Elipse de Kepler

Un planeta sigue una órbita elíptica representada en coordenadas cartesianas por la ecuación:

$$a\,y^2 + b\,xy + cx + dy + e = x^2$$

Se pide, ajustar los parámetros de esta ecuación, con las 10 observaciones siguientes de la posición del planeta:

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

Resolución:

Lo más importante de este ejercicio es observar que la función aproximante está definida en forma implícita: $f(x, y, a, b, ...) = 0$ y no explícita $y = f(x, y, c_1, c_2, ...)$ como hasta ahora había ocurrido. Sin embargo la función sigue siendo lineal en los parámetros (a, b, c...) y como veremos, su resolución no presenta mayores problemas.

Efectivamente, basta observar, que si obligamos a las 10 observaciones a verificar la ecuación, obtenemos directamente un sistema sobredeterminado de 10 ecuaciones con 5 incógnitas, que podremos resolver aproximadamente a través de la expresión matricial (6) del sistema de ecuaciones normales.

Directamente de la tabla de observaciones::

$$A\mathbf{c} \approx \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.1521 & 0.3978 & 1.0200 & 0.3900 & 1.0000 \\ 0.1024 & 0.3040 & 0.9500 & 0.3200 & 1.0000 \\ 0.0729 & 0.2349 & 0.8700 & 0.2700 & 1.0000 \\ 0.0484 & 0.1694 & 0.7700 & 0.2200 & 1.0000 \\ 0.0324 & 0.1206 & 0.6700 & 0.1800 & 1.0000 \\ 0.0225 & 0.0840 & 0.5600 & 0.1500 & 1.0000 \\ 0.0169 & 0.0572 & 0.4400 & 0.1300 & 1.0000 \\ 0.0144 & 0.0360 & 0.3000 & 0.1200 & 1.0000 \\ 0.0169 & 0.0208 & 0.1600 & 0.1300 & 1.0000 \\ 0.0225 & 0.0015 & 0.0100 & 0.1500 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0404 \\ 0.9025 \\ 0.7569 \\ 0.5929 \\ 0.4489 \\ 0.3136 \\ 0.1936 \\ 0.0900 \\ 0.0256 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema de ecuaciones normales es:

$$A^T A \cdot \mathbf{c} = A^T \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.0441 & 0.1246 & 0.4021 & 0.1411 & 0.5014 \\ 0.1246 & 0.3611 & 1.1965 & 0.4021 & 1.4262 \\ 0.4021 & 1.1965 & 4.3645 & 1.4262 & 5.7500 \\ 0.1411 & 0.4021 & 1.4262 & 0.5014 & 2.0600 \\ 0.5014 & 1.4262 & 5.7500 & 2.0600 & 10.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3611 \\ 1.0618 \\ 3.6263 \\ 1.1965 \\ 4.3645 \end{pmatrix}$$

y una vez resuelto, la aproximación a la órbita elíptica queda:

$$\boxed{x^2 + 2.6356\,y^2 - 0.1436\,xy - 0.5514\,x - 3.2229\,y = 0.4329}$$

La representación gráfica se puede ver en la siguiente figura:

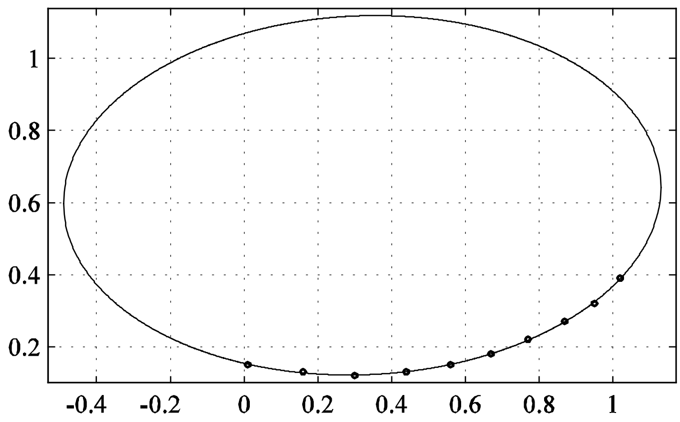

Figura 1

Nota: En este ejercicio no se pretende que el alumno dedique su tiempo a calcular y resolver manualmente el sistema de ecuaciones (proceso tedioso y largo por tratarse de 10 observaciones, que se ha resuelto en el ordenador) sino a observar y conocer la argumentación conceptual, para realizar el cálculo manual en casos de menos observaciones e incógnitas.