Econometría Intermedia
Cointegración en modelos multiecuacionales

Julián David Rojas Aguilar

Universidad del Rosario
Facultad de Economía

Bogotá, D.C., 16 de mayo de 2022

Motivación

¿Qué sucede con las propiedades de la estimación vía Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) cuando las variables son no-estacionarias?

- Los modelos suelen arrojar resultados significativos pero, a la luz de la teoría económica, no tienen sentido. En otras palabras, ¡tenemos una regresión espúrea!
- La no-estacionariedad de las variables se transmite hacia los residuales –y, por tanto, los resultados estándar de MCO no se mantienen–, ¡a menos que exista una relación de cointegración!

Un vector de series, $\{y_t\}$, está cointegrada de orden $(d, b), d > b > 0$ sii:

- el vector de series está integrado de orden d.

$$y_t \sim I(d) \tag{1}$$

- existe una combinación lineal de estas variables que es integrada de menor orden.

$$\exists \beta \neq 0, \text{ tal que } \beta' y_t \sim I(d-b) \tag{2}$$

Supóngase que x_t y z_t están cointegradas de orden $(1,1)$ –o, lo que es lo mismo, $\sim CI(1,1)$–, y que el vector de coingregración se encuentra representado por $\left[\beta_1^*, \beta_2^*\right]'$, es decir:

$$\beta_1^* x_t + \beta_2^* z_t \sim I(0) \tag{3}$$

Normalizando por z_t, se tiene:

$$x_t - \beta_1 z_t \sim I(0) \text{ ó } x_t = \beta_1 z_t + u_t, \text{con } u_t \sim I(0), \beta_1 = -\beta_2^* / \beta_1^* \tag{4}$$

Así mismo, en un modelo de corrección de errores, los cambios de la variable dependen de las desviaciones de las relaciones del equilibrio, por lo que:

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \alpha_1 \left(z_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}\right) + u_{1t} \\ \Delta z_t &= \alpha_2 \left(z_{t-1} - \beta_1 x_{t-1}\right) + u_{2t} \end{aligned} \tag{5}$$

Y, en una configuración más general, los cambios de las variables dependen, adicionalmente, de cambios anteriores:

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \alpha_1 \left(x_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}\right) + \gamma_{11,1} \Delta x_{t-1} + \gamma_{12,1} \Delta z_{t-1} + u_{1t} \\ \Delta z_t &= \alpha_2 \left(x_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}\right) + \gamma_{21,1} \Delta x_{t-1} + \gamma_{22,1} \Delta z_{t-1} + u_{2t} \end{aligned} \tag{6}$$

Nótese que la ecuación anterior,

$$\Delta x_t = \alpha_1 (x_{t-1} - \beta_1 z_{t-1}) + \gamma_{11,1} \Delta x_{t-1} + \gamma_{12,1} \Delta z_{t-1} + u_{1t} \tag{7}$$

$$\underbrace{\Delta z_t}_{I(0)} = \alpha_2 \underbrace{(x_{t-1} - \beta_1 z_{t-1})}_{I(0)} + \gamma_{21,1} \underbrace{\Delta x_{t-1}}_{I(0)} + \gamma_{22,1} \underbrace{\Delta z_{t-1}}_{I(0)} + \underbrace{u_{2t}}_{I(0)} \tag{8}$$

Puede reescribirse mediante una notación matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Z_t \end{bmatrix}}_{\Delta Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\alpha} \underbrace{[1, -\beta_1]}_{\beta'} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix}}_{y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11,1} & \gamma_{12,1} \\ \gamma_{21,1} & \gamma_{22,1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta z_{t-1} \\ \Delta x_{t-1} \end{bmatrix}}_{\Delta y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}}_{u_t} \tag{9}$$

Que, en términos simples, es:

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + u_t \tag{10}$$

Y, si generalizamos la ecuación (10) con p rezagos, se concluye que:

$$\Delta y_t = \underbrace{\alpha \beta'}_{\Pi} y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t \tag{11}$$

A diferencia de la prueba de Engle y Granger para modelos uniecuacionales, la prueba de Johansen y Juselius permite determinar más de una relación de cointegración. En este sentido, la segunda prueba se realiza sobre los modelos $\text{VEC}_k(p)$.

$$\Delta y_t = \Pi_0 y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t, \tag{12}$$

donde $\text{Rango}(\Pi_0)$ es el número de vectores de cointegración o, lo que es lo mismo, el número de relaciones de largo plazo. Para su determinación, puede emplearse el estadístico de:

1. la traza.

$$\begin{aligned} H_0 &: r(\Pi_0) = r \\ H_a &: r(\Pi_0) > r \end{aligned} \tag{13}$$

2. el valor propio.

$$\begin{aligned} H_0 &: r(\Pi_0) = r \\ H_a &: r(\Pi_0) = r + 1 \end{aligned} \tag{14}$$

En ambos casos, la evaluación se realiza de forma secuencial (para $r = 1, 2, \ldots, k$) hasta que no se rechace. El primer no-rechazo obtenido es empleado como un estimador de r.

A manera de **advertencia**, es importante señalar que, al igual que en las pruebas de raíz unitaria, los valores críticos de la prueba de cointegración varían dependiendo de los componentes determinísticos incluidos en el modelo VEC.

- Sin componentes determinísticos.
- Intercepto en los vectores de cointegración y no componentes en el modelo VAR.

$$\Delta y_t = \Pi_0 y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t \tag{15}$$

- Intercepto en VC e intercepto en VAR.
- Intercepto y tendencia en VC e intercepto en VAR.
- Intercepto y tendencia en VC e intercepto y tendencia en VAR.

$$\Delta y_t = \mu_1 + \mu_2 t + \alpha (\beta^\star)' \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t \tag{16}$$

- Si las variables del modelo VAR son $I(0)$, se estima un modelo VAR sobre los niveles.
- Si las variables del modelo VAR son $I(1)$ y no están cointegradas, se estima un modelo VAR sobre las series diferenciadas.
- Si las variables del modelo VAR son $I(1)$ y están cointegradas, se estima un modelo VEC.

El modelo VEC se puede ver como un VAR sobre las series diferenciadas que incluye un término adicional relacionado con el largo plazo. Por lo tanto, las siguientes etapas de modelación se desarrollan en forma similar a las realizadas para un modelo VAR:

- Diagnóstico.
- Pronóstico.
- Análisis de impulso-respuesta.

Así mismo, es necesario señalar que el proceso de estimación es más complicado y, por tanto, Johansen y Juselius sugieren realizarlo utilizando métodos de máxima verosimilitud.

¡Gracias por su atención!

¿Dudas o sugerencias?