MT00
Chapitre 1

Algèbre linéaire: Tour d'horizon

Equipe pédagogique de MT00
Elias Khoury
UTSEUS

Printemps 2024

Les systèmes linéaires

Notations

$$Ax = b$$

- A matrice des coefficients à n lignes et p colonnes
- Ecriture sous forme de système d'équations.
- b, second membre, vecteur de R^n.
- x, les inconnues, vecteur de R^p.
- Système homogène lorsque $b = \vec{0}$

Types de solutions

- Aucune solution.

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x+2y &= 9 \end{cases}$$

- Solution unique.

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x-y &= 1 \end{cases}$$

- Une infinité de solutions (droite, plan, espace,...).

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x+2y &= 10 \end{cases}$$

Résolution d'un système homogène

$\longrightarrow$ $\vec{0}$ toujours solution.

$\longrightarrow$ Méthode quasi générale.

- Descente de Gauss.
- Identification des inconnues principales.
- Basculer éventuellement les autres inconnues au second membre.
- Résolution par remontée.
- Obtention d'une base de solutions.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z+t & = & 0 \\ x+2y+z-4t & = & 0 \\ x+3y+4z-9t & = & 0 \\ x-y-8z+11t & = & 0 \end{array}\right.$$

Espaces vectoriels

Définitions

$\longrightarrow$ Structure associée à un espace de vecteurs E (opération addition) et à un corps K (formé de scalaires, opération multiplication) et vérifiant 9 axiomes.

$\longrightarrow$ Les ensembles les plus connus pour K: R ou C.

$\longrightarrow$ Les ensembles les plus connus pour E: R^n, C^n et $\mathcal{F}([a,b],R)$.

$\longrightarrow$ Pour les autres espaces vectoriels, on montre qu'ils sont des sous-espaces vectoriels.

Définitions

$\longrightarrow$ Structure associée à un espace de vecteurs E (opération addition) et à un corps K (formé de scalaires, opération multiplication) et vérifiant 9 axiomes.

$\longrightarrow$ Les ensembles les plus connus pour K: R ou C.

$\longrightarrow$ Les ensembles les plus connus pour E: R^n, C^n et $\mathcal{F}([a, b], R)$.

$\longrightarrow$ Pour les autres espaces vectoriels, on montre qu'ils sont des sous-espaces vectoriels.

Propriété

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \neq \emptyset$;
2. $\left[\overrightarrow{x} \in F, \overrightarrow{y} \in F \Rightarrow \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F\right]$ (stabilité pour l'addition) ;
3. $\left[\lambda \in K, \overrightarrow{x} \in F \Rightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F\right]$ (stabilité pour la multiplication scalaire).

Exemples et contre-exemples

- $F = \{(x, y) \in R^2 | x + y = 0\}$
- $F =$ combinaisons des vecteurs (1,2,3) et (4,5,0).
- $F =$ les polynômes de degré ≤ 4.
- $F =$ les polynômes P de degré ≤ 4 tels que P(1)=0.

- $F = \{(x, y) \in R^2 | x^2 = y^2\}$
- $F = \{(x, y) \in R^2 | x + y = 1\}$
- $F =$ les polynômes P de degré ≤ 4 tels que P(0)=1.
- $F =$ les polynômes P de degré 4.

Sous espace somme, somme directe

Propriété

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels du même e.v. E, alors $F \cap G$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Ce n'est pas le cas pour $F \cup G$ en général...

Sous espace somme, somme directe

Propriété

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels du même e.v. E, alors $F \cap G$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Ce n'est pas le cas pour $F \cup G$ en général...

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même e.v. E, le sous-ensemble H de E défini par $H = \{\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} / \overrightarrow{x} \in F, \overrightarrow{y} \in G\}$ est le **sous-espace vectoriel somme** de F et de G, noté $F + G$.

Sous espace somme, somme directe

Propriété

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels du même e.v. E, alors $F \cap G$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Ce n'est pas le cas pour $F \cup G$ en général...

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même e.v. E, le sous-ensemble H de E défini par $H = \{\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} / \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\}$ est le **sous-espace vectoriel somme** de F et de G, noté $F + G$.

Définition

On dit que F et G sont en **somme directe** si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et on note alors $H = F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Sous-espaces supplémentaires

Définition

On dit que deux s-e.v. F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires** si F et G sont en somme directe et si, en plus, on a $E = F \oplus G$, i.e. si l'espace somme de F et de G est E tout entier.

Sous-espaces supplémentaires

Définition

On dit que deux s-e.v. F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires** si F et G sont en somme directe et si, en plus, on a $E = F \oplus G$, i.e. si l'espace somme de F et de G est E tout entier.

Propriété

Si on a $H = F \oplus G$, alors

$$\forall \overrightarrow{z} \in H, \exists! \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in F \times G, \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$$

Sous-espaces supplémentaires

Définition

On dit que deux s-e.v. F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires** si F et G sont en somme directe et si, en plus, on a $E = F \oplus G$, i.e. si l'espace somme de F et de G est E tout entier.

Propriété

Si on a $H = F \oplus G$, alors

$$\forall \vec{z} \in H, \exists! \left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in F \times G, \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$$

Si on lit "montrer que $E = F + G$" (avec F et G deux sous-espaces de E), qu'est-ce que cela veut dire ?

Sous-espaces supplémentaires

Définition

On dit que deux s-e.v. F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires** si F et G sont en somme directe et si, en plus, on a $E = F \oplus G$, i.e. si l'espace somme de F et de G est E tout entier.

Propriété

Si on a $H = F \oplus G$, alors

$$\forall \vec{z} \in H, \exists! \left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in F \times G, \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$$

Si on lit "montrer que $E = F + G$" (avec F et G deux sous-espaces de E), qu'est-ce que cela veut dire ?

Exemple

Si on prend $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z\}$, *a-t-on* $E = F + G$ *? A-t-on* $E = F \oplus G$ *?*

Famille libre - Famille liée

Définition

Une famille de vecteurs de E $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p})$ est liée si au moins un des vecteurs peut s'exprimer en fonction d'une combinaison linéaire des autres i.e. s'il existe des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de K qui **ne sont pas tous nuls** tels que

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

Définition

Une famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ qui n'est pas liée est une famille **libre** (!) ce qui signifie que l'on a, dans ce cas :

$$\left[\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}\right] \Leftrightarrow [\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0]$$

$E = R^4$, $\vec{v_1} = (1,1,1,1)$, $\vec{v_2} = (1,0,0,0)$, $\vec{v_3} = (0,0,0,0)$, $\vec{v_4} = (3,2,2,2)$

$\longrightarrow$ On retire successivement les vecteurs dépendants afin d'obtenir la **dimension** de (l'espace engendré par) la famille de vecteurs.

Famille génératrice

Définition

Une famille de vecteurs $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p})$ est génératrice de E si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}$ i.e.

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists \lambda_1 \in K, \exists \lambda_2 \in K, \ldots, \exists \lambda_p \in K, \overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p}$$

$$E = R^2 \ , \ \vec{v_1} = (1,1) \ , \ \vec{v_2} = (1,0) \ , \ \vec{v_3} = (1,3) \ , \ \vec{v_4} = (0,0)$$

$$E = R^3 \ , \ \vec{v_1} = (1,1,0) \ , \ \vec{v_2} = (1,0,0) \ , \ \vec{v_3} = (2,2,0) \ , \ \vec{v_4} = (0,0,0)$$

Base et dimension

Définition

Une famille de vecteurs $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p})$ est une base de E si cette famille est libre et génératrice de E.

$\longrightarrow$ Le nombre p (s'il existe) de vecteurs de la base de E est la dimension de l'espace E (dimension finie).

$\longrightarrow$ Infinité potentielle de bases, mais toujours le même nombre d'éléments.

- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base (canonique)de R^3 (dimension 3).
- $\{(1,-1),(0,1)\}$ base de R^2 (dimension 2).
- $\{(1,X,X^2)\}$, base des polynômes de degré ≤ 2 (dimension 3).
- $\mathcal{F}([a,b],R)$ de dimension infinie.

Résultats “plus pratiques”

Théorème

Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ une famille de vecteurs de E. Il est équivalent de constater que :

1. $\mathcal{B}$ est une base ;
2. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice *minimale* ;
3. $\mathcal{B}$ est une famille libre *maximale*.

Propriété

Soient E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. Alors :

1. Toute famille libre comportant n vecteurs est une base ;
2. Toute famille génératrice comportant n vecteurs est une base ;
3. $\dim(F) \leq \dim(E)$;
4. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) (\leq \dim(E))$;
5. $\{E = F \oplus G\} \Leftrightarrow \{\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)\}$

Matrices

Application linéaire

Définition

E et F deux espaces vectoriels. f une application de E vers F est linéaire si elle vérifie:

$$\forall \vec{x} \in E \,, \forall \vec{y} \in E \,, \forall \lambda \in K \,, f(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

- $E = R^2, F = R^3 \;\; f(x, y) = (x + y, x - 3y, y)$
- $E = F = R^2$ Rotation de centre 0 et d'angle 90 degrés.
- $E = F = R^3$ Projection au sol parallèlement à (Oz).
- $E = F = R^2$ Symétrie axiale d'axe $y = x$.
- $E =$ polynômes de degré 2, $F = R^2 \;\; f(P) = (P(0), P'(1))$

Image et Noyau

Définition

E et F deux espaces vectoriels. f une application linéaire de E vers F.

- Le noyau de f est l'espace vectoriel ker(f)=$\{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = 0\}$ (ensemble des vecteurs de E où f s'annule)
- L'image de f est l'espace vectoriel $Im(f)$, partie de F et espace image des vecteurs de E par f.

- $E = R^2, F = R^3$ $f(x, y) = (x + y, x - 3y, y)$

  $ker(f) = (0, 0)$ base de Im(f)=$\{(1, 1, 0), (1, -3, 1)\}$
- $E = F = R^2$ Rotation de centre 0 et d'angle 90 degrés.

  $ker(f) = (0, 0)$ $Im(f) = R^2$
- $E = F = R^3$ Projection au sol parallèlement à (Oz).

  $ker(f) = (Oz)$ $Im(f) =$ le sol (z=0)

Image et Noyau (suite)

- $E = F = R^2$ Symétrie axiale d'axe $y = x$.

$$ker(f) = (0,0) \quad Im(f) = R^2$$

- $E =$ polynômes de degré 2, $F = R^2$ $f(P) = (P(0), P'(1))$

$$\text{base du noyau} P(X) = X^2 - 2X \quad Im(f) = R^2$$

$\longrightarrow$ On appelle rang de f la dimension de l'image $dim(Im(f))$.

Image et Noyau (suite)

- $E = F = R^2$ Symétrie axiale d'axe $y = x$.

$$ker(f) = (0,0) \quad Im(f) = R^2$$

- $E =$ polynômes de degré 2, $F = R^2$ $f(P) = (P(0), P'(1))$

$$\text{base du noyau} P(X) = X^2 - 2X \quad Im(f) = R^2$$

$\longrightarrow$ On appelle rang de f la dimension de l'image $dim(Im(f))$.

Théorème du rang

dim(E)=rg(f)+dim(ker(f))

$\longrightarrow$ L'utilisation de la dimension permet de faciliter de très nombreux calculs.

Matrices

$\longrightarrow$ Obtenir une écriture simple et complète de toutes les applications linéaires.

Définition

E et F deux espaces vectoriels.
E de dimension n avec une base B=$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$
F de dimension p avec une base B'=$(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_p})$
f est entièrement déterminée par la matrice A de f de B vers B', tableau à p lignes et n colonnes.
La j-ème colonne de A contient les coordonnée de $f(\vec{e_j})$ dans la base B'.

$\longrightarrow$ On choisit naturellement les bases les plus simples (canoniques) pour B et B'.

$\longrightarrow$ Matrices particulières: carrée, diagonale, triangulaire, identité, vecteur colonne, vecteur ligne.

- $E = R^2, F = R^3 \;\; f(x,y) = (x+y, x-3y, y)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices (suite)

- $E = F = R^2$ Rotation de centre 0 et d'angle 90 degrés.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $E = F = R^3$ Projection au sol parallèlement à (Oz).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $E = F = R^2$ Symétrie axiale d'axe $y = x$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $E =$ polynômes de degré 2, $F = R^2$ $f(P) = (P(0), P'(1))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opérations matricielles

- **Addition:** $C = A + B$. Addition terme à terme. Correspond à additioner deux applications lináires (même dimension).
- **Multiplication par une constante:** $C = \lambda A$. Chaque coefficient est multiplié par λ. Correspond à la matrice de l'application linéaire λf.
- **Produit matriciel:** $C = AB$. **Multiplication ligne par colonne**. Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. Correspond à la matrice de l'application linéaire de la **composition** des deux applications linéaires.

  $\longrightarrow$ On peut effectuer les opérations par bloc si les matrices sont simples.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations matricielles (suite)

- **Transposition:** $C = A^T$. Interversion lignes/colonnes: $c_{i,j} = a_{j,i}$.
- **Inverse :** $C = A^{-1}$. A doit être carrée et la famille des vecteurs colonnes libre. A^{-1} correspond à la matrice de l'application réciproque de f.

$\longrightarrow$ En particulier, $AA^{-1} = I$.
$\longrightarrow$ De nombreuses techniques sont employées pour inverser une matrice (système linéaire $AX = Y$, déterminant, polynôme minimal,...)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evaluation, Système linéaire, Noyau, Image

- Déterminer l'image d'un vecteur $\vec{y} = f(\vec{x})$ revient à effectuer le produit $Y = AX$ où Y est le vecteur colonne associé à $\vec{y}$
- Tout système linéaire peut se mettre sous forme matricielle $AX = Y$. Si la solution est unique, on peut alors écrire $A^{-1}Y = X$.
- Résoudre $f(\vec{x}) = \vec{0}$ revient à résoudre l'équation $AX = 0$. L'ensemble des vecteurs X vérifiant cette égalité est appelé noyau de A Ker(A).
- L'image de A Im(A) correspond à l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A.

Matrice de passage

$\longrightarrow$ On peut être amené à travailler d'une (ancienne) base $B{=}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ vers une (nouvelle) base $B'{=}(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_n})$.

$\longrightarrow$ La matrice de passage permet de faciliter les calculs de changement de base (pour un vecteur, une matrice,...).

Définition

La matrice de pasage P contient dans ses vecteurs colonnes les coordoonées des vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.

$$E = R^3 \ , \ B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \ , \ B' = \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \ ,$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Formules de changement de base

$\longrightarrow$ P est inversible et P^{-1} est naturellement la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne.

$\longrightarrow$ X coordonnées dans l'ancienne base et X' coordonnées dans la nouvelle base.

$$X = PX'$$

$\longrightarrow$ Soit une application linéaire f de E dans E. Soit A la matrice de f de l'ancienne base vers l'ancienne base. Soit A' la matrice de f de la nouvelle base vers la nouvelle base.

$$A' = P^{-1}AP$$

$\longrightarrow$ Si les espaces (et donc les bases) de départ et d'arrivée diffèrent, il existe une formule générale analogue de type

$$A' = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage des bases de E et Q est la matrice de passage des bases de F.

Déterminant

Définition

$\longrightarrow$ On peut associer à une matrice carrée de taille n une notion de n-D volume algébrique (longueur, aire, volume).

Définition

Le déterminant d'une matrice carrée vérifie les propriétés suivantes:

- Il s'agit d'une forme multi-linéaire (linéaire suivant chaque colonne)
- Un déterminant est nul si les colonnes sont liées.
- Les matrices identités ont un déterminant 1.

$\longrightarrow$ Il existe une définition alternative à base de permutations.
$\longrightarrow$ Ces deux définitions sont assez peu utilisées en pratique.

Opérations élémentaires

- Matrice de taille 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Matrice triangulaire (en particulier diagonale): le déterminant est le produit des éléments diagonaux
- Matrice contenant une ligne ou colonne de 0: le déterminant est nul.
- Si A est de taille n, det(λA)=$\lambda^n det(A)$
- Rajouter à une colonne une combinaison des autres colonnes.
- Rajouter à une ligne une combinaison des autres lignes.
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^T) = det(A)$

Développement suivant une colonne ou ligne

$\longrightarrow$ A effectuer de préférence lorsque de nombreux sont zéros sont présents sur une ligne ou colonne.

Définition

On appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le scalaire suivant:

$$cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

où A_{ij} est obtenue en retranchant la i-ème ligne et j-ème colonne de A.

Théorème

Développement suivant la i-ème ligne:

$$det(A) = \sum_{j=1..n} a_{ij} cof(a_{ij})$$

Développement suivant la j-ème colonne:

$$det(A) = \sum_{i=1..n} a_{ij} cof(a_{ij})$$

Exemples

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b_{ij} = min(i,j)$$

$$c_{ij} = max(i,j)$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

Propriétés

Théorème

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Théorème

Soit Co(A) la matrice formée des cofacteurs. Si A est inversible alors:

$$A^{-1} = \frac{Co(A)^T}{det(A)}$$

$\longrightarrow$ Propriété théorique forte, mais algorithmiquement peu intéressante.
$\longrightarrow$ On préfèrera un calcul direct ou l'utilisation d'un système linéaire pour inverser par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonalisation

Objectifs

$\longrightarrow$ Dans cette section, on ne considère que des applications de E dans E (endomorphismes de taille n).
$\longrightarrow$ On souhaite utiliser une application linéaire f et ses convolutions $f \circ f \circ f$.
On dispose de deux bases possibles:

- Une base $B = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ où la matrice associée A est quelconque, i.e. ne contenant que très peu de zéros.
- Une base $B' = (\vec{e_1'}, \ldots, \vec{e_n'})$ où la matrice associée A' est diagonale.

$\longrightarrow$ Quelle est la complexité K (nombre d'opérations) afin de calculer la p-ème convolée de f?

- Avec la base B, $K = (p-1) * ((2n-1)n^2)$.
- Avec la base B', $K = (p-1) * (n)$.

$\longrightarrow$ Crucial de pouvoir travailler avec des matrices diagonales.
$\longrightarrow$ Si on note λ_i le i-ème élément diagonal de A', cela signifie par définition que:

$$f(\vec{e_i'}) = \lambda_i \vec{e_i'}$$

$\longrightarrow$ Nous avons mis en évidence les propriétés des **valeurs propres** (λ_i) et des **vecteurs propres** ($\vec{e_i'}$)
$\longrightarrow$ On souhaite obtenir une **base de vecteurs propres**.

Résolution d'équations différentielles

$\longrightarrow$ P est inversible et P^{-1} est naturellement la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne.

$\longrightarrow$ homogène à coefficients constants et sans second membre.

$$y'' = 5y' - 6y \;\;,\;\; y(0) = 1 \;\;,\;\; y'(0) = 0$$

$$H(t) = D = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = K\vec{v_1}e^{2t} + L\vec{v_2}e^{3t}$$

$$y(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

Systèmes différrentiels

$\longrightarrow$ Systèmes couplés.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) - y(t) \end{array}\right.$$

$$x(0) = y(0) = 1$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -4e^{t} + 5e^{2t} \\ y(t) & = & -6e^{t} + 5e^{2t} \end{array}\right.$$

Espaces euclidiens

Produit scalaire

⟶ Formaliser la notion de distance.

Définition

Un produit scalaire vérifie:

- forme bilinéaire
- forme symétrique
- forme positive
- forme définie

⟶ Produit scalaire usuel dans R^n.
⟶ Produit scalaire à base d'intégrales.
⟶ Produit scalaire à base de matrices rélles symétriques définies positives.
⟶ Prpriété de diagonalisation des matrices symétriques rélles.

Norme et distance

Définition

Une norme vérifie:

- positivité
- séparation
- homogénéité
- inégalité triangulaire

$\longrightarrow$ norme la plus classique: la norme euclidienne.
$\longrightarrow$ Norme 1,2,infinie.
$\longrightarrow$ Définir une distance à partir d'une norme.
$\longrightarrow$ distance euclidienne, distance de Manhattan (taxicab), distance de Tchebychev (chessboard)
$\longrightarrow$ Autres distances (orthodromique)

Orthogonalité

$\longrightarrow$ Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

$\longrightarrow$ famille orthonormale.

$\longrightarrow$ Gain en terme de complexité à utiliser une base orthonormale

$\longrightarrow$ La notion d'orthogonalité est essentielle pour définir le principe de plus court chemin, de distance à une droite/plan, de projection.

$\longrightarrow$ Existence de procédé d'orthogonalisation en présence d'une base quelconque.
$\longrightarrow$ Matrices orthogonales ($P^T P = I$).

Exemple de problèmes d'optimisation dans les espaces euclidiens

$\longrightarrow$ **La droite des moindres carrés** ($Y = X\beta + \varepsilon$)

$$\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$\longrightarrow$ Traitement des résidus à l'aide de modèles statistiques (régression linéaire multiple gaussienne).

$\longrightarrow$ **Machine Learning - Support Vecteur Machine - Méthode à noyau.**
$\longrightarrow$ Hyperplan (affine) de séparation (poids et biais).
$\longrightarrow$ Distance d'un point à un hyperplan, problème de max-min (minimisation).
$\longrightarrow$ Méthode à noyau (kernel trick).
$\longrightarrow$ Généralisation multiclasse.

$\longrightarrow$ **Analyse en composantes principales**
$\longrightarrow$ Matrice de covariance.
$\longrightarrow$ Trouver l'axe sur lequel la dispersion est la plus forte (variance).
$\longrightarrow$ Axes les plus pertinents correspondent à obtenir des vecteurs propres associés aux valeurs propres de plus grande amplitude.
$\longrightarrow$ Première étape avant d'effectuer une classification (CAH).