Tópicos de Econometría II
Monitoria

Jorge Enrique Muñoz Ayala
Julián David Rojas Aguilar

Bogotá, 26 de septiembre de 2020

Contenido

Hoja de ruta

- La serie de tiempo observada es la suma del componente cíclico y tendencial, pues el estacional tuvo que haber sido removido previamente. Luego,

$$y_t = \tau_t + c_t, \text{ para } t = 1, 2, \ldots, T. \tag{1}$$

- Para separar los componentes, es necesario asumir que:
  - Los errores son pequeños en comparación del componente cíclio, calcular el último requeriría, tan solo, de la diferencia entre la serie observada y el componente tendencial.
  - El componente tendencial varía "suavemente" a lo largo del tiempo.

- Así, el proceso de estimación requiere desarrollar:

$$\underset{\{\tau_t\}_{t=0}^{T+1}}{\text{Mín}} \underbrace{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \tau_t)^2}_{\text{Desviaciones de la tendencia}} + \lambda_{HP} \underbrace{\sum_{t=1}^{T} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2}_{\text{Medida de suavidad}} \tag{2}$$

Donde:

- Teóricamente, las desviaciones de y_t con respecto a su tendencia en largos períodos de tiempo deberían ser, en promedio, cercanas a cero.
- El parámetro λ_{HP} es un número positivo que penaliza la variabilidad en el componente tendencial de la serie. A mayor sea λ_{HP}, más suave la solución.
- Para el primer término, a más cercano sea τ_t de y_t, mejor. Para el segundo, a más cerca sea la segunda diferencia de τ_t a cero, mejor.
- Los valores comúnmente empleados son:
  - 100 para datos anuales.
  - 1.600 para datos trimestrales.
  - 14.400 para datos mensuales.

- Así, la secuencia resultante es:

$$\tau_t = \sum_{s=1}^{T} \alpha_{t,s} y_s \tag{3}$$

Introducción

- Para un λ_{HP} lo suficientemente grande, en el óptimo, $\tau_{t+1} - \tau_t$ deberían estar cerca a una constante arbitraria β, tal que $\tau_t \approx g_0 + \beta t$. Es decir, cuando $\lambda_{HP} \to \infty$, la solución de (2) es el MCO de un modelo de tendencia lineal con respecto al tiempo.
- Cuando los errores no son pequeños comparados con el componente cíclico, no es posible seleccionar un $\lambda_{HP} \to \infty$.
- Si el componente cíclico, primer término de (2), y la segunda diferencia de los componentes tendenciales, segundo término de (2), fuesen idénticos e independientemente distribuidos, $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ y $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$, respectivamente, entonces la *esperanza condicional* de τ_t, dadas las observaciones, sería la solución a (2) cuando $\sqrt{\lambda} = \sigma_1 / \sigma_2$.

- La ventaja de emplear la solución exacta es que las observaciones al inicio y al final del período de muestra no se pierden.
- Como cualquier filtro, altera las propiedades de correlación serial de la información, por lo que los reportes deben ser interpretados con cuidado.

Sea el problema de minimización:

$$\underset{\{\tau_t\}_{t=0}^{T}}{\text{Min}}\, V = \sum_{t=0}^{T}[(y_t - \tau_t)^2] + \lambda_{HP}\sum_{t=1}^{T-1}[(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \tag{4}$$

Luego, desarrollando la sumatoria, se sabe que V es:

$$\begin{aligned}
V = {} & (y_0 - \tau_0)^2 + (y_1 - \tau_1)^2 + (y_2 - \tau_2)^2 + \cdots + (y_{T-2} - \tau_{T-2})^2 + \dots \\
& + (y_{T-1} - \tau_{T-1})^2 + (y_T - \tau_T)^2 + \lambda_{HP}\{[(\tau_2 - \tau_1) - (\tau_1 - \tau_0)]^2 \\
& + [(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_2 - \tau_1)]^2 + [(\tau_4 - \tau_3) - (\tau_3 - \tau_2)]^2 + \dots \\
& + [(\tau_{T-2} - \tau_{T-3}) - (\tau_{T-3} - \tau_{T-4})]^2 \\
& + [(\tau_{T-1} - \tau_{T-2}) - (\tau_{T-2} - \tau_{T-3})]^2 \\
& + [(\tau_T - \tau_{T-1}) - (\tau_{T-1} - \tau_{T-2})]^2\}
\end{aligned}$$

De lo anterior, las derivadas de V con respecto a τ_t, para $t = 0, 1, 2, \dots, T-2, T-1, T$ o, lo que es lo mismo, las condiciones de primer orden, son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau_0} &= -2(y_0 - \tau_0) + 2\lambda_{HP}[(\tau_2 - \tau_1) - (\tau_1 - \tau_0)] \\
&= -2y_0 + 2\tau_0 + 2\lambda_{HP}\tau_2 - 4\lambda_{HP}\tau_1 + 2\lambda_{HP}\tau_0 \\
&= -y_0 + (\lambda_{HP} + 1)\tau_0 - 2\lambda_{HP}\tau_1 + \lambda_{HP}\tau_2 \\
&= 0, \text{ luego:} \\
y_0 &= (\lambda_{HP} + 1)\tau_0 - 2\lambda_{HP}\tau_1 + \lambda_{HP}\tau_2 \qquad (5) \\
\frac{\partial V}{\partial \tau_1} &= -2(y_1 - \tau_1) + 2\lambda_{HP}[(\tau_2 - \tau_1) - (\tau_1 - \tau_0)](-2) \\
&\quad + 2\lambda_{HP}[(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_2 - \tau_1)] \\
&= -y_1 - 2\lambda_{HP}\tau_0 + (5\lambda_{HP} + 1)\tau_1 - 4\lambda_{HP}\tau_2 + \lambda_{HP}\tau_3 \\
&= 0, \text{ luego:} \\
y_1 &= -2\lambda_{HP}\tau_0 + (5\lambda_{HP} + 1)\tau_1 - 4\lambda_{HP}\tau_2 + \lambda_{HP}\tau_3 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau_2} &= -2(y_2 - \tau_2) + 2\lambda_{HP}[(\tau_2 - \tau_1) - (\tau_1 - \tau_0)] \\
&\quad + 2\lambda_{HP}[(\tau_3 - \tau_2) - (\tau_2 - \tau_1)](-2) \\
&\quad + 2\lambda_{HP}[(\tau_4 - \tau_3) - (\tau_3 - \tau_2)] \\
&= -y_2 + \lambda_{HP}\tau_0 - 4\lambda_{HP}\tau_1 + (6\lambda_{HP} + 1)\tau_2 - 4\lambda_{HP}\tau_3 + \lambda_{HP}\tau_4 \\
&= 0, \text{ luego:} \\
y_2 &= \lambda_{HP}\tau_0 - 4\lambda_{HP}\tau_1 + (6\lambda_{HP} + 1)\tau_2 - 4\lambda_{HP}\tau_3 + \lambda_{HP}\tau_4 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Nótese que llegamos hasta $\partial V / \partial \tau_2$ dado que el patrón se repite para $1 < t < T - 1$. Luego, faltan por calcular solo dos derivadas, con respecto a $T - 1$ y T. Sin embargo, se calcula con respecto a $T - 2$ para corroborar.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau_{T-2}} &= -2(y_{T-2} - \tau_{T-2}) + 2\lambda_{HP}[(\tau_{T-2} - \tau_{T-3}) - (\tau_{T-3} - \tau_{T-4})] \\
&\quad + 2\lambda_{HP}[(\tau_{T-1} - \tau_{T-2}) - (\tau_{T-2} - \tau_{T-3})](-2) \\
&\quad + 2\lambda_{HP}[(\tau_{T} - \tau_{T-1}) - (\tau_{T-1} - \tau_{T-2})] \\
&= -y_{T-2} + \lambda_{HP}\tau_{T-4} - 4\lambda_{HP}\tau_{T-3} + (6\lambda_{HP} + 1)\tau_{T-2} \\
&\quad - 4\lambda_{HP}\tau_{T-1} + \lambda_{HP}\tau_{T} \\
&= 0, \text{ luego:} \\
y_{T-2} &= \lambda_{HP}\tau_{T-4} - 4\lambda_{HP}\tau_{T-3} + (6\lambda_{HP} + 1)\tau_{T-2} \\
&\quad - 4\lambda_{HP}\tau_{T-1} + \lambda_{HP}\tau_{T} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Así, solo queda:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau_{T-1}} &= -2(y_{T-1} - \tau_{T-1}) + 2\lambda_{HP}[(\tau_{T-1} - \tau_{T-2}) - (\tau_{T-2} - \tau_{T-3})] \\
&\quad + 2\lambda_{HP}[(\tau_T - \tau_{T-1}) - (\tau_{T-1} - \tau_{T-2})](-2) \\
&= -y_{T-1} + \lambda_{HP}\tau_{T-3} - 4\lambda_{HP}\tau_{T-2} + (5\lambda_{HP} + 1)\tau_{T-1} - 2\lambda_{HP}\tau_T \\
&= 0, \text{ luego:} \\
y_{T-1} &= \lambda_{HP}\tau_{T-3} - 4\lambda_{HP}\tau_{T-2} + (5\lambda_{HP} + 1)\tau_{T-1} - 2\lambda_{HP}\tau_T \qquad (9) \\
\frac{\partial V}{\partial \tau_T} &= -2(y_T - \tau_T) + 2\lambda_{HP}[(\tau_T - \tau_{T-1}) - (\tau_{T-1} - \tau_{T-2})] \\
&= -2y_T + 2\tau_T + 2\lambda_{HP}\tau_{T-2} - 4\lambda_{HP}\tau_{T-1} + 2\lambda_{HP}\tau_T \\
&= -y_T + \lambda_{HP}\tau_{T-2} - 2\lambda_{HP}\tau_{T-1} + (\lambda_{HP} + 1)\tau_T \\
&= 0, \text{ luego:} \\
y_T &= \lambda_{HP}\tau_{T-2} - 2\lambda_{HP}\tau_{T-1} + (\lambda_{HP} + 1)\tau_T \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Nótese que lo anterior puede ser reescrito en forma matricial, a través de:

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{T-3} \\ y_{T-2} \\ y_{T-1} \\ y_T \end{pmatrix}}_{Y_t}
=
\left[\lambda_{HP}
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & & & & \cdots & & & & & & & 0 \\
-2 & 5 & -4 & 1 & 0 & & & \cdots & & & & & & & \vdots \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & \cdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\
0 & & & & & & & \cdots & & & & 0 & 1 & -2 & 1
\end{pmatrix}}_{F_t}
+
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 1 & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}}_{I_T}
\right]
\times
\underbrace{\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_{T-3} \\ \tau_{T-2} \\ \tau_{T-1} \\ \tau_T \end{pmatrix}}_{\tau_t}
$$

De lo anterior, se obtiene:

$$y_t = (\lambda_{HP} F_t + I_T)\tau_t \tag{11}$$

Si se despeja τ_t de (11), se llega a:

$$\tau_t = (\lambda_{HP} F_t + I_T)^{-1} y_t \tag{12}$$

Sea $\mathbb{F}$ un polinomio en función del operador rezago, tal que:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{HP,1<t<T-1}(L) &= [\lambda_{HP}L^2 - 4\lambda_{HP}L^1 + (6\lambda_{HP}+1)L^0 \\ &\quad -4\lambda_{HP}L^{-1} + \lambda_{HP}L^{-2}] \\ &= [\lambda_{HP}(1-L)^2(1-L^{-1})^2 + 1]\end{aligned} \tag{13}$$

Y definiendo $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{-1}$, es posible reescribir (11) y (12), respectivamente, como:

$$y_t = \mathbb{F}(L)\tau_t \tag{14}$$

$$\tau_t = \mathbb{G}(L)y_t \tag{15}$$

Nótese que, para pasar de (14) a (15), es necesario que las raíces se ubiquen por fuera del círculo unitario.

Propiedades del polinomio

- *Carácter recíproco de las raíces*: Dado que $\mathbb{F}(z)$ es simétrico, si z^* es una raíz, entonces $1/z^*$ también es una raíz.
  Nótese que, si:

$$\mathbb{F}(z^*) = [\lambda_{HP}(1-z^*)^2(1-1/z^*)^2+1] = 0$$

  Entonces,

$$\mathbb{F}(1/z^*) = [\lambda_{HP}(1-1/z^*)^2(1-z^*)^2+1] = \mathbb{F}(z^*) = 0$$

- *Carácter complejo de las raíces*: Para cualquier número real, z, $\mathbb{F}(z) > 0$. Luego, las raíces deben ser complejas. Por consiguiente, z^* y $1/z^*$ deben ser conjugados.

Las raíces del problema son los θ_i, para $i = 1, 2$, tales que:

$$\mathbb{F}(z) = \frac{\lambda_{HP}}{\theta_1 \theta_2}(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1}) \tag{16}$$

Donde $|\theta_i| < 1$, o el proceso no sería invertible. Además, como nos interesa $\mathbb{G}$, para determinar (15), reescribimos la ecuación y la descomponemos en sumas a través del método de fracciones parciales. Esto es:

$$\mathbb{G}(z) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda_{HP}} \underbrace{\frac{1}{(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1})}}_{\text{Término a descomponer}} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} 1 = {} & A_1(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1}) \\ & + A_2(1-\theta_1 z)(1-\theta_1 z^{-1})(1-\theta_2 z^{-1}) \\ & + A_3(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_2 z^{-1}) \\ & + A_4(1-\theta_1 z)(1-\theta_2 z)(1-\theta_1 z^{-1}) \end{aligned}$$

Sea $z = 1/\theta_1$, entonces:

$$1 = A_1(1-\theta_2/\theta_1)(1-\theta_1^2)(1-\theta_1\theta_2), \text{ sii}$$
$$A_1 = [(1-\theta_2/\theta_1)(1-\theta_1^2)(1-\theta_1\theta_2)]^{-1} \tag{18}$$

Análogamente, evauluando para $z = 1/\theta_2$, $z = \theta_1$ y $z = \theta_2$, se concluye que:

$$A_2 = [(1-\theta_1/\theta_2)(1-\theta_2^2)(1-\theta_1\theta_2)]^{-1} \tag{19}$$
$$A_3 = [(1-\theta_2/\theta_1)(1-\theta_1^2)(1-\theta_1\theta_2)]^{-1} \tag{20}$$
$$A_4 = [(1-\theta_1/\theta_2)(1-\theta_2^2)(1-\theta_1\theta_2)]^{-1} \tag{21}$$

Nótese que $A_1 = A_3$, $A_2 = A_4$ y, además, A_1 es el conjugado de A_2. Esto último se ve claramente reescribiendo la ecuación en coordenadas polares.