Econometría I
Máxima verosimilitud
Mínimos cuadrados restringidos

Julián David Rojas Aguilar
Hernando Hernández Lasso

Bogotá, 13 de junio de 2020

Función de verosimilitud

Método de **Newton–Rapson**:

$$\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t - \left[\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta\partial\beta'} \right)_{\beta=\hat{\beta}_t} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial\beta} \right)_{\beta=\hat{\beta}_t}$$

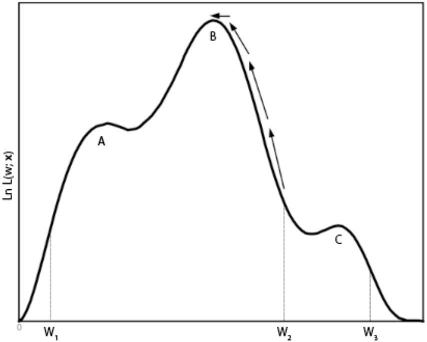

Figura 1: Función Log-Verosimilitud para un modelo de un parámetro.

Función de verosimilitud
Métodos numéricos

1. **Condiciones iniciales**:
   - El escoger los valores iniciales puede ser un proceso aleatorio o por "adivinanza", *naive guess*.
   - Se puede estimar el modelo por OLS y tomar los estimadores como valores iniciales.
   - Si el modelo es **no lineal** se debe tener en cuenta la posibilidad de caer en óptimos locales. Se puede hacer múltiples evaluaciones con distintos valores iniciales para corroborar.

   Advertencia: Si el modelo de regresión **es lineal**, la estimación vía OLS y ML darán los mismos resultados.
2. **Criterios de convergencia**: Es válido el cumplimiento de al menos uno de los siguientes criterios, a saber:
   - El valor numérico de la función objetivo varía menos que un umbral dado previamente establecido, al pasar de β_t a β_{t+1}, por ejemplo, $\hat{\beta}_{t+1} - \hat{\beta}_t < \delta$.
   - El gradiente de la función objetivo, evaluado en los puntos actuales, debe ser lo suficientemente pequeño.
   - El número máximo de iteraciones que se ha establecido ha sido alcanzado.

Julián David Rojas Aguilar
Hernando Hernández Lasso

3. **Dificultades prácticas**: El algoritmo tiene dificultades para encontrar una solución al problema de optimización, se detiene y devuelve un conjunto sub–óptimo de parámetros, como consecuencia de:
   - Que se excede el máximo número de iteraciones.
   - Que la carga de información en la función de verosimilitud, al menos en ese punto, es baja y, por consiguiente, la curva es plana.
   - Una excesiva sobreparametrización del modelo.

Para más información, véase los libros de las referencias.

Julián David Rojas Aguilar
Hernando Hernández Lasso

Mínimos cuadrados restringidos

Ecuaciones

Los estimadores se derivan de:

$$\widetilde{\beta}_{\text{cls}} = \widehat{\beta}_{\text{ols}} - \left(X'X\right)^{-1} R \left[R' \left(X'X\right)^{-1} R\right]^{-1} \left(R'\widehat{\beta}_{\text{ols}} - c\right)$$

Así mismo, asumiendo homocedasticidad, la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros viene de:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{\tilde{\beta}} &= \mathrm{V}\left[\widetilde{\beta}_{\text{cls}} | \boldsymbol{X}\right] \\ &= \left(\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} - \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{R}'\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{R}\right)^{-1} \boldsymbol{R}'\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

Por simplicidad, se utiliza:

$$\boldsymbol{V}_{\tilde{\beta}} = (I - \boldsymbol{D}\boldsymbol{R}')\boldsymbol{V}_{\hat{\beta}_{ols}}(I - \boldsymbol{D}\boldsymbol{R}')'$$

Donde:

$$\boldsymbol{D} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} - \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{R}' \left[\boldsymbol{R}'\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{R}\right]^{-1}$$

Mínimos cuadrados restringidos
Mankiw, Romer & Weil (1992)

Julián David Rojas Aguilar
Hernando Hernández Lasso

Motivación:

- En el modelo pionero, (Solow, 1956) empleó el capital, K_t, el trabajo, L_t, la tecnología, A_t. Así mismo, unos parámetros constantes, para el crecimiento de la tecnología, g, de la población, n, y la depreciación del capital, δ.
- En (Mankiw, Romer y Weil, 1992) se decidió incorporar el capital humano dado que:
  1. Aumentos en la inversión –o, lo que es lo mismo, el ahorro, dado el supuesto de economía cerrada–, $\uparrow s$, o disminuciones en el crecimiento de la población, $\downarrow n$, llevan a mayores ingresos y, por consiguiente, un incremento en el capital humano.
  2. El capital humano está correlacionado con el ahorro, s, y la tasa de crecimiento de la población, n, por lo que emitirlo conlleva a un sesgo de variable omitida.

  Este tiene, entonces, la misma depreciación que el capital, δ.
- El modelo replicado es tal que:

$$\ln\left[\frac{Y(t)}{L(t)}\right] = \ln A(0) + gt - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n+g+\delta) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(s_h)$$

Ecuación (11) en el documento original.

Mínimos cuadrados restringidos

Mankiw, Romer & Weil (1992)

Así pues, las variables empleadas son: Como endógena:

- Crecimiento del PIB de 1960 a 1985 en los países no productores de petróleo, medido como el logaritmo del PIB per cápita.

Y, como exógenas:

- El logaritmo del PIB en nivel en 1960.
- El logaritmo del ratio entre Formación bruta de capital y PIB.
- El logaritmo de la suma entre n, g y δ.
- El logaritmo del ratio entre la población que se encuentra cursando la secundaria y aquella que se encuentra en edad de trabajar (15-65 años).

Julián David Rojas Aguilar
Hernando Hernández Lasso

Referencias

Byrd, Richard H. y col. (1995). «A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization». En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 16.5, páginas 1190-1208.

Fletcher, R. (2013). *Practical Methods of Optimization*. Wiley.

Fletcher, R. y C. M. Reeves (ene. de 1964). «Function minimization by conjugate gradients». En: *The Computer Journal* 7.2, páginas 149-154.

Kelley, C.T. (2003). *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. Fundamentals of Algorithms. Society for Industrial y Applied Mathematics.

Mankiw, N. Gregory, David Romer y David N. Weil (mayo de 1992). «A Contribution to the Empirics of Economic Growth*». En: *The Quarterly Journal of Economics* 107.2, páginas 407-437.

Solow, Robert M. (feb. de 1956). «A Contribution to the Theory of Economic Growth». En: *The Quarterly Journal of Economics* 70.1, páginas 65-94.