}G$-module libre de rang 1 engendré par (e,e). C'est encore plus clair avec la notation en barres car on a $D_1(G) = (\mathbb{Z}G)[e]$. On a alors

$$C_1(G)/D_1(G) \simeq (\mathbb{Z}G)G/(\mathbb{Z}G)\{e\} \simeq (\mathbb{Z}G)(G \setminus \{e\}).$$

Proposition 4.7. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, le $\mathbb{Z}G$-module $D_n(G)$ est libre et on a la décomposition en somme directe :*

$$C_n(G) = D_n(G) \oplus (\mathbb{Z}G)\,(G \setminus \{e\})^n\,.$$

Démonstration. On a grâce à la notation en barres : $C_n(G) = (\mathbb{Z}G)G^n$. On note $G^{*n} := (G \setminus \{e\})^n$. Il n'y a en fait plus qu'à vérifier qu'on a

$$D_n(G) = (\mathbb{Z}G)\,(G^n \setminus G^{*n})$$

puisqu'on aura alors

$$D_n(G) \oplus (\mathbb{Z}G)G^{*n} = (\mathbb{Z}G)\,((G^n \setminus G^{*n}) \sqcup G^{*n}) = (\mathbb{Z}G)G^n = C_n(G).$$

Or, un élément $[g_1|\cdots|g_n]$ est non dégénéré si et seulement si pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $g_i \neq e$ ce qui revient à dire $(g_1,\ldots,g_n) \in G^{*n}$. Ainsi, un élément $[g_1|\cdots|g_n]$ est dégénéré si et seulement si $(g_1,\ldots,g_n) \in G^n \setminus G^{*n}$ et ces éléments forment bien une famille libre (c'est une sous-famille d'une base) et génératrice de $D_n(G)$ (par définition). ✿

Pour se faire une idée, si G est fini de cardinal g, alors $C_n(G)$ est de rang g^n, $C_n(G)/D_n(G)$ est de rang $(g-1)^n$ et $D_n(G)$ est de rang $g^n - (g-1)^n$. Ainsi, lorsque n est très grand (pour nous g est fixe car G l'est), la dégénérescence prend presque toute la place dans $C_n(G)$ (on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g^n - (g-1)^n}{g^n} = 1$) et le quotient $C_n(G)/D_n(G)$ est très petit par rapport à $C_n(G)$. Ce sous-$\mathbb{Z}G$-module, aussi rikiki qu'il soit, peut très bien remplacer $C_n(G)$ en pratique.

Proposition 4.8. *Le bord d'un élément dégénéré est dégénéré et on a donc le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
D_n(G) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial_n"'] & C_n(G) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(G)/D_n(G) \arrow[d, "\partial_n"] \\
D_{n-1}(G) \arrow[r, hook] & C_{n-1}(G) \arrow[r, two heads] & C_{n-1}(G)/D_{n-1}(G)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme $D_n(G)$ est engendré par les éléments de la forme $(g_0, \dots, g_i, g_i, \dots g_{n-1})$, il suffit de vérifier que le bord d'un tel élément est dégénéré :

$$\begin{aligned}\partial_n(g_0, \dots, g_i, g_i, \dots g_{n-1}) = &\sum_{0 \leqslant j < i} (-1)^j \underbrace{(g_0, \dots, \widehat{g_j}, \dots, g_i, g_i, \dots, g_{n-1})}_{\in D_{n-1}(G)} \\ &+ \underbrace{(-1)^i (g_0, \dots, g_i, \dots, g_{n-1}) + (-1)^{i+1} (g_0, \dots, g_i, \dots, g_{n-1})}_{=0} \\ &+ \sum_{i+1 < j \leqslant n} (-1)^j \underbrace{(g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, \widehat{g_{j-1}}, \dots, g_{n-1})}_{\in D_{n-1}(G)}.\end{aligned}$$

✿

Ainsi, $(D(G), \partial)$ est un sous-complexe libre de $(C(G), \partial)$ et le quotient $(C(G)/D(G), \partial)$ s'identifie à un sous-complexe libre supplémentaire à $D(G)$ d'après la proposition 4.7.

Définition 4.9. On note $N(G) := C(G)/D(G)$ et on appelle le complexe de chaînes $(N(G), \partial)$ le *complexe simplicial normalisé de* G. On dit que $(D(G), \partial)$ est le *complexe simplicial dégénéré de* G.

On a alors le théorème suivant démontré par Eilenber et Mac Lane en 1952.

Théorème 4.10. *La projection canonique* $\pi : C(G) \to N(G)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Pour les non-homologiste, cela veut dire qu'il existe une application $i : N(G) \to C(G)$ telle que $i \circ \pi : C(G) \to C(G)$ est homotope (*cf.* remarque 3.3) à $\mathrm{id}_{C(G)}$ et $\pi \circ i : N(G) \to N(G)$ est homotope à $\mathrm{id}_{N(G)}$.

On serait tenter de considérer l'application $i_n : N_n(G) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}G)(G \setminus \{e\})^n \subset C_n(G)$ exhibée précédemment mais ce n'est pas le bon choix de supplémentaire de $D(G)$ pour ce théorème. Néanmoins, il est vrai qu'il existe un sous-complexe $M(G)$ de $C(G)$ tel que l'application composée $M(G) \to C(G) \to N(G)$ soit un isomorphisme de complexes et l'application $i : N(G) \xrightarrow{\sim} M(G) \to C(G)$ soit l'équivalence d'homotopie réciproque recherchée. La définition de $M(G)$ nécessite un peu plus de connaissance sur les modules simpliciaux. Nous ne démontrerons donc pas en détail ici ce théorème et on renverra la lectrice passionnée par les modules simpliciaux vers la démonstration du théorème 6.1 du chapitre VIII de [Mac12] ou du théorème 2.4 de la partie III.2 de [GJ09]. ✿

L'intérêt d'une équivalence d'homotopie est qu'elle préserve l'homologie des complexes et donc on peut déduire que le complexe augmenté $\widetilde{N}(G)$ (muni de l'augmentation $\varepsilon : N_0(G) = C_0(G) \to \mathbb{Z}$) est aussi une résolution libre de $\mathbb{Z}$. On peut tout de même vérifier ce résultat à la main.

Proposition 4.11. *Le complexe* $\left(\widetilde{N}(G), \partial\right)$ *est contractile donc acyclique.*

Démonstration. L'homotopie $h_n : C_n(G) \to C_{n+1}(G)$ passe tout simplement au quotient par $D_n(G)$ car $h_n(D_n(G)) \subset D_{n+1}(G)$:

$$h_n(g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_{n-1}) = (e, g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_{n-1}).$$

Ainsi, h_n induit $\overline{h}_n : N_n(G) \to N_{n+1}(G)$. Les identités vérifiées dans la proposition 3.4 pour h restent encore vraies pour $\overline{h}$ qui est donc une homotopie entre id_N et 0. ✿

Bibliographie

[Bro12] Kenneth S Brown. *Cohomology of groups*. T. 87. Springer Science & Business Media, 2012.

[GJ09] Paul G Goerss et John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.