

Econometría Intermedia

Cointegración en modelos uniecuacionales

Julián David Rojas Aguilar

Universidad del Rosario
Facultad de Economía

Bogotá, D.C., 6 de mayo de 2022

Cuando dos (o más variables) están cointegradas, existe una relación estable y de largo plazo entre ellas. En otros términos, la relación de cointegración representa el **equilibrio** (o atractor) de **largo plazo**.

¿Qué sucede en la **demanda de dinero**? La teoría económica sugiere que la demanda de dinero (en términos nominales) debería:

- ser proporcional al nivel de precios.
- aumentar conforme incrementa el nivel de ingresos dado que el número de transacciones a su vez aumenta.
- disminuir conforme aumenta la tasa de interés, pues es el costo de oportunidad de tener dinero.

Por consiguiente, el modelo econométrico podría plantearse como:

$$m_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t + e_t, \text{ donde:} \quad (1)$$

- m : demanda de dinero.
- p : nivel de precios.
- y : nivel de ingresos (real).
- r : tasa de interés.
- e : término de perturbación (estacionario).

Así, para que tenga sentido económico la ecuación, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 > 0$, y $\beta_3 < 0$. Además, el hecho de que el residual sea estacionario garantiza que cualquier desviación en la demanda de dinero será temporal. En caso que el error tenga raíz unitaria, cualquier desviación se acumulará a través del tiempo y el mercado del dinero no llegará a un equilibrio.

La hipótesis de mercados eficientes afirma que el precio futuro de un activo debería ser igual al valor esperado del precio *spot* en el futuro. Luego, el tipo de cambio *forward* para un período adelante debería ser igual al precio *spot* esperado en el próximo período.

$$s_{t+1} = f_t + e_t, \text{ donde:} \quad (2)$$

- s_t : logaritmo del precio *spot* en el momento t .
- f_t : logaritmo del precio *forward* un período adelante en el momento t .

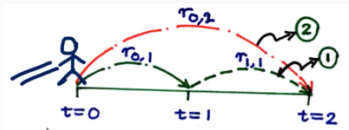
Si los agentes tienen expectativas racionales, el error de pronóstico de la tasa *spot* en el momento $t + 1$ tendrá media condicional cero.

Motivación Hipótesis de expectativas racionales sobre la estructura a término

Supuesto. Los bonos a diferentes maduraciones son perfectos sustitutos.

- Un inversor es indiferente entre invertir en bonos de corto o largo plazo¹.
- Si las tasas de corto plazo aumentan, las de largo plazo también aumentarán. Es decir, ¡las direcciones de movimiento deberían ser iguales!

Figura 1. Indiferencia en la inversión.



Si la brecha entre tasas de corto y largo plazo es, relativamente, grande a comparación de su relación de largo plazo, se puede esperar que aumente (disminuya) la tasa de interés de corto (largo) plazo. Por tanto, la representación del modelo de corrección de errores es tal que:

$$\begin{aligned} \Delta r_{St} &= \alpha_S (r_{Lt-1} - \beta r_{St-1}) + \varepsilon_{St} & \alpha_S > 0 \\ \Delta r_{Lt} &= -\alpha_L (r_{Lt-1} - \beta r_{St-1}) + \varepsilon_{Lt} & \alpha_L > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

¹En realidad, la literatura señala la existencia de una prima de liquidez y riesgos de reinversión, por lo cual los inversores no son indiferentes.

1 Motivación

2 **Introducción**

3 Metodología

- **Estadística.** Dos o más variables integradas de orden d están cointegradas si y solo si existe una combinación lineal de estas variables que es integrada de orden $d - 1$.
- **Economía.** En la medida en que generalmente se trabaja con variables integradas de primer orden, se suele trabajar con $d = 1$.
 - ◇ Por ejemplo, si x_t y y_t son $I(1)$ y existe un θ tal que $y_t - \theta x_t$ es $I(0)$, entonces x_t y y_t están cointegradas.
 - ◇ La cointegración entre variables indica que contienen la misma tendencia estocástica y, por tanto, esta puede ser eliminada al tomar una diferencia específica. ¡Por eso la combinación lineal es estacionaria!

1 Motivación

2 Introducción

3 Metodología

Recomendación

Antes de emplear la metodología, es necesario **pensar** en una relación económica de interés donde, posiblemente, exista una relación de largo plazo. Una vez se llega a una hipótesis sustentada en un argumento económico, es importante realizar una **revisión de literatura** para conocer los resultados de otros investigadores alrededor de la hipótesis. Una vez hecho lo anterior, ¿qué sugiere la metodología de Engle & Granger?

1. Determinar el orden de integración de las variables a través de **pruebas de raíz unitaria**.
2. Si las variables son integradas de primer orden, estimar por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) una regresión entre las variables en nivel, para, posteriormente, realizar pruebas de raíz unitaria sobre los residuales.
 - Dado que los residuales deben tener media cero, no hay necesidad de incluir intercepto en la prueba.
 - Como la secuencia de errores es estimada, no es posible emplear los valores críticos de Dickey-Fuller².
 - Si los residuales (no) son estacionarios, las series (no) están cointegradas.

Advertencia

Si las variables no están cointegradas y estimamos una regresión sobre el nivel, se incurre en una **regresión espúrea**. Esto implica que, al estimar el modelo de regresión, el residual no será estacionario y el estimador será inconsistente.

3. Si las variables están cointegradas, puede estimarse la regresión en niveles.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t \quad (4)$$

- Nótese que, si bien el estimador de $\hat{\beta}_1$ es consistente, no es posible realizar inferencia alrededor de este dado que no distribuye normal.
- Si se desea inferir estadísticamente, se debe incluir rezagos de la variable regresora diferenciada –y la cantidad de rezagos puede determinarse a través de algún criterio de información–.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \varphi_1 \Delta z_{t-1} + \cdots + \varphi_p \Delta z_{t-p} + u_t \quad (5)$$

- Sin embargo, ¡la opción que nos es de interés es estimar un Modelo de Corrección de Errores (ECM), dado que nos permite incorporar las relaciones tanto de corto como de largo plazo!

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 (y_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}) + \sum_{i=1} \beta_i \Delta y_{t-1} + \sum_{i=0} \theta_i \Delta z_{t-i} + u_t \quad (6)$$

Nótese que:

- ◇ $y_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}$ corresponde a la desviación del equilibrio de largo plazo en $t - 1$, y el ajuste realizado depende de la magnitud del desequilibrio observado. Estamos en equilibrio cuando $y_{t-1} = \beta_1 z_{t-1}$.
- ◇ α_1 es la velocidad de ajuste, la cual permite que se dé la corrección del error.

4. Una vez estimado el modelo³, realizar la validación de supuestos sobre el modelo de corrección de errores. El más importante implica los **residuales** deben comportarse como un **ruido blanco**.

²La estimación minimiza los residuales al cuadrado, por lo cual la varianza es la menor posible y, por ello, se sesga la prueba hacia errores estacionarios.

³Con el fin de extraer la mayor cantidad posible de señales de la información disponible, es preferible estimar el modelo de corrección de errores, pues la trayectoria en el tiempo está en función de desviaciones del equilibrio de largo plazo. Sin embargo, y como se mencionó previamente, otros modelos a su vez son válidos.

¡Gracias por su atención!
¿Dudas o sugerencias?