Proyecto: “Técnicas numéricas en la resolución de la ecuación de onda”

Santiago Fada - Juliana Marquez

23 de noviembre de 2024

Resumen

Este proyecto resuelve numéricamente la ecuación de onda en un dominio rectangular usando el método de Lax-Wendroff. Se aplican condiciones de frontera de flujo cero para simular un sistema cerrado. Los resultados muestran la propagación y reflexión de la onda, destacando la formación de patrones de interferencia. La simulación proporciona una herramienta para estudiar la dinámica de ondas en medios confinados.

1. Introducción

El modelo de la ecuación de onda [1], describe la propagación de ondas en un medio continuo. Esta es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, de tipo hiperbólico, que describe cómo varía una magnitud, como lo puede ser desplazamiento o la presión, en función del tiempo y el espacio. Este tipo de ecuación es fundamental en la física, ya que permite modelar una amplia variedad de fenómenos naturales, como las ondas sonoras, electromagnéticas y sísmicas.

La propagación de ondas se puede observar en diversos contextos, como la acústica, donde describe la transmisión de sonidos a través de un medio, o en las telecomunicaciones, donde las señales electromagnéticas viajan por diferentes tipos de conductores. Asimismo, la ecuación es clave en la ingeniería civil y en la geofísica para estudiar la propagación de ondas sísmicas y su interacción con el terreno.

Este modelo también se aplica para simular el comportamiento de las ondas bajo condiciones de contorno específicas, como aquellas que representan sistemas cerrados, donde las ondas se reflejan en los límites del dominio. La resolución numérica de la ecuación se realiza mediante técnicas avanzadas, como las diferencias finitas, adaptadas al contexto específico del problema. Este enfoque es esencial porque, en muchos casos, no es posible obtener una solución analítica o directa, por lo que se utilizan diversos métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales, lo que permite abordar la simulación de fenómenos dinámicos complejos de manera efectiva [4], [?].

2. Teoría

La ecuación de onda es un tipo de **ecuación diferencial parcial** (EDP), es decir, una ecuación que involucra derivadas parciales de una función desconocida en varias variables independientes. Las EDPs son fundamentales en la física y las matemáticas aplicadas, ya que permiten modelar fenómenos continuos en el tiempo y el espacio, como la propagación de calor, flujo de fluidos, y, en este caso, la propagación de ondas.

En general, las EDPs se pueden clasificar en tres tipos principales: elípticas, parabólicas e hiperbólicas, dependiendo de las propiedades de sus soluciones y la naturaleza de la propagación de la información en el medio:

- **Ecuaciones elípticas**: Estas ecuaciones, como la ecuación de Laplace, son típicas de fenómenos en equilibrio, donde no hay una dependencia explícita del tiempo.
- **Ecuaciones parabólicas**: Representan procesos difusivos, como la ecuación de difusión o de calor, donde la información se propaga de manera gradual a través del medio.

- **Ecuaciones hiperbólicas**: Este tipo de ecuaciones, como la ecuación de onda, describe la propagación de fenómenos ondulatorios y se caracteriza por tener soluciones que se propagan en el tiempo sin disipación, permitiendo la formación de frentes de onda definidos.

La ecuación de onda es entonces una EDP de tipo hiperbólico, ya que modela la propagación de ondas en función del tiempo y del espacio. Su formulación general en dos dimensiones para una magnitud $u(x, y, t)$, que puede representar variables como desplazamiento o presión, es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = D\nabla^2 u \tag{1}$$

donde D es el parámetro de propagación que depende del medio, y ∇^2 representa el operador Laplaciano, definido en coordenadas cartesianas para dos dimensiones como:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

Esta ecuación permite estudiar cómo se comporta una onda en un dominio rectangular de dimensiones $L_x \times L_y$. La resolución de esta ecuación es fundamental en simulaciones numéricas para entender cómo las ondas interactúan con distintos materiales y condiciones de frontera.

Existen diversos métodos numéricos disponibles para la resolución de este tipo de ecuaciones, cada uno con sus propias ventajas y limitaciones, que varían según las características y requisitos específicos del problema a resolver. Entre los métodos más comunes se encuentran: el esquema Upwind, Richtmyer, MacCormack, y Lax-Wendroff el cual implementaremos en este informe.

3. Trabajo Realizado

La ecuación de ondas que se resuelve en este trabajo es la ec (1), donde $u(x, y, t)$ representa el desplazamiento de la onda en función del tiempo t y las coordenadas espaciales x e y, D es un parámetro relacionado con la velocidad de propagación de la onda, en este caso ∇^2, el operador Laplaciano, describe cómo se distribuye la onda en el espacio.

Las condiciones de frontera se establecen como condiciones de flujo cero en todos los bordes del dominio, lo que significa que no hay flujo de la onda a través de los bordes. Estas condiciones de frontera se expresan como:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L_x, y, t) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, L_y, t) = 0, \tag{4}$$

.

Estas condiciones reflejan un sistema físico donde las ondas no pueden escapar del dominio, como ocurre en ciertos medios restringidos.

3.1. Método de Lax-Wendroff

El método de Lax-Wendroff es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, como la ecuación de onda. Este método es explícito y de segundo orden en el tiempo y el espacio, lo que significa que proporciona una aproximación de mayor precisión que los métodos de primer orden.

El método de Lax-Wendroff para la ecuación de onda se basa en una discretización central tanto en el tiempo como en el espacio, utilizando un esquema de diferencias finitas. Para la ecuación de onda bidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = D\nabla^2 u, \tag{5}$$

Se obtiene una actualización temporal para la amplitud de la onda en función de los valores en el tiempo anterior, el tiempo actual y los puntos vecinos en el espacio.

Aplicamos el método de Lax-Wendroff para resolver la ecuación de onda en un dominio rectangular con condiciones de flujo cero, como se describe en las ecuaciones (3) y (4), se optó por una simetría inicial que refleje las características del problema físico y las condiciones impuestas por el dominio.

Las condiciones de frontera de flujo cero, imponen que no haya flujo a través de los bordes del dominio, lo que provoca que las ondas se reflejen en las fronteras sin propagarse fuera del dominio. Dado que el sistema no favorece ninguna dirección en particular, se asume que la solución de la onda será simétrica, lo que facilita la implementación. Este enfoque de simetría inicial no solo es coherente con las condiciones físicas del problema, sino que también ayuda a reducir los errores numéricos, ya que la forma de la onda es consistente con las condiciones de frontera. Además, facilita una implementación precisa y estable del método numérico a lo largo de la simulación. Este tipo de condiciones se eligen comúnmente para modelar sistemas físicos cerrados, como una cuerda fija en ambos extremos, donde la onda no puede escapar del dominio y, por lo tanto, su derivada espacial en los bordes es cero. Esta suposición es crucial en muchos problemas físicos

Se utilizó el método para aproximar la propagación de la onda en función del tiempo y las coordenadas espaciales x y y.

El esquema del método utilizado para actualizar el valor de $u(x, y, t)$ en el tiempo $t + 1$ es el siguiente:

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n-1} + C_x \left(u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}\right) + C_y \left(u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}\right), \tag{6}$$

donde C_x y C_y son los coeficientes que dependen del parámetro D, los pasos de malla en el espacio x y y, y el paso de tiempo dt. Los coeficientes C_x y C_y deben cumplir con la condición de estabilidad CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Esta condición es fundamental para garantizar que el método de Lax-Wendroff sea numéricamente estable. Esta condición establece que el tamaño del paso de tiempo dt debe ser lo suficientemente pequeño en relación con el tamaño de la malla espacial (Δx y Δy) y la velocidad de propagación D, de manera que la onda no "salte"más de un paso espacial en cada actualización temporal. Matemáticamente, esto se expresa como

$$C_x = \frac{D \cdot dt}{2\Delta x^2} < 1 \quad \text{y} \quad C_y = \frac{D \cdot dt}{2\Delta y^2} < 1. \tag{7}$$

Si estas condiciones no se cumplen, la simulación puede volverse inestable, con el crecimiento de errores numéricos que distorsionan el comportamiento de la onda simulada. La condición CFL garantiza que las soluciones numéricas sean físicamente razonables y que la propagación de la onda se modele correctamente en cada paso de tiempo.

Para la simulación, realizamos una implementación que sigue el esquema numérico mencionado anteriormente. A continuación, se describe cómo lo implementamos:

1. **Definición de la malla espacial y los parámetros:** Se define la malla espacial x y y, y el número de pasos en el tiempo N_t. Se calcula el tamaño de la malla en cada dirección Dx y Dy, y se asegura que la condición CFL se cumpla para evitar inestabilidad en la simulación.

2. **Condiciones iniciales:** Se establece la condición inicial de la onda como una distribución gaussiana centrada en el medio del dominio, es decir:

$$u(x, y, 0) = e^{-100\left((x-0.5)^2+(y-0.5)^2\right)}. \tag{8}$$

3. **Actualización en el tiempo:** En cada paso temporal, el valor de $u(x, y, t)$ se actualiza según el esquema de Lax-Wendroff, utilizando los valores de u en los tiempos anteriores y actuales, así como los valores en los puntos vecinos de la malla.

4. **Condiciones de frontera (flujo cero):** Se aplican condiciones de flujo cero en los bordes del dominio mediante un esquema de diferencias finitas de primer orden, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L_x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, L_y, t) = 0. \tag{9}$$

   Esto asegura que no haya propagación de la onda más allá de los límites del dominio.

5. **Visualización:** Finalmente, se generan subgráficos de la amplitud de la onda en 6 tiempos diferentes para ilustrar la evolución temporal de la onda en el dominio bidimensional.

El método de Lax-Wendroff fue elegido debido a su capacidad para resolver de manera eficiente la ecuación de ondas en dominios bidimensionales con condiciones de frontera complejas, como las de flujo cero en este caso. Este método proporciona una solución robusta y precisa.

En el siguiente gráfico 1, se observa cómo varía la amplitud de la onda a lo largo del tiempo, comenzando con una distribución gaussiana inicial centrada en el dominio. Cada subgráfico muestra el comportamiento de la onda en tiempos específicos. Los ejes x e y representan las coordenadas espaciales del dominio, mientras que el eje z muestra la amplitud de la onda en cada punto del espacio para los diferentes tiempos.

La visualización de los resultados es fundamental para comprender la evolución temporal de la onda, destacando las interacciones con las condiciones de frontera de flujo cero, que impiden la propagación de la onda más allá de los bordes del dominio.

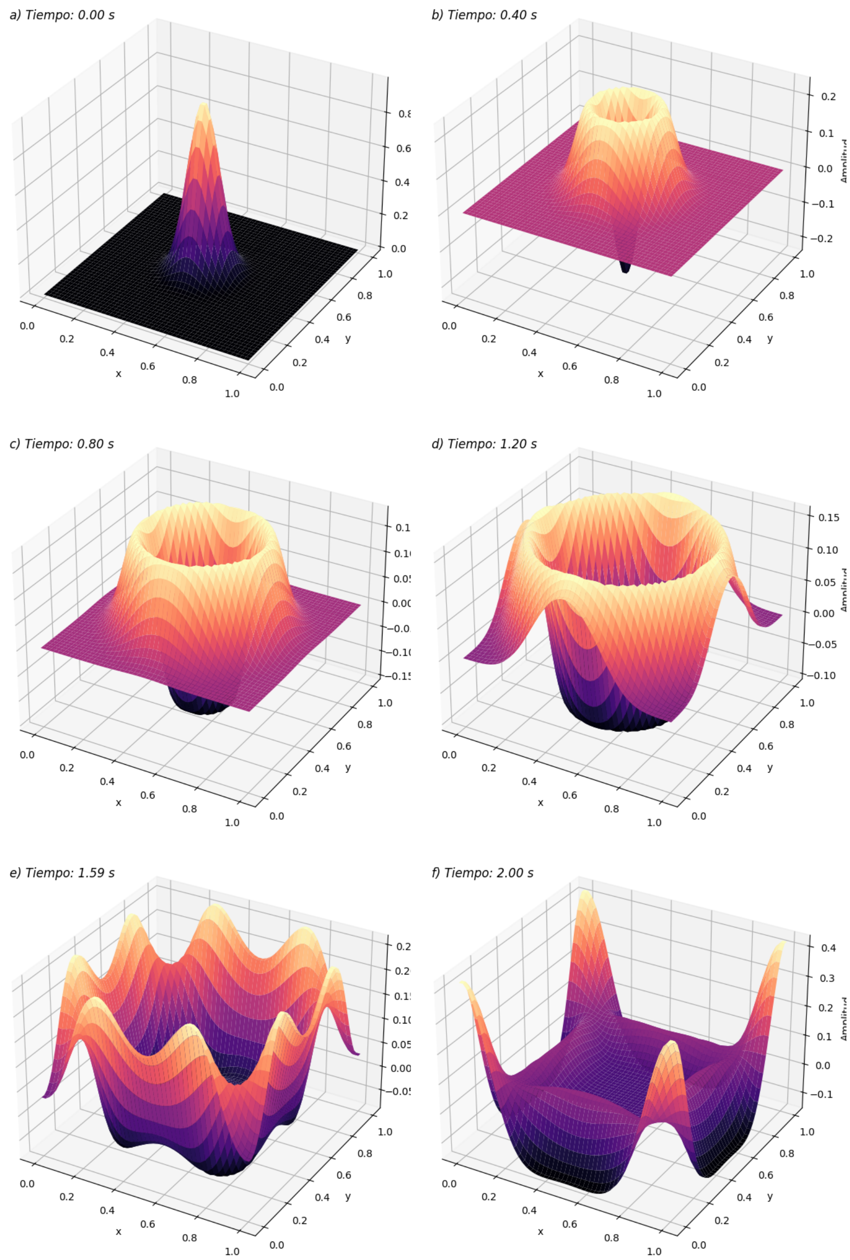

Figura 1: Propagación de la onda en el dominio bidimensional con condiciones de flujo cero, mostrando la amplitud de la onda en función de x, y y t.

Los subgráficos muestran la evolución de la onda en 6 tiempos diferentes.

La evolución de la onda en el dominio bidimensional se muestra en la **Figura 1**. El comportamiento de la onda se describe a continuación en términos de su propagación a lo largo del tiempo:

- **Subfigura a)**: Al inicio, la onda tiene una forma gaussiana centrada en el dominio ($x = 0.5, y = 0.5$), con la amplitud máxima en el centro y disminuyendo hacia los bordes. Esta distribución representa una perturbación localizada.

- **Subfigura b)**: En los tiempos iniciales, la onda comienza a expandirse desde el centro en las direcciones x y y, formando un anillo de amplitud positiva. Se observa una pequeña depresión en el centro, lo que indica una inversión de fase.

- **Subfigura c)**: La onda sigue expandiéndose, y el anillo de amplitud positiva continúa su propagación. La amplitud negativa del centro se hace más notable, manteniendo la simetría del sistema.

- **Subfigura d)**: Cuando la onda alcanza los bordes del dominio, se refleja debido a las condiciones de frontera de flujo cero. Este rebote genera una superposición entre las ondas incidentes y reflejadas, creando patrones de interferencia típicos de sistemas cerrados.

- **Subfigura e)**: La interacción entre las ondas incidentes y reflejadas da lugar a un patrón más complejo, con nuevas áreas de picos y depresiones, reflejando la complejidad de la propagación en el dominio cerrado.

- **Subfigura f)**: Finalmente, en esta etapa, la onda interactúa completamente con los bordes del dominio. La propagación estabiliza un patrón definido con zonas de interferencia constructiva y destructiva, un comportamiento característico de los sistemas donde las ondas permanecen confinadas.

Este patrón describe cómo la onda, inicialmente centrada en el dominio y con una forma gaussiana, se propaga hacia los bordes, donde se refleja y rebota. Al interactuar con las ondas que ya están presentes, se genera un patrón de interferencia, con zonas definidas de máxima y mínima amplitud.

4. Conclusiones

Se obtuvieron los resultados esperados al simular la propagación de ondas bajo las condiciones iniciales planteadas, lo que confirma la validez del modelo implementado y su capacidad para representar de manera adecuada el fenómeno físico en cuestión. Los resultados iniciales muestran un buen comportamiento del método numérico en términos de estabilidad y precisión para tiempos cortos y valores moderados del parámetro D.

Para futuras simulaciones, la implementación de diferentes métodos numéricos podría ofrecer una comparación más enriquecedora y una comprensión más profunda de la propagación de ondas en distintos medios. Como se ha observado, el método puede ser altamente sensible a variaciones en el parámetro D, que depende del contexto físico donde se aplica la ecuación. Además, las condiciones de CFL pueden resultar muy restrictivas, especialmente cuando la capacidad de cómputo es limitada o D toma valores elevados.

Durante el trabajo, también nos percatamos que a tiempos grandes, el modelo tiende a volverse inestable, lo que subraya la importancia de seleccionar un esquema numérico que garantice tanto estabilidad como precisión a lo largo de la simulación, por lo que no aconsejamos el esquema de Lax-Wendroff si se requieren simulaciones muy largas .

A. Resultados Computacionales

Pueden ver el código en este Google colab, en el mismo se encuentra la implementación completa del método así como los múltiples experimentos variando el parámetro D, que no se pusieron en este informe por el tamaño y prolijidad de los gráficos.

Referencias

[1] Fourier, J. B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur.*

[2] Li, Z., Qiao, Z., & Tang, T. (2017). *Numerical Solution of Differential Equations: Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods.* Cambridge University Press.

[3] Mitsotakis, D. (2023). *Computational Mathematics: An Introduction to Numerical Analysis and Scientific Computing with Python.* Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9781003287292

[4] Sumets, P. (2022). *Computational Framework for the Finite Element Method in MATLAB® and Python.* Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9781003265979